GEODETSKI DATUM IN S-TRANSFORMACIJA

GEODETIC DATUM AND S-TRANSFORMATION

Aleš Marjetič, Bojan Stopar

UDK:528.4

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02

IZVLEČEK

Članek obravnava osnovne pojme geodetskega datuma, načine definiranja geodetskega datuma in načine spremembe geodetskega datuma s pomočjo S-transformacije. S-transformacija se izkaže kot zelo uporabna na področju deformacijske analize pri prehodu iz rezultatov izravnave proste mreže v izbrani, enolično določen geodetski datum domnevno stabilnih točk. S tem je omogočena dokaj enostavna primerjava rezultatov izravnave geodetske mreže v različnih obdobjih z neenakim geodetskim datumom.

ABSTRACT

The article deals with a basic geodetic datum concept and the ways of defining and changing the geodetic datum by using the S-Transformation. The S-Transformation has proved to be very useful in the field of the deformation analysis problems when passing from free network adjustment results to a selected uniquely determined geodetic datum defined with stable points. This enables quite a simple comparison between the results of the geodetic network in different epochs with non-equal geodetic datum.

KLJUČNE BESEDE

geodetski datum, geodetska mreža, S-transformacija

KEY WORDS

geodetic datum, geodetic network, S-Transformation

1 UVOD

Pri posredni izravnavi opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov moramo definirati koordinatni sistem oz. geodetski datum. V praksi nastopi problem geodetskega datuma, ko imamo opravka s koordinatami točk, ki ne ustrezajo geodetskim opazovanjem. Neskladnost koordinat točk in opazovanj je posledica:

- razlike kakovosti geodetske mreže in opazovanj: nova izmera povezana z v preteklosti vzpostavljeno geodetsko mrežo,
- spremembe koordinat zaradi nestabilnosti geodetskih točk v geodetskih mrežah.

Problema geodetskega datuma pri nalogah geodetske izmere v tem prispevku ne bomo obravnavali, ker ga v praktični geodetski izmeri zaenkrat ne obravnavamo. Omejili se bomo na problem geodetskega datuma v nalogah deformacijske analize.

Izbira datumskih točk, to je točk, ki definirajo geodetski datum oz. koordinatni sistem geodetske mreže, je odvisna od stabilnosti točk, ki naj bi definirale koordinatni sistem. Kljub izbiri stabilnih točk, ki definirajo geodetski datum v prvi in ponovljenih izmerah mreže, se lahko iz različnih razlogov zgodi, da se te točke premaknejo oz. spremenijo koordinate. V tem primeru se pojavi potreba po spremembi geodetskega datuma mreže. Če se geodetski datum spremeni, ne moremo primerjati rezultatov terminskih izravnav mreže ob različno definiranih geodetskih datumih. V tem primeru sta možni dve rešitvi. Prva je, da ponovimo izravnavo geodetske mreže za nek časovni termin z novim geodetskim datumom. Druga pa je, da rezultate izravnave ob izbranem geodetskem datumu transformiramo v na novo definiran geodetski datum. To transformacijo imenujemo S-transformacija. Izraz izhaja iz angleške besede ˝Similarity˝ – torej podobnostna linearna transformacija. Možnost uporabe tega tipa transformacije iz enega v drug geodetski datum oz. iz enega v drug koordinatni sistem izhaja iz dejstva, da se različni koordinatni sistemi med seboj le malo razlikujejo oz. so med seboj diferencialno podobni (Ašanin, 1986). Pri tej transformaciji se ohranja oblika mreže.

2 GEODETSKI DATUM

Geodetski datum geodetske mreže je definiran kot najmanjše število parametrov, potrebnih za določitev novih koordinat točk v geodetski mreži glede na predhodno definiran koordinatni sistem. Problem datuma geodetske mreže izhaja iz tega, da običajna geodetska opazovanja, t. i. notranja opazovanja, omogočajo določitev samo relativnih koordinat točk mreže. V geodetski mreži namreč opazujemo horizontalne kote (smeri), dolžine, višinske razlike ter relativne položaje (GPS), ki so notranja opazovanja. Na drugi strani pa zunanja opazovanja predstavljajo količine, ki so določene glede na predhodno definiran koordinatni sistem (astronomske koordinate točk (Φ, Λ, H), elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h), kartezične koordinate v globalnem koordinatnem sistemu (X, Y, Z)) in nimajo neposrednega vpliva na notranjo geometrijo geodetske mreže oz. na relativne položaje točk v geodetski mreži. Ta dejstva govorijo o tem, da samo iz klasičnih geodetskih opazovanj, brez dodatnih informacij o geodetskem datumu, ne moremo pridobiti koordinat v predhodno definiranem koordinatnem sistemu.

Problem definiranja geodetskega datuma geodetske mreže nastopa v različnih primerih, predvsem pa pri vzpostavitvi geodetskih mrež za najnatančnejše naloge, npr. geodetske mreže za potrebe deformacijske analize. Z navezavo take mreže na državni koordinatni sistem bi bili primorani privzeti dane koordinate točk v državnem koordinatnem sistemu. Te bi po kakovosti določitve zaostajale za koordinatami točk, določenimi v okviru lokalne geodetske mreže. Meritve v deformacijskih mrežah opravljamo z najsodobnejšim instrumentarijem in metodami izmere, ki zagotavljajo veliko nadštevilnih opazovanj in jih obdelujemo s postopki, ki omogočajo obravnavo vseh vplivov na opazovanja. Zato koordinat točk v okviru deformacijske analize ne računamo v geodetskem datumu državnega koordinatnega sistema, ampak definiramo geodetski datum lokalnega koordinatnega sistema, v katerem nato spremljamo spremembe lege točk v mreži. Zato je pri vzpostavitvi lokalne geodetske mreže za deformacijsko analizo potrebno pred prvo določitvijo koordinat točk v mreži definirati geodetski datum. Ta določitev se v osnovi ne razlikuje od določitve datuma v večjih geodetskih mrežah, ki omogočajo določitev koordinat točk v državnih in globalnih koordinatnih sistemih.

