Osnove kompleksne analize

MARKO SLAPAR

Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Marko Slapar

Osnove kompleksne analize

Ljubljana, Avgust 2012

Naslov: Osnove kompleksne analize
Avtor: Marko Slapar
Recenzenta: Barbara Drinovec Drnovšek, Jasna Prezelj Perman
Izdala in založila: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani
Za založnika: Janez Krek, dekan
Predmet: Matematika
Dostopno na spletnem naslovu: `http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma/KompleksnaAnaliza.pdf`

Prva izdaja, e-študijsko gradivo (učbenik)

ISBN 978-961-253-097-6

©2012 avtor

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.5

SLAPAR, Marko
Osnove kompleksne analize [Elektronski vir] / Marko Slapar. - 1. izd. - Ljubljana : Pedagoška fakulteta, 2012

Način dostopa (URL): http://hrast.pef.uni-lj.si/ slaparma/KompleksnaAnaliza.pdf

ISBN 978-961-253-097-6 (pdf)

263239936

Vse pravice pridržane. Reproduciranje in razmnoževanje dela po zakonu o avtorskih pravicah ni dovoljeno.

Kazalo

Predgovor

Učbenik je nastal na podlagi predavanj pri predmetu Kompleksna analiza na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, ki se predava študentom matematike v tretjem letniku dodiplomskega študija. Vsebuje osnovne teme kompleksne analize, kot so kompleksna števila, holomorfne funkcije, kompleksna integracija in Taylorjeve ter Laurentove vrste. Od bralca predpostavlja zgolj osnovno znanje realne analize v eni in dveh spremenljivkah. Dokazi trditev so narejeni z vso matematično korektnostjo, vendar je poudarek učbenika na razumevanju konceptov in uporabi kompleksne analize na drugih področjih matematike.

POGLAVJE 1

Kompleksna števila

1.1. Definicija in algebraične lastnosti

Kompleksna števila definiramo kot pare (a,b) dveh realnih števil, za katere definiramo seštevanje kot

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

in množenje kot

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Bolj običajno se odločimo za ekvivalenten zapis $a+ib$, kjer velja

$$i^2=-1.$$

Število i imenujemo *imaginarna enota*. S tem dogovorom seštevamo

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

in množimo

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

Nevtralni element za seštevanje je seveda število $0=0+0i$ in enota za množenje je $1=1+0i$. Nasprotni element številu $a+ib$ je kompleksno število $-a-ib$ in, če $a+ib\neq 0$, število ima inverzni element za množenje $\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$. Velja

Izrek 1.1. *$(\mathbb{C},+,\cdot)$ je komutativen obseg.*

Kompleksna števila se v literaturi prvič pojavijo v drugi polovici 16. stoletja. Glavni razlog za vpeljavo kompleksnih števil se, vsaj zgodovinsko, skriva v naslednjem izreku:

Izrek 1.2 (osnovni izrek algebre). *Vsak nekonstanten polinom ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Kasneje bomo podali kar nekaj različnih dokazov tega izreka.

Poglejmo si nekaj definicij. Naj bo $z = a + ib$ kompleksno število. Označimo z

$$\mathrm{Re}(a + ib) = a,$$
$$\mathrm{Im}(a + ib) = b$$

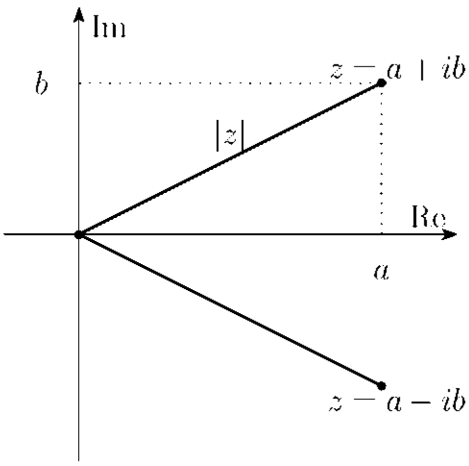
realni del in *imaginarni del* kompleksnega števila z. *Absolutna vrednost* števila $z = a + ib$ je število

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ki predstavlja razdaljo števila $z = a + ib$ do izhodišča kompleksne ravnine. *Konjugirano število* k kompleksnemu številu $z = a + ib$ je število

$$\bar{z} = a - ib,$$

ki je zrcalna slika števila z glede na abscisno os v kompleksni ravnini.



Slika 1.1. Realni in imaginarni del, absolutna vrednost in konjugirano število

Naslednja trditev povsem sledi iz definicij.

Trditev 1.3. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Velja*

(i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
(iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,
(iv) $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Absolutna vrednost ima naslednje lastnosti:

TRDITEV 1.4. *Naj bosta z in w kompleksni števili. Potem velja*

(i) $|z| \geq 0$ *in* $|z| = 0$, *samo če je* $z = 0$,
(ii) $|\bar{z}| = |z|$,
(iii) $|zw| = |z||w|$,
(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *in* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(trikotniška neenakost)*.

DOKAZ. Točki (i) in (ii) preprosto sledita iz definicij. Oglejmo si (iii). Naj bo $z = a + ib$ in $w = c + id$. Potem je $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Torej je

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Točka (iv) pomeni $a^2 \leq a^2 + b^2$ in $b^2 \leq a^2 + b^2$, kar je očitno. Ostane nam torej samo še trikotniška neenakost (v):

$$|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$$

in

$$(|z| + |w|)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

Neenakost bo torej dokazana, če pokažemo

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

Če neenakost kvadriramo, dobimo neenakost

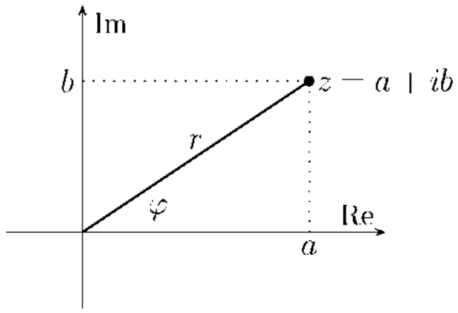
$$a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2$$

oziroma $b^2c^2 + a^2d^2 \geq 2abcd$, kar pomeni $(bc - ad)^2 \geq 0$. □

1.2. Polarni zapis kompleksnega števila

Kompleksno število $z = a + ib$ lahko zapišemo tudi s pomočjo kota φ, ki ga daljica med izhodiščem in točko z oklepa s pozitivno abscisno osjo in razdaljo r točke z do izhodišča.

Polarni kot φ običajno vzamemo na intervalu $[0, 2\pi)$ in ga imenujemo tudi *argument* števila z ter označimo z $\arg z$. Med običajnimi kartezičnimi koordinatami in polarnimi koordinatami števila z veljajo



SLIKA 1.2. Polarni zapis kompleksnega števila

zveze

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

in

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Kot polarni zapis števila $z = a + ib$ razumemo zapis

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

PRIMER 1.5. Naslednja kompleksna števila zapišimo s polarnim zapisom: -3, $1 + i$, $-1 + \sqrt{3}i$. Število -3 ima argument π, saj se nahaja na negativni realni osi in je oddaljeno 3 od izhodišča. Zato je

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Število $1 + i$ ima argument $\pi/4$, saj je točno na simetrali prvega kvadranta in $|1 + i| = \sqrt{2}$, zato

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Število $-1 + \sqrt{3}i$ ima argument $2\pi/3$, nahaja se namreč v drugem kvadrantu in velja $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $|-1 + \sqrt{3}| = 2$, zato

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

□

Polarni zapis je zelo primeren za množenje. Naj bo

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Potem je

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \\ &= r\rho(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta + (\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta)) \\ &= r\rho(\cos(\varphi + \vartheta) + i\sin(\varphi + \vartheta)), \end{aligned}$$

ker smo upoštevali adicijski izrek. Ta račun nam pove, da poleg $|zw| = |z||w|$ velja tudi

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Formulo lahko uporabimo tudi pri potencah števil. Če je

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

je

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

V posebnem primeru, ko je $|z| = 1$, dobimo *de Moivrcovo formulo*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Primer 1.6. Izračunajmo $(1+i)^{100}$. V polarnem zapisu je

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Zato

$$\begin{aligned} (1+i)^{100} &= (\sqrt{2})^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}\right) \\ &= 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi)) \\ &= 2^{50}(-1+0i) = -2^{50}. \end{aligned}$$

□

Poglejmo si še, kako lahko s pomočjo polarnega zapisa rešujemo enačbo $z^n = w$, kjer je $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ dano kompleksno število. Rešitev z prav tako iščemo v polarnem zapisu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Veljati mora

$$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Leva in desna stran bosta enaki le, če bosta enaki absolutni vrednosti obeh števil, kar pomeni $r = \sqrt[n]{\rho}$, in bosta veljali enakosti $\cos(n\varphi) = \cos\vartheta$ ter $\sin(n\varphi) = \sin\vartheta$. Zadnji dve enakosti skupaj veljata le, če za nek $k \in \mathbb{Z}$ velja $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ oziroma $\varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Pri tem je dovolj, da za parameter k vzamemo števila $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Če povzamemo, so rešitve enačbe

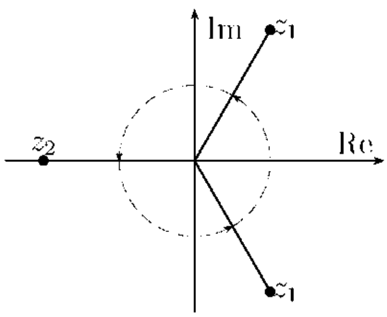
$$z^n = w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

v polarnem zapisu

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right), k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Primer 1.7. Poiščimo vse kompleksne rešitve enačbe $z^3 = -1$. V polarnem zapisu je $-1 = (\cos\pi + i\sin\pi)$. Zato so rešitve enačbe

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
z_2 &= \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1,\\
z_3 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$



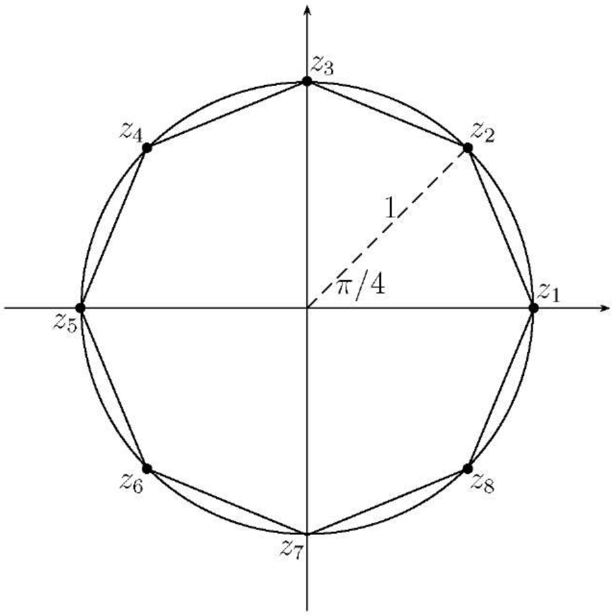
Slika 1.3. Rešitve enačbe $z^3 = -1$

$\square$

Primer 1.8. Poiščimo vse kompleksne rešitve enačbe $z^n = 1$. V polarnem zapisu je $1 = (\cos 0 + i\sin 0)$. Zato so rešitve enačbe

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Rešitve enačbe so torej enakomerno porazdeljene po enotski krožnici, predstavljajo oglišča pravilnega n kotnika, pri čemer je eno od oglišč 1. Narišimo primer, ko je $n = 8$.



SLIKA 1.4. Osmi koreni enote

1.3. Topologija kompleksne ravnine

Kompleksno ravnino lahko na naraven način enačimo z ravnino $\mathbb{R}^2$. Razdalja med dvema točkama $z_1 = x_1 + iy_1$ in $z_2 = x_2 + iy_2$ je podana z

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

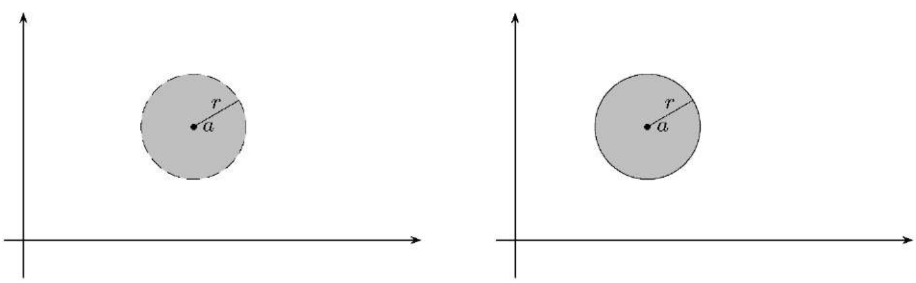
in je enaka razdalji med točkama (x_1, y_1) ter (x_2, y_2) v $\mathbb{R}^2$. Z

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| < r\}$$

in

$$\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| \leq r\}$$

podamo odprt in zaprt krog s polmerom r okrog točke a.



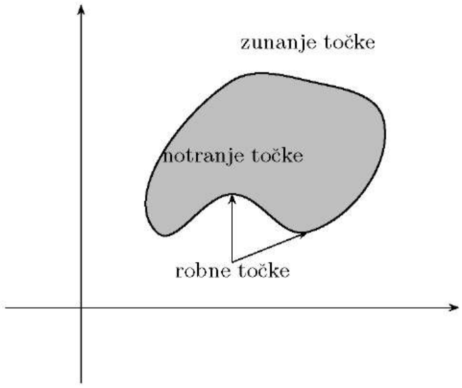
SLIKA 1.5. Odprt in zaprt krog s središčem v a in radijem r

DEFINICIJA 1.9. Naj bo $D \subset \mathbb{C}$. Točka $a \in D$ je *notranja točka* množice D, če obstaja tak ε, da je $D(a, \varepsilon) \subset D$. Točka $b \in \mathbb{C}$ je robna točka množice D, če za vsak $\varepsilon > 0$ krog $D(b, \varepsilon)$ seka tako D kot $\mathbb{C} \backslash D$. Točka $c \in \mathbb{C}$ je *zunanja točka* D, če je c notranja točka množice $\mathbb{C} \backslash D$.

Seveda velja

$$\mathbb{C} = \{\text{notranje točke } D\} \cup \{\text{robne točke } D\} \cup \{\text{zunanje točke } D\},$$

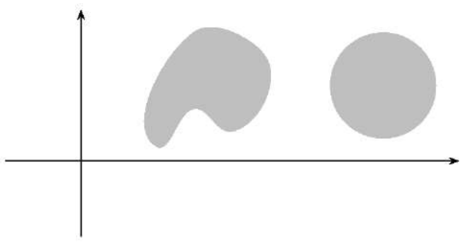
pri čemer gre za disjunktno unijo.



SLIKA 1.6. Notranje, zunanje in robne točke množice

DEFINICIJA 1.10. Množica $D \subset \mathbb{C}$ je *odprta*, če je vsaka točka $a \in D$ notranja točka množice D. Množica $F \subset \mathbb{C}$ je *zaprta*, če vsebuje vse svoje robne točke.

DEFINICIJA 1.11. Odprta množica $D \subset \mathbb{C}$ je *povezana*, če je ne moremo napisati kot disjunktno unijo dveh nepraznih odprtih množic. Odprto povezano množico imenujemo *območje*.



SLIKA 1.7. Nepovezana odprta množica

DEFINICIJA 1.12. *Pot* v $\mathbb{C}$ je zvezna preslikava $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$. Če velja, da je $\gamma(0) = \gamma(1)$, je pot *sklenjena*, in če je poleg tega zožitev

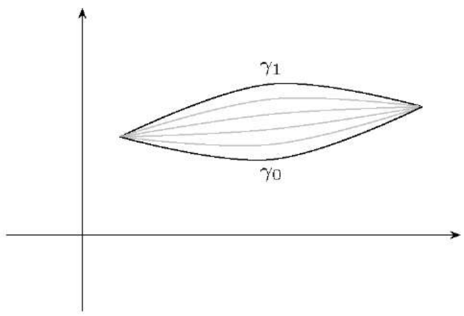
$\gamma\colon (0,1) \to \mathbb{C}$ injektivna, je γ *enostavno sklenjena*. *Tir poti* je zaloga vrednosti $\gamma([0,1])$, označimo ga z γ^*. Pot γ je (kosoma) gladka, če je γ zvezno odvedljiva (razen v končno mnogo točkah).

Dve poti $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to D \subset \mathbb{C}$ sta *homotopni v* D, če obstaja zvezna preslikava

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to D,$$

da velja

$$F(t,0) = \gamma_0(t) \text{ in } F(t,1) = \gamma_1(t).$$



SLIKA 1.8. Homotopija med potema γ_0 in γ_1

Pogosto označimo $\gamma_s(t) = F(t,s)$. Če sta poti γ_0 in γ_1 sklenjeni, pri homotopiji zahtevamo še, da so vse poti γ_s tudi sklenjene. Za (sklenjeno) pot γ rečemo, da je *homotopna konstanti*, če je homotopna konstantni poti $\gamma_1(t) = p \in D$ za $t \in [0,1]$.

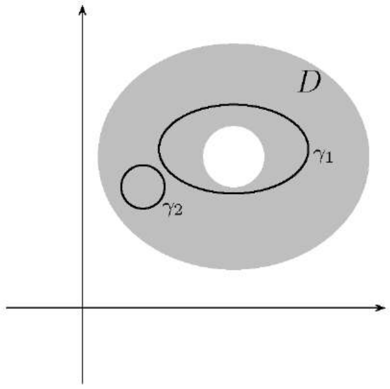
DEFINICIJA 1.13. Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ poljubna podmožica. Če za poljubni točki $a, b \in D$ obstaja pot $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, za katero velja $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ in $\gamma([0,1]) \subset D$, rečemo, da je množica D *povezana s potmi*.

Vsaka s potmi povezana množica je tudi povezana, obrat pa velja samo za množice, ki so lokalno povezane s potmi. Med drugim velja

IZREK 1.14. *Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ odprta množica. Potem je množica D povezana natanko tedaj, ko je povezana s potmi.*

DEFINICIJA 1.15. Množica $D \subset \mathbb{C}$ je *enostavno povezana*, če je vsaka sklenjena pot v D homotopna konstanti.

DEFINICIJA 1.16. Množica $K \subset \mathbb{C}$ je *kompaktna*, če je zaprta in omejena.



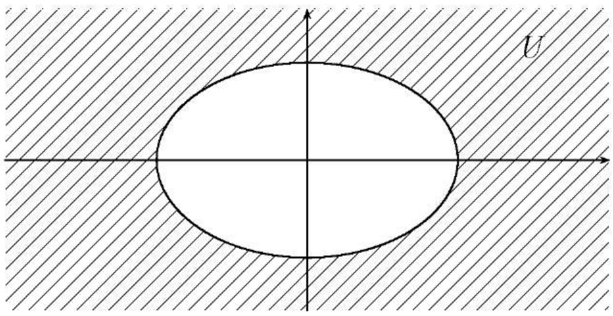
SLIKA 1.9. γ_2 je homotopna konstanti v D, γ_1 pa ne. Območje D ni enostavno povezano.

1.4. Stereografska projekcija in Riemannova sfera

DEFINICIJA 1.17. *Razširjena kompleksna ravnina* je množica $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pri čemer definiramo za $a \in \widehat{\mathbb{C}}$:

(i) $a + \infty = \infty + a = \infty$,
(ii) če $a \neq 0$ je $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
(iii) če $a \neq \infty$ je $\frac{a}{\infty} = 0$ in če $a \neq 0$ je $\frac{a}{0} = \infty$.

