

# Učenje in poučevanje osnovnih geometrijskih pojmov

Znanstveni članek

UDK 373.3.091.31:514

**KLJUČNE BESEDE:** geoplošča, vizualizacija, geometrijski pojmi, konstruktivističen pouk

**POVZETEK** – V prispevku predstavljamo raziskavo o učenju in poučevanje osnovnih geometrijskih pojmov v osnovni šoli: v teoretičnem delu je prikazan model pouka geometrije z uporabo geoplošče, v empiričnem delu so prikazani rezultati raziskave, ki je bila narejena na vzorcu slovenskih učencev 7. razredov osnovne šole, ki za vizualizacijo geometrijskih pojmov uporabljajo geoploščo. Eksperimentalna skupina je bila deležna modela pouka geometrije, ki je vključeval uporabo geoplošče pri učenju in poučevanju osnovnih geometrijskih pojmov (kot so liki, koti, stranice, oglišča in skladnost), s katero so si učenci vizualizirali geometrijske elemente ter s pomočjo katere so raziskovali lastnosti geometrijskih elementov in njihovih odnosov z lastno aktivnostjo. Učenci kontrolne skupine so bili deležni pouka, pri katerem je prevladoval transmissijski pristop in pri katerem je bila skica prevladujoč pripomoček za vizualizacijo geometrijskih konceptov. Ugotovitve raziskave so pokazale, da so bili učenci eksperimentalne skupine pomembno uspešnejši pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev kot učenci kontrolne skupine.

Scientific paper

UDC 373.3.091.31:514

**KEY WORDS:** geoboard, visualisation, geometrical concepts, constructivist teaching

**Abstract** – In the article we present a research study on learning and teaching basic geometrical concepts in primary school. In the theoretical part, the model of teaching geometry with the use of the geoboard is presented, and the empirical part presents the results of a survey carried out on a sample of Slovenian students of the seventh grade of primary school, who used the geoboard for visualising geometrical concepts. The experimental group was taught geometry by using geoboard in learning and teaching of the basic geometrical concepts (such as angles, sides, vertices, and congruence); learners visualised the geometrical elements and they explored the properties of geometrical elements and their relations through their own activity. The students in the control group were taught with the prevailing transmission approach and the sketch was the main aid for visualising the geometrical concepts. Regarding knowledge of the basic geometrical concepts, the research findings indicated that students in the experimental group performed significantly better than students in the control group.

## 1 Uvod

Izhodišče za usvajanje geometrijskih pojmov sta vedno najprej opazovanje in praktično delo s konkretnimi predmeti ter materiali. Geometrijo bi lahko v naši osnovni šoli opredelili kot učenje o geometrijskih pojmih po načelu “korak za korakom”. Tu imamo predvsem v mislih strukturo geometrijskih znanj, prilagojeno učenju osnovne šole, ki jo učenci pridobivajo sistematično. Učenci se najprej srečajo s konkretnimi predmeti, ki jih opazujejo, z njimi manipulirajo in jih vizualizirajo. Na začetni stopnji učenja geometrije torej izhajamo iz tridimenzionalnih objektov in

postopoma prehajamo na manjše dimenzije. Z različnimi aktivnostmi in manipuliranjem raznih materialov ter učnih pripomočkov učenci spoznajo nekatere osnovne geometrijske pojme.

Prav čutno zaznavanje sveta predmetov in oblik, ki obdajajo otroka, je temelj za usvajanje osnovnih geometrijskih pojmov ne samo v prvem, ampak tudi v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Opazovanje, primerjanje oblik, tipanje, opisovanje, oblikovanje, izrezovanje, risanje in prekrivanje konkretnih oblik ter predmetov so dejavnosti učencev, ki so temelj za kasnejši prehod na abstraktnejše vsebine in razvijanje mišljenja na višjih stopnjah.

V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju je pri pouku geometrije v slovenski osnovni šoli večji poudarek na načrtovanju likov in ustrezni izbiri ter uporabi formul za izračun obsega in ploščine likov ter izračun površine in prostornine teles. Tudi v zadnjem vzgojno-izobraževalnem obdobju bi morali osrednjo pozornost nameniti vizualizaciji osnovnih geometrijskih konceptov. Le tako bodo lahko učenci uporabili prostorske predstave za prehajanje med tridimenzionalnimi in dvodimenzionalnimi oblikami ter njihovimi ponazoritvami in usvojili znanje iz geometrije, ki se pričakujejo tudi na mednarodni ravni (Izhodišča raziskave TIMSS 2011; PISA 2012).

Pri začetni vizualizaciji so v veliko pomoč modeli geometrijskih oblik in drugih osnovnih elementov v geometriji. Ne glede na stopnjo učenja geometrije je uporaba fizičnih pripomočkov, skic in računalniških modelov nujna (Van de Walle, 2013). Anderson (1957, v Clements in Battista, 1992) meni, da uporaba ustreznih pripomočkov olajša izgradnjo geometrijskih konceptov, ki so bili podani v slišni obliki. Naši učenci se pri začetnem pouku geometrije srečajo z različnimi modeli teles in likov, geoploščo in osnovnim geometrijskim orodjem (šablona, ravnilo, geotrikotnik in šestilo), ki jih kot ustrezne didaktične pripomočke predlaga *Učni načrt za matematiko* (2011). V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju predlaga učni načrt uporabo modelov geometrijskih teles, geometrijsko orodje, risanje skic za boljšo predstavljenost in programe dinamične geometrije. Učenci v zadnjem vzgojno-izobraževalnem obdobju ne rokujejo s tangramom ali geoploščo, ki omogočata manipuliranje s predmeti in ustrezno vizualizacijo. Uporaba dinamične geometrije je prepuščena odločitvi učitelja, kar pomeni, da je njena uporaba odvisna od učiteljevega znanja in poznavanja ustreznih programov, od odnosa, ki ga ima učitelji do tehnologije, in tudi od opremljenosti šole s programi za vizualizacijo geometrijskih konstrukcij. Predvidevamo lahko, da si naši učenci najpogosteje vizualizirajo geometrijske elemente s skico, kar pogosto ni dovolj, da učencem približamo geometrijo. Velikokrat so skice lahko tudi vir napačnih predstav (Clements in Battista, 1992). Če želimo razvijati prostorske predstave učencev, jim moramo dovoliti, da si osnovne geometrijske pojme vizualizirajo in raziskujejo njihove lastnosti ter odnose na način, da bodo miselno aktivni; miselno aktivnost pa bomo dosegli, če bodo učenci pri pouku geometrije aktivno vključeni v pouk, kjer bodo manipulirali z različnimi didaktičnimi sredstvi in pripomočki. Le tako bodo učenci lahko reševali tudi kompleksnejše geometrijske probleme.

