Retrogradno gibanje

↓↓↓
Vid Kavčič
→

Uvod

Telesa v našem Osončju, to so planeti, pritlikavi planeti, kometi, asteroidi in ostala telesa, se gibljejo okoli Sonca. Če Osončje pogledamo iz smeri nad Sončevim severnim polom, se večina teles giblje v nasprotni smeri urinih kazalcev, nekatere izjeme pa v smeri, enaki gibanju urinih kazalcev. Za prve od teh pravimo, da je njihovo pravo gibanje **progradno**, izjeme pa se gibljejo **retrogradno**.

Skoraj vsi planeti Osončja (Merkur, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun) se gibljejo okoli svoje osi progradno, izjema je Zemljina dvojčica Venera, ki se okoli svoje osi edina giblje retrogradno. Toda prav vsi planeti se gibljejo progradno po svojih tirnicah okoli Sonca.

Predstavljajmo si, da sredi neke jasne noči na nebu opazujemo rdeči planet **Mars**. Ker se tako naša modra Zemlja kot tudi Mars okoli Sonca gibljeta progradno in je kotna hitrost Zemlje okoli Sonca večja od Marsove, gre sklepati, da se Mars na našem nebu glede na zvezde pomika v smeri vzhoda. Pomika se in pomika, vzhodno in še bolj vzhodno, po nekem času pa bo naredil polni obhod, čez nekaj časa še enega, potlej še enega ... Vse se zdi prav enostavno, a le na prvi pogled. Zmoti nas Marsovo nadvse čudno vedenje. Opazimo ga, če pod nebesnim svodom preživimo mnogo dni, veliko enostavneje pa lahko njegovo nenavadno vedenje razberemo s slike 1.

Mars se očitno do neke točke giblje povsem običajno v smeri vzhoda, nakar se začne premikati v nasprotno stran – v smer zahoda, čez čas pa si premisli in svojo pot kot prej ponovno nadaljuje v smeri vzhoda.

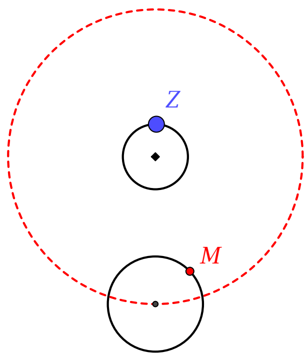
Navideznemu gibanju planeta v nasprotni smeri gibanja ostalih teles v Osončju pravimo **navidezno retrogradno gibanje**. Ker je le-to za nas na tem mestu veliko zanimiveje od pravega retrogradnega gibanja, bomo sedaj z besedno zvezo retrogradno gibanje mislili na navidezno retrogradno gibanje. Za opazovalca na Zemlji je retrogradno gibanje predvsem gibanje zunanjih planetov, ki so od Sonca oddaljeni bolj kot Zemlja.

SLIKA 1.
Zanimanja vreden posnetek Marsovega vedenja

Retrogradno gibanje je za astronome sicer zelo zanimiv pojav. Pred davnimi časi so še verjeli, da je Zemlja središče vesolja, v veljavi je bil t. i. geocentrični sistem. Ko so hoteli na podlagi tega modela utemeljiti retrogradno gibanje, so s težavo ugotovili, da vsak planet, ki kroži okoli Zemlje, še posebej kroži okoli navidezne točke na svoji orbiti, kot prikazuje slika 2.

Kopernik je šele na prehodu iz 15. v 16. stoletje utemeljil svojo heliocentrično teorijo, ki upošteva, da se planeti in ostala telesa gibljejo okoli Sonca in ne Zemlje. Tedaj je bilo potrebno poiskati novo razlago za retrogradno gibanje planetov. Kaj se zares zgodi? Odgovor na to vprašanje še najbolje razkriva slika 3, ki prikazuje resnično gibanje Zemlje in Marsa ter navidezno gibanje Marsa na nebesni sferi.

Gibanje nekega zunanjega planeta je torej retrogradno v času, ko ga Zemlja *prehiteva*, kar pa se dogaja v času okoli **opozicije**. Kar hitro pa se pojavi →



SLIKA 2.
Tako so skušali retrogradno gibanje pojasniti z geocentričnim sistemom. Zemlja se giblje po majhni krožnici okoli *središča vesolja*. Mars kroži okoli navidezne točke, ki pa se premika po rdeči tirnici okoli središča vesolja.

vprašanje, koliko časa retrogradno obdobje sploh traja. Vsekakor bi to lahko ugotovili ob nekaj dnevnem druženju z našim rdečim prijateljem, pa vendar bi bilo verjetno hitreje in morda tudi bolj zanimivo, da bi trajanje retrogradnega gibanja kar izračunali. Poskusimo torej!