Množica $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ je odprta okolica točke ∞, če je $\widehat{\mathbb{C}} \backslash U$ kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.



SLIKA 1.10. Odprta okolica U točke ∞

Poglejmo si sedaj, kako si lahko na drugačen način, prek *stereografske projekcije*, predstavljamo razširjeno kompleksno ravnino. Naj bo $\mathbb{S}$ enotska sfera v $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Točko $N = (0,0,1)$ imenujemo *severni pol* sfere. Kompleksno ravnino $\mathbb{C}$ si prek identifikacije $z = x + iy \mapsto (x, y, 0)$ lahko predstavljamo kot xy-ravnino v $\mathbb{R}^3$.

Stereografska projekcija je preslikava

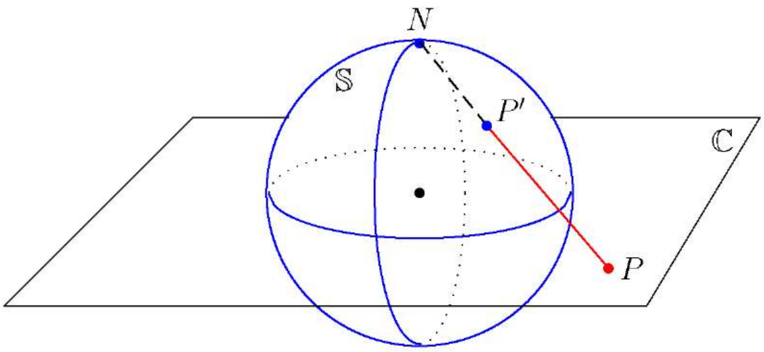
$$\phi\colon \mathbb{S} \to \widehat{\mathbb{C}},$$

ki jo definiramo takole: Naj bo $T = (x, y, z) \in \mathbb{S}\backslash\{N\}$ in točka $(x_T, y_T, 0)$ tista točka, ki je presek premice skozi N in T z xy-ravnino. Definiramo

$$\phi(T) = x_T + iy_T \in \mathbb{C}.$$

Za severni pol N definiramo

$$\phi(N) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}.$$



SLIKA 1.11. Stereografska projekcija točke P'

Naslednjo trditev lahko preprosto dokažemo.

TRDITEV 1.18. *Preslikava ϕ je na $\mathbb{S}\backslash\{N\}$ podana s formulo*

$$\phi(x, y, z) = \frac{x - iy}{1 - z}.$$

Inverzna preslikava je podana z

$$\phi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

DOKAZ. Naj bo $(x, y, z) \in \mathbb{S}\backslash\{N\}$. Premico skozi N in (x, y, z) parametriziramo z

$$t \mapsto (tx, ty, 1 + (z - 1)t), \quad t \in \mathbb{R},$$

in seka ravnino xy v točki

$$\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right).$$

S tem smo dobili formulo za ϕ. Da dobimo inverzno formulo, moramo določiti presečišče premice skozi N in $(x, y, 0)$ s sfero $\mathbb{S}$. Parametrizacija te premice je

$$t \mapsto (tx, ty, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Premica seka $\mathbb{S}$ natanko tedaj, ko za nek t velja

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = 1,$$

kar se zgodi pri $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$. Če to vstavimo to nazaj v parametrizacijo premice, dobimo točko

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right).$$

$\square$

Stereografska projekcija je torej bijekcija med sfero $\mathbb{S}$ in razširjeno kompleksno ravnino. Iz zapisa sledi, da je preslikava ϕ zvezna v vsaki točki $(x, y, z) \in \mathbb{S}\backslash\{N\}$ in ima tam tudi zvezen inverz. Lahko se prepričamo, da je ϕ zvezna tudi v točki N in da je inverz zvezen v ∞. Stereografska projekcija je torej homeomorfizem med $\mathbb{S}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$. Razširjeni kompleksni ravnini zato pogosto rečemo *Riemannova sfera*.

Krožnice na sferi $\mathbb{S}$ so definirane kot preseki sfere $\mathbb{S}$ z ravninami v $\mathbb{R}^3$. Pokažimo naslednjo trditev.

TRDITEV 1.19. *Naj bo $\mathbb{S}$ enotska sfera v $\mathbb{R}^3$ in ϕ stereografska projekcija.*

(i) *Naj bo K krožnica na sferi $\mathbb{S}$, ki vsebuje točko N. Potem je $\phi(K\backslash\{N\})$ premica na kompleksni ravnini $\mathbb{C}$. Obratno je vsaka premica na kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ slika $K\backslash\{N\}$ za neko krožnico K, ki vsebuje točko N.*

(ii) *Naj bo K krožnica na sferi $\mathbb{S}$, ki ne vsebuje točke N. Potem je $\phi(K)$ krožnica v $\mathbb{C}$. Vsaka krožnica v $\mathbb{C}$ je slika neke krožnice $K \subset \mathbb{S}$, ki ne vsebuje točke N.*

Dokaz. Ravnino Σ v $\mathbb{R}^3$ lahko napišemo z enačbo

$$ax + by + cz = d,$$

pri čemer lahko predpostavimo, da velja $a^2+b^2+c^2 = 1$. Če naj ravnina seka sfero $\mathbb{S}$ v krožnici, mora veljati $-1 < d < 1$, saj je $|d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ razdalja ravnine do izhodišča. Nadalje lahko predpostavimo, da je $d \geq 0$, saj lahko v obratnem primeru zamenjamo (a, b, c) z $(-a, -b, -c)$. Krožnica $K = \mathbb{S} \cap \Sigma$ vsebuje točko N natanko tedaj, ko velja $c = d$. Iz trditve 1.18 sledi, da je točka $(x, y, 0)$ v sliki $\phi(K\backslash\{N\})$ natanko tedaj, ko velja

$$a\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) + b\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) + c\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) = c$$

oziroma

$$ax + by = c.$$

Pokažimo še obrat. Naj bo sedaj $ax + by = c$ enačba neke premice p v ravnini. Predpostavimo lahko, da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ in $c \geq 0$. Seveda potem velja tudi $c < 1$. Po zgornjem razmisleku je premica p slika krožnice

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = c\} \cap \mathbb{S},$$

ki vsebuje točko N. S tem smo točko (i) dokazali. Naj sedaj velja $N \notin K$. Točka $(x, y, 0)$ je v sliki $\phi(K)$ natanko tedaj, ko velja

$$a\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right) + b\left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) + c\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) = d.$$

Če poračunamo, dobimo enačbo

$$\left(x + \frac{a}{c-d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c-d}\right)^2 = \frac{1-d^2}{(c-d)^2}.$$

Ker je $0 \leq d < 1$, smo dobili enačbo krožnice v ravnini xy. Zopet lahko preverimo, da pri primerni izbiri ravnine Σ na ta način dobimo vsako krožnico v ravnini. □

1.5. Linearne lomljene transformacije

Definicija 1.20. *Linearna lomljena transformacija* je funkcija oblike

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in velja $c^2 + d^2 \neq 0$. Če dodatno velja $ad - bc \neq 0$, je f *Möbiusova transformacija.*

Linearna lomljena preslikava je definirana na $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$, v kolikor je $c \neq 0$. Če je $c = 0$, pa je linearna lomljena preslikava preprosto linearna preslikava $f(z) = (az + b)/d$. Poglejmo, da je $ad - bc \neq 0$ natanko pogoj, ki ga potrebujemo, da je linearna lomljena transformacija injektivna:

$$\begin{aligned}
&\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \Leftrightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d) \\
&\Leftrightarrow (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0.
\end{aligned}$$

V tem primeru je inverz linearne lomljene transformacije enak

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

kar lahko enostavno preverimo. Möbiusovo transformacijo

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

torej lahko razumemo kot bijekcijo $f\colon \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}$, če $c \neq 0$, oziroma kot bijekcijo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, če je $c = 0$. Inverz Möbiusove transformacije je zopet Möbiusova transformacija. Möbiusovo transformacijo lahko razumemo tudi kot bijekcijo Riemannove sfere $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, pri čemer definiramo

$$f(-d/c) = \infty, \quad f(\infty) = a/c,$$

če $c \neq 0$, oziroma

$$f(\infty) = \infty,$$

če je $c = 0$. Vsako Möbiusovo transformacijo

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \ c \neq 0$$

lahko zapišemo v obliki

$$f(z) = \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{d}.$$

Torej velja

Trditev 1.21. *Vsaka Möbiusova transformacija je kompozicija premika, inverzije $z \mapsto 1/z$, raztega in še enega premika.*

TRDITEV 1.22. *Vsaka Möbiusova transformacija $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ preslika premice in krožnice v premice in krožnice.*

DOKAZ. Tako premik kot razteg očitno preslikata krožnice v krožnice in premice v premice. Poglejmo sedaj, da inverzija $h(z) = 1/z$ preslika krožnice in premice v krožnice in premice (ne preslika pa nujno premic v premice in krožnic v krožnice). Ker je vsaka Möbiusova transformacija kompozicija teh preslikav, bo s tem trditev dokazana. Naj bo $\phi\colon \mathbb{S}\backslash\{N\} \to \mathbb{C}$ stereografska projekcija in $z = x + iy$. Trditev 1.18 nam da

$$\phi\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) = z.$$

Točka

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{-2y}{x^2+y^2+1}, -\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

prav tako leži na enotski sferi in velja

$$\phi\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{-2y}{x^2+y^2+1}, -\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

Če definiramo $j\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ z

$$j(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3),$$

smo pokazali, da je

$$h(z) = \phi \circ j \circ \phi^{-1}(z).$$

Ker j ohranja krožnice in stereografska projekcija preslika krožnice v premice in krožnice, tudi h preslika premice in krožnice v premice in krožnice. S tem je trditev dokazana. □

PRIMER 1.23. Poglejmo si Möbiusovo transformacijo

$$f(z) = \frac{iz+1}{z+i}.$$

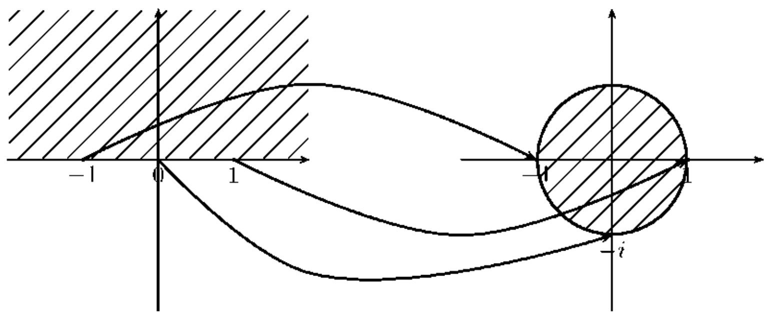
Ker vsaka Möbiusova transformacija preslika premice in krožnice v premice in krožnice, mora biti slika realne osi s preslikavo f bodisi krožnica bodisi premica. Ker velja

$$f(0) = -i, \; f(-1) = -1 \text{ in } f(1) = 1,$$

je edina možnost, da slika realne osi leži na enotski krožnici $|z| = 1$. Če f razširimo na razširjeno kompleksno ravnino, velja $f(\infty) = i$, zato

$$f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Ker velja še $f(i) = 0$, se celotna zgornja polravnina mora preslikati v notranjost enotskega kroga.



SLIKA 1.12. Möbiusova transformacija $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

□

Naloge

(1) Naj bo $z = 2 + 3i$ in $w = 1 - i$. Izračunaj
  (a) $z + 5w$,
  (b) $\bar{z} - w$,
  (c) $z^2 + \bar{z} - 1$,
  (d) $\operatorname{Im}(zw + w^2)$,
  (e) $\frac{w}{z}$.

(2) Naj bo $|z| = 1$, $z \neq 1$. Pokaži, da je

$$i\frac{z+1}{z-1}$$

realno število.

(3) Dokaži posplošeno trikotniško neenakost

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

(4) Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja $\frac{1}{z} = z$.

(5) Poišči vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo enačbi $2|z| = |z+i|$.

(6) Napiši naslednja števila v polarni obliki: $1-i$, $-3+\sqrt{3}i$ in $-i$.

(7) Poišči vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo enačbi

$$z^4 = -8+8\sqrt{3}i.$$

(8) Pokaži, da za vsak $z \neq 0$ velja

$$\left|\frac{\bar{z}}{z}-1\right| \leq \arg z$$

(9) Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}$. Pokaži, da sta obe rešitvi kvadratne enačbe $z^2-2az+b = 0$ na enotski krožnici natanko tedaj, ko velja $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $\arg b = 2\arg a$.

(10) S pomočjo de Moivreove formule izpelji

(a) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$,

(b) $\sin 3\alpha = -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha$

(11) Skiciraj množice in povej, ali so odprte, zaprte, omejene, povezane, kompaktne.

(a) $|z+1| < 2$

(b) $|\operatorname{Im} z| \geq 1$

(c) $0 < |z-1| < 2$

(d) $|z-1|+|z+1| = 2$

(e) $\operatorname{Re} z^2 \geq 1$

(12) Pokaži, da je kolobar $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ povezana množica. Ali je enostavno povezana?

(13) Pokaži, da je presek dveh območij območje. Kdaj je unija dveh območij tudi območje?

(14) Pokaži, da je množica $K \subset \mathbb{C}$ kompaktna natanko tedaj, ko ima vsako zaporedje v K stekališče v K.

(15) Poišči slike točk s stereografsko projekcijo: $(0,0,-1)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$ in $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$.

(16) Kaj je slika krožnice $\mathbb{S} \cap \{x+y-z = 0\}$ s stereografsko projekcijo?

(17) Kaj je slika krožnice $\mathbb{S} \cap \{x+y+z = 1\}$ s stereografsko projekcijo?

(18) Naj bodo z_1, z_2, z_3 tri različne nekolinearne točke. Naj bo z poljubna točka iz $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, z_3\}$. Dokaži, da točka z leži na krožnici skozi z_1, z_2 in z_3 natanko tedaj, ko je

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

realno število.

(19) Poišči Möbiusovo transformacijo, ki preslika 1 v 0, $1 - i$ v 1 in 3 v ∞.

(20) Poišči sliko realne in kompleksne osi z Möbiusovo transformacijo

$$\frac{z + 1}{z - 1}.$$

(21) Poišči sliko pasu $0 < \operatorname{Re} z < 1$ z Möbiusovo transformacijo

$$\frac{z}{z - 1}.$$

(22) Pokaži, da se vsako Möbiusovo transformacijo, ki preslika enostski krog sam vase, lahko napiše v obliki

$$B(z) = \zeta \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z},$$

kjer je $|\zeta| = 1$ in $|z_0| < 1$.

POGLAVJE 2

Kompleksne funkcije

2.1. Definicija odvoda kompleksnih funkcij

DEFINICIJA 2.1. *Kompleksna funkcija* je preslikava $f\colon D \to \mathbb{C}$, kjer je D podmnožica kompleksnih števil.

Vsako kompleksno funkcijo $f\colon D \to \mathbb{C}$ lahko pišemo v obliki

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kjer smo pisali $z = x + iy$ in sta $u, v\colon D \to \mathbb{R}$ realni funkciji na množici D, in kjer D razumemo kot podmnožico $\mathbb{R}^2$. Na ta način si lahko kompleksne funkcije predstavljamo kot preslikave

$$f\colon D \to \mathbb{R}^2, \ D \subset \mathbb{R}^2.$$

PRIMER 2.2. Poglejmo si to na primeru funkcije $f(z) = z^2$. Če pišemo $z = x + iy$, velja

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Kompleksno funkcijo f si lahko predstavljamo kot preslikavo

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$. Torej

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ in } v(x, y) = 2xy.$$

$\square$

DEFINICIJA 2.3. Kompleksna funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ je *zvezna v točki* $z_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, če je le $|z - z_0| < \delta$. Funkcija je *zvezna na D*, če je zvezna v vsaki točki množice D.

PRIMER 2.4. Funkcija $f(z) = z$ je zvezna v vsaki točki $z_0 \in \mathbb{C}$, saj je $|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| = |z - z_0|$, zato lahko vzamemo kar $\delta = \varepsilon$. $\square$

Definicija 2.5. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke z_0, razen morda v z_0. Število A je *limita funkcije f v točki* z_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(z) - A| < \varepsilon$, čim je $|z - z_0| < \delta$, $z \neq z_0$.

Opomba 2.6. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke z_0. Funkcija f je torej zvezna v točki z_0 natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Opomba 2.7. Naj bo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ razcep funkcije na realni in imaginarni del in naj bo $z_0 = x_0 + iy_0$. Funkcija f je zvezna v z_0 natanko tedaj, ko sta v (x_0, y_0) zvezni obe funkciji u in v. Prav tako limita funkcije f v z_0 obstaja natanko tedaj, ko obstajata limiti

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y), \\ A_2 &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y). \end{aligned}$$

Velja

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A_1 + iA_2.$$

□

Definicija 2.8. Kompleksna funkcija $f = u + iv$ je *razreda $\mathcal{C}^n$* na odprti množici $D \subset \mathbb{C}$, če sta razreda $\mathcal{C}^n$ na D realni del u in imaginarni del v. To pomeni, da obstajajo vsi parcialni odvodi funkcij u in v do vključno reda n in so zvezni. Če obstajajo vsi parcialni odvodi, ne glede na stopnjo, rečemo, da je f *razreda $\mathcal{C}^\infty$*.

Naslednja definicija je pravzaprav osnova področja kompleksne analize.

Definicija 2.9. Naj bo funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ definirana na odprti množici D in naj bo $z_0 \in D$. Če obstaja limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

jo imenujemo *kompleksni odvod* funkcije f v točki z_0 in označimo z $f'(z_0)$.

PRIMER 2.10. Funkcija $f(z) = z$ ima kompleksni odvod v vsaki točki $z_0 \in \mathbb{C}$, saj je

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Poglejmo, da funkcija $g(z) = z$ ni kompleksno odvedljiva v nobeni točki $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}.$$

Ta limita bi morala obstajati ne glede na to, kako se z približuje točki z_0. Posebej bi morali obstajati limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{(z_0 + h) - z_0}}{h}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\overline{(z_0 + ih) - z_0}}{ih},$$

kjer je h realno število. Hitro vidimo, da je prva limita enaka 1, druga limita pa -1. Zato funkcija nima kompleksnega odvoda. Pri kompleksnem odvodu je torej zgodba precej drugačna kot pri definiciji zveznosti kompleksnih funkcij. Kompleksna funkcija $u + iv$ je torej lahko izredno lepa, pa vseeno ne bo kompleksno odvedljiva. Kot smo namreč videli, je $f(x + iy) = x + iy$ odvedljiva, $g(x) = x - iy$ pa ne, kljub temu da sta obe funkciji razreda $\mathcal{C}^\infty$. V naslednjem razdelku bomo videli, da je kompleksna odvedljivost odvisna od tega, v kakšni zvezi so si parcialni odvodi funkcij u in v. □

Za odvod kompleksne funkcije veljajo vsa običajna pravila, kot veljajo v realnem (pravilo za odvod vsote in razlike, Leibnizovo pravilo, pravilo za odvod kvocienta, verižno pravilo). Dokazi so povsem enaki, kot so v realnem.

2.2. Holomorfne funkcije in Cauchy-Riemannove enačbe

DEFINICIJA 2.11. Kompleksna funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ razreda $\mathcal{C}^1$ je *holomorfna* na odprti množici $D \subset C$, če je kompleksno odvedljiva v vsaki točki $z_0 \in D$.