### *Aktivno oblikovanje osnovnih geometrijskih pojmov*

Številne raziskave so pokazale, da si otroci pogosto oblikujejo nepopolne ali celo napačne predstave o pojmihi. Za učitelje matematike je razumevanje pojmov nekaj najosnovnejšega za uspešno delo pri pouku matematike, saj matematika v osnovni šoli ni predmet, kjer bi učenci le memorizirali in reproducirali pojme, teoreme in postopke reševanja matematičnih problemov. Učence želimo naučiti matematičnega načina razmišljanja, ki ga bodo uporabili pri reševanju matematičnih problemov in tudi problemov iz vsakdanjega življenja.

Poznavanje besede, ki označuje nek pojem, še ne pomeni, da je učenec ta pojem tudi usvojil, kar je didaktike in psihologe spodbudilo k proučevanju aktivne udeležnosti v konstrukciji lastnega znanja. Ta pristop imenujemo konstruktivistično učenje pojmov. Konstruktivisti trdijo, da učenje ne bo uspešno, če učencu dajemo že izdelan pravičen pojem, saj mora s poskušanjem, z opazovanjem, s postavljanjem in preverjanjem podmen, samostojnim miselnim delom ter v dialogu z drugimi zgraditi svoj pojem oziroma spoznati njegov pomen (Marentič Požarnik, 2000). Pristop, ki je usmerjen k učencu, temelji na aktivnih metodah dela, kot so raziskovanje, sklepanje in utemeljevanje, ki spodbujajo razvoj problemskih znanj.

### *Vloga lastne aktivnosti*

Pri vpeljevanju novih in otrokom še neznanih geometrijskih pojmov je treba učencem omogočiti lastno aktivnost ter samostojno raziskovanje z ustreznimi in raznolikimi ponazorili. Vendar ni nujno, da je učenec tudi miselno aktiven, če pri pouku manipulira z didaktičnim pripomočkom, ki ima vlogo pomoči pri izgradnji določenega pojma. Učitelj mora izbrati učni pristop, ki zagotavlja interakcijo med konkretno in miselno aktivnostjo. Pri tem mora upoštevati otrokovo predznanje in pripravljenost za učenje določenega pojma.

Lastna aktivnost učencev ima pomembno vlogo pri učenju geometrije, saj je učenje geometrijskih konceptov z razumevanjem ključnega pomena. Znanje, pridobljeno na način, kjer so učenci aktivni udeleženci pouka, je trajnejše, razumevanje je boljše, uporaba pridobljenega znanja pa je enostavnejša (Markovac, 1992). To so osnovne spretnosti, ki jih od učencev zahtevamo pri sodobnem pouku matematike, katerega namen je učence naučiti matematičnega mišljenja, ki je potrebno za reševanje vsakodnevnih problemov.

Učenci so lahko pri pouku aktivni na več različnih načinov, najpomembnejše pa je, da mu omogočimo miselno aktivnost. To je glavno sredstvo za usvajanje geometrijskega znanja. Miselno aktivnost pri pouku geometrije dosežemo z manipuliranjem konkretnih predmetov, katerega namen je konkretizacija abstraktnih pojmov. Izkušnje, ki jih učenci na tak način pridobijo, so vir učinkovitega učenja. Učenci ne morejo napredovati na višje stopnje geometrijskega mišljenja, ne da bi manipulirali z didaktičnimi sredstvi (van Hiele, 1959, v Usiskin, 1982). Piaget in Inhelder (1967) sta trdila, da je otrokova predstava o prostoru rezultat predhodnega manipuliranja s

svojim okoljem. Torej imajo didaktična sredstva pomembno mesto pri aktivnem pridobivanju znanja in oblikovanju osnovnih geometrijskih predstav.

### *Didaktična sredstva pri pouku geometrije*

Uporaba didaktičnih sredstev ima pomembno vlogo pri oblikovanju matematičnih pojmov, saj pomaga učencem razumeti matematične pojme, procedure, algoritme in simbole (Hodnik Čadež, 2014). Omogočajo tudi vizualizacijo abstraktnih matematičnih konceptov. Med prvimi, ki so zagovarjali uporabo didaktičnih sredstev pri pouku matematike, so bili Piaget, Bruner, Montessori in Dienes (McNeil in Jarvin, 2007; Moyer, 2001). Strinjali so se, da interakcija s konkretnimi objekti zagotavlja osnove abstraktnega mišljenja. Piaget (1952, v Moyer, 2001) je trdil, da morajo imeti učenci veliko izkušenj s konkretnimi materiali in skicami oziroma slikami, da bi razumeli abstraktne matematične koncepte, saj so na tej stopnji nezmožni razumeti le verbalno in simbolično podane razlage. V procesu razvoja abstraktnih matematičnih konceptov mora učenec skozi tri stopnje predstavitev: enaktivno, ikonično in simbolno (Bruner 1960, v Moyer, 2001). Na prvi, enaktivni stopnji Bruner predlaga uporabo fizičnih objektov (prav tam). Prepričanje, da sta zgodnja izkušnja in zadostna interakcija s konkretnimi objekti pomembna pri razvoju kasnejšega abstraktnega mišljenja, velja še danes.

Učenje in poučevanje geometrije se v osnovni šoli začeta z opazovanjem in manipuliranjem konkretnih predmetov preko didaktičnih iger, ki učencem omogočata razvoj osnovnih geometrijskih predstav. Taktilno-kinestetična izkušnja, kot je premik geometrijskih teles v prostoru, je otrokom, še posebej mlajšim, v veliko pomoč pri učenju nekaterih geometrijskih konceptov (Prigge, 1978). Ne glede na stopnjo učenja geometrije je uporaba fizičnih pripomočkov, skic in računalniških modelov nujna, saj omogočajo boljšo predstavbo in lažje dojetje abstraktnih geometrijskih konceptov ter uspešnejše reševanje geometrijskih problemov. Anderson (1957, v Clements in Battista, 1992) trdi, da uporaba didaktičnih sredstev olajša izgradnjo geometrijskih konceptov, ki so bili podani verbalno. Učenci, ki pri pouku geometrije uporabljajo didaktična sredstva, usvojijo geometrijske koncepte temeljiteje in bolj poglobljeno (Raphael in Wahlstrom, 1989). Učencem, ki svoje ideje težje verbalno izrazijo, omogočajo, da svoje "razlage" prikažejo s konkretnimi objekti oziroma skicami (Fuys idr., 1988). Poleg tega didaktična sredstva omogočajo, da so učenci aktivno vključeni v pouk, učitelj pa ni več le prenašalec znanja, saj lahko učenci samostojno raziskujejo geometrijske koncepte in z didaktičnimi sredstvi svoje ideje preverijo.

