

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 2

Strani 98-108

Tomaž Pisanski:

MREŽE TELES IN LOGO

Ključne besede: matematika, geometrija, računalništvo, telo, logo, rekurzivni program, mreža.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/17/974-Pisanski.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

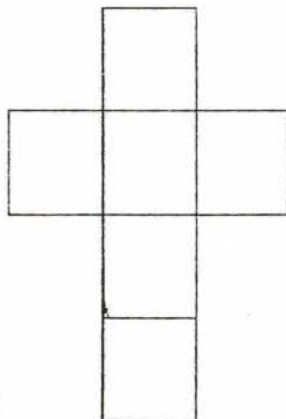
© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

MREŽE TELES IN LOGO

Pred nekaj leti sem v Londonu kupil knjigo *Mathematical Models*, ki sta jo leta 1951 napisala H.M. Cundy in A.R. Rollet in je leta 1981 pri založbi Tarquin Publications doživela tretjo izdajo. V njej so me pritegnila navodila za sestavo papirnatih modelov raznih zanimivih poliedrov. Med njimi so na primer pravilna telesa: tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder.

Verjetno je bralcu dobro znana mreža kocke, ki jo prikazuje slika 1.



Slika 1. Običajna mreža kocke

Kocka

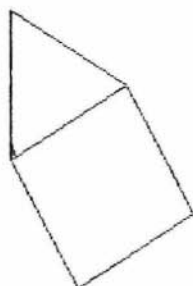
Če iz papirja izrežemo mrežo telesa, jo s prepogibanjem vzdolž notranjih črt (povezav) lahko preoblikujemo v polieder. Ker sem po naravi len in me natančno risanje z ravnilom in šestilom ter kotomerom utruja, sem se odločil, da si bom z računalnikom narisal mreže nekaterih teles in jih nato uporabil pri konstrukciji modelov. Med jeziki, ki so na razpolago, se mi je zdel za ta podvig najprimernejši logo.

Zaradi težavnosti problema sem se omejil na telesa, ki imajo vse robove enake dolžine in katerih vsa lica (stranske ploskve) so pravilni mnogokotniki. S tem so seveda odpadla zanimiva "zvezdna" telesa, ki nimajo konveksnih lic. O njih je Presek že pisal. Najprej sem se moral odločiti za predstavitev mrež v računalniku. Ker je kljub poenostavljenemu problemu izbrana rešitev precej zamotana, za samo razumevanje tega prispevka pa ni nujno, da bi jo bralec v celoti dojel, jo tukajle prikazujem le na zgledih. Na sliki 2 so prikazane nekatere ravninske mreže, ki pa predstavljajo le dele teles. Ob vsaki mreži je prikazana tudi njena predstavitev, ki jo določajo oglati oklepaji. Na obodu mreže izberemo

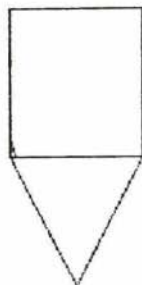
osnovnico. Mreža z izbrano osnovnico ima natančno določeno predstavitev. Tako sta na primer $[[] [] [] []]]$ in $[[[] [] []]]]$ predstavitvi mreže, ki jo dobimo, če zlepimo trikotnik in kvadrat. Razlika je le v izbiri osnovnice. Ker ima ta mreža pet stranic na obodu, obstaja zanj pet predstavitev.



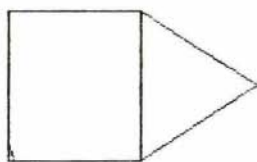
$[[[] [] [] []]]$



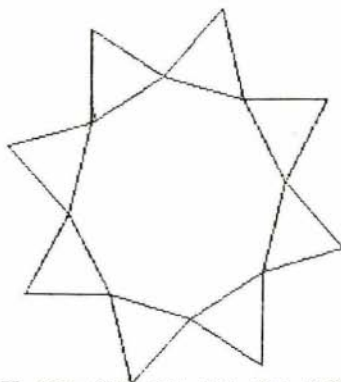
$[[[[] []]]]]$



$[[[] [] [[]]]]$



$[[[[] []]]]$



$[[[[[] []]] [[] []]] [[] []] [[] []] [[] []] [[] []]]]$

Slika 2. Ravninske mreže in njihova predstavitev (zapis v računalniku).
Ravninska mreža je splošnejši pojem od mreže površine telesa.