OPOMBA 2.12. Iz predpostavke, da mora biti $f = u + iv$ kompleksno odvedljiva v z_0, sledi, da sta tako u kot v diferenciabilni v z_0. Pri definiciji holomorfne funkcije smo zahtevali, da je f, torej u in v, razreda $\mathcal{C}^1$, kar je malenkost več kot le diferenciabilnost. Ta predpostavka je sicer odveč, vendar so nekateri dokazi v nadaljevanju brez nje nekoliko daljši. □

Naj bo

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ razcep funkcije na njen realni in imaginarni del. Naj odvod $f'(z_0)$ v točki z_0 obstaja:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ta limita mora obstajati ne glede na to, kako se z približuje točki z_0, rezultat mora biti vedno isti. Recimo, da se z približuje z_0 "vodoravno", to pomeni, da je $z = z_0 + h = (x_0 + h) + iy_0$, kjer je $h \in \mathbb{R}$. V tem primeru je zgornja limita enaka

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h} = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Recimo sedaj, da se z približuje z_0 "navpično". Torej je $z = z_0 + ih = x_0 + i(y_0 + h)$, kjer je $h \in \mathbb{R}$. V tem primeru je limita enaka

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0 + h)}{ih} = \\
&- i \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0 + h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} = \\
&- i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Če naj bosta obe limiti enaki, mora veljati

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

IZREK 2.13. *Funkcija $f = u + iv$ razreda $\mathcal{C}^1$ je holomorfna natanko tedaj, ko zadošča Cauchy-Riemannovima (CR) enačbama*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

DOKAZ. Pokazali smo že, da mora holomorfna funkcija zadoščati CR enačbama. Pokažimo sedaj še obrat. Po predpostavki sta tako u kot v diferenciabilni. Zato velja

$$\begin{aligned}f(z) - f(z_0) = u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0)) = \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) + \nu,\end{aligned}$$

kjer velja

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\nu}{|z-z_0|} = 0.$$

Če upoštevamo Cauchy-Riemannovi enačbi, lahko to prepišemo kot

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(z-z_0) + \nu.$$

Limita

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

torej obstaja in je enaka $u_x(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)$. □

Cauchy-Riemannovi enačbi lahko ekvivalentno zapišemo v obliki

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y},$$

saj je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

in

$$-i\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Poglejmo še en možen zapis. Definirajmo parcialna odvoda $\frac{\partial}{\partial z}$ in $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ kot

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Potem sta CR enačbi ekvivalentni enačbi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0.$$

PRIMER 2.14. Poglejmo, ali je funkcija

$$f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$$

holomorfna. Preveriti moramo Cauchy-Riemannovi enačbi.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -6xy$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 6xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 1$$

Ker je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

je funkcija holomorfna. Če v formulo za f vstavimo

$$x = \frac{z+\bar z}{2}, \quad y = \frac{z-\bar z}{2i}$$

dobimo

$$f(z) = z^3 + z + 1.$$

Ta zapis ne vsebuje $\bar z$. Na splošno, vsaj pri polinomih $p(z,\bar z)$ velja, da je tak polinom holomorfen natanko tedaj, ko v svojem zapisu ne vsebuje spremenljivke $\bar z$, saj je le tedaj $\frac{\partial p}{\partial \bar z} = 0$. □

TRDITEV 2.15. *Naj bo D povezana množica. Potem je $f'(z) = 0$ za vsak $z \in D$ natanko tedaj, ko je $f \equiv C$ za neko konstanto $C \in \mathbb{C}$.*

DOKAZ. V eno smer je trditev očitna. Predpostavimo, da je $f'(z) = 0$ za vsak $z \in D$. Naj bo $f = u + iv$ in naj bo γ poljubna horizontalna daljica, vsebovana v D. Naj γ povezuje točki $z_1 = x_1+iy$ in $z_2 = x_2+iy$. Potem je $f(z_2) - f(z_1) = u(x_2,y) - u(x_1,y) + i(v(x_2,y) - v(x_1,y)) = u_x(\xi_1,y)(x_2 - x_1) + iv_x(\xi_2,y)(x_2 - x_1) = 0$, kar sledi iz Lagrangeovega izreka v eni spremenljivki. Torej je $f(z_1) = f(z_2)$. Podobno dokažemo, da je za vsako vertikalno daljico v D, ki povezuje točki w_1 in w_2, prav tako $f(w_1) = f(w_2)$. Ker lahko poljubni točki $z, z' \in D$ povežemo z lomljeno črto, ki sestoji le iz horizontalnih in vertikalnih daljic, velja $f(z) = f(z')$ za poljubni točki. S tem je dokaz končan. □

Definicija 2.16. Če je funkcija $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna na celi kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, rečemo, da je f *cela funkcija*.

2.3. Harmonične funkcije

Definicija 2.17. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica. Realna ali kompleksna funkcija f razreda $\mathcal{C}^2$, definirana na D, je *harmonična* na D, če velja

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Naj bo sedaj

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

holomorfna funkcija na odprti množici $D \subset \mathbb{C}$. Potem f zadošča CR enačbama

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Zaenkrat predpostavimo, da sta tako u kot v dvakrat zvezno parcialno odvedljivi. Kot bomo videli kasneje, je ta predpostavka odveč, saj so vse holomorfne funkcije dejansko neskončnokrat odvedljive. Zato velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \\
&\overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.
\end{aligned}$$

Povsem analogno pokažemo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dobimo naslednji izrek:

Izrek 2.18. *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na odprti množici $D \subset \mathbb{C}$. Potem sta tako $\operatorname{Re} f$ kot $\operatorname{Im} f$ (in s tem tudi f) harmonični na D.*

V naslednjem poglavju bomo dokazali tudi nekakšen obrat:

Izrek 2.19. *Naj bo $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija, definirana na enostavno povezanem območju $D \subset \mathbb{C}$. Potem obstaja taka harmonična funkcija $v\colon D \to \mathbb{R}$, da je $f = u + iv$ holomorfna na D. Funkcijo v imenujemo harmonična konjugiranka funkcije u in je določena do aditivne konstante natančno.*

Primer 2.20. Pokažimo, da je funkcija $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y + x$ harmonična na $\mathbb{C}$, in poiščimo holomorfno funkcijo f na $\mathbb{C}$, katere realni del je ravno u. Funkcija u je harmonična, saj velja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 6x + e^x \cos y - 6x - e^x \cos y = 0.$$

Poiščimo harmonično konjugiranko k funkciji u. Ker mora biti $u + iv$ holomorfna, mora zadoščati CR enačbama

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -6xy - e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Če upoštevamo samo drugo enačbo in integriramo po x obe strani, dobimo

$$v(x,y) = 3x^2 y + e^x \sin y + C(y),$$

kjer je $C(y)$ neodvisna od x, torej je lahko odvisna le od spremenljivke y. Vstavimo v v prvo enačbo in dobimo

$$3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + e^x \cos + C'(y)$$

oziroma $C'(y) = 1 - 3y^2 \Rightarrow C(y) = y - y^3 + c$, kjer je c neka realna konstanta. Torej je

$$v(x,y) = 3x^2 y + e^x \sin y + y - y^3 + c.$$

Iskana funkcija f je

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y + x + i(3x^2 y + e^x \sin y + y - y^3 + c).$$

Če pišemo $z = x + iy$, lahko funkcijo f napišemo v obliki

$$f(z) = z^3 + z + e^x(\cos y + i \sin y) + c.$$

Kot bomo videli v naslednjem razdelku, je izraz $e^x(\cos y + i \sin y)$ ravno definicija kompleksne eksponentne funkcije e^z. Zato je

$$f(z) = z^3 + z + e^z + c.$$

□

2.4. Primeri holomorfnih funkcij

V tem razdelku bomo pogledali, kako razširimo definicije običajnih elementarnih funkcij, ki so definirane v realnem, na kompleksno ravnino. Vse tako definirane funkcije so holomorfne.

Kompleksna eksponentna funkcija.

DEFINICIJA 2.21. *Kompleksna eksponentna funkcija e^z* je definirana na vsej kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ s predpisom

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

kjer je $z = x + iy$.

TRDITEV 2.22. *Funkcija e^z je cela funkcija (torej je holomorfna na celi kompleksni ravnini).*

DOKAZ. Preverimo, da za kompleksno funkcijo e^z veljata CR enačbi. Pišimo $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$, kjer je $u(x, y) = e^x \cos y$ in $v(x, y) = e^x \sin y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Torej je funkcija holomorfna. □

Poglejmo si nekaj lastnosti eksponentne funkcije.

TRDITEV 2.23. *Za eksponentno funkcijo veljajo naslednje lastnosti:*

(i) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$,

(ii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,
(iii) $e^{z+2\pi i} = e^z$,
(iv) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,
(v) $e^z \neq 0$ *za vsak* $z \in \mathbb{C}$,
(vi) $(e^z)' = e^z$.

Dokaz. (i) Pišimo $z_1 = x_1 + iy_1$ in $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) \\ &= e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^{-z}, \end{aligned}$$

(iii)

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i\sin(y + 2\pi)) = e^z,$$

(iv)

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = e^x.$$

(v) Recimo, da je $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = 0$. Ker e^x ni nikoli 0, in je $|\cos y + i\sin y| = 1$, produkt ne more biti 0.

(vi) Za holomorfno funkcijo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$. Torej je

$$(e^z)' = \frac{\partial(e^x(\cos y + i\sin y))}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

□

Opomba 2.24. Iz definicije eksponentne funkcije lahko razberemo *Eulerjevo formulo*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

S pomočjo te formule je polarni zapis $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleksnega števila ekvivalenten zapisu $re^{i\varphi}$. Tak zapis pogosto omogoča nekoliko lažje računanje s kompleksnimi števili. □

Kompleksna sinus in kosinus.

DEFINICIJA 2.25. Kompleksni sinus in kosinus definiramo kot

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Poglejmo, da sta tako definirani funkciji zares razširitvi običajnih funkcij sinus in kosinus, definiranih na realni osi:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{\cos x + i \sin x - \cos(-x) - i \sin(-x)}{2i} = \sin x,$$

pri čemer je prvi kompleksni sinus, drugi pa običajni sinus. Kompleksni funkciji $\sin z$ in $\cos z$ sta definirani in holomorfni na celi kompleksni ravnini, saj je taka funkcija e^z. Vse naslednje trditve lahko zelo preprosto izpeljemo iz zgornjih lastnosti za eksponentno funkcijo.

TRDITEV 2.26. *Za kompleksni sinus in kosinus veljajo naslednje lastnosti:*

(i) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
(ii) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$,
(iii) $\sin(z - \pi/2) = \cos z$, $\cos(z - \pi/2) = \sin z$,
(iv) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,
(v) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,
(vi) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
(vii) $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$.

TRDITEV 2.27. *Funkciji* $\sin z$ *in* $\cos z$ *imata le realne ničle.*

DOKAZ. Poglejmo si ničle funkcije $\sin z$. Iz definicije sledi, da je $\sin z = 0$ natanko tedaj, ko je $e^{iz} = e^{-iz}$ oziroma

$$e^{2iz} = 1.$$

Pišimo $z = x + iy$. Torej velja

$$e^{-2y}(\cos(2x) + i \sin(2x)) = 1.$$

Ker je $|e^{-2y}(\cos(2x) + i \sin(2x))| = e^{-2y} = 1$, je $y = 0$ in je $z \in \mathbb{R}$. Podobno velja za funkcijo $\cos z$. $\square$

Torej so edine ničle funkcije $\sin z$ enake $z = k\pi$ in ničle funkcije $\cos z$ enake $\pi/2 + k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Kompleksne hiperbolične funkcije.

DEFINICIJA 2.28. Kompleksni hiperbolični sinus in kompleksni hiperbolični kosinus definiramo kot

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Ker sta obe funkciji definirani s pomočjo eksponentne, sta holomorfni na celi kompleksni ravnini. Funkciji sta razširitvi običajnih realnih funkcij $\operatorname{sh} x$ in $\operatorname{ch} x$, definirani sta namreč s povsem enakim predpisom. Vse naslednje lastnosti so enostavno preverljive.

TRDITEV 2.29. *Za kompleksni funkciji* $\operatorname{sh} z$ *in* $\operatorname{ch} z$ *velja*

(i) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$,

(ii) $\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z$,

(iii) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$,

(iv) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$,

(v) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$,

(vi) $\operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z$.

Hitro lahko opazimo tudi naslednjo povezavo med hiperboličnimi in kotnimi funkcijami:

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z \text{ in } \operatorname{ch}(iz) = \cos z.$$

Kompleksna logaritemska funkcija. Kompleksno logaritemsko funkcijo želimo definirati analogno, kot je definirana v realnem, kot inverz eksponentne funkcije e^z. Težava je v tem, da kompleksna eksponentna funkcija ni injektivna. Pišimo $w = u + iv$ ter $z = x + iy$ in rešimo enačbo $e^w = z$:

$$\begin{aligned} e^w = z &\Leftrightarrow e^u(\cos v + i \sin v) = x + iy \\ &\Leftrightarrow e^u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{in} \quad v = \arg z + 2k\pi. \end{aligned}$$

Torej velja $e^z = w$ natanko tedaj, ko je

$$w = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i.$$

pri čemer smo svobodni tako pri izbiri celega števila k kot tudi pri natančnem načinu merjenja argumenta (lahko npr. vzamemo $\arg z \in [0, 2\pi)$ ali npr. $\arg z \in (-\pi, \pi]$, ali kaj drugega.) Vsaki taki funkciji rečemo *veja logaritma.*

Definicija 2.30. *Glavno vejo logaritma* $\log\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definirano s predpisom

$$\log z = \ln|z| + i\arg z, \quad \arg z \in (-\pi, \pi).$$

Tako definirana funkcija je očitno razširitev običajne funkcije $\ln x$. Preverimo, da je $\log z$ holomorfna funkcija. Naj bo $z = x + iy$ in $\log z = u(x, y) + iv(x, y)$. Potem je

$$u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

V prvem ter četrtem kvadrantu je

$$v(x, y) = \arctan\frac{y}{x},$$

v drugem oziroma tretjem pa

$$v(x, y) = \arctan\frac{y}{x} \pm \pi.$$

Predpisa se ujemata vzdolž y osi, če upoštevamo $\arctan \pm\infty = \pm\pi/2$. Preverimo CR enačbi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

in

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Torej je $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$, zato je funkcija holomorfna.

Opomba 2.31. Poglejmo si še en način, kako lahko vpeljemo logaritemsko funkcijo. Funkcija

$$u(z) = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

je harmonična na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, kar lahko enostavno preverimo z odvajanjem. Poiščimo holomorfno funkcijo f, katere realni del je ravno u. Za harmonično konjugiranko v k funkciji u veljajta CR enačbi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe po integraciji dobimo

$$v(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \arctan\frac{y}{x} + C(x),$$

kjer je $C(x)$ neodvisna od y, torej je lahko odvisna le od spremenljivke x. Vstavimo v v drugo enačbo in dobimo

$$\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2} + C'(x) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(x)$$

oziroma $C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = c$, kjer je c neka realna konstanta. Če vzamemo za $c = 0$ v prvem in četrtem kvadrantu, ter π oziroma $-\pi$ v drugem oziroma tretjem kvadrantu, dobimo

$$v(x,y) = \arg z.$$

V tem primeru je funkcija f ravno glavna veja logaritma

$$f(z) = \ln|z| + i\arg z.$$

Opazimo tudi, da konjugiranke v in s tem f nismo uspeli najti na celem $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, ampak le na $\mathbb{C}\backslash\{(-\infty,0]\}$. To je povsem v skladu z izrekom 2.18, saj $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ni enostavno povezano območje. Funkcijo f smo našli na nekako "največjem" enostavno povezanem območju, vsebovanem v $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. □

S pomočjo logaritemske in eksponentne funkcije lahko definiramo potence z^a pri splošnem $a \in \mathbb{C}$, s predpisom

$$z^a = e^{a\log z}.$$

Naloge

(1) Naj bo $f = u + iv$ kompleksno odvedljiva v točki $z_0 = x_0 + iy_0$. Pokaži, da sta u in v diferenciabilni v (x_0, y_0).

(2) Naj bo funkcija f holomorfna na območju $D \subset \mathbb{C}$ in naj velja $f(D) \subset \mathbb{R}$. Pokaži, da je $f(z) \equiv a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$.

(3) Naj bosta tako $f(z)$ kot $\overline{f(z)}$ holomorfni na območju $D \subset \mathbb{C}$. Pokaži, da je $f(z) \equiv c$, kjer je $c \in \mathbb{C}$.

(4) Pokaži, da za holomorfne funkcije velja L'Hospitalovo pravilo. Naj bosta f in g holomorfni v okolici $z_0 \in \mathbb{C}$ in naj velja $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Nadalje naj bo $g(z) \neq 0$ v okolici točke z_0, razen v z_0 (kot bomo videli kasneje, je ta pogoj avtomatično izpolnjen, če le g ni identično enaka 0). Če obstaja limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

obstaja tudi limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)},$$

in sta enaki.

(5) Preveri, ali je naslednja funkcija holomorfna

$$\begin{aligned} f(x+iy) = e^{x^2-y^2}\,&((x\cos(2xy) + y\sin(2xy)) \\ &+ i\,(y\cos(2xy) - x\sin(2xy))). \end{aligned}$$

Zapiši funkcijo $f(z)$ z z in $\bar{z}$ namesto z x in y.

(6) Pokaži, da je $u(x,y) = 2y - e^y \sin x + 1$ harmonična na $\mathbb{C}$ in poišči vse harmonične konjugiranke fukcije u.

(7) Pokaži, da velja

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta f.$$

(8) Pokaži, da za poljubni kompleksni števili velja $(e^z)^w = e^{zw}$.

(9) Izračunaj
   (a) e^i,
   (b) $\log i$,
   (c) $\sin i$,
   (d) $\operatorname{ch} i$,
   (e) i^i,

(10) Reši enačbe
   (a) $e^z = 1 + i$,
   (b) $\sin z = i$,
   (c) $\tan z = -2i$.

(11) Kam se s funkcijo e^z slikajo naslednje množice

(a) daljica $z = iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$,

(b) daljica $z = 1 + iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$,

(c) pravokotnik $\{x + iy \in \mathbb{C},\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi\}$?

(12) Kam se slika pas $\{x + iy \in \mathbb{C},\ -\pi/2 < x < \pi/2\}$ s funkcijo $\sin z$?

(13) Ali vedno velja $\log z^2 = 2 \log z$?

(14) Poišči vse ničle funkcij $\operatorname{sh} z$ in $\operatorname{ch} z$.

(15) Dokaži trditev 2.29.

(16) Preveri formuli $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$ in $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$.

POGLAVJE 3

Kompleksna integracija

3.1. Definicija kompleksnega integrala

Vsako (kosoma) gladko pot $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ lahko pišemo kot
$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$
kjer sta $x(t)$ in $y(t)$ dve realni (kosoma) zvezno odvedljivi realni funkciji na $[0,1]$. Odvod poti γ označimo z γ' in je
$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$
Tir poti γ, torej sliko $\gamma([0,1])$, označimo z γ^*. Integracija kompleksnih funkcij ene realne spremenljivke ni povsem nič drugačna kot integracija realnih funkcij. Če je $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija, definirana na realnem intervalu, definiramo
$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} g(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} g(t)\,dt.$$
Z uporabo parametrizacije prevedemo na ta primer tudi integracijo kompleksnih funkcij, definiranih vzdolž (tira) poti.