Sowell (1989) ugotavlja, da je napredek pri znanju geometrije odvisen tudi od pogostosti uporabe didaktičnih sredstev. Kratka časovna uporaba namreč pogosto ne povzroča vidnega napredka. Smiselna je uporaba sredstev v vseh fazah učnega procesa in ne le pri obravnavi nove učne snovi. Predvsem je pomembno, da učenci uporabljajo sredstva pri samostojnem reševanju geometrijskih problemov, kjer jih opazujejo in z njimi manipulirajo, še zlasti pa, ko predstavijo svoje ideje. Le tako lahko dosežemo miselno aktivnost učencev.

Katero didaktično sredstvo je najprimernejše pri posamezni učni enoti, ne moremo določiti. Prav tako ne moremo trditi, da je neko sredstvo boljše od drugega, saj, kot navajata Prodanović in Ničković (1974), ima vsako sredstvo svojo didaktično vrednost. Ne glede na to, katero didaktično sredstvo ponudimo, to ne bo imelo enakega učinka pri vseh učencih in pri vsaki vsebini. Zato moramo pri oblikovanju geometrijskih pojmov otrokom ponuditi več različnih sredstev, kar pozitivno vpliva na dosežke pri geometriji (Nickson, 2004; Greabell, 1978, v Moyer, 2001).

Za prikaz geometrijskih konceptov pri pouku geometrije najpogosteje uporabljamo skice in slike, ki lahko učencem dajo takojšnje intuitivno razumevanje določenih geometrijskih idej. Vendar morajo biti zelo raznolike, saj le tako ne bodo povzročale nepravilne izgradnje geometrijskih konceptov (Clements in Battista, 1992). Raziskave kažejo, da imajo skice v primerjavi z didaktičnimi sredstvi, s katerimi lahko učenci manipulirajo, nekoliko manjši vpliv na uspeh pri pouku matematike (Sowell, 1989). V nekaterih primerih se celo učinkovitost skic ne razlikuje od učinkovitosti abstraktnega pouka s simboli (prav tam).

## **2 Problem in namen empirične raziskave**

V geometriji je zaradi njene predstavljenosti veliko vsebin, pri katerih lahko učencem ponudimo najrazličnejše pripomočke. Eno najbolj znanih je geoplošča, s katero vizualiziramo osnovne geometrijske pojme. Najpogosteje jo uporabljamo za konkretizacijo pojmov, kot so obseg, ploščina, trikotnik, večkotnik, skladnost, osna in središčna simetrija, vzporednost, pravokotnost ipd.

Geoplošča učencem omogoča kreativnost in vizualno predstavljenost, ki je začetna stopnja pri učenju geometrije. Poleg tega lahko učenci z uporabo geoplošče rešujejo geometrijske probleme in odkrivajo ter raziskujejo nova dejstva. Leseno ali plastično tablico dimenzij  $n \times n$  z žeblički, na katere napnemo elastike, je izumil angleški didaktik Caleb Gattegno že okrog leta 1950. Pri pouku matematike v slovenskem prostoru se je začela uporabljati šele v zadnjih letih (Cotič, Mešinović, Valenčič Zuljan in Simčič, 2010).

V raziskavi smo zgradili pouk geometrije z uporabo geoplošče. Zgradili smo tak model pouka, pri katerem je aktivno vlogo raziskovalca nekaterih geometrijskih konceptov prevzel učenec. Opustili smo transmisijski pouk in učencu omogočili, da je lastnosti in odnose med geometrijskimi elementi opazoval na modelih, ki jih je oblikoval na geoplošči. Na tak način je vizualiziral nekatere geometrijske pojme. Z raziskavo smo želeli dokazati, da učenci, deležni tega modela, z vizualizacijo geometrijskih pojmov na geoplošči le-te usvojijo temeljiteje kot učenci, deležni klasičnega transmisijskega pouka, ki v naših šolah še vedno prevladuje.

*V ta namen smo si postavili naslednjo raziskovalno hipotezo: Učenci 7. razredov osnovne šole, deležni pouka geometrije z uporabo geoplošče, s katero si vizualizirajo*

*osnovne pojme in s pomočjo katere raziskujejo lastnosti in odnose med elementi v geometriji, so uspešnejši pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev kot učenci, deležni klasičnega transmisijskega pouka geometrije z uporabo skice kot edinega pripomočka za vizualizacijo geometrijskih konceptov.*

### 3 Metodologija

#### 3.1 Raziskovalna metoda

V raziskavi smo uporabili deskriptivno in kavzalno-eksperimentalno metodo empiričnega pedagoškega raziskovanja. Za uporabo eksperimenta smo se odločili, ker je primeren pri proučevanju “novosti” (geoplošča), ki jih vnašamo v pouk geometrije.

Načrtovali smo enofaktorski model eksperimenta s šolskimi oddelki kot primerjalnimi skupinami z dvema modalitetama. Za primerjalne skupine smo vzeli obstoječe oddelke 7. razreda na različnih osnovnih šolah. Pred eksperimentom ni bila opravljena izenačitev oddelkov do slučajnostnih razlik, torej randomizacije dejavnikov ni bilo, saj je možnost za uporabo modelov randomizacije na šolskem področju precej omejena.

Skupino učencev, v katero smo uvedli eksperimentalni faktor, smo poimenovali *eksperimentalna skupina* (ES), skupino učencev, ki ni bila deležna eksperimentalnega faktorja, pa *kontrolna skupina* (KS). Poleg učencev je bilo v eksperimentu vključenih pet učiteljev.