Pri določevanju geodetskega datuma geodetske mreže velja nekaj splošnih lastnosti. Če v geodetski mreži geodetski datum ni ali ni v celoti določen, ga je treba določiti z ustreznimi datumskimi parametri. Notranja in morebitna zunanja opazovanja lahko določajo nekatere datumske parametre, preostali nedoločeni datumski parametri pa se v geodetski mreži kažejo kot nepopolnost ali **defekt geodetskega datuma** (d– število preostalih nedoločenih datumskih parametrov). Če sedaj zagotovimo natanko toliko danih datumskih količin (npr. danih koordinat točk), kot je število preostalih potrebnih datumskih parametrov, potem govorimo o **enolično določenem geodetskem datumu**. V tem primeru z izbiro danih količin oz. vezi med danimi količinami in parametri za definiranje geodetskega datuma ne posegamo v notranjo geometrijo geodetske mreže, kar je tudi edina sprejemljiva možnost za korektno obravnavo geodetskih mrež. Opozorimo tudi na pojav **predoločenosti geodetskega datuma**. Geodetski datum je v tem primeru definiran z več količinami, kot je to nujno potrebno. Zato je izračun koordinat točk v geodetski mreži obremenjen z nepravilnostmi datumskih parametrov, kot jih definirajo koordinate danih točk, kar ni dobro. Ocenjevanje notranje natančnosti geodetske mreže je zato lahko težavno. Dejstvo je tudi, da je geodetski datum lahko podvržen spremembam, zato se lahko skozi čas spreminja. S časom se namreč razvijajo merske metode in instrumentarij, ki je vse natančnejši. Tako v geodetsko mrežo vključujemo kvalitetnejša opazovanja in z vnovičnimi izravnavami mreže izboljšujemo kakovost koordinat točk, ki definirajo geodetski datum geodetske mreže, oz. ga definiramo na novo. S tem se spreminjajo koordinate točk v geodetski mreži, ki jih lahko med sabo analitično primerjamo, če poznamo zveze med koordinatami točk, določenimi glede na različno definirane geodetske datume. Najbolj pogosta sprememba geodetskega datuma v času pa je sprememba položajev točk, ki definirajo geodetski datum.

Število potrebnih datumskih parametrov je torej odvisno od vrste opravljenih opazovanj in od razsežnosti prostora, v katerem določamo koordinate točk: 1D, 2D, 3D. Na primeru lokalnih geodetskih mrež za deformacijsko analizo nas zanimajo horizontalne koordinate točk (y, x), zato je število potrebnih datumskih parametrov, ki jih moramo določiti ali privzeti iz danih količin, največ štiri. Parametri, ki jih je treba definirati za zagotovitev geodetskega datuma so zasuk ali rotacija, premik ali translacija in merilo. V osnovi geodetski datum zagotovijo zunanja opazovanja (zunanje količine), lahko pa posamezne datumske parametre definirajo tudi geodetska opazovanja (notranje količine, notranja opazovanja) v geodetski mreži. Merjene dolžine v geodetski

tip mreže	**datumski parametri**	**defekt datuma – d**
1D višinska mreža	1 translacija	**1**
2D trilateracijska mreža	2 translaciji (vzdolž osi x - t_x in osi y - t_y) 1 rotacija (okrog osi z - ω_z)	**3**
2D triangulacijska mreža	2 translaciji (vzdolž osi x - t_x in osi y - t_y) 1 rotacija (okrog osi z – ω_z) 1 merilo (s)	**4**
3D geodetska mreža	3 translacije (vzdolž osi x - t_x, y - t_y in z - t_z) 3 rotacije (okrog osi x – ω_x, y – ω_y in z – ω_z) 1 merilo (s)	**7**

Preglednica 1: Potrebni datumski parametri pri različnih vrstah geodetskih mrež.

mreži določajo merilo mreže, morebitna opazovanja azimuta zagotavljajo orientacijo mreže, merjeni koordinati ene od točk v geodetski mreži zagotavljata poznavanje premika geodetske mreže glede na izhodišče koordinatnega sistema.

2.1 Definiranje geodetskega datuma z minimalnim številom zunanjih opazovanj

Čeprav lahko datumske parametre geodetskih mrež zagotovijo zunanja opazovanja, je določanje datumskih parametrov na tak način precej neekonomično (astronomska opazovanja so npr. zelo draga) ali pa so ta slabo določena (absolutne koordinate v primeru GPS-opazovanj, astronomsko določene koordinate). Ena od možnosti za zagotovitev geodetskega datuma geodetske mreže je vzpostavitev določenih zahtev (vezi), ki jih morajo izpolnjevati. Datumski parametri so teoretično lahko podani preko danih količin (danih koordinat točk v mreži – danih zunanjih opazovanj) ali z dodelitvijo velikih vrednosti uteži posameznim koordinatam točke, ki nastopajo v izravnavi kot opazovanja. Datum mora biti definiran tako, da datumski parametri ne vplivajo na notranjo geometrijo geodetske mreže. Zato ni priporočljivo definirati več datumskih parametrov, kot jih potrebujemo za zagotovitev geodetskega datuma geodetske mreže. Tak način definiranja geodetskega datuma imenujemo definiranje geodetskega datuma z minimalnim številom vezi med datumskimi parametri.