Definicija 3.1. Naj bo $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ gladka pot v kompleksni ravnini in f kompleksna funkcija, ki je definirana na γ^*. *Integral funkcije f po poti γ* definiramo kot
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Opomba 3.2. Poglejmo si, kako je integral kompleksne funkcije vzdolž poti γ povezan s krivuljnim integralom iz vektorske analize. Naj bo $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ pot in $f = u + iv$ kompleksna funkcija, definirana na okolici γ^*, razcepljena na njen realni in imaginarni del.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta (u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t))\,dt \\
&\quad + i\int_\alpha^\beta (u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t))\,dt \\
&= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \\
&= \int_\gamma (u, -v)ds + i\int_\gamma (v, -u)ds.
\end{aligned}$$

□

Opomba 3.3. Ker je krivuljni integral vektorskega polja neodvisen od parametrizacije, je tudi integral kompleksne funkcije po poti γ neodvisen od parametrizacije. □

Primer 3.4. Izračunajmo integral funkcije $f(z) = \bar{z}^2$ po naslednjih poteh:

(i) daljici od točke 1 do točke i in
(ii) pozitivno orientirani krožnici s središčem v 0 in polmerom 2.

(i) Daljico med 1 in i parametriziramo z $\gamma(t) = 1 - t(1 - i) = 1 - t + it$, $t \in [0, 1]$. Potem je $\gamma'(t) = -1 + i$ in je

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 (\overline{1 - t + it})^2(-1 + i)\,dt \\
&= \int_0^1 (1 - t - it)^2(-1 + i)\,dt \\
&= \int_0^1 ((1 - 2t) + 2ti(t - 1))(i - 1)\,dt \\
&= \int_0^1 (-1 + 4t - t^2) + i(1 - 2t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 (-1 + 4t - 2t^2)dt + i\int_0^1 (1 - 2t^2)\,dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.
\end{aligned}$$

(ii) V tem primeru parametriziramo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = 2ie^{it}$, tako je

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{2e^{it}})^2 2ie^{it}\,dt \\
&= 8\int_0^{2\pi} e^{-2it} ie^{it}\,dt \\
&= 8i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt \\
&= 8i\int_0^{2\pi} \cos t\,dt - 8\int_0^{2\pi} \sin t\,dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Trditev 3.5. *Naj bo γ pot v $\mathbb{C}$ in f zvezna funkcija na γ^*. Potem velja*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq l(\gamma) \max_{z\in\gamma} |f(z)|,$$

kjer je $l(\gamma)$ dolžina poti γ.

Dokaz. Naj bo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Označimo z α argument integrala $\int_\gamma f(z)\,dz$ in naj bo $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \int_\gamma e^{-i\alpha} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{-i\alpha} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \mathrm{Re}(e^{-i\alpha} f(\gamma(t))\gamma'(t))\,dt \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_0^1 |f(\gamma(t))|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(\gamma(t))| \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = l(\gamma) \max_{z\in\gamma^*} |f(z)|,
\end{aligned}$$

saj je

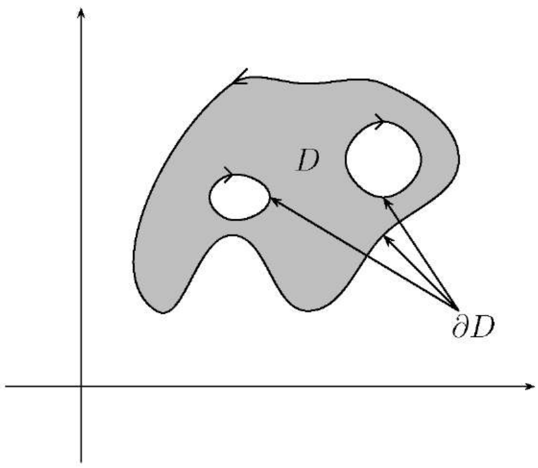
$$\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

ravno dolžina poti γ. $\square$

3.2. Cauchyjev izrek

Eno najpomembnejših orodij v kompleksni analizi je tako imenovani Cauchyjev izrek, ki ga bomo v tem razdelku pokazali s pomočjo Greenove formule. Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^2$ s kosoma gladkim, pozitivno orientiranim robom. Naj bosta P in Q funkciji razreda $\mathcal{C}^1$, definirani v okolici območja D. Greenova formula nam pove

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$



Slika 3.1. Območje D s pozitivno orientiranim robom ∂D

Poglejmo sedaj D kot območje v $\mathbb{C}$ in naj bo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleksna funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, definirana v neki okolici območja D. S pomočjo opombe 3.2 in Greenove formule dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f\,dz &= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy\\ &= -\int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.\end{aligned}$$

V kolikor je f holomorfna na okolici D, sta integranda v zadnjih dveh integralih enaka 0, saj sta to točno CR enačbi. Dobimo torej

Izrek 3.6 (Cauchyjev izrek, verzija 1). *Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejeno območje s kosoma gladkim robom in naj bo funkcija f holomorfna na okolici* *območja D. Potem velja*

$$\int_{\partial D} f(z) = 0,$$

kjer je ∂D pozitivno orientiran rob območja D.

OPOMBA 3.7. Spomnimo se, da je rob območja pozitivno orientiran, če se območje nahaja na levi strani, ko potujemo po robu v smeri orientacije. Enostavno sklenjena krivulja je pozitivno orientirana, če je pozitivno orientirana kot rob območja, ki ga omejuje. □

Če je na primer funkcija f holomorfna na okolici osenčenega dela slike 3.2, bo njen integral po robu tega območja (z orientacijo, kot je na sliki) enak 0. Malo drugačna, a nekoliko bolj splošna verzija Cauchyjevega izreka je naslednja:

IZREK 3.8 (Cauchyjev izrek, verzija 2). *Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in γ_1, γ_2 kosoma gladki sklenjeni poti v Ω. Naj bo γ_1 homotopna γ_2 v Ω. Potem za vsako funkcijo f, holomorfno na D, velja*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

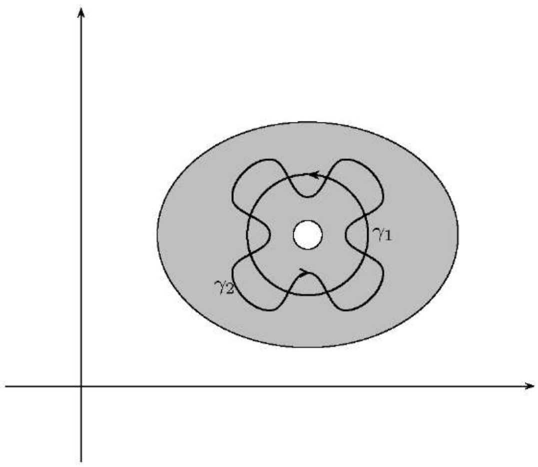
DOKAZ. Zaradi nekaterih povsem topoloških težav je izrek v taki splošni obliki nekoliko težje dokazati. Mi si bomo predstavljali nekoliko poenostavljeno situacijo. Predpostavili bomo, da (neorientirani) krivulji γ_1 in γ_2 tvorita rob območja D med njima. Zgornji izrek, uporabljen za območje D, pove

$$0 = \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Negativni predznak dobimo zato, ker moramo upoštevati pravilno orientacijo roba območja D. □

V primeru, ko je γ sklenjena kosoma gladka krivulja znotraj enostavno povezanega območja Ω, je γ homotopna konstanti. Zato z uporabo zadnjega izreka dobimo

POSLEDICA 3.9. *Naj bo Ω enostavno povezano območje in γ sklenjena (kosoma) gladka krivulja v Ω. Potem za vsako holomorfno funkcijo na*



SLIKA 3.2. Integral po γ_1 je enak integralu po γ_2

Ω *velja*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

POSLEDICA 3.10. *Naj bosta γ_1 in γ_2 (kosoma) gladki poti v enostavno povezanem območju Ω z isto začetno in končno točko. Naj bo f holomorfna v Ω. Potem je*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

DOKAZ. Naj bo pot $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ definirana z

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Pot γ je preprosto pot, ki najprej sledi poti γ_1, potem pa v obratni smeri sledi poti γ_2. Zato pogosto označimo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$. Ker imata γ_1 in γ_2 isto končno in začetno točko, je γ sklenjena. Zato je po zgornjem izreku

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

S tem je posledica dokazana. $\square$

V nadaljevanju bomo katero koli izmed zgornjih verzij izreka preprosto imenovali Cauchyjev izrek.

Primer 3.11. Izračunajmo integral

$$\int_\gamma e^z\,dz,$$

kjer je γ del parabole $z = t + it^2$ med $z = 0$ in $z = 1 + i$. Naj bo γ_1 daljica z začetno točko 0 in končno točko $1 + i$. Ker je funkcija e^z holomorfna in imata obe poti isto začetno in končno točko, iz zgornje posledice sledi

$$\int_\gamma e^z\,dz = \int_{\gamma_1} e^z\,dz.$$

Slednji integral lahko preprosto izračunamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} e^z\,dz &= \int_0^1 e^{(1+i)t}(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 e^t e^{it}\,dt \\
&= (1+i)\int_0^1 e^t(\cos t + i\sin t)\,dt \\
&= (1+i)\left(\int_0^1 e^t\cos t\,dt + i\int_0^1 e^t\sin t\,dt\right) \\
&= (1+i)\left(\frac{e^1\sin 1 + e^1\cos 1 - 1}{2} + i\frac{e^1\sin 1 - e^1\cos 1 + 1}{2}\right) \\
&= e^1(\cos 1 + i\sin 1) - 1 = e^{1+i} - 1.
\end{aligned}$$

□

Primer 3.12. Poglejmo si še, kako lahko uporabimo Cauchyjev izrek za izračun integrala

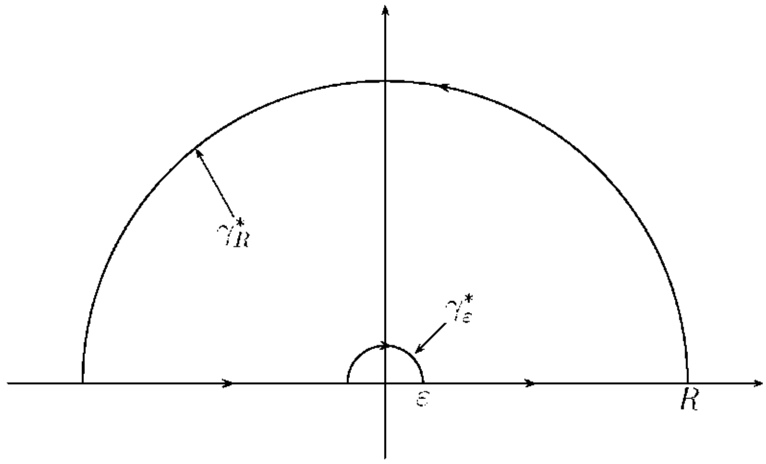
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Naj bosta $R > \varepsilon > 0$ poljubna in γ enostavno sklenjena pozitivno orientirana pot, katere tir je enak

$$\begin{aligned}
\gamma^* &= [-R,-\varepsilon] \cup \{|z| = \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\} \cup [\varepsilon, R] \cup \{|z| = R, \operatorname{Im} z > 0\} \\
&= [-R,-\varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon^* \cup [\varepsilon, R] \cup \gamma_R^*.
\end{aligned}$$

Po Cauchyjevem izreku velja

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0,$$



SLIKA 3.3. Integracijska krivulja γ

saj je funkcija $\frac{e^{iz}}{z}$ holomorfna na območju, omejenem z γ. Po drugi strani pa velja

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_\varepsilon^R \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx \\
&- \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} d\theta \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx + \int_\varepsilon^R \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx \\
&- i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta + i\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta \\
&= i\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\,dx + i\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&- i\int_0^\pi e^{i\varepsilon\cos\theta} e^{-\varepsilon\sin\theta} d\theta + i\int_0^\pi e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta.
\end{aligned}
$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali sodost funkcije kosinus. Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\,dx &+ \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \int_0^\pi e^{i\varepsilon\cos\theta} e^{-\varepsilon\sin\theta} d\theta - \int_0^\pi e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta.
\end{aligned}
$$

Ko gre ε proti 0, gre integrand $e^{i\varepsilon\cos\theta}e^{-\varepsilon\sin\theta}$ v tretjem integralu enakomerno proti 1. Če torej v celotni enačbi pošljemo ε proti 0, dobimo

$$\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi - \int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

Torej velja v limiti $R\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi - \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

Pokažimo, da je

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

Ker je

$$\left|\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iR\cos\theta}\right|\left|e^{-R\sin\theta}\right|d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta,$$

je dovolj, da pokažemo

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta = 0.$$

Integrand $e^{-R\sin\theta}$ na $(0,\pi)$ sicer konvergira proti 0, vendar konvergenca ni enakomerna. Lahko pa limito izračunamo direktno. Funkcija $\sin x$ je konkavna na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$, zato je tam graf funkcije nad sekanto skozi točki $(0,0)$ in $(\frac{\pi}{2},1)$, kar natanko pomeni

$$\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi},\ \text{za } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Torej velja

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta\\ &\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}d\theta\\ &= -\frac{\pi}{R}e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}\Big|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \xrightarrow{R\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Dobili smo torej

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

□

3.3. Cauchyjeva integralska formula in posledice

IZREK 3.13. *Naj bo f holomorfna funkcija na območju D in γ enostavno sklenjena (kosoma) gladka, pozitivno orientirana krivulja, ki je homotopna konstanti v D. Naj bo w točka iz notranjosti območja, ki ga oméjuje γ. Potem velja*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

DOKAZ. Naj bo $K(w,\varepsilon)$ pozitivno orientirana krožnica s polmerom ε okrog točke w. S pomočjo Cauchyjevega izreka dobimo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{K(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz,$$

saj je $\frac{f(z)}{z-w}$ holomorfna na območju med $K(w,\varepsilon)$ in γ, katerega rob sestavljata ravno ti dve krivulji (krožnica mora imeti pozitivno orientacijo). Pišimo $z = w + \varepsilon e^{it}$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz &= \int_{K(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(w+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\,dt \\ &= i\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})\,dt.\end{aligned}$$

Pokažimo, da gre zadnji integral proti $2\pi f(w)$, ko gre ε proti 0:

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{2\pi} f(w+\varepsilon e^{it})\,dt - \int_0^{2\pi} f(w)\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} |f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)|\,dt \\ &\le 2\pi \max_{K(w,\varepsilon)} |f(w+\varepsilon e^{it}) - f(w)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$

S tem je dokaz končan. □

Bolj splošno velja podobna integralska formula tudi za odvode.

IZREK 3.14. *Naj bo f holomorfna funkcija na območju D in γ enostavno sklenjena (kosoma) gladka, pozitivno orientirana pot, ki je homotopna konstanti D. Naj bo w točka iz notranjosti območja, ki ga* *omejuje γ. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja odvod $f^{(n)}(w)$ in velja*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz.$$

Dokaz. Poglejmo najprej za $n = 1$, pri čemer uporabimo Cauchyjevo integralsko formulo:

$$\begin{aligned}
\frac{f(w+h) - f(w)}{h} &= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \left(\frac{1}{z-(w+h)} - \frac{1}{z-w} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-(w+h))(z-w)} dz \\
&\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz.
\end{aligned}$$

Nadaljujmo z indukcijo po n. Predpostavimo sedaj, da formula velja za n in dokažimo formulo za $n+1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n)}(w+h) - f^{(n)}(w)}{h} = \frac{n!}{2\pi i h} \int_\gamma f(z) \left(\frac{1}{(z-(w+h))^{n+1}} - \frac{1}{(z-w)^{n+1}} \right) dz \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{(z-w)^n + (z-w)^{n-1}(z-(w+h)) + \cdots + (z-(w+h))^n}{(z-(w+h))^{n+1}(z-w)^{n+1}}\, dz \\
&\xrightarrow{h\to 0} \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{(n+1)(z-w)^n}{(z-w)^{2n+2}}\, dz = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+2}}\, dz.
\end{aligned}$$

Pri izpeljavi smo enačaj v drugi vrstici dobili s pomočjo uporabe binomske formule. □

Posledica 3.15. *Vsaka holomorfna funkcija je neskončnokrat odvedljiva.*

Opomba 3.16. Podobno kot pri Cauchyjevem izreku tudi pri Cauchyjevi integralski formuli obstajajo različne (vendar povsem ekvivalentne) verzije. Naj bo f holomorfna funkcija na okolici omejenega območja z (kosoma) gladkim pozitivno orientiranim robom ∂D in $w \in D$. Potem za $n = 0, 1, 2, \ldots$ velja

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz.$$

Dokaz je preprost. Rob ∂D skupaj z majhno negativno orientirano krožnico $K(w, \varepsilon)$ omejuje območje, na katerem je funkcija $\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}$ holomorfna, in je zato po Cauchyjevem izreku

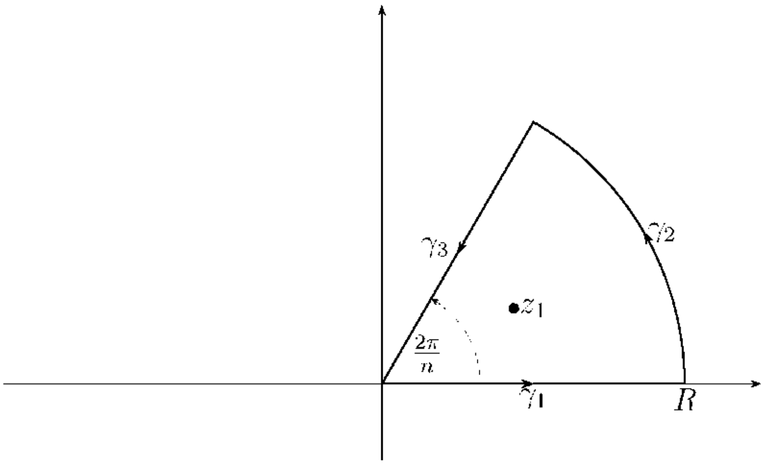
$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_{K(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz.$$

pri čemer smo tokrat krožnico $K(w,\varepsilon)$ orientirali pozitivno. Dokaz nato sledi iz zgornjih dveh izrekov 3.13 in 3.14. $\square$

Primer 3.17. S pomočjo Cauchyjeve formule izračunajmo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m dx}{1+x^n},$$

kjer sta $m,n \in \mathbb{N}$ in $n \geq m+2$.