Najprej sem napisal nekaj programov za risanje ravninskih mrež. Bralca, ki ima na razpolago logo vabim, da programe preizkusi. Programi so napisani za Atarijev logo, ne bo pa jih težko prevesti v drugačne različice loga.

TO R :S	... riše mrežo s predstavivijo :S
TO RIS :S	... riše mrežo
TO RISO :S	... pomožni program za risanje mreže
TO KOT :N	... kot pri :N-kotniku
TO S :K	... dolžina stranice
TO BESEDILO :B	... Napiše besedilo :B pod sliko
TO RB :S	... Nariše sliko z besedilom vred
TO OSNOVNICA	... S puščico označi osnovnico

TO BESEDILO :B	TO RISO :S :N
PU	RT KOT :N
SETPOS [-300 -150]	IF EMPTY :S [STOP]
SETTEXT 4	PU FD :KORAK RT 180 PD
PD	RIS FIRST :S
TT :B	RT 180
SETTEXT 0	RISO BF :S :N
END	END

TO R :S	TO OSNOVNICA
CS	FD 10
HT	RT 160
OSNOVNICA	FD 10
RIS :S	BK 10
END	LT 160
	BK 10
	END

TO RIS :S	
FD :KORAK	
IF EMPTY :S [BK :KORAK S	TO KOT :N
RISO :S 1 +COUNT :S	OP 360 / :N
END	END

TO RB :S :B	TO S :K
R :S	MAKE "KORAK :K
BESEDILO :B	END
END	

Slika 3. Mrežo narišemo s programom RB, ki zbriše zaslon, nariše mrežo in na njej označi osnovnico, pod sliko pa napiše še ustrezno besedilo. Če pa je mreža le del slike, jo lahko narišemo s programom RIS. Pred tem moramo s programom S določiti dolžino stranice.

Ker je "peš" težko konstruirati zamotane mreže, sem izdelal še nekaj osnovnih programov za sestavljanje mrež. Najprej pa točno povejmo, kaj je ravninska mreža. Definiramo jo takole:

Ravninsko mrežo lahko dobimo na dva načina.

(1) Lahko je pravilni n -kotnik.

(2) Lahko pa jo dobimo tako, da zlepimo dve stranici na obodu dveh ravninskih mrež.

Ravninsko mrežo smo definirali samo s seboj. Taki definiciji pravimo induktivna ali rekurzivna definicija. Stranice na obodu so ravno tiste stranice mreže, ki jih še nismo uporabili pri lepljenju. Zdaj vemo, katere programe za konstrukcijo mrež potrebujemo. Potrebujemo program, ki sestavi mrežo pravilnega mnogokotnika. Potrebujemo pa tudi program, ki lepi dve mreži. To pa še ni vse. Če ne želimo lepiti mrež vzdolž trenutnih osnovnic, potrebujemo še program, ki "premakne" osnovnico. To pomeni, da namesto izbrane osnovnice izbere sosednjo stranico na obodu mreže.