V primeru ravninske geodetske mreže moramo definirati največ 4 datumske parametre (preglednica 1). Datum lahko definiramo s štirimi koordinatami dveh točk. Če v mreži opazujemo dolžine, moramo definirati 3 datumske parametre (merilo določajo merjene dolžine). Datum definiramo z dvema danima koordinatama točke in enim azimutom. Ker v praksi le redkokdaj opazujemo azimut, privzamemo v tem primeru za dano eno točko z dvema koordinatama in eno dano koordinato druge točke. Za definiranje datuma v ravnini imamo naslednje vezne enačbe (Kuang, 1996):

$\delta y_1 = 0$, $\delta x_1 = 0$ – zagotovimo, da ni premika točke T_1,

$v_{\nu_1^2} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}_{\nu_1^2}\delta\mathbf{p}_{12} = 0$ – zagotovimo, da ni spremembe smeri med T_1 in T_2,

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}_{\nu_1^2} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta x_{12}^0}{\left(s_{12}^0\right)^2} & -\dfrac{\Delta y_{12}^0}{\left(s_{12}^0\right)^2} & -\dfrac{\Delta x_{12}^0}{\left(s_{12}^0\right)^2} & \dfrac{\Delta y_{12}^0}{\left(s_{12}^0\right)^2} \end{bmatrix},$$

$v_{s_{12}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}_{s_{12}}\delta\mathbf{p}_{12} = 0$ – zagotovimo, da ni spremembe dolžine med T_1 in T_2,

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}_{s_{12}} = \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 & f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} & \dfrac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} & -\dfrac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} & -\dfrac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} \end{bmatrix},$$

kjer je $\delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}_{12} = \begin{bmatrix} \delta y_1 & \delta x_1 & \delta y_2 & \delta x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Vezne enačbe lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Delta} = 0\,, \tag{1}$$

kjer je:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & b_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ -f_1 & -f_2 & f_1 & f_2 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ – datumska matrika dimenzije 4 x $2n$ (n – število točk mreže).

Če bi v mreži opazovali azimut, bi odstranili 3. vrstico, če bi opazovali dolžino, pa 4. vrstico matrike **D**.

2.2 Definiranje geodetskega datuma z notranjimi opazovanji

Definiranje geodetskega datuma z notranjimi opazovanji predstavlja naslednjo možnost definiranja geodetskega datuma z minimalnim številom vezi, ki temeljijo na vrednostih nekaterih ali vseh koordinatah točk geodetske mreže, vključenih v izravnavo. Tu govorimo o izravnavi proste mreže. Prosta mreža je tista, v kateri koordinat nobene točke ne privzamemo kot danih. Namesto koordinat točke mreže, kakega azimuta ali kake razdalje se notranje vezi nanašajo na neko fiktivno točko, na nek fiktivni azimut, neko fiktivno dolžino v mreži. V 3D- in 2D-prostoru zahtevajo notranje vezi izpolnitev naslednjih pogojev za prosto mrežo:

- koordinate težišča mreže (povprečje približnih koordinat točk v mreži) se po izravnavi ne smejo spremeniti,
- mreža se glede na težišče ne sme zasukati,
- velikost geodetske mreže (povprečna razdalja med težiščem in posameznimi točkami mreže) mora ostati nespremenjena.

Matematično pridobimo vezne enačbe, ki zagotavljajo izpolnitev notranjih vezi, iz enačb podobnostne transformacije, ki zagotavlja, da je vsota kvadratov razlik med približnimi in ocenjenimi vrednostmi koordinatnih neznank najmanjša možna:

Matematično pridobimo vezne enačbe, ki zagotavljajo izpolnitev notranjih vezi, iz enačb podobnostne transformacije, ki zagotavlja, da je vsota kvadratov razlik med približnimi in ocenjenimi vrednostmi koordinatnih neznank najmanjša možna:

$$\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Delta} = \min. \tag{2}$$

Izpeljavo veznih enačb izravnave z notranjimi vezmi med neznankami izvedimo za ravninsko geodetsko mrežo. Tako imamo 4 datumske parametre, ki jih moramo določiti (preglednica 1). Dane imamo približne koordinate točk:

$$y_i^0, x_i^0 \qquad i = 1 \dots m \text{ (število točk).} \tag{3}$$

Izravnane koordinate lahko povežemo s približnimi koordinatami s podobnostno transformacijo, kjer so transformacijski parametri: kot zasuka ω_z, merilo mreže s ter premika mreže vzdolž obeh koordinatnih osi – t_y in t_x:

$$\begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i^0 + \delta y_i \\ x_i^0 + \delta x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_y \\ t_x \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_i^0 \\ x_i^0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Glede na zgoraj naštete vezi, ki jih morajo izpolniti neznanke oz. koordinate točk v mreži, lahko pričakujemo, da se bo mreža zasukala za majhen kot $\delta\omega_z$ ter spremenilo merilo mreže za majhno vrednost δs. Diferencialni spremembi zasuka in merila sta s prvotnima vrednostma zasuka in merila povezani z izrazom:

$$\delta\omega_z = \omega_z - \omega_z^0 \text{ in } \delta s = s - s^0. \tag{5}$$

Določiti želimo torej štiri parametre za definiranje geodetskega datuma ravninske geodetske mreže (t_y, t_x, ω_z in s). Zato enačbo (5) lineariziramo v okolici približnih vrednosti $s = 1$ in $\omega_z = 0$, tako da velja:

$$s = 1 + \delta s\,, \; \omega_z = \delta\omega_z. \tag{6}$$

Če to upoštevamo, velja:

$$\begin{aligned} y_i^0 + \delta y_i &= t_y + (1+\delta s)\cdot\left(\cos\delta\omega_z \cdot y_i^0 + \sin\delta\omega_z \cdot x_i^0\right), \\ x_i^0 + \delta x_i &= t_x + (1+\delta s)\cdot\left(-\sin\delta\omega_z \cdot y_i^0 + \cos\delta\omega_z \cdot x_i^0\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Če predpostavljamo, da je $\delta\omega_z$ majhen kot in zanemarimo člene, v katerih nastopajo produkti popravkov približnih vrednosti neznanih transformacijskih parametrov, lahko enačbo (7) zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \delta y_i &= t_y + \delta\omega_z \cdot x_i^0 + \delta s \cdot y_i^0\,, \\ \delta x_i &= t_x - \delta\omega_z \cdot y_i^0 + \delta s \cdot x_i^0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

oziroma v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \delta y_i \\ \delta x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_i^0 & y_i^0 \\ 0 & 1 & -y_i^0 & x_i^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_y & t_x & \delta\omega_z & \delta s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Vidimo, da je npr. popravek koordinate y sestavljen iz premika t_y, člena $\delta\omega_z \cdot x_i^0$, ki vsebuje zasuk mreže in $\delta s \cdot y_i^0$, ki vsebuje spremembo merila mreže. Zahtevi, da se naj mreža v povprečju ne premakne, je enakovredna zahteva, da naj bo vsota popravkov približnih vrednosti koordinat vseh točk enaka 0:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta y_i = 0 \, , \; \sum_{i=1}^{m} \delta x_i = 0 \, . \tag{10}$$