Slika 3.4. Integracijska krivulja

Naj bo γ pozitivno orientirana pot, kot je na sliki 3.4. Naj bodo z_k, $k = 1,2,\ldots,n$, različne rešitve enačbe $z^n+1 = 0$. Edina ničla tega polinoma znotraj območja, omejenega z γ, je vrednost $z_1 = e^{i\pi/n}$. Pišimo

$$f(z) = \frac{z^m}{(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)} = \frac{z^m(z-e^{i\pi/n})}{z^n+1}.$$

Funkcija f je holomorfna na območju, omejenem z γ. Cauchyjeva formula nam da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^m}{1+z^n}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-e^{i\pi/n}}\,dz = f(z)|_{z=e^{i\pi/n}}$$

$$= \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \frac{z^m(z-e^{i\pi/n})}{z^n+1} \overset{L'H}{=} e^{i\pi m/n} \lim_{z\to e^{i\pi/n}} \frac{1}{nz^{n-1}} = -\frac{1}{n}e^{i\pi\frac{m+1}{n}}.$$

Pot γ_1 parametriziramo z $z = x$, $0 \leq x \leq R$, pot γ_2 z $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$, ter (obratno orientirano) pot γ_3 z $e^{2\pi i/n}x$, $0 \leq x \leq R$. Potem velja

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z^m dz}{1+z^n} &= \int_{\gamma_1} \frac{z^m dz}{1+z^n} + \int_{\gamma_2} \frac{z^m dz}{1+z^n} + \int_{\gamma_3} \frac{z^m dz}{1+z^n} \\
&= \int_0^R \frac{x^m\, dx}{1+x^n} + \int_0^{2\pi/n} \frac{iRe^{i\theta}R^m e^{im\theta}}{1+R^n e^{in\theta}} d\theta - \int_0^R \frac{x^m e^{2\pi i m/n} e^{2\pi i/n} dx}{1+x^n e^{i\frac{2\pi}{n}n}} \\
&= (1 - e^{2\pi i \frac{m+1}{n}}) \int_0^R \frac{x^m dx}{1+x^n} + i \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} e^{i(m+1)\theta}}{1+R^n e^{in\theta}} d\theta
\end{aligned}
$$

Torej je

$$\left(1 - e^{2\pi i \frac{m+1}{n}}\right) \int_0^R \frac{x^m dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi \frac{m+1}{n}} - i \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} e^{i(m+1)\theta}}{1+R^n e^{in\theta}} d\theta.$$

Pokažimo, da gre zadnji integral proti 0, ko gre R proti ∞. To sledi iz neenakosti

$$\left| \frac{R^{m+1} e^{i(m+1)\theta}}{1+R^n e^{in\theta}} \right| \leq \frac{R^{m+1}}{R^n - 1},$$

saj je potem

$$\left| \int_0^{2\pi/n} \frac{R^{m+1} e^{i(m+1)\theta}}{1+R^n e^{in\theta}} d\theta \right| \leq \frac{2\pi}{n} \frac{R^{m+1}}{R^n - 1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

ker je $n \geq m+2$. V limiti tako dobimo

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^n} &= \frac{-2\pi i e^{i\pi \frac{m+1}{n}}}{n(1 - e^{2\pi i \frac{m+1}{n}})} = \frac{-2\pi i e^{i\pi \frac{m+1}{n}} (1 - e^{-2\pi i \frac{m+1}{n}})}{n(1 - e^{2\pi i \frac{m+1}{n}})(1 - e^{-2\pi i \frac{m+1}{n}})} \\
&= \frac{-2\pi i \left(e^{i\pi \frac{m+1}{n}} - e^{-i\pi \frac{m+1}{n}}\right)}{n(2 - e^{2\pi i \frac{m+1}{n}} - e^{-2\pi i \frac{m+1}{n}})} = \frac{4\pi \sin \frac{(m+1)\pi}{n}}{2n(1 - \cos \frac{2(m+1)\pi}{n})} \\
&= \frac{4\pi \sin \frac{(m+1)\pi}{n}}{4n \sin^2 \frac{(m+1)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{(m+1)\pi}{n}}.
\end{aligned}
$$

□

Liouvillov izrek in osnovni izrek algebre.

Izrek 3.18 (Liouvillov izrek). *Vsaka omejena funkcija, ki je holomorfna na celi kompleksni ravnini, je konstantna.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $|f(z)| \leq M$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. S pomočjo Cauchyjeve integralske formule za prvi odvod dobimo

$$\begin{aligned} |f'(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K(w,R)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} \, dz \right| \\ &\leq R \max_{K(w,R)} \left| \frac{f(z)}{R^2} \right| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Torej je $f'(w) = 0$ za vsak $w \in \mathbb{C}$ in zato je po trditvi 2.15 funkcija f konstantna. □

Opomba 3.19. Posebej nam Liouvillov izrek pove, da ne obstaja holomorfna bijekcija med celo kompleksno ravnino $\mathbb{C}$ in enotskim krogom $D(0,1)$, saj ne obstaja niti nekonstantna holomorfna preslikava $f\colon \mathbb{C} \to D(0,1)$. V realni analizi Liouvillov izrek nima analogije. Tam lahko brez težav najdemo gladko bijekcijo med celo ravnino $\mathbb{R}^2$ in enotskim krogom. Primer take bijekcije je preslikava

$$F(x,y) = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \left(\frac{2}{\pi} \arctan r \cos\varphi, \frac{2}{\pi} \arctan r \sin\varphi \right).$$

Kot smo videli v primeru 1.23, pa lahko zgornjo polravnino preslikamo bijektivno na enotski krog s holomorfno preslikavo $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$. Še bolj splošno velja naslednji izrek

Izrek 3.20 (Riemannov upodobitveni izrek). *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, pri čemer $\Omega \neq \mathbb{C}$. Potem obstaja holomorfna bijekcija $f\colon \Omega \to D(0,1)$.*

□

Ena najpomembnejših posledic Liouvillovega izreka je osnovni izrek algebre.

Izrek 3.21 (osnovni izrek algebre). *Vsak nekonstanten polinom p stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel, štetih z večkratnostjo.*

Dokaz. Seveda je dovolj, da dokažemo, da ima tak polinom vsaj eno ničlo, saj lahko z deljenjem polinoma nato dobimo n ničel. Naj bo

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Potem velja

$$|p(z)| = |a_n z^n||1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n,$$

če je le $|z|$ dovolj velik. Torej velja za $n \geq 1$

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$$

oziroma

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = 0.$$

Predpostavimo sedaj, da $p(z)$ nima ničel. Potem je $\frac{1}{p(z)}$ omejena holomorfna funkcija na vsej kompleksni ravnini, kar po Liouvillovem izreku pomeni, da je konstantna. To pa ni mogoče. □

3.4. Primitivna funkcija

Definicija 3.22. Naj bo f kompleksna funkcija na odprti množici D. Holomorfna funkcija F na D je *primitivna funkcija* funkcije f, če je $F'(z) = f(z)$ za vsak $z \in D$.

Opomba 3.23. V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je odvod holomorfne funkcije zopet holomorfna funkcija. Zato imajo samo holomorfne funkcije lahko primitivno funkcijo. □

Trditev 3.24. *Naj bosta F in G dve primitivni funkciji funkcije f na povezani množici D. Potem je $F \equiv G + C$ za neko konstanto $C \in \mathbb{C}$.*

Dokaz. Trditev je posledica trditve 2.15. □

Primer 3.25. Funkcija $F(z) = \frac{1}{n+1}z^{n+1} + C$ je primitivna funkcija funkcije z^n. □

Izrek 3.26. *Naj bo f holomorfna funkcija na enostavno povezanem območju D in naj bo $z_0 \in D$ poljubna točka. Za poljubno točko $w \in D$ izberemo gladko pot γ_w v D, z začetno točko z_0 in končno točko w. Definiramo*

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f(z)\,dz.$$

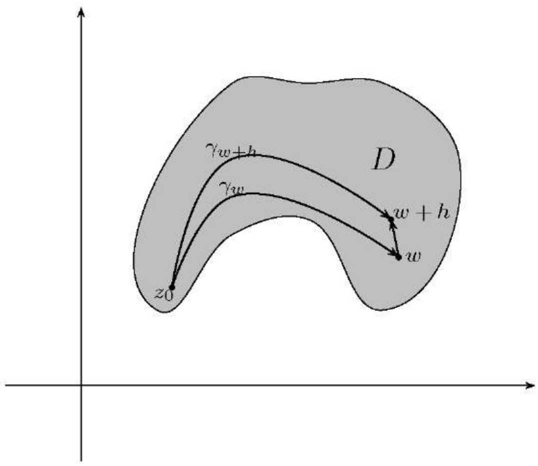
Potem je definicija F neodvisna od izbire poti γ_w in velja

$$F'(w) = f(w),\ w \in D.$$

DOKAZ. Da je integral

$$\int_{\gamma_w} f(z)\, dz$$

neodvisen od poti, je posledica Cauchyjevega izreka, bolj natančno posledice 3.10. Naj bo sedaj $w \in D$ in $h \in \mathbb{C}$ majhen, tako da je daljica γ med w in $w+h$ vsebovana v D.



Poglejmo si kvocient

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{\int_{\gamma_{w+h}} f(z)\, dz - \int_{\gamma_w} f(z)\, dz}{h}.$$

Iz Cauchyjevega izreka zopet sledi, da je

$$\int_{\gamma_{w+h}} f(z)\, dz - \int_{\gamma_w} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{F(w+h) - F(w)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{\gamma} f(z)\, dz = \frac{1}{h}\int_0^1 f(w+th)h\, dt \\ &= \int_0^1 f(w+th)\, dt \xrightarrow{h\to 0} f(w).\end{aligned}$$

□

Posledica je nekakšen osnovni izrek integralskega računa za integrale holomorfne funkcije:

IZREK 3.27. *Naj bo f holomorfna funkcija na območju D in G njena primitivna funkcija na D. Naj bo $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to D$ poljubna gladka pot v*

D. Potem velja

$$\int_\gamma f(z)\,dz = G(\gamma(\beta)) - G(\gamma(\alpha)).$$

DOKAZ. Navedli bomo nekoliko poenostavljen dokaz za primer, ko je γ lok, kar pomeni, da je γ injektivna. V splošnem lahko dokaz naredimo tako, da krivuljo γ zapišemo kot unijo lokov. Naj bo U enostavno povezana okolica γ in z_0 poljubna točka v U, $w_1 = \gamma(\alpha)$ in $w_2 = \gamma(\beta)$. Naj bosta γ_{w_1}, γ_{w_2} gladki poti od z_0 do w_1 oziroma w_2. Naj bo F definirana kot v zgornjem izreku. Ker je primitivna funkcija določena do konstante natančno, trditev 3.24, velja $F(w) = G(w) + C$. Tako velja:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\gamma_{w_2}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{w_1}} f(z)\,dz \\
&= F(w_2) - F(w_1) \\
&= G(w_2) + C - G(w_1) - C \\
&= G(\gamma(\beta)) - G(\gamma(\alpha)).
\end{aligned}$$

□

Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfna na $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. To območje ni enostavno povezano. Primitivna funkcija funkcije $\frac{1}{z}$ je vsaka veja logaritma, vendar pa nobena veja logaritma ni definirana na celem območju D. Da funkcija f ne more imeti primitivne funkcije na celem D sledi iz zgornjega izreka: Naj bo F primitivna funkcija funkcije f na D, in naj bo $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ pozitivno orientirana krožnica s polmerom 1. Potem velja

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(e^{2\pi i}) - F(1) = 0,$$

po drugi strani pa je po Cauchyjevi formuli

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Pravzaprav vidimo, da v kolikor ima holomorfna funkcija h primitivno funkcijo na območju D, mora biti integral funkcije h po vsaki sklenjeni poti znotraj D enak 0. Velja pa tudi obrat:

IZREK 3.28 (Morerov izrek). *Naj bo f funkcija na območju D razreda $\mathcal{C}^1$ in naj velja*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

za vsako (kosoma) gladko sklenjeno pot v D. Potem je f holomorfna na D in ima na D primitivno funkcijo.

DOKAZ. Izberimo $z_0 \in D$ in naj bo w neka točka v D. Naj bo γ_w poljubna gladka pot z začetno točko z_0 in končno točko w. Naj bo h tako majhen, da je cel zaprt krog $D(w, |h|)$ vsebovan v D. Označimo z γ_{w+h} pot z začetno točko z_0 in končno točko $w + h$ in naj bo γ daljica z začetno točko w in končno točko $w + h$. Predpostavimo lahko, da so tiri vseh treh poti disjunktni, razen v krajiščih. Ker je integral f po sklenjenih potek enak 0, je funkcija

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f(z)\,dz$$

neodvisna od izbire poti γ_w in zato velja

$$\frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{\int_{\gamma_{w+h}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_w} f(z)\,dz}{h} = \frac{1}{h}\int_\gamma f(z)\,dz$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^1 f(w+th)h\,dt = \int_0^1 f(w+th)\,dt \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} f(w).$$

Torej ima f primitivno funkcijo in je zato holomorfna. □

OPOMBA 3.29. Pri dokazu Morerovega izreka je dovolj predpostaviti zveznost funkcije f. □

Obstoj harmonične konjugiranke. Sedaj imamo na voljo dovolj orodij, da pokažemo izrek

IZREK 3.30. *Naj bo $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija, definirana na enostavno povezanem območju $D \subset \mathbb{C}$. Potem obstaja taka harmonična funkcija $v\colon D \to \mathbb{R}$, da je $f = u + iv$ holomorfna na D. Funkcijo v imenujemo harmonična konjugiranka funkcije u in je določena do aditivne konstante natančno.*

DOKAZ. Definirajmo

$$g(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Preverimo, da g zadošča CR enačbama:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right).$$

Torej je funkcija g holomorfna na D. Ker je D enostavno povezano območje, ima g na D primitivno funkcijo G. Naj bo $a = \operatorname{Re} G$ in $b = \operatorname{Im} G$. Iz CR enačb za G sledi $a_x = u_x$ in $a_y = u_y$. Povsem enako, kot pri trditvi 2.15 lahko ugotovimo, da je $a \equiv u + C$, kjer je C realna konstanta. Zato je $f \equiv G - C$ holomorfna funkcija, katere realni del je ravno u. Za v lahko vzamemo $\operatorname{Im} f$. Pokažimo še, da je konjugiranka v določena do realne konstante natančno. Naj bosta $u + iv$ kot $u + i\tilde{v}$ obe holomorfni. Potem je njuna razlika $i(v - \tilde{v})$ tudi holomorfna. Ker je $v - \tilde{v}$ realna funkcija, je $v - \tilde{v} \equiv C'$, kjer je C' neka realna konstanta. S tem je izrek dokazan. □

Naloge

(1) Za naslednje funkcije izračunaj integrale po pozitivno orientirani krožnici $|z| = 2$:
  (i) $f(z) = \bar{z}$,
  (ii) $f(z) = |z|$,
  (iii) $f(z) = 1/z$.

(2) Izračunaj integral

$$\int_\gamma |z^2|\, dz$$

po poti $\gamma(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$.

(3) Izračunaj integral $\int_\gamma e^{2z}\, dz$ po naslednjih poteh.
  (i) Po daljici med 1 in $2 + i$.
  (ii) Po negativno orientirani krožnici $|z| = 3$.
  (iii) Po paraboli $y = x^2$ med $x = 0$ in $x = 1$.

(4) Izračunaj integral

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{\sin z}{z^2+4} dz.$$

(5) S pomočjo Cauchyjeve formule (za odvode) izračunaj integral

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z-1)}\, dz.$$

(6) Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dz.$$

(7) Pokaži naslednjo posplošitev Liouvillovega izreka: Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna in naj pri nekem $R > 0$ velja $|f(z)| \leq A|z|^n$ za vsak $|z| > 0$, kjer je $A > 0$ in $n \in \mathbb{N}$. Potem je f polinom stopnje največ n.

POGLAVJE 4

Taylorjeva in Laurentova vrsta

4.1. Funkcijska zaporedja, funkcijske vrste in enakomerna konvergenca

Definicije in trditve iz tega razdelka so zgolj ponovitev pojmov, ki jih poznamo iz realne analize.

Definicija 4.1. Naj bodo $f_1, f_2, \ldots$ kompleksne funkcije, definirane na množici $D \subset \mathbb{C}$. Potem funkcijsko zapredje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *po točkah konvergira* proti $f \colon D \to \mathbb{C}$, če za vsak $z \in D$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

Konvergenca po točkah je pogosto premalo restriktivna, saj limita zaporedja zveznih funkcij ni nujno zvezna. Prav tako pri limiti po točkah pogosto ne zamenjati vrstnega reda integriranja in limitiranja.

Definicija 4.2. Naj bodo $f_1, f_2, \ldots$ kompleksne funkcije, definirane na množici $D \subset \mathbb{C}$. Potem funkcijsko zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *enakomerno konvergira* na D proti funkciji $f \colon D \to \mathbb{C}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n_0, da za vsak $z \in D$ velja $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, če je le $n \geq n_0$.

Izrek 4.3. *Naj bodo $f_1, f_2, \ldots$ zvezne funkcije na množici $D \subset \mathbb{C}$, ki enakomerno konvergirajo proti $f \colon D \to \mathbb{C}$. Potem je f zvezna na D.*

Dokaz. Naj bo z_0 poljubna točka iz D. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in naj bo n_0 tak, da velja $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$, če je $n \geq n_0$. Ker je f_{n_0} zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/3$, čim je $|z - z_0| < \delta$. Potem za $|z - z_0| < \delta$ velja

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_{n_0}(z) + f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0) + f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Torej je f zvezna. □

IZREK 4.4. *Naj bodo $f_1, f_2, \ldots$ zvezne funkcije na množici $D \subset \mathbb{C}$, ki enakomerno konvergirajo proti $f\colon D \to \mathbb{C}$ in naj bo γ (kosoma) gladka pot v D. Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

DOKAZ. Naj bo l dolžina poti γ in naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker zaporedje $\{f_n\}$ konvergira enakomerno, obstaja tak n_0, da je $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{l}$ za vse $z \in D$ in vse $n \geq n_0$. Potem velja za vsak $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz\right| \\
&\leq l \max_{z\in\gamma^*} |f_n(z) - f(z)| < l\frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

S tem je izrek dokazan. □

Ponovimo še nekatere pojme in lastnosti funkcijskih vrst. Funkcijska vrsta je vrsta oblike

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots, \quad z \in D,$$

kjer so kompleksne funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definirane na množici $D \subset \mathbb{C}$. Taka vrsta konvergira pri nekem $z \in D$ proti $f(z)$, če zaporedje delnih vsot

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z)$$

konvergira pri tem z proti $f(z)$. Če se to zgodi pri vsakem $z \in D$, rečemo, da vrsta konvergira na D proti funkciji $f(z)$ in pišemo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Če to napišemo bolj natančno, mora za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak $z \in D$ obstajati tak n_0, da je $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, če je le $n \geq n_0$. Še bolj pomemben v kontekstu funkcijskih vrst pa je pojem enakomerne konvergence. Tu je n_0 iz zgornje definicije neodvisen od z.

DEFINICIJA 4.5. Funkcijska vrsta

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots$$

konvergira enakomerno na množici $D \subset \mathbb{C}$ proti funkciji $f(z)$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$ in vsak $z \in D$.

Najbolj uporaben kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence funkcijskih vrst je Weierstrassov M test.

TRDITEV 4.6 (Weierstrassov M test). *Naj bo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergentna vrsta s pozitivnimi členi in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(z)| \leq M_n, \text{ za vsak } z \in D.$$

Potem funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

konvergira enakomerno in absolutno na D. (Funkcijska vrsta konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$.)

DOKAZ. Da vrsta konvergira absolutno, je posledica primerjalnega kriterija. Naj bo torej $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ vsota vrste, kjer so s_n delne vsote. Pokažimo, da je konvergenca enakomerna. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira, obstaja tak n_0, da velja $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$, če je le $n \geq n_0$. Za tak n velja

$$|f(z) - s_n(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Zaporedje delnih vsot s_n enakomerno konvergira proti f in zato vrsta konvergira enakomerno. □

Najpomembnejši lastnosti enakomerne konvergence se skrivata v naslednjih dveh trditvah.

TRDITEV 4.7. *Naj bodo $f_1, f_2, \ldots$ zvezne funkcije na D. Če vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

konvergira enakomerno na D proti funkciji $f(z)$, potem je $f(z)$ zvezna funkcija na D.

Dokaz. Dokaz sledi iz analognega dokaza za funkcijska zaporedja. Naj bodo s_n delne vsote vrste. Ker so s_n zvezne in po predpostavki konvergirajo enakomerno proti f, je zvezna tudi f. □

Trditev 4.8. *Naj vrsta zveznih funkcij*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

konvergira enakomerno na D proti funkciji $f(z)$ in naj bo γ pot v D. Potem je

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Dokaz. Naj bodo s_n delne vsote vrste. Ker zaporedje delnih vsot enakomerno konvergira proti f, iz analognega izreka za funkcijska zaporedja velja

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma s_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

kar je ravno vsebina trditve. □

4.2. Potenčne vrste

Definicija 4.9. *Potenčna vrsta s središčem v $z_0 \in \mathbb{C}$* je vrsta oblike

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots,$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots$ kompleksna števila.