#### *Pouk geometrije v 7. razredih eksperimentalne skupine*

Za namen raziskave smo izgradili tri module poučevanja nekaterih geometrijskih konceptov. Za posamezni modul smo predvidevali, da bodo učenci potrebovali 2–6 šolskih ur. Števila šolskih ur za posamezni modul nismo natanko določili, saj je vsak učenec napredoval v skladu s svojimi zmožnostmi. Določili smo le okvirno število šolskih ur, ki naj bi jih učenci potrebovali za obravnavo posameznega modula. Ob koncu vsakega modula so si učenci med seboj pomagali, kar je omogočalo medsebojno interakcijo in sprotno preverjanje razumevanja geometrijskih konceptov.

Obravnavali smo naslednje vsebine iz geometrije:

- modul 1: osnovni geometrijski pojmi (daljica, vzporednost, pravokotnost, koti, koti ob vzporednicah),
- modul 2: trikotniki (lastnosti, vrste, skladnost),
- modul 3: štirikotniki (lastnosti, vrste).

Primarni namen modula 1 je bil preveriti in ponoviti znanje sedmošolcev o osnovnih geometrijskih pojmi, ki naj bi ga učenci že imeli. Učitelj je bil pozoren predvsem na formalni in neformalni matematični jezik, ki ga učenci uporabljajo. Želeli smo

odpraviti morebitne nejasnosti, saj je bila izbrana vsebina temelj za izgradnjo novih, učencem še neznanih geometrijskih konceptov, s katerimi so se srečali z aktivnostmi pri modulih 2 in 3. Prva aktivnost vsakega modula je bila namenjena uvodni neformalni predstavitvi vsebine. Začetna motivacijska aktivnost je učitelju služila za pridobivanje informacij o geometrijskem jeziku, ki ga učenci uporabljajo. S pomočjo zadnje aktivnosti vsakega modula so učenci naredili povzetek o novopridobljenem znanju in dobili pregled nad celotno vsebino. Pri vseh aktivnostih je učitelj učence le usmerjal. Po vsakem modulu so učenci individualno in samostojno reševali vrsto nalog iz omenjenih vsebin. V primeru nerazumevanja določene naloge je z vodenim usmerjanjem učencem pomagal učitelj.

Aktivnosti modulov so bile oblikovane tako, da so učenci osnovne geometrijske pojme vizualizirali na geoplošči in svoje ugotovitve izrazili na slikovni ter pisni način. Figure, ki so jih izdelali na geoplošči, so lahko načrtali na slikovni model geoplošče, ki je bil priložen ob vsaki aktivnosti. Učencem smo pripravili delovni zvezek z aktivnostmi in nalogami, ki je zajemal vse tri module. S pregledovanjem delovnega zvezka je imel učitelj vpogled nad učenčevim razumevanjem obravnavane vsebine.

### *Pouk geometrije v 7. razredih kontrolne skupine*

Pri pouku geometrije so učenci kontrolne skupine uporabljali standardno geometrijsko orodje, tj. ravnilo, geotrikotnik in šestilo. Učitelji so jih opozarjali na pravilno uporabo geometrijskega orodja. Učenci kontrolne skupine so bili deležni pouka, pri katerem je prevladoval transmisijski pristop in pri katerem je bila skica prevladujoč pripomoček za vizualizacijo geometrijskih konceptov. Učitelji so vsebino najprej frontalno pojasnili, nato pa pred učenci rešili nekaj primerov različnih tipov nalog. Na ta način so učenci usvojili postopke reševanja raznovrstnih nalog. Postopke reševanja so ponovili in utrdili tudi samostojno, saj so podobne naloge morali rešiti za domačo nalogo.

### *3.2 Vzorec eksperimenta*

V eksperimentalno skupino je bilo vključenih 62 učencev iz dveh osnovnih šol oziroma treh oddelkov. Med učenci eksperimentalne skupine je bilo število deklic in dečkov enako, torej 31 deklic in 31 dečkov. V kontrolno skupino je bilo vključenih 51 učencev iz dveh osnovnih šol oziroma dveh oddelkov. Med učenci kontrolne skupine je bilo 28 dečkov in 23 deklic. Učitelji so bili po starosti in letih delovne dobe precej izenačeni. Glede stopnje izobrazbe so bili učitelji popolnoma izenačeni, saj so vsi imeli visokošolsko univerzitetno izobrazbo.

### 3.3 Zbiranje podatkov

Podatke smo zbrali kvantitativno, in sicer z dvema testoma znanja iz geometrije. Podatke, ki v statističnem kontekstu predstavljajo odvisne spremenljivke, smo zbirali z začetnim in končnim testom znanja. Z začetnim testom v prvem empiričnem snemanju smo zbirali podatke na začetku eksperimenta, s končnim testom v drugem empiričnem snemanju pa na koncu eksperimenta. Na začetku in koncu eksperimenta smo preverili poznavanje geometrijskih pojmov in dejstev.

Začetno in končno znanje iz geometrijskih vsebin eksperimentalne in kontrolne skupine smo preverili z začetnim in končnim testom znanja, ki smo ju za namen raziskave izdelali sami. Pri sestavi testa smo upoštevali učni načrt in cilje, ki so v njem opredeljeni. Poleg tega smo se pri izdelavi testov zgledovali po testu iz matematike za nacionalno preverjanje znanja (NPZ), ki je namenjeno preverjanju znanja vseh slovenskih učencev ob koncu 6. in 9. razreda. S končnim testom smo ugotavljali razliko v znanju geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino. V eksperimentalni skupini smo vpeljali geoploščo kot sredstvo za vizualizacijo geometrijskih konceptov.

### 3.4 Obdelava podatkov

Podatke smo analizirali s pomočjo računalniškega programa za obdelavo podatkov SPSS.

Za ugotavljanje razlik v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine na začetku eksperimenta smo uporabili t-preizkus.

Ker sta bili eksperimentalna in kontrolna skupina v začetnem stanju neizenačeni v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev in ker smo želeli karseda objektivno analizo rezultatov, smo v obdelavo podatkov vključili analizo kovariance. Neizenačeno začetno stanje skupin vpliva namreč na končno stanje, zato ne moremo zagotoviti, da so razlike v končnem stanju le posledica eksperimentalnega faktorja. Z analizo kovariance razlike skupin v začetnem stanju izničimo tako, da izenačimo rezultate skupin v končnem stanju, torej prilagodimo odvisno spremenljivko tako, da zmanjšamo napako variance, ki jo povzroča kovariabla.