TO DG :S :T ... zlepi mreži :S :T vzdolž izbrane osnovnice
 TO LG :S :T ... zlepi mreži :S :T vzdolž izbrane osnovnice
 TO D :S ... osnovnico mreže :S premakne za eno v desno
 TO L :S ... osnovnico mreže :S premakne za eno v levo
 TO N :N ... sestavi mrežo pravilnega :N-kotnika.

```

TO DG :S :T
IF EMPTY :S [OP :T]
IF EMPTY :T [OP :S]
OP DG FIRST :S LPUT :T BF :S
END

TO LG :S :T
IF EMPTY :S [OP :T]
IF EMPTY :T [OP :S]
OP LG FPUT :S BL :T LAST :T
END

TO D :S
IF EMPTY :S [OP []]
OP LG FPUT [] BL :S LAST :S
END

TO N :N
IF :N = 1 [OP []]
OP FPUT [] N :N - 1
END

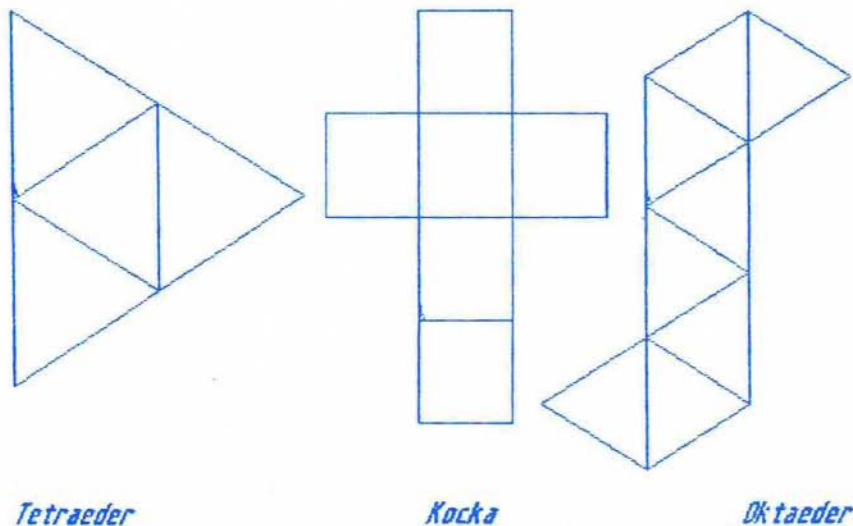
TO L :S
IF EMPTY :S [OP []]
OP LG FPUT [] BL :S LAST :S
END

```

Slika 4. Osnovni programi za konstrukcijo ravninskih mrež.

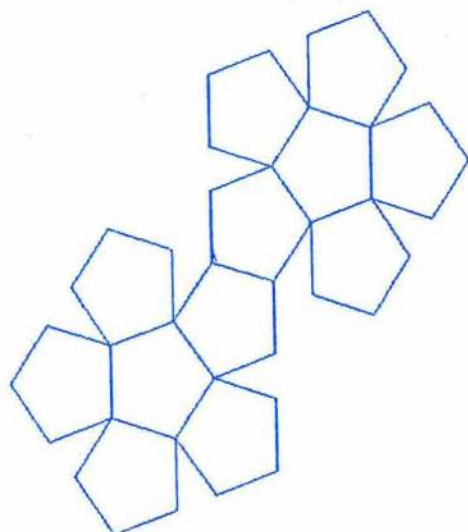
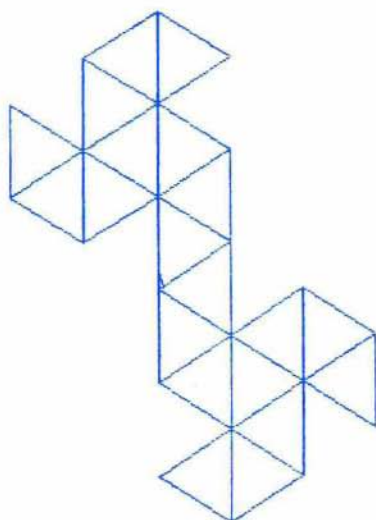
Programa DG in LG se ločita le po tem, kako izbereta novo osnovnico na zlepljeni mreži. Kasneje sem uporabljal le program DG. Pazljivi bralec bo opazil, da potrebujemo program LG v programu L. Očitno je, da lahko s programi na sliki 4 sestavimo poljubno ravninsko mrežo, torej tudi vse mreže pravilnih teles.