Izrek 4.10. *Za potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ obstaja tako število $R \in [0, \infty]$, da za vsak $r < R$ vrsta konvergira enakomerno in absolutno na zaprtem krogu $\bar{D}(z_0, r)$ s polmerom r in središčem v z_0, in divergira za vsak z, za katerega velja $|z - z_0| > R$. Število R imenujemo konvergenčni polmer vrste in velja*

$$1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dokaz. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $z_0 = 0$. Naj bo $A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Predpostavimo najprej, da je $0 < A < \infty$ in naj bo $|z| < 1/A$. Potem je $1/|z| > A + \varepsilon$ za nek pozitiven ε, in ker je A največje stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, obstaja tak n_0, da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} < A + \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Zato je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z| \leq (A + \varepsilon)|z| < 1$$

in vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$ konvergira pri z po korenskem kriteriju. Naj bo sedaj $|z| > 1/A$. Sedaj je $1/|z| < A - \varepsilon$ za nek ε. Ker je A stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|}, \ n = 1, 2, \ldots\}$, za neskončno mnogo indeksov n velja $\sqrt[n]{|a_n|} > A - \varepsilon$. Pri takem n je

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z| > (A - \varepsilon)|z| > 1$$

in zato vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ne konvergira, saj členi $a_n z^n$ ne konvergirajo proti 0. Zelo podobno obravnavamo tudi primera $A = 0$ in $A = \infty$. Pokažimo še, da vrsta konvergira enakomerno in absolutno na $D(z_0, r)$, kjer je $r < R$. Naj bo $r < r' < R$. Ker vrsta pri $z = r'$ konvergira, velja $\lim_{n\to\infty} a_n r'^n = 0$ in zato obstaja tak $M > 0$, da je $|a_n r'^n| \leq M$ za vsak n. Naj bo $|z| \leq r$ poljuben. Potem velja

$$|a_n z^n| = |a_n| \left(\frac{r}{r'}\right)^n r'^n \leq M \left(\frac{r}{r'}\right)^n.$$

Zato velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r'}\right)^n,$$

in ker geometrijska vrsta na desni pri $\frac{r}{r'} < 1$ konvergira, vrsta po Weierstassovem M testu konvergira enakomerno in absolutno na $|z| \leq r$. □

Primer 4.11. Geometrijska vrsta

$$1 + z + z^2 + \cdots$$

ima konvergenčni polmer

$$R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Zato vrsta absolutno in enakomerno konvergira na vsakem krogu $|z| \leq r < 1$. Vsota te vrste je

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

□

IZREK 4.12. *Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom $R > 0$. Potem je funkcija*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

holomorfna na $D(z_0, R)$ in velja

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

DOKAZ. Holomorfnost funkcije sledi iz Morerovega izreka, saj velja

$$\int_\gamma f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma a_n(z-z_0)^n \, dz = 0$$

za vsako sklenjeno pot, vsebovano v $D(z_0, R)$, saj vrsta na γ konvergira enakomerno. Poglejmo si še drugi del. Naj bo γ neka enostavno sklenjena, pozitivno orientirana krivulja v $D(z_0, R)$, in w točka v notranjosti območja, omejenega z γ. Po Cauchyjevi formuli za odvod velja

$$\begin{aligned}
f'(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2} \, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}{(z-w)^2} \, dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-z_0)^n}{(z-w)^2} \, dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z-z_0)^n|_{z=w} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (w-z_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Poglejmo si sedaj še obrat zgornjega izreka, torej, da lahko vsako holomorfno funkcijo lokalno predstavimo s potenčno vrsto.

IZREK 4.13. *Naj bo f holomorfna funkcija na $D = D(z_0, R)$. Potem lahko f na D predstavimo s potenčno vrsto s središčem v z_0, ki ima konvergenčni polmer vsaj R.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz,$$

kjer je γ poljubna pozitivno orientirana enostavno sklenjena krivulja, za katero je z_0 v notranjosti območja, omejenega z γ.

DOKAZ. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $z_0 = 0$. Naj bo γ_r pozitivno orientirana krožnica s središčem v 0 in polmerom $r < R$. Potem je za vsak $|z| < r$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-z/w}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{w})^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw. \end{aligned}$$

Pri tretjem enačaju smo $\frac{1}{1-z/w}$ razvili v geometrijsko vrsto. To lahko storimo, saj je $|z/w| < 1$. Če torej pišemo $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw$ in upoštevamo, da je γ homotopna γ_r, smo dokazali izrek. □

Potenčni vrsti iz zgornjega izreka rečemo *Taylorjeva vrsta funkcije f okrog točke z_0*. Zgornja izreka nam povesta, da so holomorfne funkcije natanko kompleksne analitične funkcije. To so funkcije, ki se v vsaki točki dajo predstaviti s Taylorjevo vrsto.

PRIMER 4.14. Poglejmo si funkcijo $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Funkcija je holomorfna na krogu $D(0,1)$ in jo po zgornjem izreku lahko razvijemo v potenčno vrsto na tem območju. Kot že vemo, je ta vrsta enaka

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

Konvegenčni polmer te vrste je 1 in takoj vidimo, da le ta ne more biti večji, saj ima funkcija pol v $z = i$ in $z = -i$. Disk $D(0,1)$ je torej največji krog okrog 0, na katerem je f holomorfna. Če pa gledamo na funkcijo f kot funkcijo, definirano le za realna števila, torej

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

pa ima seveda povsem enak razvoj v vrsto, torej

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

pri čemer pa ne vidimo, zakaj mora konvergenčni polmer biti le $R = 1$, saj je funkcija $f(x)$ definirana na vsej realni osi. $\square$

4.3. Posledice razvoja v potenčno vrsto

Naslednji izrek nam pove, da lahko za holomorfno funkcijo določimo stopnjo ničle na podoben način, kot to storimo pri polinomu. To je direktna posledica razvoja v potenčno vrsto.

IZREK 4.15. *Naj bo funkcija f holomorfna na območju D in naj bo $z_0 \in D$ ničla funkcije f. Potem je bodisi f identično enaka 0 na nekem odprtem krogu okrog z_0, ali pa obstaja $n \in \mathbb{N}$ in holomorfna funkcija $g(z)$, definirana na D, $g(z_0) \neq 0$, da velja $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.*

DOKAZ. Funkcijo f lahko razvijemo v potenčno vrsto v okolici točke z_0. Torej velja

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Če so vsi c_k enaki 0, imamo prvo možnost. Drugače pa naj bo c_n prvi neničelni koeficient vrste. Definirajmo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} & , \ z \neq z_0 \\ c_n & , \ z = z_0. \end{cases}$$

Funkcija g je zagotovo holomorfna na $D \backslash \{z_0\}$. Ker pa velja

$$g(z) = c_n + c_{n+1}(z - z_0) + c_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

v okolici točke z_0, je g holomorfna povsod na D. Velja

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

$\square$

Število $n \in \mathbb{N}$ iz izreka imenujemo *stopnja ničle* funkcije f v z_0. Naslednji pomemben izrek, ki je posledica razvoja v vrsto, je princip identitete.

IZREK 4.16 (princip identitete). *Naj bosta f in g holomorfni funkciji na območju D in naj velja $f(z_n) = g(z_n)$ za neko zaporedje $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki konvergira proti $w \in D$, $z_n \neq w$ za $n \in \mathbb{N}$. Potem velja $f(z) = g(z)$ za vsak $z \in D$.*

DOKAZ. Naj bo $h(z) = f(z) - g(z)$. Naj bo $a \in D$ poljubna točka. Iz zgornjega izreka sledi, da imamo natanko dve izključujoči si možnosti. Bodisi je $h(z)$ identično 0 na neki okolici a bodisi je $h(z) \neq 0$ za vsak $z \in D(a, r) \backslash \{a\}$, pri čemer je $r > 0$ dovolj majhen. Naj bo A množica tistih točk, ki zadoščajo prvemu pogoju, in B množica tistih točk, ki zadoščajo drugemu pogoju. Očitno sta obe množici odprti in velja $D = A \cup B$ ter $A \cap B = \emptyset$. Ker je D povezana, je ena od množic prazna. Po predpostavki je $h(z_n) = 0$. Ker je h zvezna, je tudi $h(w) = 0$. Ker točke z_n pridejo poljubno blizu w, velja $w \notin B$. Torej je B prazna in $A = D$, kar pomeni, da je $h(z) = 0$ za vsak $z \in D$ in zato $f(z) = g(z)$ za vsak $z \in D$. □

IZREK 4.17 (princip maksima). *Naj bo f holomorfna funkcija na območju D. Če obstaja krog $D(a, r) \subset D$, $r > 0$, da velja*

$$|f(z)| \leq |f(a)| \text{ za vsak } z \in D(a, r),$$

je f konstantna na D.

DOKAZ. Predpostavimo, da je $D(a, r)$ tak krog v D, da velja neenakost $|f(a)| \geq |f(z)|$ za vsak $z \in D(a, r)$ in naj bo $g(z) = \frac{f(z)}{f(a)}$. Velja $g(a) = 1$. Zaradi zveznosti obstaja nek krog $D(a, r')$, $r' \leq r$, da je $\operatorname{Re} g(z) > 0$. Na krogu $D(a, r')$ lahko zato definiramo $h(z) = \log g(z)$. Ker je $|g(z)| \leq 1$ na $D(a, r')$ in $g(a) = 1$, je $h(a) = 0$ in $\operatorname{Re} h(z) \leq 0$. Če h ni identično enaka 0, po izreku 4.15 lahko najdemo tak m, da je $h(z) = (z - a)^m h_1(z)$, pri čemer je $h_1(a) \neq 0$. Naj bo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tak, da je $h_1(a) = |h_1(a)| e^{i\alpha}$, in definirajmo $H_1(z) = e^{-i\alpha} h_1(z)$. Seveda je $H_1(a) = |h_1(a)| > 0$ in zato je, zaradi zveznosti, blizu a še vedno $\operatorname{Re} H_1(a) > 0$. Če pišemo $z = a + \rho e^{i\varphi}$ je

$$h(z) = \rho^m e^{im\varphi} e^{i\alpha} H_1(z).$$

Pri $\varphi = \frac{2\pi - \alpha}{m}$ je $h(z) = \rho^m H_1(z)$ in zato je za majhen ρ

$$u(z) = \operatorname{Re} h(z) = \rho^m \operatorname{Re} H_1(z) > 0,$$

kar pa je protislovje, saj mora biti $\operatorname{Re} h(z) \leq 0$. Protislovje smo dobili iz predpostavke, da h ni identično enaka 0. Torej je $h \equiv 0$ in posledično $f(z) = f(a)$ za vsak $z \in D(a, r')$. Po principu identičnosti 4.16 je f konstantna povsod na D. □

POSLEDICA 4.18. *Naj bo funkcija f holomorfna na okolici omejenega območja D. Potem je maksimum $|f|$ na $\overline{D}$ dosežen na robu ∂D.*

Posledica izreka 4.17 je tudi princip maksima za harmonične funkcije.

POSLEDICA 4.19. *Naj bo $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija na območju $D \subset \mathbb{R}^2$. Če je v točki $(x_0, y_0) \in D$ lokalni ekstrem funkcije u, je funkcija u konstantna na D.*

DOKAZ. Naj bo v (x_0, y_0) lokalni maksimum funkcije u in naj bo U poljubno enostavno povezano območje v D, ki vsebuje točko (x_0, y_0). Naj bo v harmonična konjugiranka funkcije u na U. Le ta obstaja po izreku 3.30. Definirajmo $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funkcija f je holomorfna na U. Naj bo $g(z) = e^{f(z)}$. Funkcija g je prav tako holomorfna na U in velja

$$|g(z)| = \left|e^{f(z)}\right| = \left|e^{u(x,y)+iv(x,y)}\right| = e^{u(x,y)}.$$

Torej ima g lokalni maksimum v (x_0, y_0), zato je po izreku 4.17 konstantna na U. Poljubni dve točki iz D lahko povežemo z lokom (injektivno potjo). Če tak lok malo odebelimo, dobimo enostavno povezano območje, ki vsebuje ti dve točki. Torej lahko za vsako točko $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ iz D najdemo enostavno povezano območje, ki vsebuje tako (x_0, y_0) kot tudi (x, y). Ker je u konstantna na tem območju, je $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ za vse $(x, y) \in D$. □

4.4. Laurentova vrsta

Kot bomo videli, je Laurentova vrsta posplošitev Taylorjeve vrste. Z Laurentovo vrsto poskušamo razumeti, kako se holomorfna funkcija obnaša v okolici singularne točke.

DEFINICIJA 4.20. *Laurentova vrsta* s središčem v točki z_0 je formalna vrsta oblike

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Laurentova vrsta je sestavljena iz dveh delov. Prvi del je

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0},$$

rečemo mu *glavni del Laurentove vrste.* Drugi del je običajna potenčna vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Kot vemo, potenčna vrsta konvergira znotraj kroga s polmerom R, kjer je

$$1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Če pri glavnem delu namesto $\frac{1}{z-z_0}$ pišemo w, dobimo običajno potenčno vrsto v spremenljivki w

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n,$$

ki konvergira znotraj kroga $|w| < r$, kjer je

$$1/r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Glavni del Laurentove vrste torej konvergira pri $|z-z_0| > 1/r$. Tako R kot r sta lahko kjerkoli iz $[0,\infty]$, torej tudi 0 ali ∞. Povzemimo to v izreku.

Izrek 4.21. *Naj bo*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Laurentova vrsta in naj bosta

$$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \qquad R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Če velja $R_1 < R_2$, vrsta konvergira na kolobarju

$$A(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$

proti holomorfni funkciji na $A(z_0; R_1, R_2)$. Za vsak $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, vrsta konvergira enakomerno in absolutno na $\{z \in \mathbb{C}, r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2\}$.

Dokaz. Konvergenco smo že pokazali. Da je funkcija holomorfna, sledi iz analognega izreka za potenčne vrste, uporabljenega na obeh delih Laurentove vrste. Prav tako sledi enakomerna konvergenca na manjšem kolobarju. $\square$

PRIMER 4.22. Poglejmo si Laurentovo vrsto

$$\cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots$$

Velja

$$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

in

$$1/R_2 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Vrsta torej konvergira za $1 < |z| < 2$. Glavni del vrste je enak

$$\cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \overset{w=\frac{1}{z}}{=} w + w^2 + w^3 + \cdots = \frac{w}{1-w} = \frac{1}{z-1}.$$

Potenčni del vrste je enak

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1-z/2} = \frac{2}{2-z}.$$

Laurentova vrsta torej konvergira proti funkciji

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z} = -\frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Funkcija f je holomorfna na $A(0;1,2)$ in je ne moremo razširiti kot holomorfno funkcijo na večji kolobar, saj ima pola v točkah 1 in 2. □

Poglejmo si še obrat zgornjega izreka.

IZREK 4.23. *Naj bo funkcija f holomorfna na kolobarju*

$$A = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Potem lahko f na A predstavimo z Laurentovo vrsto s središčem v točki z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Pri tem je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz,$$

kjer je γ katera koli krožnica v A, s središčem v z_0.

OPOMBA 4.24. Iz izreka sledi, da so koeficienti c_n v Laurentovi vrsti enolično določeni s funkcijo f.

Dokaz. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $z_0 = 0$. Izberimo taka r_1, r_2, da velja $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, in naj bo $z \in A(0; r_1, r_2)$. Naj bo γ_1 krožnica s središčem v 0 in polmerom r_1 in γ_2 krožnica s polmerom r_2 ter središčem v 0. Po Cauchyjevi formuli (izrek 3.13), skupaj z opombo 3.16, velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Poglejmo si najprej prvi integral. Če je $w \in \gamma_2^*$, je $|z/w| < 1$, velja

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-z/w}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(w)\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw z^n.\end{aligned}$$

Vsoto in integral smo lahko zamenjali zaradi enakomerne konvergence. Poglejmo si še integral po γ_1. V tem primeru velja $|w/z| < 1$, tako pišemo

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-w/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(w)\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n dw \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(w)w^n\,dw z^{-n-1} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right) z^n.\end{aligned}$$

Pri zadnjem enačaju smo zamenjali vsoto in integral, kar lahko storimo zaradi enakomerne konvergence vrste, ter preštevilčili vrsto. Po Cauchyjevem izreku lahko vse integrale po γ_1 in γ_2 zamenjamo za integrale po neki pozitivno orientirano krožnici $\gamma \subset A$ s središčem v 0. Skupaj dobimo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right) z^n.$$

S tem je izrek dokazan. $\square$

Primer 4.25. Razvijmo funkcijo $f(z) = e^z + e^{-z}$ v Laurentovo vrsto okrog $z_0 = 0$. Ker je

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

in vrsta konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$, velja

$$e^{-z} = \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1,$$

zato vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Skupaj je

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 2 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

Vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} = A(0; 0, \infty)$. $\square$

Primer 4.26. Poglejmo si funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(2-z)}.$$

Funkcija je definirana na celo kompleksni ravnini, razen v točkah $z = -1$ in $z = 2$. Pri razvoju v Laurentovo vrsto s središčem v $z = 0$ zato dobimo različne razvoje na območjih $D(0, 1)$, $A(0; 1, 2)$ in $A(0; 2, \infty)$. Funkcijo bomo najlažje razvili v vrsto, če jo najprej razcepimo na delne ulomke

$$\frac{1}{(1+z)(2-z)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z}\right).$$

Razvoj funkcije $\frac{1}{1+z}$ na $D(0, 1)$ je enak

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots.$$

Če pa je $|z| > 1$, lahko to funkcijo razvijemo takole

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \cdots.\end{aligned}$$

Ta vrsta konvergira, če je le $|1/z| < 1$, oziroma, če je $z \in A(0;1,\infty)$. Podobno si oglejmo funkcijo $\frac{1}{2-z}$. Na $D(0,2)$ velja

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{z}{2}\right)+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots\end{aligned}$$

Pri $|z| > 2$ pa je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-z} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\left(\frac{2}{z}\right)+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right)\\ &= -\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}-\frac{2^2}{z^3}-\frac{2^3}{z^4}-\cdots\end{aligned}$$

Ta vrsta konvergira na $A(0,2,\infty)$. Pri razvoju funkcije f na $D(0,1)$ torej dobimo

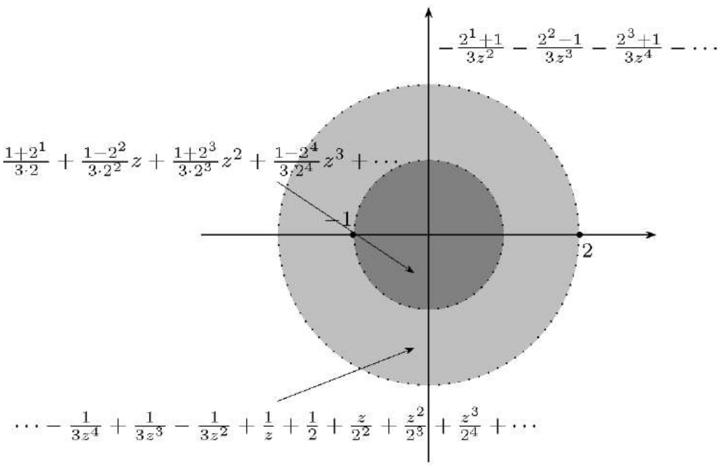
$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+z)(2-z)}\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots\right)\right)\\ &= \frac{1+2}{3\cdot 2}+\frac{1-2^2}{3\cdot 2^2}z+\frac{1+2^3}{3\cdot 2^3}z^2+\frac{1-2^4}{3\cdot 2^4}z^3+\cdots\end{aligned}$$

Pri razvoju na kolobarju $A(0;1,2)$ moramo vzeti razvoj funkcije f, ki konvergira za $|z| > 1$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+z)(2-z)}\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots\right)\right)\\ &= \cdots-\frac{1}{3z^4}+\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{z}{3\cdot 2^2}+\frac{z^2}{3\cdot 2^3}+\frac{z^3}{3\cdot 2^4}+\cdots\end{aligned}$$

In končno na $A(0;2,\infty)$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1+z)(2-z)}\\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots\right)+\left(-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}-\frac{2^2}{z^3}-\frac{2^3}{z^4}-\cdots\right)\right)\\ &= -\frac{2+1}{3z^2}-\frac{2^2-1}{3z^3}-\frac{2^3+1}{3z^4}-\cdots\end{aligned}$$



SLIKA 4.1. Različni razvoji funkcije f v Laurentovo vrsto

Naloge

(1) Poišči konvergenčne polmere naslednjih vrst:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$,
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$,
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!}$,
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

(2) Iz definicij kompleksnih funkcij e^z, $\sin z$ in $\cos z$ izpelji njihove razvoje v Taylorjevo vrsto okrog točke $z_0 = 0$.