Čas retrogradnega gibanja

Za začetek narišemo dovolj verodostojno skico in skušamo opisati lego Zemlje in Marsa v odvisnosti od časa t.

Predpostavimo, da sta orbiti Zemlje in Marsa krožni in da ležita v isti ravnini. V to ravnino postavimo pravokotni koordinatni sistem s središčem v Soncu in abscisno osjo skozi zveznico Sonce, Zemlja, Mars v času opozicije Marsa, torej ko ležijo kolinearno.

Za planeta Zemljo in Mars napišemo koordinate v odvisnosti od časa. Pri tem upoštevamo, da je kot $\varphi = \omega \cdot t$. V enačbah je d oddaljenost posameznega planeta od Sonca in ω kotna hitrost posameznega planeta.

Za Zemljo pišemo

$$x_\oplus = d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t),$$
$$y_\oplus = d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t),$$

zelo podobno tudi za Mars

$$x_♂ = d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t),$$
$$y_♂ = d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t).$$

Opazovali bomo smerni količnik zveznice Zemlja-Mars. Med progradnim gibanjem Marsa se le-ta veča, med retrogradnim pa manjša. Zato s pomočjo že dobljenih zvez zapišimo izraz za ta smerni količnik k v odvisnosti od časa t.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_♂ - y_\oplus}{x_♂ - x_\oplus} = \frac{d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t)}{d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)} \quad (1)$$

Spreminjanje kotnega količnika $k(t)$ grafično prikazuje slika 5.

Zanimata nas lokalna ekstrema tega količnika; čas med trenutkom enega in drugega je namreč čas retrogradnega gibanja.

Zato moramo k odvajati in odvod izenačiti z 0. Ker nas zanimajo lokalni ekstremi, je dovolj, da ugotovimo, kdaj je števec odvoda enak nič.

Označimo števec in imenovalec k-ja:

$$a = d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t),$$
$$b = d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t).$$

Zaradi preglednosti najprej odvajamo posebej a in b. Pri tem uporabimo pravili za posredno odvajanje kotnih funkcij sinusa in kosinusa, ki sta tudi posebej navedeni v dodatku.

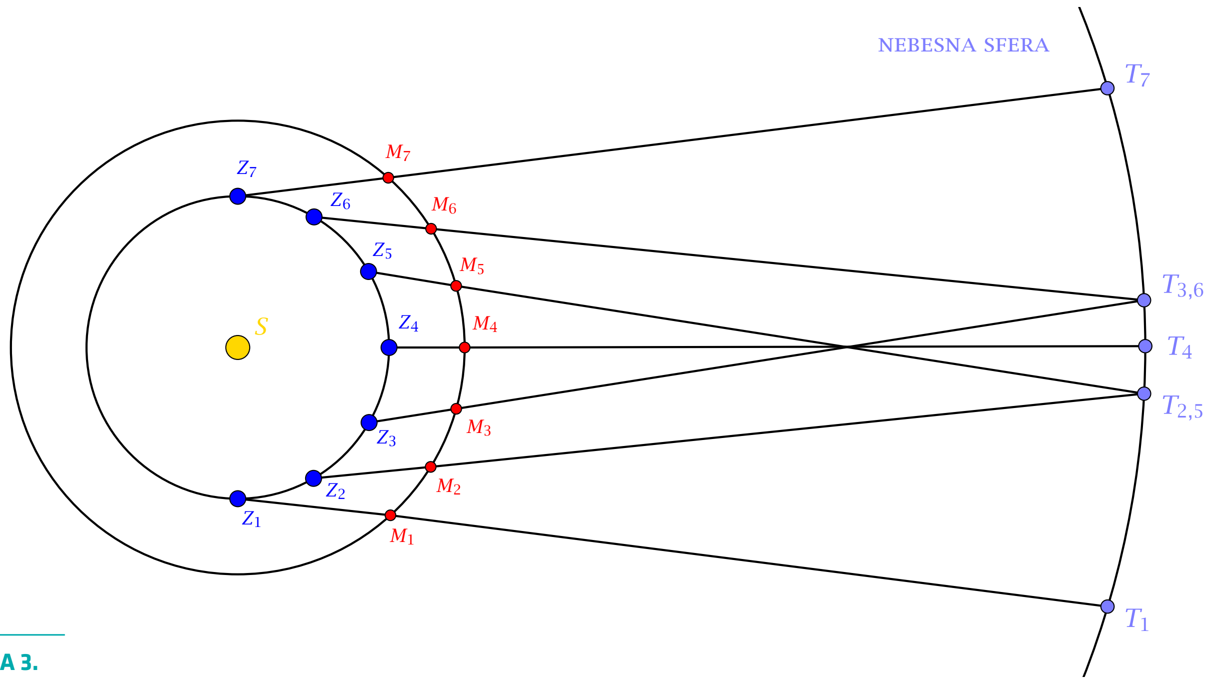
$$a' = \omega_♂ d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - \omega_\oplus d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)$$
$$b' = \omega_\oplus d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t) - \omega_♂ d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t).$$