Problem je v bistvu rešen. Za prijetno delo pa kljub temu še marsikaj manjka. To sem opazil, ko sem poskusil konstruirati mrežo tetraedra (glej sliko 5). Mrežo tetraedra sestavljajo štirje trikotniki. Pri drugih zanimivih mrežah pa potrebujemo kvadrate, petkotnike, šestkotnike, osemkotnike.



Slika 5. Mreže pravilnih teles: (a) tetraeder, (b) kocka, (c) oktaeder, (d) dodekaeder, (e) ikozaeder.

Zato sem napisal nekaj kratkih programov. Pri risanju mreže tetraedra bi bilo ugodno imeti na razpolago program, ki bi na stranice srednjega trikotnika nalepil preostale tri trikotnike. To idejo lahko uporabimo tudi pri risanju mreže dodekaedra. Tam moramo podvojiti mrežo iz petih petkotnikov, ki smo jih nalepili na stranice šestega. Pogosto moramo osnovnico pred lepljenjem prestaviti kar daleč v levo ali desno. Tako so nastali programi s slike 6.

*Dodekaeder**Ikozaeder*

TO T	... trikotnik
TO Q	... kvadrat
TO P	... petkotnik
TO H	... šestkotnik
TO O	... osemktonik
TO DEC	... desetkotnik
TO CC :S	... obseg
TO LL :N :S	... osnovnico :N krat v levo
TO DD :N :S	... osnovnico :N krat v desno
TO GG :N :K :S	... :N krat nalepi :S nase, pri tem skače po :K
TO DB :S	... podvoji :S
TO ROZA :S :T :N	... na :N zaporednih stranic :T nalepi primerek :S
TO RZ :S :T	... na vsako stranico :T nalepi primerek :S
TO AT :S :T :L	... na :S nalepi večkrat :T. Pri tem določa seznam števil :L razmike in COUNT :L je število primerkov :T, ki jih lepimo.

(program se nadaljuje na naslednji strani)

```

TOP
OP N 5
END

TO H
OP N 6
END

TO O
OP N 8
END

TO DD :N :S
IF :N = 0 [OP :S]
OP DD :N - 1 D :S
END

TO LL :N :S
IF :N = 0 [OP :S]
OP LL :N - 1 L :S
END

TO CC :S
IF EMPTY P :S [OP 1]
OP (+ CC FIRST :S CC BF :S)
END

TO GG :N :K :S
IF :N = 0 [OP []]
OP DD :K DG :S GG :N - 1 :K :S
END

TO ROZA :S :T :N
IF :N = 0 [OP :T]
MAKE "ROZA ROZA :S :T :N - 1 :
OP DG :ROZA :S
END

TO RZ :S :T
OP ROZA :S :T CC :T
END

TO DB :S
OP DG :S :S
END

TO AT :S :T :L
IF EMPTY P :L [OP :S]
MAKE "TEMP DG :T LL FIRST :L :S
OP AT :TEMP :T BF :L
END

TO DEC
OP N 10
END

TO Q
OP N 4
END

TO T
OP N 3
END

```

Slika 6. Nekatera lica, ki jih v mrežah pogosto potrebujemo.

Pomožni programi za konstrukcijo mrež.

Zdaj pa ni bilo več težko sestaviti mrež pravilnih teles.


```

TO TETRAEDER
TO KOCKA
TO OKTAEDER
TO DODEKAEDER
TO IKOZAEDER
TO KINO    ... program, ki zaporedoma riše mreže teles.

```

```

TO KOCKA
OP DG L L RZ QQQ
END

```

```

TO OKTAEDER
OP DB D DG D DG T T DG T T
END

```

```

TO DODEKAEDER
OP DB D RZ P P
END

```

```

TO IKOZAEDER
OP DB L L RZ DG T DB T T
END

```

```

TO KINO

```

```

S 60

```

```

RB TETRAEDER "Tetraeder

```

```

S 50

```

```

RB KOCKA "Kocka

```

```

RB OKTAEDER "Oktaeder

```

```

S 30

```

```

RB IKOZAEDER "Ikozaeder

```

```

RB DODEKAEDER "Dodekaeder

```

```

END

```

```

TO TETRAEDER

```

```

OP RZ T T

```

```

END

```

Slika 7. Programi za konstrukcijo mrež petih pravilnih teles.