Zahtevo, naj se mreža v povprečju ne zasuka, lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^0 \delta y_i - y_i^0 \delta x_i \right) = 0 \, . \tag{11}$$

Zahtevo, naj se velikost mreže v povprečju ne spremeni, lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(y_i^0 \delta y_i + x_i^0 \delta x_i \right) = 0 \, . \tag{12}$$

Enačbe od (9) do (12) lahko zapišemo v matrični obliki v obliki t. i. veznih enačb:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0} \text{ , kjer je } \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ x_1^0 & -y_1^0 & x_2^0 & -y_2^0 & \ldots & x_m^0 & -y_m^0 \\ y_1^0 & x_1^0 & y_2^0 & x_2^0 & \ldots & y_m^0 & x_m^0 \end{bmatrix} . \tag{13}$$

Numerično primernejša je normirana oblika datumske matrike **H**, kjer vsako vrstico matrike $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ delimo s pripadajočo normo te vrstice, pred tem pa koordinatne komponente reduciramo na težišče mreže. Prvi dve vrstici v matriki $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ podajata zahtevo, da se mreža ne premakne, tretja vrstica zahtevo, da se mreža ne zasuka, in četrta, da merilo mreže ostane nespremenjeno. Če smo v mreži že opazovali katero od količin, izbrišemo ustrezno vrstico v matriki **H**. Če je datum mreže zagotovljen na podlagi zunanjih opazovanj oz. zunanjih vezi, matrike $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ ni treba sestavljati. Med matriko $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ in matriko koeficientov enačb popravkov pri neznankah **B** obstaja pomembna zveza:

$$\mathbf{BH} = \mathbf{0} \cdot \tag{14}$$

Ker sta prostora, ki ga napenjajo vrstice matrike **B** in pripadajoče matrike normalnih enačb $\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PB}$ enaka, lahko zapišemo tudi zvezo:

$$\mathbf{NH} = \mathbf{0} \cdot \tag{15}$$

Iz enačbe (15) izhaja, da stolpci matrike **H** predstavljajo lastne vektorje matrike **N** za lastno vrednost $\lambda = 0$ (Mierlo, 1980).

2.3 Izravnava geodetske mreže po metodi najmanjših kvadratov

Izravnava opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov (MNK) z minimalnim številom notranjih vezi za definiranje geodetskega datuma mreže poteka po postopku izravnave funkcijsko odvisnih neznank:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l} \, , \; \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0} \cdot \tag{16}$$

V okviru izravnave moramo izpolniti zahtevo, da je $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv} = \min.$, in tako dobimo rešitev za vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ z:

$$\mathbf{\Delta} = \left(\left(\mathbf{N} + \mathbf{HH}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} - \mathbf{HH}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pf}. \qquad (17)$$

3 S-TRANSFORMACIJA

Opazovanja v geodetski mreži ne podajajo vseh potrebnih informacij o koordinatnem sistemu oziroma geodetskem datumu mreže, v katerem bodo predstavljeni položaji točk. Za definiranje koordinatnega sistema je treba imeti na voljo določeno število datumskih parametrov, ki jih zagotovimo z vključitvijo ustreznega števila danih količin v izravnavo. Rešitev problema izravnave opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov, na osnovi minimalnega števila znanih datumskih parametrov, vodi v reševanje regularnega sistema normalnih enačb. Če ne zagotovimo potrebnega števila datumskih parametrov za definiranje geodetskega datuma, pride do singularnosti sistema normalnih enačb. Tak primer se pojavi v primeru proste mreže, kjer ne privzamemo nobene koordinate točke kot dane. Iskanje rešitve izravnave proste mreže oz. singularnega sistema normalnih enačb lahko izvedemo na dva načina:

- prvi je določitev minimalnega števila zunanjih vezi (glej enačbo (1) ali (13)) oz. definiranje potrebnega števila datumskih parametrov za definicijo koordinatnega sistema. Ko definiramo potrebno število datumskih parametrov, imamo opravka z regularnim sistemom normalnih enačb, ki omogoča pridobitev enolične rešitve za neznanke,
- drugi je rešitev singularnega sistema normalnih enačb. Ta rešitev ni enolično določena in zagotavlja pridobitev pristranske ocene neznank. Nato pa to rešitev preračunamo v enolično s pomočjo S transformacije.

3.1 Izravnava proste mreže in S-transformacija

Zapišemo lahko sistem lineariziranih opazovanj (enačba (16)), pri čemer predpostavimo, da smo predhodno odstranili orientacijske neznanke na vseh stojiščih. Če nobene točke ne obravnavamo kot dane, potem govorimo o izravnavi proste mreže in predstavlja enačba (17) singularen sistem *n* enačb opazovanj v geodetski mreži. Rešitev dobimo preko sistema normalnih enačb:

$$\mathbf{N\Delta} = \mathbf{t}\,,\ \ \mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t}\,, \qquad (19)$$

kjer je:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PB}\,,\ \ \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pf}\,.$$

Tako matrika koeficientov neznank **B** kot matrika normalnih enačb **N** sta singularni in imata defekt ranga enak defektu datuma (*d*) geodetske mreže (manjkajoče število potrebnih datumskih parametrov). Ker imata matriki **B** in **N** isto bazo prostora, veljajo za njiju enake lastnosti. Ker je **N** singularna, velja, da det(**N**) = 0, kar pomeni, da inverzna matrika $\mathbf{N}^{-1}$ ne izpolni pogoja za navadno inverzijo matrike:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{I}\ . \tag{20}$$

Matrika **N** izpolnjuje pogoje generalizirane inverzije, ki jo označimo z $\mathbf{N}^{-}$ (Rao, Mitra, 1971):

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-}\mathbf{N} = \mathbf{N}\ . \tag{21}$$

Zato lahko zapišemo splošno rešitev za $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-}\mathbf{t}\ .\cdot \tag{22}$$