*Z analizo kovariance smo preizkusili raziskovalno hipotezo: Učenci 7. razredov osnovne šole, deležni pouka geometrije z uporabo geoplošče, s katero si vizualizirajo osnovne pojme in s pomočjo katere raziskujejo lastnosti in odnose med elementi v geometriji, so uspešnejši pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev kot učenci, deležni klasičnega transmisijskega pouka geometrije z uporabo skice kot edinega pripomočka za vizualizacijo geometrijskih konceptov.*

## 4 Rezultati in interpretacija

Rezultate smo interpretirali v skladu z zahtevo po preglednosti in logiki dokazovanja postavljene hipoteze. Pri preizkusu hipoteze smo se ravnali po pravilu, da je največje dopustno tveganje za zavrnitev hipoteze 5-odstotna napaka.

*Analiza razlik v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine v začetnem stanju*

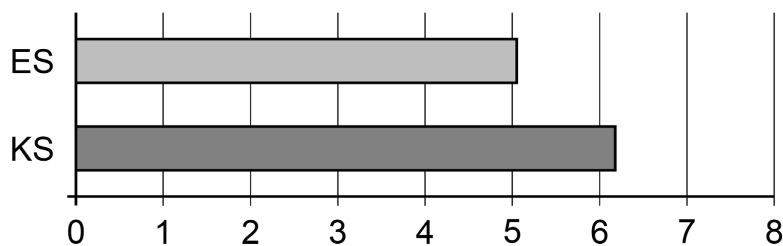
Najprej si oglejmo analizo razlik v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev med eksperimentalno in kontrolno skupino pred vpeljavo eksperimentalnega faktorja v eksperimentalno skupino. V ta namen smo primerjali osnovne statistične parametre začetnega testa, in sicer število učencev v eksperimentalni in kontrolni skupini, aritmetično sredino, standardni odklon, standardno napako aritmetične sredine ter najnižji in najvišji dosežek (tabela 1).

*Tabela 1:* Osnovni statistični parametri začetnega testa v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev

Skupina	N	Aritmetična sredina	Dosežek (v %)	Standardni odklon	Standardna napaka aritmetične sredine	Min.	Maks.
ES	62	5,05	63,1	1,654	0,210	2	8
KS	51	6,18	77,3	1,322	0,185	3	8

Opazimo lahko, da so bili sedmošolci iz kontrolne skupine pred izvajanjem eksperimenta boljši od svojih vrstnikov iz eksperimentalne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev (slika 1). Učenci kontrolne skupine so v povprečju dosegli 6,18 točke, učenci eksperimentalne skupine pa 5,05 točke. Ali so te razlike statistično pomembne, smo preverili s t-preizkusom.

*Slika 1:* Vrščni prikaz aritmetičnih sredin dosežkov v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev



T-preizkus kaže, da se učenci iz kontrolne in eksperimentalne skupine statistično pomembno razlikujejo v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev ( $t(110,922) = -4,029$ ,  $p < 0,05$ ) (tabela 2).

Tabela 2: T-preizkus za preverjanje razlik med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev

<i>t</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>	<i>Razlika sredin</i>	<i>Standardna napaka</i>
-4,029	110,922	0,000	-1,128	0,280

Glede na izračun aritmetične sredine, t-koeficienta in ravni statistične pomembnosti t-koeficienta je bila kontrolna skupina pomembno boljša kot eksperimentalna skupina pri reševanju nalog začetnega testa, kjer je bilo treba prepoznati osnovne geometrijske pojme in dejstva.

#### *Analiza razlik med eksperimentalno in kontrolno skupino v končnem stanju*

Kot smo že omenili, smo pri pouku geometrije v eksperimentalno skupino vpejali geoploščo, s katero so si učenci vizualizirali geometrijske koncepte. Učenci kontrolne skupine so si pri vizualizaciji pojmov pomagali z drugimi didaktičnimi sredstvi, predvsem s skico. Poleg tega so bili učenci eksperimentalne skupine deležni konstruktivističnega pouka, kjer so z vodenim usmerjanjem odkrivali osnovne geometrijske pojme in njihove lastnosti. Učenci eksperimentalne skupine so se geometrijo učili na tradicionalen način, kjer ima glavno vlogo učitelj, ki najprej snov razloži, potem pa skupaj z učenci utrjuje novo pridobljeno znanje. Zato nas je zanimalo, ali se znanje geometrije med eksperimentalno in kontrolno skupino razlikuje, koliko in na kakšen način.

#### *Analiza razlik v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine v končnem stanju*

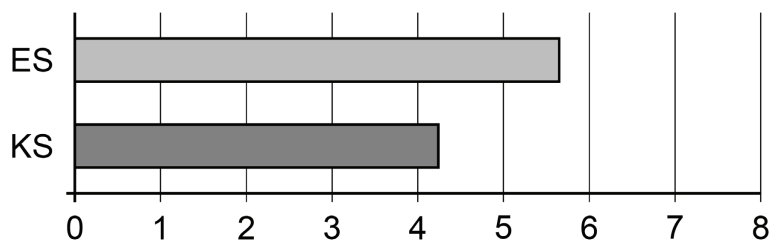
Oglejmo si osnovne statistične parametre končnega testa v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev. V tabeli 3 so zajeti število učencev v eksperimentalne in kontrolne skupine, aritmetična sredina, standardni odklon, standardna napaka aritmetične sredine ter najvišji in najnižji dosežek.

Tabela 3: Osnovni statistični parametri končnega testa v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev

Skupina	N	Aritmetična sredina	Dosežek (v %)	Standardni odklon	Standardna napaka aritmetične sredine	Min.	Maks.
ES	62	5,65	70,6	1,934	0,246	0	8
KS	51	4,24	53,0	1,807	0,253	0	8

V končnem stanju so se pokazale razlike v dosežkih učencev eksperimentalne in kontrolne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev, in sicer v korist učencev eksperimentalne skupine. Le-ti so v povprečju dosegli 5,65 točke, učenci kontrolne skupine pa 4,24 točke (slika 2).

Slika 2: Vrstični prikaz aritmetičnih sredin dosežkov eksperimentalne in kontrolne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev



V začetnem stanju so se pokazale pomembne razlike v dosežkih učencev eksperimentalne in kontrolne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev v korist učencev kontrolne skupine. Začetne razlike med skupinama smo vključili v statistično analizo, sicer bi lahko bili zaključki v končnem stanju pristranski. Objektivnost smo si zagotovili z analizo kovariance, s katero smo prilagodili rezultate končnega testa pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev tako, da smo zmanjšali napako variance, ki so jo povzročili rezultati začetnega testa pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev.