Z orodjem, ki ga imamo zdaj na razpolago, se lahko lotimo sestavljanja in risanja drugih zanimivih mrež. Pri velikih mrežah je v mojem računalniku včasih zmanjkalo prostora. Včasih sem si pomagal tako, da sem shranil vmesne rezultate, ki so seveda predstavitev mrež. To naredimo tudi takrat, ko nameravamo večkrat risati isto mrežo. Tako postane risanje precej hitrejše. Tako na primer namesto

```
R KOCKA, raje napišemo
```

```
MAKE "KOCKA KOCKA
```

```
R :KOCKA
```

Kogar zanima, kako je shranjena mreža kocke v logu, pa lahko doda še ukaz PR : KOCKA. Lahko pa napiše RB : KOCKA : KOCKA.

Na sliki 8 so nekateri programi, ki konstruirajo ravninske mreže, na sliki 9 pa so narisane te mreže.

```

TO KUBOKT
MAKE "K B K D R Z L D G T Q T
OP DG D :K B K :K B K
END

TO OBRKUBOKT
OP []
END

TO IKOZIDO
MAKE "P T T L L D G T D D G T P
MAKE "H I C O L L R Z :P T T P
OP DG :H I C O L :H I C O
END

TO OBRKOCKA
OP D B L L A T O L A T O T [0 2] [0 2]
END

TO ROMBKUBOKT
OP A T T R B C O C C [3 13]
END

TO OBROKT
OP D B D D 6 D G H L L 3 A T D G H D D G H H Q [1 5 4]
END

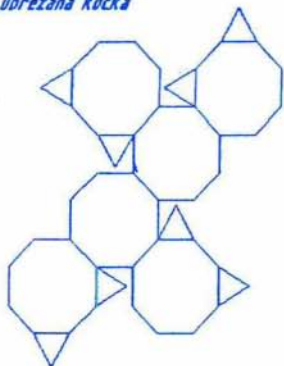
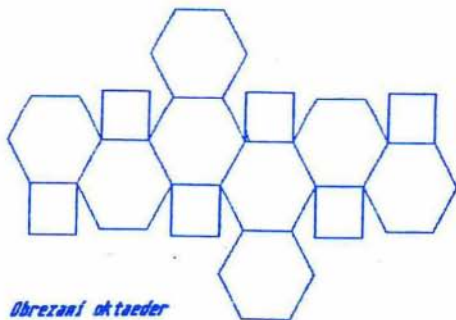
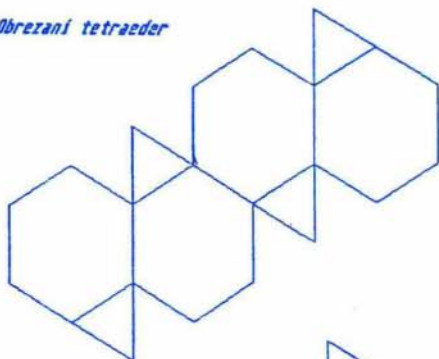
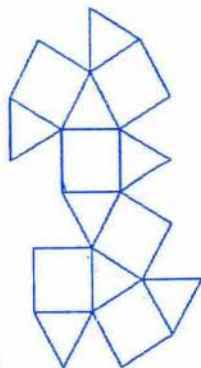
TO VELIKI
MAKE "V V D G Q D D 4 D G H D G D E C D D D G Q D D 3 D G H Q
MAKE "V V V D D 13 A T D E C :V V [2 2 2 2]
OP D G D D :V V V :V V V
END

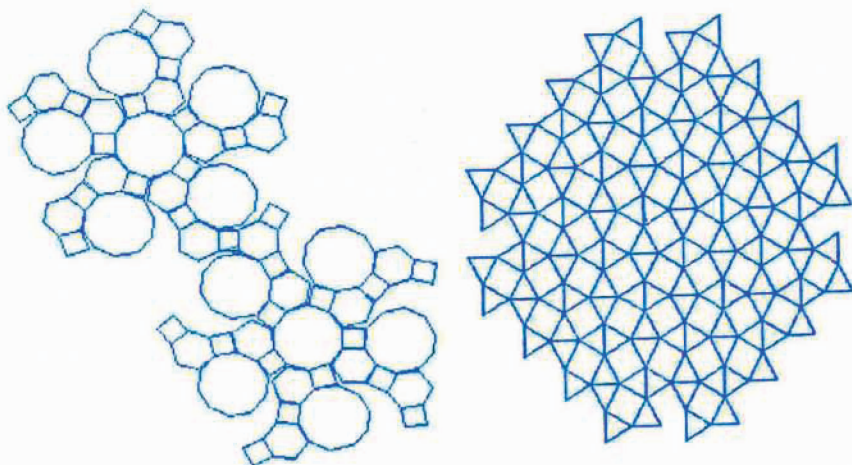
TO FILM
S 30
RB OBR T E T [Obrezani tetraeder]
RB KUBOKT [Kuboktaeder]
RB OBRKOCKA [Obrezana kocka]
RB OBROKT [Obrezani oktaeder]
S 20
RB OBRKUBOKT [Obrezani kuboktaeder]
RB IKOZIDO [Ikozidodekaeder]
S 10
RB VELIKI [Obrezani ikozidodekaeder]
END