Po pravilu za odvajanje količnika je števec odvoda enak nič, ko velja

$$a'b - ab' = 0$$
$$a'b = ab' \quad (2)$$

V (2) vstavimo izraze za a, a', b in b' ter z uporabo zvez med kotnimi funkcijami in adicijskega izreka za kosinus razlike, navedenimi v dodatku, dobimo zvezo

$$\cos((\omega_♂ - \omega_\oplus)t) = \frac{\omega_♂ d_♂^2 + \omega_\oplus d_\oplus^2}{d_\oplus d_♂ \cdot (\omega_\oplus + \omega_♂)}. \quad (3)$$



SLIKA 3.
Skica, ki nazorno razloži retrogradno gibanje. Z rumenim S je označeno Sonce, najmanjša krožnica je Zemljina tirnica, sledi ji Marsova tirnica. Označenih je sedem zaporednih položajev Zemlje in Marsa, ki so v časovnem razmiku okoli enega meseca. Krožni lok na desni strani predstavlja nebesno sfero (na videz nepremično ozadje daljnih zvezd), na kateri so s T_i označene projekcije zveznice Z_iM_i v položaju i, ki so pravzaprav tisto, kar vidimo na nebu. Na sferi se tako Mars iz T_1 premakne v točko $T_{2,5}$, potlej v $T_{3,6}$, sledi položaj opozicije T_4, nato pa se Mars zopet premakne v $T_{2,5}$, nadalje pa spet v $T_{3,6}$ in potem v T_7.

Dobimo dve družini rešitev

- $$t_1 = \arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_{\oplus} d_{\oplus}^2}{d_{\oplus} d_{♂} \cdot (\omega_{\oplus} + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_{\oplus}} + K \cdot 360^\circ,$$
  $$t_2 = -\arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_{\oplus} d_{\oplus}^2}{d_{\oplus} d_{♂} \cdot (\omega_{\oplus} + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_{\oplus}} + K \cdot 360^\circ.$$

Čas retrogradnega gibanja izrazimo kot

- $$\Delta t = t_1 - t_2 = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_{\oplus} d_{\oplus}^2}{d_{\oplus} d_{♂} \cdot (\omega_{\oplus} + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_{\oplus}}. \tag{4}$$

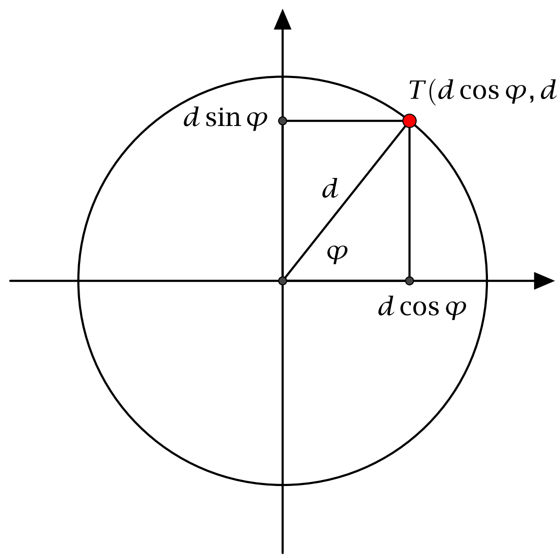
Na spletu najdemo natančne podatke oziroma te izračunamo; v enačbo (4) vstavimo $d_{\oplus} = 1$ *a.e.*, $d_{♂} \doteq 1{,}524$ *a.e.*, $\omega_{\oplus} \doteq 0{,}986\ ^\circ/\text{dan}$, $\omega_{♂} \doteq 0{,}524\ ^\circ/\text{dan}$.