Pri ocenjevanju primernosti analize kovariance je še posebej pomembno, da potrdimo predpostavko o homogenosti regresijskih koeficientov. Ugotovili smo, da je ta predpostavka pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov upravičena ( $p = 0,772$ ,  $p > 0,05$ ), zato lahko razlike med skupinama preverimo z analizo kovariance (tabela 4).

*Tabela 4:* Prikaz razlik v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev med eksperimentalno in kontrolno skupino v končnem stanju z upoštevanjem začetnih razlik (analiza kovariance)

<i>Vir variabilnosti</i>	<i>Vsota kvadratov</i>	<i>Prostostne stopnje</i>	<i>Varianca</i>	<i>F</i>	<i>Raven statistične pomembnosti</i>
Corrected Model	146,423a	2	73,211	26,793	0,000
Intercept	18,946	1	18,946	6,934	0,010
Raven I	90,802	1	90,802	33,231	0,000
Skupina	106,599	1	106,599	39,013	0,000
Error	300,568	110	2,732		
Total	3282,000	113			
Corrected Total	446,991	112			

Na podlagi analize kovariance ugotovimo, da je vpliv eksperimentalnega faktorja statistično značilen. Ob upoštevanju kovariable (rezultati začetnega testa pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev) obstajajo statistično značilne razlike med eksperimentalno in kontrolno skupino ( $F = 39,013$ ,  $p = 0,000$ ).

V tabeli 5 vidimo, da je z upoštevanjem kovariable (rezultati začetnega testa pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev), prilagojena aritmetična sredina eksperimentalne skupine večja od izhodiščne, prilagojena aritmetična sredina kontrolne skupine pa je manjša od izhodiščne.

*Tabela 5:* Izhodiščna in prilagojena aritmetična sredina dosežkov eksperimentalne in kontrolne skupine v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev

<i>Skupina</i>	<i>Izhodiščna aritmetična sredina</i>	<i>Prilagojena aritmetična sredina</i>
ES	5,65	5,949*
KS	4,24	3,865*

*Opomba:* Začetna raven I = 5,56

Analiza kovariance in izračunane prilagojene aritmetične sredine nakazujejo, da sta se eksperimentalna in kontrolna skupina v končnem stanju pomembno razlikovali v poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev v korist učencev eksperimentalne skupine, saj prilagojeno povprečje eksperimentalne skupine znaša 5,95 točke, prilagojeno povprečje kontrolne skupine pa 3,87 točke. S tem smo našo raziskovalno hipotezo potrdili.

Učenci 7. razredov osnovne šole, deležni pouka geometrije z uporabo geoplošče, s katero si vizualizirajo osnovne pojme in s pomočjo katere raziskujejo lastnosti in odnose med elementi v geometriji, so uspešnejši pri poznavanju osnovnih geometrijskih pojmov in dejstev kot učenci, deležni klasičnega transmissijskega pouka geometrije z uporabo skice kot edinega pripomočka za vizualizacijo geometrijskih konceptov.

Pričakovali smo, da bodo učenci eksperimentalne skupine bolje reševali naloge, kjer so morali izkazati znanje o poznavanju osnovnih geometrijske pojmov in dejstev kot kontrolna skupina, čeprav so jih učenci obeh skupin večkrat ponavljali skozi celoten pouk geometrije. Res pa je, da so učenci eksperimentalne skupine te pojme in dejstva spoznali na drugačen način kot učenci kontrolne skupine, kar je očitno vplivalo na uspeh učencev. Učitelji kontrolne skupine so učencem nove pojme najprej pojasnili, potem pa so jih učenci utrjevali in ponavljali z različnimi nalogami, kar je omogočilo, da so jih memorizirali. Kot smo že večkrat povedali, so učenci eksperimentalne skupine pojme in dejstva odkrivali in raziskovali sami s pomočjo geoplošče. Tak pouk geometrije je zahteval več časa za usvajanje geometrijskih konceptov, zato so učenci eksperimentalne skupine rešili manj nalog kot učenci kontrolne skupine. Kljub temu se je izkazalo, da so učenci eksperimentalne skupine temeljiteje usvojili osnovne pojme in dejstva kot učenci kontrolne skupine, saj so dosegli pomembno boljše rezultate kot njihovi vrstniki iz kontrolne skupine. Učni pristop, ki so ga bili deležni učenci eksperimentalne skupine, torej omogoča uspešno usvajanje geometrijskih pojmov in dejstev.

## 5 Sklep

Podobno kot ugotavljajo nekateri avtorji (Raphael in Wahlstrom, 1989; Fuys idr., 1988), smo tudi v naši raziskavi ugotovili, da je za uspešno in ustrezno vizualizacijo geometrijskih pojmov uporaba didaktičnih sredstev in pripomočkov učinkovita. Sredstva, ki omogočajo hkrati vizualizacijo in manipuliranje (npr. geoplošča), olajšajo izgradnjo osnovnih geometrijskih konceptov in omogočajo ustrezne miselne predstave.

V naši raziskavi so učenci eksperimentalne skupine manipulirali z geoploščo. Glede na rezultate raziskave lahko trdimo, da uporaba več različnih sredstev pri oblikovanju geometrijskih pojmov pozitivno vpliva na dosežke pri geometriji. Vendar smo v praksi opazili, da učitelji niso najbolj naklonjeni uporabi didaktičnih sredstev. To velja predvsem za učitelje matematike v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju (Hodnik Čadež in Manfreda Kolar, 2009). Zato bi bilo treba ozavestiti učitelje, pa tudi snovalce učnega načrta matematike o pomembnosti uporabe didaktičnih sredstev pri pouku geometrije kot osrednjem pripomočku za vizualizacijo geometrijskih konceptov.