```

Slika 8. Programi za nekatere mreže.

Na tem mestu smo dolžni nekaj pojasnil. Pojem "obrezanega" telesa je intuitivno jasen. Pomeni, da izbrano telo popravimo tako, da ga v bližini vsakega oglišča presekamo z ustrezno izbrano ravnino in tako "odrežemo" oglišče. Pri kocki na ta način za vsako oglišče dobimo enakostranični trikotnik. Iz kockinih ploskev pa dobimo pravilne osemkotnike. Seveda si lahko tako obrezovanje zamislimo bolj radikalno, tako da od originalnih robov telesa nič ne ostane. Če takšno radikalno obrezovanje naredimo na kocki, dobimo telo, ki smo ga tu poimenovali kuboktaeder. Običajno pri programiranju za imena programov jemljemo daljše opisne izraze. Mi pa smo s T označili trikotnik, s Q kvadrat, L je premik v levo, D je premik v desno, itd. To je res v nasprotju z omenjenim načelom. Če pa pogledamo, kje in kako te programe uporabljamo (glej na primer program OBRDET na sliki 8), pa vidimo, da smo na ta način pregledno zapisali dokaj zamotane konstrukcije. Navsezadnje pa je končna izbira imena stvar programerjevega okusa.

Obrezana kocka*Obrezani tetraeder**Obrezani oktaeder**Kuboktaeder*



Obrezani ikozidodekaeder

Slika 9. Slike mrež, ki smo jih sestavili s programi na sliki 8. Zadnji med njimi je ravninski vzorec. Na njem so nekatera lica narisana večkrat.

Če programe iz slike 8 pokličemo iz programa FILM, lahko pripravimo računalniško predstavo. Če priznam po pravici, do danes še nisem nobene od narisanih mrež zares uporabil za konstrukcijo papirnatega modela. Na mizi imam napol zlepljen majcen dodekaeder. Očitno se je treba konstrukcije pravih papirnatih modelov lotiti na pametnejši način, na primer tako, kot svetujejo v knjigi, ki sem jo omenil na začetku. Zadnje čase me preganja misel, da bi raje z računalnikom narisal njihove dvorazsežne projekcije. Vendar se bojim, da bom pri tem problemu zaradi lenobe raje segel po papirju.

Tomaž Pisanski