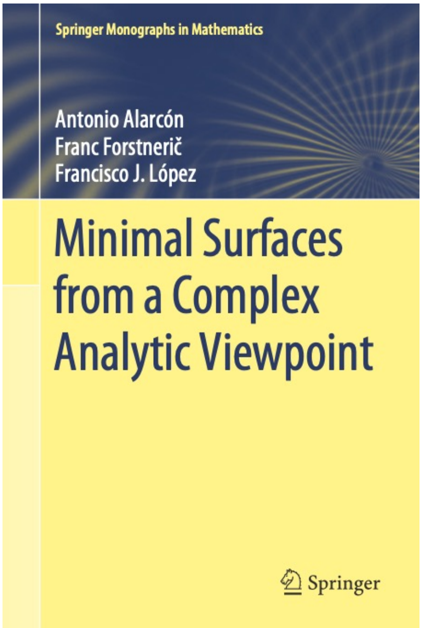
NOVE KNJIGE

A. Alarcón, F. Forstnerič in F. J. López, Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2021, 430 strani.



Teorija minimalnih ploskev je eno klasičnih področij matematike, ki se ukvarja s študijem ploskev z lokalno najmanjšo površino. Začetnik moderne teorije je bil Leonhard Euler, ki je leta 1744 dokazal, da sta edini taki rotacijsko invariantni ploskvi v $\mathbb{R}^3$ ravnina in katenoida, to je ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem vijačnice okoli abscisne osi.

V moderni teoriji minimalnih ploskev se uporabljajo metode iz diferencialne geometrije, geometrijske teorije mere, parcialnih diferencialnih enačb in kompleksne analize. Metode kompleksne analize ene spremenljivke so bile s pridom uporabljene že v klasični teoriji pri študiju ploskev v $\mathbb{R}^3$: Weierstrassova reprezentacijska formula za primeren par meromorfne in holomorfne funkcije lokalno opiše vse minimalne ploskve. V predstavljeni monografiji pa avtorji predstavijo prispevek teorije Oka k študiju minimalnih ploskev. Gre za homotopski princip v kompleksni analizi, ki poda rešljivost analitičnega nelinearnega problema, kadar ni topoloških ovir. Avtorji so v zadnjih desetih letih uporabili teorijo Oka, konveksno integracijo in metodo sprejev, ki ju je uvedel Mikhail Gromov, ter z njihovo pomočjo rešili precej odprtih problemov v teoriji minimalnih ploskev.

Monografija je namenjena ekspertom s področja diferencialne geometrije in kompleksne analize, pa tudi doktorskim študentom in raziskovalcem na sorodnih področjih. Napisana je zelo strukturirano, njeni avtorji so znani po odlični razlagi. Dokazi so ponazorjeni z ilustracijami, ki olajšajo razumevanje tehnično zelo zapletenih konstrukcij. Knjiga je opremljena s številnimi avtorskimi prikazi klasičnih primerov minimalnih ploskev.

Prvi dve poglavji sta uvodnega značaja. V prvem so predstavljene osnove realnih in kompleksnih mnogoterosti, s posebnim poudarkom na enorazsežnih kompleksnih mnogoterostih – Riemannovih ploskvah, na kompleksni aproksimacijski teoriji in teoriji Oka. Drugo poglavje je pregled osnov teorije minimalnih ploskev. Povezava med obema področjema je posledica tega, da je realni del holomorfne funkcije harmonična funkcija in obratno, vsaka harmonična funkcija, ki ima ničelne periode, je realni del holomorfne funkcije. Minimalne ploskve so namreč parametrizirane s konformnimi harmoničnimi preslikavami. Naj bo $\mathcal{A}$ *ničelna kvadrika*

$$\mathcal{A} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}.$$

Pravimo, da je holomorfna imerzija $f \colon M \to \mathbb{C}^n$ iz odprte Riemannove ploskve M *holomorfna ničelna krivulja*, če v vsaki točki njen odvod leži v ničelni kvadriki. Realni deli holomorfnih ničelnih krivulj so konformne minimalne imerzije. Avtorji so ugotovili, da je prebodena ničelna kvadrika $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ mnogoterost Oka, kar jim je omogočilo uporabo homotopskega principa.

V nadaljevanju avtorji predstavijo rezultate, ki so jih razvili s svojimi sodelavci in študenti v zadnjih desetih letih: v tretjem poglavju so izpeljani aproksimacijski in interpolacijski izreki za konformne minimalne imerzije. V četrtem poglavju se posvetijo minimalnim ploskvam s končno totalno Gaussovo ukrivljenostjo. V petem poglavju se osredotočijo na Gaussovo preslikavo minimalne ploskve, ki vsaki točki na minimalni ploskvi v $\mathbb{R}^3$ priredi normalni vektor.

Riemann-Hilbertov robni problem in njegova uporaba pri konstrukciji minimalnih in holomorfnih ničelnih krivulj je osrednja tema šestega poglavja. Njegova aproksimativna rešitev omogoča konstrukcije z natančno kontrolo lege roba. Pravimo, da je ploskev M v $\mathbb{R}^n$ kompletna, če je dolžina vsake poti v M, ki zapusti katero koli kompaktno množico v M, neskončna. Tema sedmega poglavja je problem Calabi-Yau v teoriji minimalnih ploskev: to je vprašanje, katere odprte Riemannove ploskve določajo kompleksno strukturo kompletnih omejenih minimalnih ploskev v $\mathbb{R}^3$. *Končna Riemannova ploskev* je kompaktna Riemannova ploskev z robom, ki je sestavljen iz končnega števila gladkih sklenjenih krivulj. V osmem poglavju avtorji z uporabo Riemann-Hilbertove metode konstruirajo kompletne prave konformne minimalne imerzije iz končnih Riemannovih ploskev v minimalno konveksne domene v $\mathbb{R}^n$. Minimalno konveksne domene so posplošitev konveksnih domen in so definirane s primernimi funkcijami izčrpanja. Delijo si nekatere lastnosti s psevdokonveksnimi domenami v $\mathbb{C}^n$. V devetem poglavju se posvetijo študiju minimalnih ogrinjač z uporabo metod kompleksne in funkcionalne analize.

Barbara Drinovec Drnovšek