Dejstvo je, da $\mathbf{N}^{-}$ ni enolično določena oziroma obstaja neskončno mnogo matrik **N**, ki izpolnjujejo pogoj (21). Tako dobimo neskončno mnogo rešitev za $\mathbf{\Delta}$. Da bi transformirali neenolično in pristransko rešitev za $\mathbf{\Delta}$ v enolično in nepristransko rešitev, je treba poiskati primeren operator **S**, ki bo izpolnil naslednji pogoj (Mierlo, 1980):

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{N}^{-}\mathbf{N} = \mathbf{S}\mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\ . \tag{23}$$

Operator **S** transformira pristransko rešitev v koordinatno definirano rešitev z izbranima premikoma, orientacijo in merilom in ga imenujemo matrika S-transformacije. Ena od možnosti je tudi uporaba psevdoinverzije za iskanje enolične rešitve:

$$\mathbf{\Delta}_m = \mathbf{N}^{+}\mathbf{t}\ . \tag{24}$$

$\mathbf{N}^{+}$ v enačbi (24) predstavlja Moore-Penroseovo psevdoinverzijo, ki določi tisto rešitev normalnih enačb, ki minimizira evklidsko oz. drugo normo vektorja $\mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Delta} = \min$. (Rao, Mitra, 1971).

Enačba (24) predstavlja rešitev proste mreže ($\mathbf{\Delta}_m$), ki jo lahko pridobimo tudi iz neenolično definirane pristranske rešitve (enačba (22)) z uporabo ustrezne S-transformacijske matrike $\mathbf{S}_m$, ki je podana z izrazom (Mierlo, 1980):

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\ ,\ \mathbf{\Delta}_m = \mathbf{S}_m\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{l}, \tag{25}$$

$$\mathbf{\Delta}_m = \mathbf{N}^{+}\mathbf{t}\ .$$

Z upoštevanjem lastnosti psevdoinverzije lahko dokažemo, da je matrika $\mathbf{S}_m$ idempotentna:

$$\mathbf{S}_m\mathbf{S}_m = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{S}_m. \tag{26}$$

Matrika $\mathbf{S}_m$ izpolnjuje pogoj operatorja, ki preslika pristransko neenolično rešitev v koordinatno definirano rešitev (pogoj (23)):

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{S}_m\mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\ \text{ oziroma }\ \mathbf{S}_m = \mathbf{S}_m\mathbf{N}^{-}\mathbf{N}\ . \tag{27}$$

Dokaz: $\mathbf{S}_m\mathbf{B}^{-}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{B}^{-}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{S}_m$.

Iskanje enolične rešitve psevdoinverzije preko matrike $\mathbf{S}_m$ ni najbolj praktično. Cilj je pokazati, da je možno transformirati pristransko rešitev v nepristransko s pomočjo matrike $\mathbf{S}_m$. To lahko razložimo na geometrijski način. Če predstavlja **H** nulti prostor matrike **N**, je nulti prostor *d* dimenzionalen (*d* – defekt datuma). Ker je $\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B}$, obstajata zvezi (14) in (15). Matrika **H** vsebuje podatke o premiku, zasuku in merilu mreže. Torej je matrika $\mathbf{S}_{\mathrm{m}}$ linearni operator oz. projektor, ki projicira vektor $\mathbf{\Delta}$ iz nultega prostora matrike **B** v prostor, ki ga napenjajo stolpci matrike **B** (Mierlo, 1980). Ker je prostor, ki ga napenjajo stolpci matrike $\mathbf{I}-\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}$, enak kot nulti prostor matrike **B**, oziroma ker sta prostora, ki ga napenjajo stolpci matrike **H** in $\mathbf{HH}^{+}$, enaka, sta potemtakem enaka tudi prostora $\mathbf{I}-\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}$ in $\mathbf{HH}^{+}$. Zato lahko zapišemo S-transformacijsko matriko $\mathbf{S}_m$ kot:

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{I}-\mathbf{HH}^{+}. \tag{28}$$

Enačba (28) predstavlja eno od metod za izračun matrike $\mathbf{S}_m$.

Za matriko **H** dimenzije $d \times u$ velja $\mathbf{H}^{+} = \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{+}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ oz. če je $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ regularna, kar se zgodi v primeru enolično določenega in predoločenega geodetskega datuma, potem velja $\mathbf{H}^{+} = \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

Sedaj lahko S_{m} zapišemo kot:

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{I}-\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{+}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}-\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Matrika $\mathbf{S}_m$ je singularna in ima enak defekt ranga kot matrika **N** ali **B** (ki je enak defektu datuma geodetske mreže). Matrika $\mathbf{S}_m$ torej predstavlja S-transformacijsko matriko, ki transformira pristransko, neenolično rešitev v enolično določeno rešitev, za katero velja, da je $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Delta} = \min.$, kar pomeni, da s $\mathbf{S}_m$ dobimo tak rezultat, kot če bi izravnavali prosto mrežo. $\mathbf{S}_m$ transformira rešitev v poljubnem, enolično določenem datumu v rešitev proste mreže, kar je identično rešitvi, ko vse točke določajo datum. Vendar pa nas ne zanima samo, kako iz poljubne rešitve, izračunane v enolično določenem geodetskem datumu, preidemo v rešitev izravnave proste mreže, ampak tudi, kako transformiramo rešitve za $\mathbf{\Delta}$ iz enega v drugi enolično določen datum:

$$\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{S}_i\mathbf{\Delta}_j, \tag{30}$$

kjer je:

$\mathbf{\Delta}_i$ – vektor neznank oz. popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank v datumu *i*,

$\mathbf{S}_i$ – matrika S-transformacije, ki projicira poljubno rešitev v rešitev v datumu *i*,

$\mathbf{\Delta}_j$– vektor neznank oz. popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank v datumu *j*.

<u>Opomba</u>: indeksa *i* in *j* se nanašata izključno na enolično definirane datume geodetskih mrež.