Dobimo $\Delta t = 72{,}72$ dni, kar se lepo sklada s podatkom 72 dni, ki ga dobimo v viru [1]. Razlog za odstopanje utegnejo biti nekolikšna sploščenost in medsebojna nagnjenost (inklinacija) orbit obeh planetov, privzeli smo namreč, da sta orbiti planetov krožni in da krožita v isti ravnini.

Zdaj pa bralca vabim, da se preizkusi v spodnjih bolj ali manj trdih astronomskih orehih.

Naloge bralcu

- Koliko časa traja retrogradno gibanje Jupitra? Veš le, da je Jupiter od Sonca oddaljen okoli 5,2 *a.e.*, njegov obhodni čas okoli Sonca pa je 11,86 leta.
- Čeprav je Merkur notranji planet, lahko tudi pri njem opazimo retrogradno gibanje. Koliko časa traja obdobje retrogradnega Merkurja? Veš le, da je Merkur od Sonca oddaljen približno 0,39 *a.e.*
- Čezvesoljska zombi ladja obišče pritlikavi planet Ceres. Zombija Miho zanima, koliko časa na njihovi postojanki traja retrogradno gibanje Saturna.



SLIKA 4.
Dovolj verna skica, s katero opišemo koordinate posameznega planeta v odvisnosti od časa.

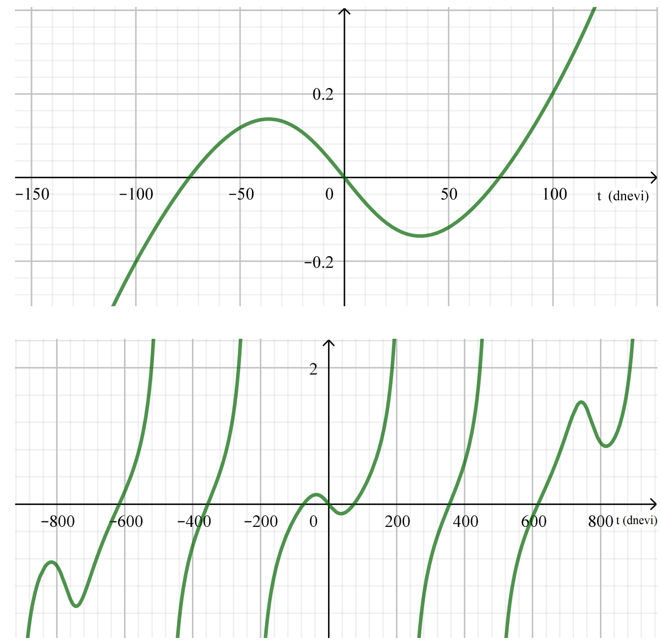
Pomagaj Mihi potešiti njegovo zombi radovednost! Pri tem si lahko pomagaš le s podatkoma, da je Ceres, ko je glede na Zemljo v (zgornji) konjunkciji, od Zemlje oddaljen približno 3,77 *a.e.*, in da Saturn za obhod Sonca potrebuje 10365 dni več kot Ceres.

- Jupiter je bil v opoziciji 10. junija 2019. Kdaj se je oziroma se bo po tem datumu pričel zopet gibati retrogradno? Veš, da je navidezna magnituda Jupitra na Zemlji v času opozicije $-2{,}7$, v času konjunkcije pa $-1{,}85$.
- Izrazi čas retrogradnega gibanja planetov kot funkcijo obhodnih časov dveh planetov.

Dodatek

V tem razdelku pojasnimo nekaj zvez v povezavi z odvodom in kotnimi funkcijami, ki jih uporabimo v rešitvi.

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- $\sin'(ax) = a\cos(ax)$
- $\cos'(ax) = -a\sin(ax)$
- $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$



SLIKA 5.
Zgoraj: Spreminjanje smernega količnika k v času retrogradnega gibanja.
Spodaj: Vidimo, da se v časovnem intervalu, ki ga prikazuje graf, retrogradno obdobje dogodi trikrat.
Grafa odvisnosti smernega količnika zveznice Zemlja-Mars v odvisnosti od časa $k(t)$. Časovna enota je dan. Če smo prebrisani, lahko čas retrogradnega gibanja približno odčitamo tudi iz grafov.

Literatura

[1] *Apparent retrograde motion, Wikipedia*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Apparent_retrograde_motion`, ogled: 13. 3. 2020.

[2] *Vzvratno gibanje, Wikipedija*, dostopno na `sl.wikipedia.org/wiki/Vzvratno_gibanje`, ogled: 13. 3. 2020.

[3] *What is retrograde motion, EarthSky*, dostopno na `earthsky.org/space/what-is-retrograde-motion`, ogled: 21. 3. 2020.

× × ×