PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 3
Strani 154–156

Nada Razpet in Danica Mati:

DVE PALICI Z ENAKIMA SENCAMA

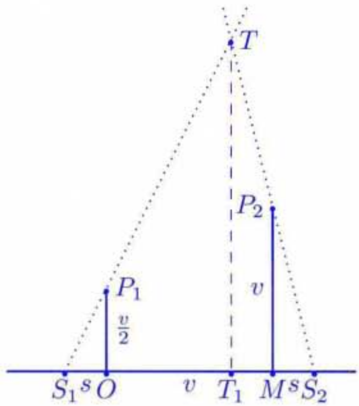
Ključne besede: matematika, geometrija, podobni trikotniki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1373-Razpet-Mati.pdf

DVE PALICI Z ENAKIMA SENCAMA

Se spominjate stare taborniške naloge o merjenju višine droga? Glasi se takole: Imamo pokonci postavljen drog za zastavo, palico in merilni trak. Zmaga tisti, ki najhitreje izmeri dolžino droga. Prebrisani novinec postavi pokonci palico, zaznamuje, kje je 1 m nad zemljo, izmeri dolžino sence tega dela palice in dolžino sence droga ter hitro izračuna dolžino droga.

Ali vedno različno dolge navpične palice mečejo različno dolge sence? Odgovor je pritrdilen le, če merimo dolžine sence takrat, ko so svetlobni žarki, ki padajo na palice, med seboj vzporedni (in je podlaga seveda vodoravna). To je takrat, ko je svetilo zelo daleč, oziroma, če je svetilo Sonce. Kaj pa, če svetilo ni daleč stran? Poglejmo si naslednjo nalogo (slika 1).



Slika 1.

Dve palici zabodemo navpično v zemljo tako, da ima prva višino v in druga višino $v/2$ ter da sta v razdalji v. Če je podlaga vodoravna, lahko opazujemo senci, ki ju mečeta palici. Kam moramo v ravnini palic postaviti svetilo, da bosta senci na nasprotnih straneh palic in da bosta enako dolgi?

Narišimo skico in opazujmo, po kakšni krivulji se giblje točka T, v kateri je svetilo, ko se dolžini senc (s) daljšata (krajšata).

Nalogo lahko rešimo vsaj na dva načina.

Prvi način

Koordinatni sistem izberemo tako, da je os x kar na podlagi, os y pa vzdolž krajše palice. Pri oznakah kot na sliki, leži točka T na presečišču premice $p(S_1, P_1)$ in premice $p(S_2, P_2)$.

Iz enačb teh dveh premic

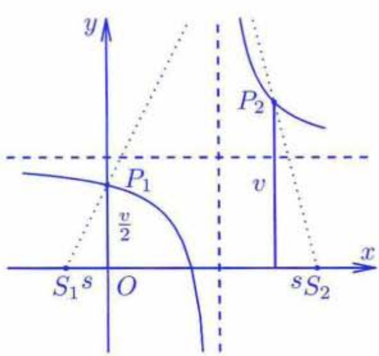
$$y = \frac{v}{2s}(x+s)$$
$$y = -\frac{v}{s}(x-v-s)$$

izločimo parameter s in dobimo enačbo krivulje, po kateri se giblje točka T (oziroma naše svetilo):

$$y = \frac{v(2x-v)}{3x-2v}\,.$$

To je enačba enakoose hiperbole, ki ima asimptoti

$$x = \frac{2}{3}v \quad \text{in} \quad y = \frac{2}{3}v\,.$$



Slika 2.

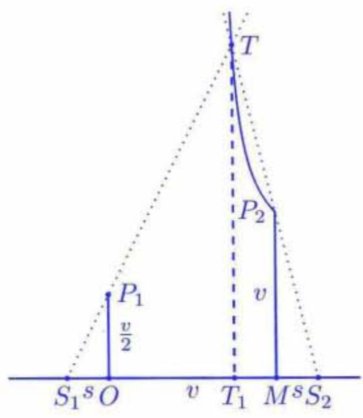
Ali točka T opiše vso hiperbolo? Poglejmo na poskus s praktičnega stališča. Svetilka mora biti višje kot zgornja konca palic, torej $y > v$, in med podaljškoma obeh palic ($0 < x < v$), saj sicer ne bi mogli dobiti senc na nasprotnih straneh. To pomeni, da je

$$\frac{v(2x-v)}{3x-2v} > v \ \text{ in zato } \ \frac{v-x}{3x-2v} > 0\,.$$

Ker je $0 < x < v$, mora biti $3x - 2v > 0$ in končno

$$\frac{2}{3}v < x < v\,.$$

To pa pomeni, da je krivulja, po kateri se giblje svetilo, le del desne veje hiperbole, kot kaže slika 3, seveda brez točke P_2, ki je teme desne veje hiperbole.



Slika 3.

Drugi način

Obdržimo koordinatni sistem tak, kot je bil v prvem primeru, in izberimo dolžino v za enoto. Na sliki 1 opazimo podobne trikotnike:

$$\triangle TT_1S_1 \sim \triangle P_1OS_1$$
$$\triangle TT_1S_2 \sim \triangle P_2MS_2\,.$$

Iz primerjav dolžin stranic sledi:

$$\frac{y}{x+s} = \frac{1}{2s}$$
$$\frac{y}{1-x+s} = \frac{1}{s}\,.$$

Enačbi preuredimo:

$$2sy = x + s$$
$$sy = 1 - x + s$$

in izrazimo s (dolžino sence) z x in $\frac{1}{s}$ z y:

$$s = 3(x - \frac{2}{3})$$
$$\frac{1}{s} = 3(y - \frac{2}{3})\,.$$

Od tod sledi

$$(x - \frac{2}{3})(y - \frac{2}{3}) = \frac{1}{9}\,.$$

Faktorja na desni strani dobljene enačbe sta pozitivna (enaka sta $\frac{s}{3}$ in $\frac{1}{3s}$, kjer je s dolžina sence) in sta zato razdalji točke T od premic $x = \frac{2}{3}$ in $y = \frac{2}{3}$. Enačba pove, da je produkt teh razdalj konstanten, ne glede na izbor točke T. Krivulja, ki ima lastnost, da je produkt razdalj poljubne njene točke od dveh premic (asimptot) konstanten, je hiperbola. Upoštevati moramo le tisti del hiperbole, kjer sta izraza $x - \frac{2}{3}$ in $y - \frac{2}{3}$ pozitivna in ki leži med obema palicama.

Nada Razpet, Danica Mati

Vprašanje za bralce: Ali je odgovor bistveno drugačen, če sta palici poljubnih dolžin in na poljubni oddaljenosti druga od druge?