Matriko $\mathbf{S}_{\mathrm{i}}$ dobimo z naslednjo enačbo:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{I}-\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_i\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_i, \tag{31}$$

kjer je:

$\mathbf{S}_i$ – matrika S-transformacije dimenzij $2m$ x $2m$ (singularna, kvadratna, idempotentna, z defektom ranga *d*, enakem defektu datuma geodetske mreže),

$\mathbf{E}_i$ – matrika dimenzij $2m$ x $2m$, katere izvendiagonalni elementi so enaki 0, na diagonali pa so vrednosti 1 samo na tistih mestih, ki pripadajo posamezni koordinatni komponenti, ki predstavlja dano količino za definiranje geodetskega datuma.

Zanima nas tudi ocena natančnosti transformiranih koordinat. Iz zakona o prenosu varianc in kovarianc lahko matriko kofaktorjev za transformirane koordinate zapišemo:

$$\mathbf{Q}_{\Delta_i\Delta_i} = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_{\Delta_j\Delta_j} \mathbf{S}_i^{\mathrm{T}} \ \text{ in } \ \mathbf{\Sigma}_{\Delta_i\Delta_i} = \mathbf{S}_i \mathbf{\Sigma}_{\Delta_j\Delta_j} \mathbf{S}_i^{\mathrm{T}}. \qquad (32)$$

Vemo, da velja enačba S-transformacije (30) in da je transformacijska matrika singularna z defektom ranga enakim defektu datuma mreže. Ker je **S**-matrika singularna, ne moremo izraziti vektorja neznank $\mathbf{\Delta}_j$ kot $\mathbf{\Delta}_j = \mathbf{S}_i^{-1}\mathbf{\Delta}_i$, ampak si pomagamo s psevdoinverzijo. Obe strani enačbe (30) pomnožimo z leve z matriko $\mathbf{S}_i^+$:

$$\mathbf{S}_i^+\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{S}_i^+\mathbf{S}_i\mathbf{\Delta}_j. \qquad (33)$$

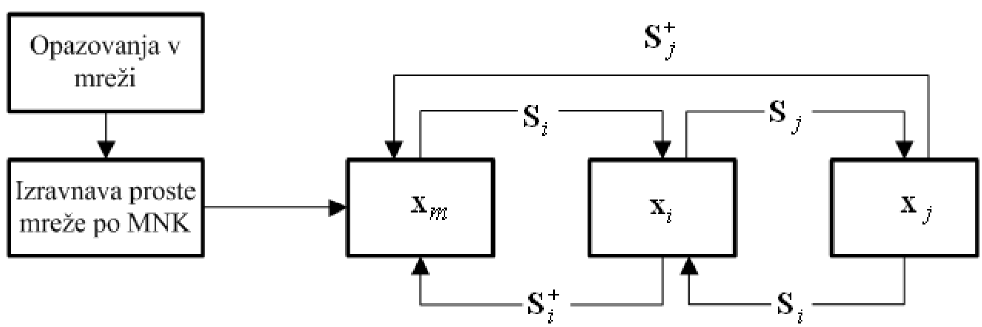
Ker je $\mathbf{S}_i^+ = \mathbf{S}_m^i$ in $\mathbf{S}_i^+\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_m$, imamo:

$$\mathbf{S}_i^+\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{S}_i^+\mathbf{S}_i\mathbf{\Delta}_j = \mathbf{S}_m^i\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{S}_m\mathbf{\Delta}_j = \mathbf{\Delta}_m\,, \qquad (34)$$

kjer je:

$\mathbf{S}_m^i$ – matrika dimenzije $2n$ x $2n$, enaka kot $\mathbf{S}_m$ s stolpci enakimi 0 na mestih, ki pripadajo datumu i.

Vidimo, da, ne glede na to, katero rešitev vzamemo, če jo pomnožimo s psevdoinverzijo matrike v obravnavanem datumu, dobimo rešitev izravnave proste mreže oz. primer, ko vse točke definirajo datum (**E** = **I**). Predstavimo lahko shemo transformacij rešitev iz enega v drugi geodetski datum geodetske mreže.



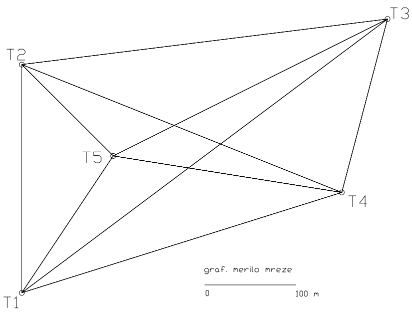
$i, j = 1,\ldots,\binom{2n}{d}$ – možno število različnih enoličnih določitev geodetskega datuma

Slika 1: Shematski prikaz S-transformacije.

4 S-TRANSFORMACIJA NA PRIMERU LOKALNE RAVNINSKE GEODETSKE MREŽE

Praktičen primer S-transformacije je obravnavan na primeru lokalne ravninske geodetske mreže, ki vsebuje 5 točk (T1–T5), razporejenih tako, da ima mreža zadovoljivo geometrijo. Glavni namen je primerjava rezultatov izravnave opazovanj v različnih geodetskih datumih z rezultati S-transformacije rezultatov izravnave proste mreže na isti izbrani geodetski datum. Na podlagi izbranih koordinat točk so bila v mreži simulirana opazovanja horizontalnih smeri in dolžin z metodo Monte Carlo. Vhodni podatek za simulacijo opazovanj so poleg koordinat točk tudi nekateri drugi začetni parametri, ki omogočajo simulacijo: srednji pogrešek (standardna deviacija) smeri = 10˝, srednji pogrešek (standardna deviacija) dolžin = 5 mm.

Predpostavljamo, da so bila v mreži ˝opravljena˝ samo kotna opazovanja (simuliranih dolžin ne upoštevamo). Za definiranje geodetskega datuma je zato treba definirati 4 datumske parametre: 2 premika (vzdolž osi $y - t_y$ in $x - t_x$), 1 zasuk (okrog osi $z - \omega_z$) in 1 sprememba merila (s).



Slika 2: Skica mreže z merjenimi povezavami.