(3) Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke z_0 in poišči konvergenčni polmer:
   (a) $\frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 0$,
   (b) $\frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 1$,
   (c) $\frac{1}{1+e^{-z}}$, $z_0 = 0$,
   (d) $\sqrt{1-z^2}$, $z_0 = 0$,
   (e) $\frac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 0$.

(4) Pokaži formulo

$$e^z \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}\right)$$

in izpelji Taylorjevo vrsto za $e^z \cos z$.

(5) Poišči nekaj členov razvoja funkcije $\tan z$ v potenčno vrsto okrog $z_0 = 0$ in določi konvergenčni polmer vrste.

(6) Razvij naslednje funkcije v Laurentovo vrsto okrog točke z_0 in določi območje konvergence:
   (a) $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$, $z_0 = 1$,
   (b) $\frac{1}{z(z-2)^2}$, $z_0 = 2$,
   (c) $\frac{z+2}{z-1}$, $z_0 = 1$.

(7) Razvij $\frac{1}{(1-z)(z+3)}$ v Laurentovo vrsto na $A(0;0,1)$, $A(0;1,3)$ in $A(0;3,\infty)$.

(8) Razvij funkcijo sinus v Taylorjevo vrsto okrog $z_0 = i$.

(9) Pokaži, da ima funkcija

$$f(z) = \frac{\cos z}{z - \sin z}$$

končni glavni del pri razvoju v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = 0$. Določi ga.

(10) Poišči ničle naslednjih funkcij in določi njihovo stopnjo:
   (a) $(1 + z^3)^2$,
   (b) $e^z \cos^2 z$,
   (c) $\sin z - \tan z$,
   (d) $e^z + 1$.

(11) Pokaži princip minima. Naj bo f holomorfna funkcija, ki nima ničel na omejenem območju D. Potem je minimum $|f|$ dosežen na robu D. S pomočjo principa minima poišči drugačen dokaz osnovnega izreka algebre.

(12) Podobno kot smo pokazali holomorfnost potenčnih vrst, pokaži naslednjo trditev. Naj zaporedje holomorfnih funkcij $\{f_n\}$ enakomerno konvergira k funkciji f na $D \subset \mathbb{C}$. Potem je f holomorfna.

(13) Naj bo f holomorfna na $D(a,r)$ in naj bo $|f(z)| \leq M$ za vsak $z \in D(a,r)$. Dokaži Cauchyjeve ocene

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

za vsak $z \in D(a,r)$ in $n \in \mathbb{N}$. S pomočjo teh ocen pokaži trditev: Naj zaporedje holomorfnih funkcij $\{f_n\}$ enakomerno konvergira k holomorfni funkciji f na $D \subset \mathbb{C}$. Potem za vsako kompaktno množico $K \subset D$, zaporedje $\{f_n^{(k)}\}$ enakomerno konvergira na D proti funkciji $f^{(k)}$.

POGLAVJE 5

Klasifikacija izoliranih singularnosti in izrek o ostankih

5.1. Klasifikacija izoliranih singularnosti

Funkcija f ima v točki a *izolirano singularnost*, če je f holomorfna na *punktiranem krogu* $D(a,r)\backslash\{a\}$, za nek $r > 0$, in ni definirana v a. Pogosto nas zanima, kako se funkcija obnaša v okolici take singularnosti. Izkaže se, da je obnašanje funkcije bistveno odvisno od vrste singularnosti. Če, na primer, pogledamo funkcije $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$ in $e^{1/z}$, se njihova obnašanja okrog točke 0 precej razlikujejo. Funkcija $\frac{\sin z}{z}$ je v okolici 0 omejena in jo lahko holomorfno razširimo tudi v točki 0. Funkcija $\frac{1}{z}$ postane "enakomerno velika", ko se vrednost z približuje 0, medtem ko doseže $e^{1/z}$ v katerikoli okolici točke 0 vse kompleksne vrednosti, razen vrednosti 0.

DEFINICIJA 5.1. Naj ima funkcija f v točki a izolirano singularnost. Potem rečemo, da je

(i) a *odpravljiva singularnost*, če obstaja holomorfna funkcija g, definirana na $D(a,r)$ za nek $r > 0$, in velja $f(z) = g(z)$ za vsak $z \in D(a,r)\backslash\{a\}$.
(ii) a *pol*, če velja $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$.
(iii) a *bistvena singularnost*, če a ni niti odpravljiva singularnost niti pol.

PRIMER 5.2. Funkcija $\frac{\sin z}{z}$ ima v 0 odpravljivo singularnost, saj velja za $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

Za $g(z)$ lahko vzamemo vsoto te potenčne vrste, ki je holomorfna tudi v 0. Funkcija $\frac{1}{z}$ ima v 0 pol, saj velja

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z}\right| = \infty.$$

Funkcija $e^{1/z}$ nima v 0 niti odpravljive singularnosti niti pola, saj velja za $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0.$$

Torej ima v 0 bistveno singularnost. $\square$

TRDITEV 5.3. *Naj ima funkcija f v a izolirano singularnost.*

(i) *Funkcija f ima v a odpravljivo singularnost natanko tedaj, ko je f omejena v okolici točke a.*

(ii) *Funkcija f ima v a pol natanko tedaj, ko f nima odpravljive singularnosti v a in obstaja tako naravno število $n \geq 1$, da ima $(z-a)^n f(z)$ odpravljivo singularnost v a.*

DOKAZ. (i) Če ima f v a odpravljivo singularnost, je očitno f v okolici točke a omejena. Pokazati moramo torej le obrat. Naj bo sedaj f omejena v okolici a. Če definiramo

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , \ z \neq a \\ 0 & , \ z = a \end{cases},$$

je h holomorfna na $D(a,r)\backslash\{a\}$ in zvezna v a. Velja

$$\lim_{z\to a}\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0,$$

saj je f omejena v okolici a. Torej je h odvedljiva tudi v a in velja $h'(a) = 0$. Naj bo

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

razvoj h v Taylorjevo vrsto okrog a. Ker je $h(a) = h'(a) = 0$, velja $b_0 = b_1 = 0$. Zato za $z \neq a$ velja

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = b_2 + b_3(z-a) + b_4(z-a)^2 + \cdots$$

Ker je $g(z) = b_2 + b_3(z-a) + b_4(z-a)^2 + \cdots$ holomorfna na celem $D(a,r)$, je g holomorfna razširitev funkcije f preko točke a in ima f v a odpravljivo singularnost.

(ii) Naj ima sedaj f v a pol. Definiramo

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & , \quad z \neq a \\ 0 & , \quad z = a. \end{cases}$$

Funkcija h je holomorfna na $D(a,r)\backslash\{a\}$, za nek pozitiven r, in zvezna tudi v a, saj je $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$. Torej ima h v a po točki (i) odpravljivo singularnost. Ker ima h v a ničlo, obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $h(z) = (z-a)^n g(z)$, kjer je g holomorfna v okolici a, in je $g(a) \neq 0$. Zato je za $z \neq a$

$$(z-a)^n f(z) = (z-a)^n \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{g(z)}.$$

Funkcija $\frac{1}{g(z)}$ je holomorfna na celem $D(a,r)$, saj je $g(a) \neq 0$. Torej ima $(z-a)^n f(z)$ v a odpravljivo singularnost. Pokažimo sedaj še obrat. Denimo, da obstaja tako naravno število n, da ima $(z-a)^n f(z)$ v a odpravljivo singularnost, $(z-a)^{n-1} f(z)$ pa v a ni omejena. Naj bo $g(z)$ holomorfna funkcija, definirana v okolici točke a (vključno z a), da velja $(z-a)^n f(z) = g(z)$ za $z \neq a$. Ker je $(z-a)^{n-1} f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ po predpostavki neomejena, je $g(a) \neq 0$. Naj bo δ tak, da je $|g(z)-g(a)| < \frac{|g(a)|}{2}$, če je le $|z-a| < \delta$. Potem za $|z-a| < \delta$, $z \neq a$, velja

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z-a|^n} > \frac{|g(a)|/2}{|z-a|^n}.$$

Ker je $g(a) \neq 0$, dobimo

$$\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty.$$

Torej ima f v a pol. $\square$

Naj ima f v a pol. V dokazu zgornjega izreka smo videli, da obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, za katerega obstaja holomorfna funkcija g v okolici a, $g(a) \neq 0$, in velja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$$

za vsak z v okolici a, $z \neq a$. Tak n imenujemo *red* ali *stopnja* pola f v točki a.

OPOMBA 5.4. Točka (i) zgornje trditve nam pove, da je omejenost holomorfne funkcije na nekem punktiranem krogu $D(a,r)\backslash\{a\}$ že dovolj, da se f holomorfno razširi na cel krog $D(a,r)$. V realnem ta trditev očitno ne velja. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

je omejena v okolici točke 0, vendar je ne moremo niti zvezno razširiti preko te točke. □

IZREK 5.5. *Naj ima funkcija f v a izolirano singularnost in naj bo*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Laurentov razvoj funkcije na kolobarju $A(a;0,R)$ za nek $R > 0$.

(i) *Funkcija f ima v a odpravljivo singularnost natanko tedaj, ko je $a_n = 0$ za vsak $n < 0$.*
(ii) *Funkcija f ima v a pol natanko tedaj, ko obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $a_{-n} = 0$ za vsak $n \geq m+1$ in je $a_{-m} \neq 0$ (m je red pola f v a).*
(iii) *Funkcija f ima v a bistveno singularnost, če in samo če je $a_n \neq 0$ za neskončno mnogo negativnih n.*

DOKAZ. (i) Naj ima f v a odpravljivo singularnost. Torej je $f(z) = g(z)$ na $A(a;0,r)$ za neko funkcijo g holomorfno na $D(a,r)$ in nek $r > 0$. Naj bo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Taylorjeva vrsta funkcije g okrog točke a. Ker je Laurentova vrsta funkcije f enolično določena, velja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n.$$

Torej je $a_n = 0$ za vsak $n < 0$. Obrat sledi iz prve točke zgornje trditve.

(ii) Naj ima f v a pol in naj bo m njegov red. Iz točke (ii) trditve 5.3 sledi, da obstaja holomorfna funkcija g v okolici a, $g(a) \neq 0$, in velja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}.$$

Naj bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

razvoj funkcije g v Taylorjevo vrsto okrog a. Potem je

$$\sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n$$

Laurentova vrsta za f okrog a. Zato velja $a_n = 0$ za $n \leq -(m+1)$ in $a_{-m} \neq 0$, ker je $a_{-m} = b_0 = g(a) \neq 0$. Poglejmo si še obrat. Naj bo

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Laurentova vrsta za f okrog a. Funkcija

$$h(z) = (z-a)^m f(z)$$

ima v a odpravljivo singularnost, saj je njen Laurentov razvoj okrog a enak

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-a)^n.$$

Zato ima f v a pol in ker je $h(a) = a_{-m} \neq 0$, je m ravno njegov red.

(iii) Točka očitno sledi iz (i) in (ii). □

Poglejmo si še, kako lahko pojem izolirane singularnosti razširimo tudi na točko ∞. Naj bo pri nekem $R > 0$ funkcija f holomorfna na $|z| > R$. Funkcija

$$g(z) = f(1/z)$$

je definirana in holomorfna na $D(0,r)\setminus\{0\}$, kjer je $r = 1/R$. Če ima g v točki 0 odpravljivo singularnost (pol, bistveno singularnost), rečemo, da ima f v ∞ odpravljivo singularnost (pol, bistveno singularnost).

Opomba 5.6. Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cela funkcija. Njen Taylorjev razvoj okrog $z = 0$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

konvergira na celi kompleksni ravnini. Zato lahko $g(z) = f(1/z)$ razvijemo v Laurentovo vrsto na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ in razvoj funkcije g je

$$g(z) = \cdots + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_0.$$

Funkcija g ima v 0 pol natanko tedaj, ko je ta vrsta pravzaprav končna. Torej ima cela funkcija f v ∞ pol natanko tedaj, ko je f (nekonstanten) polinom. Ostale cele funkcije, kot so $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z \ldots$

imajo v točki ∞ bistveno singularnost. Cele funkcije z odpravljivo singularnostjo pa so le konstante. $\square$

Picardovi izreki. Poglejmo si še nekaj izrekov, ki pokažejo, da ima holomorfna funkcija v okolici bistvene singularnosti precej "divje" obnašanje. Izreki veljajo tudi za primer, ko za singularno točko vzamemo točko ∞.

IZREK 5.7 (Casorati–Weierstrassov izrek). *Naj bo $a \in U$, kjer je $U \subset \mathbb{C}$ odprta množica, in naj ima holomorfna funkcija $f\colon U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ v točki a bistveno singularnost. Potem je množica $f(U\backslash\{a\})$ gosta v $\mathbb{C}$.*

DOKAZ. Recimo, da množica $f(U\backslash\{a\})$ ni gosta v $\mathbb{C}$. Potem obstajata taka $b \in \mathbb{C}$ in $\varepsilon > 0$, da je cel krog $D(b, \varepsilon)$ vsebovan v komplementu množice $f(U\backslash\{a\})$. Poglejmo si funkcijo

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}.$$

Za vsak $z \in U\backslash\{a\}$ velja

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Torej je g omejena v okolici a in ima zato v a odpravljivo singularnost. Če ima g v a ničlo stopnje m, je

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

in ima f v a pol stopnje m. Če pa $g(a) \neq 0$, ima f v a celo odpravljivo singularnost. V vsakem primeru smo dobili protislovje. $\square$

Še močnejši izrek pa je tako imenovani veliki Picardov izrek.

IZREK 5.8 (veliki Picardov izrek). *Naj ima funkcija f v točki a bistveno singularnost. Potem f v vsaki okolici U točke a zavzame vse možne vrednosti $w \in \mathbb{C}$, razen morda ene, in to neskončnokrat.*

Dokaz velikega Picardovega izreka je precej zahteven, zato ga bomo tu izpustili. Posledica velikega Picardovega izreka je mali Picardov izrek:

IZREK 5.9 (mali Picardov izrek). *Nekonstantna cela funkcija lahko izpusti največ eno kompleksno vrednost.*

Mali Picardov izrek je posplošitev Liouvillovega izreka, ki pove, da je vsaka omejena cela funkcija nujno konstantna. Pove namreč, da je že vsaka cela funkcija $f : \mathbb{C} \to C\backslash\{a, b\}$, kjer sta $a \neq b$ poljubni točki, konstantna. V kolikor je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstanten polinom stopnje n, nam osnovni izrek algebre pove, da je enačba $f(z) = a$ rešljiva za vsak $a \in \mathbb{C}$ (in to natanko n-krat, šteto z večkratnostjo). Nekonstantni polinomi torej zavzamejo vsako kompleksno vrednost. Primer cele funkcije, ki izpusti natanko eno vrednost, je $f(z) = e^z$, saj $e^z \neq 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

5.2. Izrek o ostankih

Naj ima funkcija f izolirano singularnost v točki z_0 in naj bo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$$

Laurentov razvoj funkcije f na punktiranem krogu $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$. Naj bo γ pozitivno orientirana krožnica s središčem v z_0 in polmerom $r < R$ (ali katera koli druga sklenjena pot, homotopna γ v $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$). Ker Laurentova vrsta enakomerno konvergira na γ^*, je

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n\,dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_\gamma c_n(z - z_0)^n\,dz.$$

Če je $n \geq 0$, je $\int_\gamma c_n(z - z_0)^n\,dz = 0$, saj integriramo funkcijo, ki je holomorfna znotraj območja, omejenega z γ. Prav tako za $n \leq -2$ velja $\int_\gamma c_n(z-z_0)^n\,dz = 0$, saj ima v tem primeru funkcija $(z-z_0)^n$ primitivno funkcijo $(z-z_0)^{n+1}/n+1$ na $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ in je zato integral po kateri koli sklenjeni poti znotraj tega območja enak 0. Tako nam ostane le integral

$$\int_\gamma c_{-1}(z - z_0)^{-1}\,dz = \int_\gamma \frac{c_{-1}}{z - z_0}\,dz.$$

Le ta je po Cauchyjevi formuli, ali pa po preprostem konkretnem računu, enak $2\pi i c_{-1}$. Torej imamo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Definicija 5.10. Naj ima funkcija f izolirano singularno točko v z_0 in naj bo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)$ Laurentova vrsta za f na punktiranem krogu okrog z_0. Vrednost c_{-1} imenujemo *ostanek* funkcije f v točki z_0 in označimo z $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

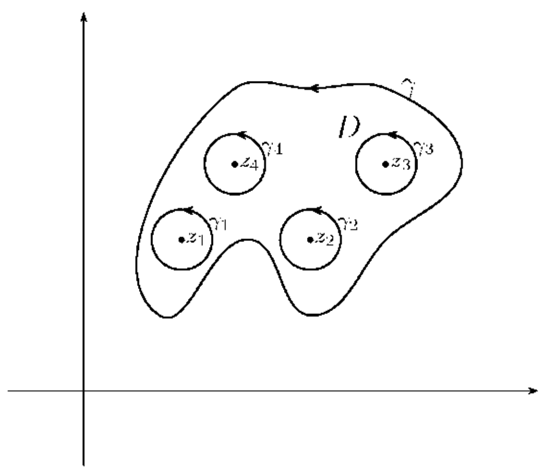
Izrek 5.11 (izrek o ostankih). *Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija na območju D, razen morda v števno mnogo izoliranih točkah iz D, v katerih ima f izolirano singularnost. Naj bo γ pozitivno orientirana kosoma gladka enostavno sklenjena krivulja v D, ki je znotraj D homotopna konstanti, in naj nobena izolirana singularnost funkcije f ne leži na γ^*. Potem velja*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k),$$

kjer so $z_1, z_2, \ldots, z_n$ izolirane singularnosti f znotraj območja, omejenega z γ.