Lahko sklenemo, da je pri vpeljevanju novih in otrokom še neznanih geometrijskih pojmov treba učencem omogočiti lastno aktivnost ter samostojno raziskovanje z

ustreznimi in raznolikimi ponazorili. Lastna aktivnost učencev ima pomembno vlogo pri učenju geometrije, saj je učenje geometrijskih konceptov z razumevanjem ključnega pomena. Znanje, pridobljeno na način, kjer so učenci aktivni udeleženci pouka, je trajnejše, razumevanje je boljše, uporaba pridobljenega znanja pa je enostavnejša (Markovac, 1992). To so osnovne spretnosti, ki jih od učencev zahtevamo pri sodobnem pouku matematike, katerega namen je učence naučiti matematičnega mišljenja, ki je potrebno za reševanje vsakodnevnih problemov.

Sanela Mešinović, PhD, Mara Cotič, PhD, Amalija Žakelj, PhD

### Learning and teaching basic geometrical concepts

*Several studies have shown children often form incomplete or even erroneous ideas about concepts. For mathematics teachers, the understanding of concepts is something utterly fundamental for a successful work in teaching mathematics, because in primary school mathematics classes are more than classes where learners would just memorise and reproduce terms, theorems, and procedures of solving mathematical problems. We wish to teach students the mathematical way of thinking they will apply in solving mathematical problems as well as in solving problems from everyday life.*

*Piaget, Bruner, Montessori, and Dienes (McNeil and Jarvin, 2007; Moyer, 2001) were among the first to advocate the use of didactic resources in teaching mathematics. They agreed that interaction with concrete objects assures the bases of abstract thinking. Piaget (1952, in: Moyer, 2001) claimed that to be able to understand abstract mathematical concepts, learners must have plenty of experience working with concrete materials and sketches or images, because at this stage they are not able to understand just verbally and symbolically delivered explanations. In the process of developing abstract mathematical concepts, the learner must go through three stages of presentations: enactive, iconic, and symbolic (Bruner, 1960, in: Moyer, 2001). At the first, enactive stage, Bruner suggests the use of physical objects (ibid.). The belief that early experience and sufficient interaction with concrete objects are important in the development of later abstract thinking is still valid today.*

*Sowell (1989) points out that the progress in geometrical knowledge also depends on the frequency of using didactic resources. Short temporal use namely does not often produce a visible progress. It is not possible to determine what didactic resource is the most appropriate in a specific learning unit. Likewise, it is impossible to claim that one resource is better than another; as Prodanović and Ničković (1974) quoted, every didactic resource has its didactic value. Irrespective of which didactic resource is offered, it will not have the same effect in all learners and with all topics. This is why in shaping geometrical concepts, children must be offered a variety of didactic resources, which have a positive impact on performance in geometry (Nickson, 2004; Greabell, 1978, in: Moyer, 2011).*

*Due to its representation, potential geometry contains a large number of topics in which learners can be offered diverse aids the most. The geoboard is one of the best known resources used to visualise the basic geometrical concepts. The most frequently it is used for concretisation of concepts, such as perimeter, triangle, polygon, congruence, symmetry of axes, as well as origin, parallel, perpendicular, etc.*

*The geoboard allows students' creativity and visual presentation, which is the initial stage in learning geometry. In addition to this, by using the geoboard, students can solve geometric problems as well as explore and discover new facts. The  $n \times n$  wooden or plastic tablet with pins, across which elastics can be tightened, was invented by the English didactician Caleb Cettegno already around 1950. In Slovenian space, however, its use in mathematics classes has started only recently (Cotič, Mešinović, Valenčič Zuljan and Simčič, 2010).*

*In the research we applied the descriptive and causal method of empirical educational research. We applied the educational experiment with intentional insertion of the experimental factor into the research situation, namely of the model of teaching geometry using a geoboard. We introduced the geoboard to the experimental group at mathematic classes, with which students visualised the geometrical concepts. The control group students were assisted with other didactic aids in visualisation, mainly with the sketch. Moreover, the experimental group students received constructivist teaching, in which they discovered the basic geometrical concepts and their properties with guided orientation and through their own activities. The students in the control group learned geometry in the traditional way, where the teacher has the main role; first the teacher explains the learning matter and then consolidates the newly acquired knowledge together with the students. We were thus interested in finding whether there are any differences in knowledge of geometry between the two groups, and to what extent and ways they differ.*

*We gathered the data quantitatively, namely, with two geometry knowledge tests. The group into which the experimental factor was introduced was named the experimental group (EG), and the group that did not receive the experimental factor was named the control group (CG).*

*The experimental group consisted of 62 students (three classes) from two primary schools. The control group consisted of 51 students (two classes) from two primary schools. As for the level of teacher education, the teachers were perfectly equal – they all had university education.*

*The data representing dependent variables in the statistical context were gathered with an initial and with a final test of knowledge. With the initial test in the first empirical recording, we gathered data at the beginning of the experiment, and with the final test in the second empirical recording at the end of the experiment. At the beginning and at the end of the experiment we checked the knowledge of geometrical concepts and facts.*

*We interpreted the results in accordance with the requirement for transparency and logic of proving the set hypothesis. Testing the hypothesis, we accepted the rule that the maximum allowable risk of rejection of the hypothesis was a 5 percent error.*

*The analysis of differences in knowledge of the basic geometrical concepts and facts between the students in the experimental and in the control group showed that prior to the execution of the experiment, the seventh-graders in the control group performed better in the basic geometrical concepts and facts knowledge than their peers in the experimental group. On average, the students in the control group achieved 6.18 points and the students in the experimental group 5.05 points. The t-test indicates a statistically significant difference between the students in the control group and in the experimental group ( $t(110,922) = -4.029$ ;  $p < 0.05$ ). According to the calculation of the arithmetic mean, the t-ratio, and the level of statistical significance of the t-ratio, the control group performed significantly better than the experimental group in resolving the tasks of the initial tests, where it was necessary to identify the basic geometric concepts and facts.*

*The analysis of the differences in the knowledge of basic geometrical concepts and facts between the students in the experimental and in the control group after the final test showed, however, that the seventh-graders in the experimental group performed better than their peers in the control group. On average, the students in the experimental group achieved 5.65 points and the students in the control group 4.24 points.*

*Initially, significant differences were shown in the performance of students in both groups in favour of the control group students. The initial differences between the groups were included into the statistical analysis; otherwise, the conclusions in the final state could be biased. The objectivity was assured with the analysis of covariance, with which the results of the final test of the knowledge of basic geometrical concepts and facts were adjusted to reduce the error of variance caused by the results of the initial test of the knowledge of basic geometrical concepts and facts.*