4.1 Izravnava proste mreže in S-transformacija

Najprej izvedemo izravnavo opazovanj v prosti mreži po MNK (za izravnavo proste mreže veljajo pogoji iz poglavja 2.3). Potreben dodatni vhodni parameter za izravnavo je a-priori standardna deviacija smeri (10˝).

točka	popravki približnih vrednosti neznank Δ_p		izravnane koordinate	
	dy [m]	dx [m]	y [m]	x [m]
T1	–0.0013	–0.0006	99.9987	99.9994
T2	–0.0022	0.0006	99.9978	350.0006
T3	–0.0045	–0.0105	499.9955	399.9895
T4	0.0110	0.0080	450.0110	210.0080
T5	–0.0030	0.0024	199.9970	250.0024

Preglednica 2: Rezultati izravnave proste mreže.

Pripadajoča datumska matrika **H** obravnavane geodetske mreže ima obliko:

$$
\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 100 & -100 & 350 & -100 & 400 & -500 & 210 & -450 & 250 & -200 \\ 100 & 100 & 100 & 350 & 500 & 400 & 450 & 210 & 200 & 250 \end{bmatrix}
$$

PRIMER 1 – datum definira samo ena točka (T1) – datum poddoločen

Če želimo transformirati rešitve izravnave proste mreže v geodetski datum, ki ga definirata samo dve koordinatni komponenti (koordinati y in x točke T1), naletimo na težavo. Matrika $\mathbf{H^T EH}$ je singularna (ker rang ($\mathbf{H^T EH}$) = 2 < d), zato ne moremo izvesti navadne inverzije in tako izračunati matrike **S** (enačba (31)). Lahko uporabimo psevdoinverzijo.

	S-transformacija				Izravnava po MNK			
	popravki približnih vrednosti neznank Δ_{T1}		koordinate točk		popravki približnih vrednosti neznank		koordinate točk	
	dy [m]	*dx* [m]	*y* [m]	*x* [m]	*dy* [m]	*dx* [m]	*y* [m]	*x* [m]
T1	**0.0000**	**0.0000**	**100.0000**	**100.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**100.0000**	**100.0000**
T2	−0.0012	0.0004	99.9990	350.0004	−0.0012	0.0003	99.9988	350.0003
T3	−0.0049	−0.0104	499.9955	399.9893	−0.0049	−0.0104	499.9951	399.9896
T4	0.0110	0.0086	450.0112	210.0084	0.0110	0.0087	450.0110	210.0087
T5	−0.0022	0.0026	199.9979	250.0026	−0.0022	0.0026	199.9978	250.0026

Preglednica 3: Primerjava rezultatov S-transformacije iz proste mreže na izbran geodetski datum (T1) in rezultatov izravnave mreže po MNK z danima koordinatama točke T1.

V obeh primerih dobimo praktično enake rezultate. Treba pa je upoštevati, da PRIMER 1 nima praktičnega pomena, saj je cilj določevanja geodetskega datuma, da se tega v celoti določi! Podan je izključno zaradi ponazoritve računskih lastnosti S-transformacije.

PRIMER 2 – datum definirata dve točki (T1 in T3) – datum je enolično določen

Če sedaj, ko imamo rezultate izravnave proste mreže, izvedemo S-transformacijo, pri kateri upoštevamo, da je defekt datuma 4 in vzamemo za dane vrednosti koordinati y in x točke T1 ter koordinati y in x točke T3, ki definirajo ustrezno matriko **E** (vrednost 1 na 1. in 2. ter 5. in 6. diagonalnem mestu). Za izračun S-transformacije moramo najprej izračunati transformacijsko matriko **S** (enačba (31)).

$$\mathbf{S}_{T1T3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.700 & -0.400 & 1 & 0 & -0.300 & 0.400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.400 & -0.700 & 0 & 1 & -0.400 & 0.300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.308 & 0.244 & 0 & 0 & -0.692 & -0.244 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.244 & -0.308 & 0 & 0 & 0.244 & -0.692 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.660 & -0.120 & 0 & 0 & -0.340 & 0.120 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.120 & -0.660 & 0 & 0 & -0.120 & -0.340 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rezultati S-transformacije so transformirane vrednosti vektorja neznank oziroma popravkov približnih vrednosti neznank – koordinat točk (enačba (30)).

	S-transformacija				Izravnava po MNK			
	popravki približnih vrednosti neznank Δ_{T1T3}		koordinate točk		popravki približnih vrednosti neznank		koordinate točk	
	dy [m]	dx [m]	y [m]	x [m]	dy [m]	dx [m]	y [m]	x [m]
T1	**0.0000**	**0.0000**	**100.0000**	**100.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**100.0000**	**100.0000**
T2	–0.0039	0.0055	99.9961	350.0055	–0.0039	0.0054	99.9961	350.0054
T3	**0.0000**	**0.0000**	**500.0000**	**400.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**500.0000**	**400.0000**
T4	0.0169	0.0147	450.0169	210.0147	0.0170	0.0147	450.0170	210.0147
T5	–0.0018	0.0068	199.9982	250.0068	–0.0018	0.0068	199.9982	250.0068

Preglednica 4: Primerjava rezultatov S-transformacije iz proste mreže na izbran geodetski datum (T1, T3) in rezultatov izravnave mreže po MNK z danimi koordinatami točk T1 in T3.

Iz zgornjih rezultatov lahko vidimo, da dobimo praktično enake rezultate za ocenjene vrednosti koordinatnih neznank, če izvedemo S-transformacijo rezultatov izravnave proste mreže na izbran geodetski datum ali če izravnamo opazovanja po MNK v istem datumu (skladnost rezultatov velja tudi za druge izbrane primere enolične določitve geodetskega datuma). Tudi kovariančna matrika ocenjenih koordinatnih neznank je enaka v obeh primerih. Razlika pri koordinatah je kvečjemu 0,1 mm, kar je lahko posledica linearizacije enačb popravkov opazovanj. Vidimo, da lahko s pomočjo S-transformacije prehajamo med različnimi rešitvami izravnave po MNK v različno izbranih geodetskih datumih geodetske mreže. Seveda pa zgornje velja le v primeru, ko govorimo o enolično določenih datumih, to je ko privzamemo toliko danih količin, kot je defekt datuma geodetske mreže.