Dokaz. Naj bodo $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ pozitivno orientirane krožnice s središči v $z_1, \ldots, z_n$, ki so dovolj majhne, da se ne sekajo in da so vse vsebovane v notranjosti območja, omejenega z γ. Iz Cauchyjevega izreka in razmisleka zgoraj sledi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$



□

Trditev 5.12. *Naj ima funkcija f pol stopnje m v točki z_0. Potem je*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}\Big|_{z=z_0}.$$

Dokaz. Ker ima f v z_0 pol stopnje m, je njen Laurentov razvoj na punktiranem krogu okrog z_0 enak

$$\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Potem je

$$\frac{1}{(m-1)!}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m}\right)^{(m-1)}\Bigg|_{z=z_0} = c_{-1}.$$

□

Primer 5.13. Izračunajmo integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz,$$

kjer je γ pozitivno orientirana krožnica $|z|=2$. Po izreku o ostankih 5.11 je

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,1)+\operatorname{Res}(f,-1)).$$

Po trditvi 5.12 je

$$\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z+1}\right)''\Big|_{z=1} = \frac{1}{2!}\,\frac{2}{(z+1)^3}\Big|_{z=1} = \frac{1}{8}$$

in

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{1}{(z-1)^3}\Big|_{z=-1} = -\frac{1}{8}.$$

Zato je

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz = 0.$$

□

Primer 5.14. Izračunajmo integral

$$\int_\gamma \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}\,dz,$$

kjer je γ pozitivno orientirana krožnica $|z|=\frac{1}{2}$. Znotraj kroga s polmerom $1/2$ imamo samo eno izolirano singularnost, in to v točki $z=0$.

Po izreku o ostankih je

$$\int_\gamma \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0).$$

Točka $z = 0$ je bistvena singularnost. Poskusimo ugotoviti koeficient c_{-1} v razvoju funkcije f v Laurentovo vrsto

$$\frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2} = z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)(1+z^2+z^4+\cdots).$$

Zanima nas samo koeficient pri členu $\frac{1}{z}$:

$$c_{-1} = \frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots = \operatorname{sh} 1 - 1.$$

Zato je

$$\int_\gamma \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}\,dz = 2\pi i(\operatorname{sh}(1)-1).$$

□

5.3. Primeri uporabe izreka o ostankih

V tem razdelku bomo pogledali nekaj zahtevnejših primerov uporabe izreka o ostankih.

Določeni integrali trigonometričnih funkcij. Izrek o ostankih lahko uporabimo pri izračunu nekaterih določenih integralov trigonometričnih funkcij. Kot primer si najprej poglejmo integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)dt}{5-4\cos t}.$$

Če uporabimo $\cos t = (e^{it}+e^{-it})/2$, dobimo integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{10-4e^{it}-4e^{-it}}dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{4it}+1}{2e^{4it}-5e^{3it}+2e^{2it}} ie^{it}dt.$$

To pa je natanko integral, ki ga dobimo po parametrizaciji $z = e^{it}$ iz kompleksnega integrala

$$\frac{i}{2}\int_\gamma \frac{z^4+1}{2z^4-5z^3+2z^2}dz = \frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}dz.$$

kjer je γ pozitivno orientirana enotska krožnica. Po izreku o ostankih imamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}dz \\
&\quad = -\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},\frac{1}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

(Singularnost $z=2$ je zunaj enotskega kroga). Izračunajmo ostanka

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},0\right) &= \left(\frac{z^4+1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{5}{2},\\
\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{z^4+1}{z^2(z-2)}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{17}{6}.
\end{aligned}
$$

Skupaj je

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2t)dt}{5-4\cos t} = \frac{\pi}{6}.$$

Podobno lahko v vsak integral

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt,$$

kjer je R neka racionalna funkcija, vstavimo

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},$$

in integral prevedemo na kompleksni integral

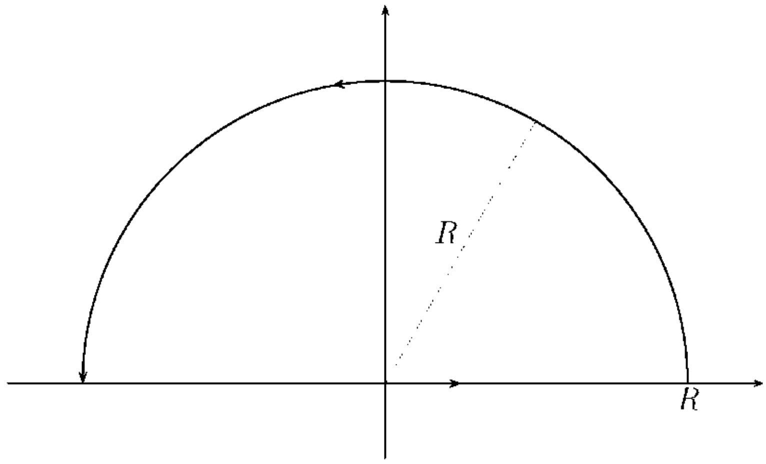
$$\int_{K(0,1)} R\left(\frac{z-1/z}{2i},\frac{z+1/z}{2}\right)\frac{dz}{iz},$$

ki ga nato izračunamo s pomočjo izreka o ostankih.

Izlimitirani integrali racionalnih funkcij. Poglejmo si integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx,$$

kjer sta p in q neka polinoma z realnimi koeficienti. Predpostavimo lahko, da sta si polinoma p in q tuja. Da bo integral obstajal, mora veljati $m \geq n+2$, kjer sta n in m zaporedoma stopnji polinomov p in q. Prav tako polinom q ne sme imeti realnih ničel. Naj bo γ_R pot s slike 5.1 in naj bo R dovolj velik, da so vse ničle, ki jih ima q v zgornji polravnini, že znotraj območja, omejenega z γ_R. Po izreku o ostankih



SLIKA 5.1. Integracijska krivulja γ_R

velja

$$\int_{\gamma_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz = \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}dx + \int_0^{\pi} \frac{p(Re^{i\phi})}{q(Re^{i\phi})} iRe^{i\phi}d\phi = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right),$$

kjer so z_k različne ničle polinoma q iz zgornje polravnine. V kolikor je R dovolj velik, velja

$$|q(z)| > a|z|^m \text{ in } |p(z)| < b|z|^n,$$

če je le $|z| > R$ in sta a, b neki pozitivni konstanti. Zato velja

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{p(Re^{i\phi})}{q(Re^{i\phi})} iRe^{i\phi}d\phi \right| \leq 2\pi \frac{bR^{n+1}}{aR^m} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

V limiti je torej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right).$$

Uporabimo to na primeru integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

V zgornji polravnini ima polinom $(x^2+1)^n$ ničlo n-te stopnje v točki i. Z uporabo zgornjega principa in uporabe trditve 5.12 po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} &= 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^n}, i\right)\\ &= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}\\ &= \frac{1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.\end{aligned}$$

Podobno, kot smo obravnavali izlimitirani integral racionalne funkcije, lahko obravnavamo tudi integrale tipa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\sin ax}{q(x)}dx \text{ in } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\cos ax}{q(x)}dx.$$

V tem primeru gledamo integral

$$\int_{\gamma_R}\frac{p(z)e^{iaz}}{q(z)}dz$$

po zgornji krivulji γ_R. Tukaj gre integral po polkrožnem delu proti 0 že pri pogoju $m \geq n+1$, kjer sta m in n stopnji polinomov q in p. To lahko vidimo s kombinacijo zgornjega razmisleka in razmisleka pri primeru 3.12. Tako dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)e^{iax}}{q(x)}dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)e^{iaz}}{q(z)}, z_k\right),$$

kjer so z_k zopet različne ničle polinoma q v zgornji polravnini. Ker je $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ dobimo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\sin ax}{q(x)}dx &= \operatorname{Im}\left(2\pi i\sum \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)e^{iaz}}{q(z)}, z_k\right)\right),\\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\cos ax}{q(x)}dx &= \operatorname{Re}\left(2\pi i\sum \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)e^{iaz}}{q(z)}, z_k\right)\right).\end{aligned}$$

Kot primer si poglejmo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx.$$

Analogni integral s sinusom je 0, saj je funkcija liha. Po zgornjem je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx &= \operatorname{Re}\left(2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i\right)\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{e^{iaz}}{z+i}\Bigg|_{z=i}\right)\\ &= \frac{\pi}{e^a}.\end{aligned}$$

Eulerjevi funkciji B in Γ. Eulerjeva gama funkcija $\Gamma(s)$ je definirana s predpisom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \quad s > 0,$$

Eulerjeva beta funkcija $B(x,y)$ pa kot

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x, y > 0.$$

Funkciji B in Γ sta povezani s formulo

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

kar se dokaže s pomočjo uporabe dvojnega integrala. Nekoliko težje je pokazati Eulerjevo zrcalno formulo

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)},$$

kar bomo dokazali z uporabo izreka o ostankih. S pomočjo substitucije

$$t = \frac{1}{1+e^x}, \quad dx = -\frac{dt}{t(1-t)}$$

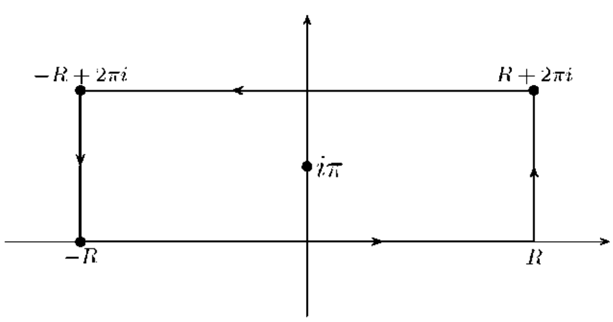
dobimo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1+e^x}\,dx = B(p, 1-p), \quad 0 < p < 1.$$

Izračunajmo integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{pz}}{1+e^z}\,dz$$

po krivulji γ_R s slike 5.2.



SLIKA 5.2. Integracijska krivulja γ_R

Edina singularnost funkcije $\frac{e^{pz}}{1+e^z}$ znotraj območja, omejenega z γ_R, je v točki $i\pi$. Zato je

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{pz}}{1+e^z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right).$$

V tej singularnosti imamo pol prvega reda in zato

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) &= \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{pz}}{1+e^z}\\ &\overset{L'H}{=} e^{ip\pi}\lim_{z\to i\pi}\frac{1}{e^z} = -e^{ip\pi}.\end{aligned}$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R}\frac{e^{pz}}{1+e^z}\, dz &= \int_{-R}^{R}\frac{e^{px}}{1+e^x}\, dx + \int_0^{2\pi}\frac{ie^{p(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\, dy\\ &\quad - \int_{-R}^{R}\frac{e^{p(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\, dx - \int_0^{2\pi}\frac{ie^{p(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\, dy\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{e^{px}}{1+e^x}\, dx + ie^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ipy}}{1+e^R e^{iy}}\, dy\\ &= e^{2\pi pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{px}}{1+e^x}\, dx - ie^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ipy}}{1+e^{-R}e^{iy}}\, dy\\ &= (1-e^{2\pi pi})\int_{-R}^{R}\frac{e^{px}}{1+e^x}\, dx + ie^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ipy}}{1+e^R e^{iy}}\, dy\\ &\quad - ie^{-pR}\int_0^{2\pi i}\frac{e^{ipy}}{1+e^{-R}e^{iy}}\, dy.\end{aligned}$$

Prepričajmo se, da gresta zadnja dva integrala proti 0, ko gre R proti ∞.

$$\left|ie^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ipy}}{1+e^R e^{iy}}\, dy\right| \le 2\pi e^{pR}\max_{y\in[0,2\pi]}\left|\frac{e^{ipy}}{1+e^R e^{iy}}\right| = \frac{2\pi e^{pR}}{e^R-1}.$$

Če je $p<1$, gre zadnja vrednost proti 0, ko gre R proti ∞. Podobno je

$$\left|ie^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ipy}}{1+e^{-R}e^{iy}}\, dy\right| \le 2\pi e^{-pR}\max_{y\in[0,2\pi]}\left|\frac{e^{ipy}}{1+e^{-R}e^{iy}}\right| = \frac{2\pi e^{(1-p)R}}{e^R-1}.$$

Ta vrednost gre proti 0, če je le $p > 0$. Skupaj dobimo pri $0 < p < 1$ v limiti $R \to \infty$

$$
\begin{aligned}
-2\pi i e^{ip\pi} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} \\
&= (1-e^{2\pi p i})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}\,dx}{1+e^x},
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}}{1+e^x}\,dx = \frac{-2\pi i e^{ip\pi}}{1-e^{2\pi i p}} = \frac{2\pi i}{e^{ip\pi}-e^{-\pi i p}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.
$$

Torej smo dokazali

$$
\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.
$$

V posebnem primeru $p = 1/2$ dobimo

$$
\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}
$$

in zato

$$
\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \overset{t=x^2}{=} \int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.
$$

Vsota številskih vrst. Poglejmo si, kako s pomočjo izreka o ostankih izračunamo vsoto vrste

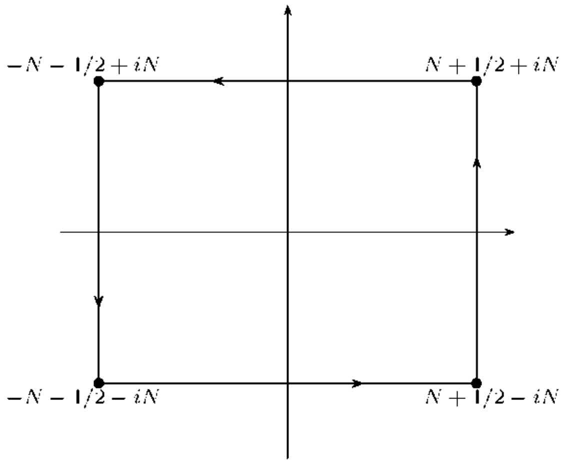
$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
$$

Definirajmo funkcijo

$$
f(z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}
$$

in naj bo γ_N pozitivno orientiran pravokotnik z oglišči $N+1/2+iN$, $-N-1/2+iN$, $-N-1/2-iN$ in $N+1/2-iN$, kjer je $N \in \mathbb{N}$. Naj bo $z = x+iy \in \gamma_N^*$. Vzdolž vertikalnih daljic velja $\cos\pi x = 0$ in $\sin\pi x = \pm 1$ in zato

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right| &= \left|\frac{\cos\pi(x+iy)}{\sin\pi(x+iy)}\right| = \left|\frac{\cos\pi x\operatorname{ch}\pi y - i\sin\pi x\operatorname{sh}\pi y}{\sin\pi x\operatorname{ch}\pi y + i\cos\pi x\operatorname{sh}\pi y}\right| \\
&= \left|\frac{\operatorname{sh}\pi y}{\operatorname{ch}\pi y}\right| < 1,
\end{aligned}
$$



SLIKA 5.3. Integracijska krivulja γ_N

kjer smo uporabili adicijski izrek in zvezo med hiperboličnimi in kotnimi funkcijami. Vzdolž horizontalnih daljic pa imamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right|^2 &= \left|\frac{\cos \pi x \operatorname{ch} \pi y - i \sin \pi x \operatorname{sh} \pi y}{\sin \pi x \operatorname{ch} \pi y + i \cos \pi x \operatorname{sh} \pi y}\right|^2 \\ &= \frac{\cos^2 \pi x \operatorname{ch}^2 \pi y + \sin^2 \pi x \operatorname{sh}^2 \pi y}{\sin^2 \pi x \operatorname{ch}^2 \pi y + \cos^2 \pi x \operatorname{sh}^2 \pi y} \\ &= \frac{\cos^2 \pi x \operatorname{ch}^2 \pi y + \sin^2 \pi x (\operatorname{ch}^2 \pi y - 1)}{\sin^2 \pi x \operatorname{ch}^2 \pi y + \cos^2 \pi x (\operatorname{ch}^2 \pi y - 1)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 \pi y - \sin^2 \pi x}{\operatorname{ch}^2 \pi y - \cos^2 \pi x} \\ &= \frac{1 + \operatorname{sh}^2 \pi y - \sin^2 \pi x}{1 + \operatorname{sh}^2 \pi y - \cos^2 \pi x} \\ &< \frac{1 + \operatorname{sh}^2 \pi y}{\operatorname{sh}^2 \pi y} = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \pi y} < 2.\end{aligned}$$

Zadnja neenakost je očitna, saj je $\operatorname{sh} \pi y > 1$, če je $y \geq 1$, pri predzadnji neenakosti pa enostavno izpustimo člen $-\sin^2 \pi x$, kar števec poveča, in izpustimo $1 - \cos^2 \pi x$, kar zmanjša imenovalec. Skupaj imamo zagotovo

$$\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| < 2, \quad z \in \gamma_z^*.$$

Iz tega dobimo

$$\left|\int_{\gamma_N} f(z)\, dz\right| \leq l(\gamma_N) \max_{z \in \gamma^*} \left|\frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}\right| \leq \frac{2\pi(8N+2)}{2N^2 + N + 1/4} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Po izreku o ostankih je torej

$$\lim_{N\to\infty} 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}(f,k) = 0,$$

saj so singularnosti funkcije f v notranjosti območja, omejenega z γ_N, natanko v točkah $\{-N,-N+1,\ldots,0,\ldots,N-1,N\}$. Funkcija f ima v $z=0$ pol stopnje 3. Ostanek v 0 izračunajmo s pomočjo trditve 5.12

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2}\left(z^3 f(z)\right)''\Big|_{z=0} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

V $z=k$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, je še lažje

$$\operatorname{Res}(f,k) = (z-k)f(z)|_{z=k} = \frac{\pi\cos(\pi k)}{k^2}\lim_{z\to k}\frac{z-k}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{k^2}.$$

Skupaj smo torej v limiti dobili

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

oziroma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Na podoben način lahko vidimo, da pri dokaj blagem pogoju

$$\lim_{N\to\infty}\max_{z\in\gamma_N^*}|g(z)| = 0$$

na funkcijo g brez polov v $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ velja

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} g(n) = -\pi\sum_k \operatorname{Res}\left(g(z)\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, z_k\right),$$

kjer so z_k različni poli funkcije g in točka 0. Primer, ki smo ga podrobneje obravnavali, je bil primer $g(z)=\frac{1}{z^2}$. Če uporabimo funkcijo $g(z)=\frac{1}{z^{2m}}$, dobimo bolj splošno

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = \frac{\pi^{2m}}{2(2m)!}\left(\frac{x\cos x}{\sin x}\right)^{(2m)}\Bigg|_{x=0}.$$

Za obravnavo vsote tipa

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}(-1)^n g(n)$$

bi morali gledati integral funkcije $f(z)=\frac{\pi g(z)}{\sin(\pi z)}$ po poti γ_N. Formula, ki jo ob podobnih predpostavkah dobimo, je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^n g(n)=-\pi\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin(\pi z)},z_k\right),$$

kjer so zopet z_k različni poli funkcije g in pa točka 0.

Naloge

(1) Določi tip singularnosti funkcje f v dani točki z_0 in izračunaj ostanke $\operatorname{Res}(f,z_0)$:
   (a) $f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}$, $z_0=0$,
   (b) $f(z)=\frac{1+\cos\pi z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$,
   (c) $f(z)=z\cos\frac{1}{z}$, $z_0=0$,
   (d) $f(z)=\frac{z+3}{(z^2+2z+1)^2}$, $z_0=-1$.

(2) Izračunaj integrale
   (a) $\int_{|z-i|=2}\frac{dz}{z(z^2+3)}$,
   (b) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3\sin z}$,
   (c) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z(z^2-1)^2\operatorname{sh} z}$.

(3) Izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{3-2\cos\vartheta}.$$

(4) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dx,$$

kjer sta a in b poljubni realni števili.

(5) Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2}dx.$$

(6) Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$