*In the estimation of the adequacy of the analysis of covariance, it is especially important to confirm the assumption about the homogeneity of the regression coefficients. Regarding knowledge of the basic geometrical concepts, we found this assumption justified, so the differences between the groups can be tested with the analysis of covariance. Based on the analysis of covariance, we found the impact of the experimental factor statistically significant. Taking account of the co-variable (the results of the initial test of the basic geometrical concepts and facts knowledge), there are statistically significant differences between the experimental and control group ( $F = 39.013$ ;  $p = 0.000$ ).*

*The findings of the research showed that the influence of the experimental factor is statistically significant, which means we have confirmed the research hypothesis: The students of the seventh grade of primary school, visualising the basic geometrical concepts by being taught with the use of the geoboard, with the assistance of which they investigate the properties and relations between the elements in geometry, perform better in the test of basic geometrical concepts and facts knowledge than students who received transmission teaching of geometry with the use of sketch as the prevailing aid for the visualisation of geometrical concepts.*

*Similarly to Raphael and Wahlstrom (1989) and Fuys et al. (1988), we also discovered, that for a successful and appropriate visualisation of geometrical concepts, the use of didactic resources is efficient. The resources that simultaneously allow visualisation*

and manipulation (e.g. the geoboard) facilitate the building of basic geometrical concepts and allow adequate mental representations.

*In our research the students of the experimental group manipulated with the geoboard. According to the results of the research, we can claim that in the formation of geometrical concepts the use of a variety of resources has a positive effect on performance in geometry. In practice it can be noticed, however, that teachers are not very much in favour of using didactic resources, this being especially true for mathematics teachers in the third educational cycle (Hodnik Čadež and Manfreda Kolar, 2009). It would therefore be necessary to make teachers, as well as designers of math curricula, aware of the importance of using didactic resources in teaching geometry as the central aid for the visualisation of geometrical concepts.*

*We can conclude that when introduced new geometrical concepts that are still unknown to them, children must be allowed their own activity and independent exploration with appropriate and diverse tools for illustration. Students' own activity plays an important role in learning geometry, as learning geometrical concepts with understanding is crucial. The knowledge acquired in classes where students are active participants is more durable, understanding is better, and application of obtained knowledge is simpler (Markovac, 1992). These are the basic skills required from students in modern teaching of mathematics, the purpose of which is to teach students mathematical thinking needed for solving everyday problems.*

## LITERATURA

1. Clements, D., Battista, M. (1992). Geometry and spacial reasoning. V D. Grouws (ur.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. (str. 420–464). New York: Macmillan Publishing Company.
2. Cotič, M., Mešinović, S., Valenčič Zuljan, M., Simčič, B. (2010). Geometrical Problems and the Use of Geoboard (str. 375–398). V Facilitating Effective Student Learning through Teacher Research And Innovation. Ljubljana: Faculty of Education.
3. Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 3, str. 1–196.
4. Hodnik Čadež, T. (2014). Reprezentiranje matematičnih pojmov pri pouku matematike na razredni stopnji. V: Žakelj, A. (ur.). Učne težave pri matematiki in slovenščini – izziv za učitelje in učence. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 32–46.
5. Hodnik Čadež, T., Manfreda Kolar, V. (2009). Didaktična sredstva z vidika motivacije pri pouku matematike. V M. Cotič, V. Medved Udovič in M. Cencič (ur.), Pouk v družbi znanja (str. 232–247). Koper: Pedagoška fakulteta.
6. McNeil, N.M., Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add up: Disentangling the Manipulatives Debate. Theory into Practice. Research in the Service of Practice, 46 (4), str. 309–316.
7. Marentič Požarnik, B. (2000). Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.
8. Markovac, J. (1992). Metodika početne nastave matematike. Zagreb: Školska knjiga.
9. Moyer, P.S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 47 (2), str. 175–197.
10. Piaget, J., Inhelder, B. (1967). The Child's Conception of Space. New York: Norton Library.

11. PISA 2012 (2012). Pridobljeno dne 09.05.2015 s svetovnega spleta: [http://www.pei.si/UserFile-Upload/file/raziskovalna\\_dejavnost/PISA/PISA2012/PISA%202012%20Povzetek%20rezultatov%20SLO.pdf](http://www.pei.si/UserFile-Upload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2012/PISA%202012%20Povzetek%20rezultatov%20SLO.pdf).
12. Prigge, G.R. (1978). The Differential Effects of the Use of Manipulative Aids on the Learning of Geometric Concepts by Elementary School Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (5), str. 361–367.
13. Raphael, D., Wahlstrom, M. (1989). The Influence of Instructional Aids on Mathematics Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), str. 173–190.
14. TIMSS 2011 (2011). Pridobljeno dne 12.03.2015 s svetovnega spleta: [http://www.pei.si/UserFile-Upload/file/raziskovalna\\_dejavnost/TIMSS/TIMMS2011/timss11\\_matematicni%20dosezki.pdf](http://www.pei.si/UserFile-Upload/file/raziskovalna_dejavnost/TIMSS/TIMMS2011/timss11_matematicni%20dosezki.pdf).
15. Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno dne 19.04.2012 s svetovnega spleta: [http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni\\_UN/UN\\_matematika.pdf](http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf).
16. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: University of Chicago.
17. Prodanović, T., Ničković, R. (1974). *Didaktika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
18. Sowell, E.J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), str. 498–505.
19. Van de Walle, J.A., Karp, K.S., Bay-Williams, J.M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Eight Edition. Boston: Pearson.

---

*Dr. Sanela Mešinović (1983), višja predavateljica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.*

*Naslov: Kozlovičeva ulica 5, 6000 Koper, Slovenija; Telefon: (+386) 051 364 519*

*E-mail: [sanela.mesinovic@pef.upr.si](mailto:sanela.mesinovic@pef.upr.si)*

*Dr. Mara Cotič (1954), izredna profesorica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.*

*Naslov: Budičinova ulica 3, 6000 Koper, Slovenija; Telefon: (+386) 041 449 784*

*E-mail: [mara.cotic@pef.upr.si](mailto:mara.cotic@pef.upr.si)*

*Dr. Amalija Žakelj (1958), izredna profesorica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze v Kopru.*

*Naslov: Podpeška 93 a, 11351 Brezovica pri Ljubljani, Slovenija; Telefon: (+386) 041 784 936*

*E-mail: [amalija.zakelj@pef.upr.si](mailto:amalija.zakelj@pef.upr.si)*