PRIMER 3 – datum definirajo tri točke (T1, T3, T5) – datum predoločen

Rezultate izravnave proste mreže transformiramo s S-transformacijo, pri kateri upoštevamo, da je defekt datuma 4, in vzamemo za dane vrednosti: koordinati y in x točk T1, T3 ter T5. Dane vrednosti definirajo matriko **E** in pripadajočo matriko **S**:

$$\mathbf{S}_{T1T3T5} = \begin{bmatrix} 0.285 & 0 & 0 & 0 & 0.133 & -0.076 & 0 & 0 & -0.418 & 0.076 \\ 0 & 0.285 & 0 & 0 & 0.076 & 0.133 & 0 & 0 & -0.076 & -0.418 \\ -0.430 & -0.317 & 1 & 0 & -0.152 & 0.367 & 0 & 0 & -0.418 & -0.051 \\ 0.317 & -0.430 & 0 & 1 & -0.367 & -0.152 & 0 & 0 & 0.051 & -0.418 \\ 0.133 & 0.076 & 0 & 0 & 0.082 & 0 & 0 & 0 & -0.215 & -0.076 \\ -0.076 & 0.133 & 0 & 0 & 0 & 0.082 & 0 & 0 & 0.076 & -0.215 \\ -0.147 & 0.260 & 0 & 0 & -0.613 & -0.280 & 1 & 0 & -0.241 & 0.020 \\ -0.260 & -0.147 & 0 & 0 & +0.280 & -0.613 & 0 & 1 & -0.020 & -0.241 \\ -0.418 & -0.076 & 0 & 0 & -0.215 & 0.076 & 0 & 0 & 0.633 & 0 \\ 0.076 & -0.418 & 0 & 0 & 0.076 & -0.215 & 0 & 0 & 0 & 0.633 \end{bmatrix}$$

	S-transformacija				Izravnava po MNK			
	popravki približnih vrednosti neznank Δ_{T1T3T5}		koordinate točk		popravki približnih vrednosti neznank		koordinate točk	
	dy [m]	dx [m]	y [m]	x [m]	dy [m]	dx [m]	y [m]	x [m]
T1	0.0013	-0.0027	100.0013	99.9973	0.0000	0.0000	100.0000	100.0000
T2	-0.0035	0.0025	99.9965	350.0025	-0.0037	0.0007	99.9963	350.0007
T3	-0.0001	-0.0016	499.9999	399.9984	0.0000	0.0000	500.0000	400.0000
T4	0.0175	0.0131	450.0175	210.0131	0.0157	0.0091	450.0157	210.0091
T5	-0.0011	0.0043	199.9989	250.0043	0.0000	0.0000	200.0000	250.0000

Preglednica 5: Primerjava rezultatov S-transformacije iz proste mreže na izbran geodetski datum (T1, T3, T5) in rezultatov izravnave mreže po MNK z danimi koordinatami točk T1, T3 in T5.

V primeru, ko je število danih količin (posameznih koordinatnih komponent) večje od defekta datuma, rezultati S-transformacije niso več identični s tistimi, ki jih pridobimo kot rezultat izravnave po MNK, tako za vektor neznank kot za pripadajočo variančno kovariančno matriko. Pri S-transformaciji, v primeru predoločenega datuma, pridobimo tako rešitev za vektor neznank, ki minimizira drugo normo za vektor neznank, ki pripada koordinatnim komponentam danih točk (Caspary, 1988): $\left\|\Delta_k\right\|_2 = \Delta_k^T \Delta_k = \min.$, kjer je k – število danih količin.

Torej pridobimo pri S-transformaciji v primeru predoločenega datuma rešitev za vektor $\mathbf{\Delta}$, ki vsebuje tudi popravke za koordinate, ki jih obravnavamo kot dane. Na drugi strani pa v primeru izravnave po MNK, kjer v izravnavo vpeljemo več danih količin, kot je defekt datuma, pridobimo popravke približnih vrednosti koordinat samo za točke, ki jih v izravnavi obravnavamo kot nove, dane pa seveda ne pridobijo popravkov. V primeru predoločenega datuma S-transformacija ni več linearna. Tu je treba še enkrat poudariti, da predoločen geodetski datum ni primeren za korektno obravnavo geodetskih mrež iz že naštetih razlogov (poglavje 2)!

5 ZAKLJUČEK

Osnova za določitev koordinat točk je primerno izbran koordinatni sistem oz. geodetski datum, ki ga definirajo ustrezno izbrane dane koordinate točk v geodetski mreži oziroma t. i. datumske točke. Včasih nastane potreba po spremembi datuma mreže, ki jo rešimo tako, da geodetsko mrežo vnovič izravnamo glede na drugačne vrednosti danih koordinat točk ali pa uporabimo S-transformacijo. S-transformacija predstavlja uporabno orodje za transformacijo rezultatov izravnave geodetske mreže iz obstoječega v nek drug geodetski datum. Nekateri postopki deformacijske analize zahtevajo izravnave prostih geodetskih mrež (lociranje grobih pogreškov v opazovanjih) in nato primerjavo rezultatov izravnave dveh terminskih izmer v identičnih geodetskih datumih, ki jih definirajo ugotovljene, domnevno stabilne točke (primer postopek Delft). Drugi primer uporabe S transformacije je, ko želimo predstaviti rezultate izravnave geodetske mreže iz dveh različnih terminskih izmer v identičnem geodetskem datumu, ki ga zaradi najrazličnejših vzrokov ne moremo za vsako izmero zagotoviti (npr. zaradi uničenih točk).

Na podlagi teorije in obravnavanih računskih primerov vidimo, da so rezultati S-transformacije vektorja neznank izravnave proste mreže v nek izbran geodetski datum identični rezultatom izravnave po metodi najmanjših kvadratov v istem geodetskem datumu samo v primeru, ko govorimo o enolično določenih geodetskih datumih. Poleg primera prehoda iz rezultatov izravnave proste mreže v nek izbrani, enolično določen geodetski datum obstaja povezljivost tudi med različnimi geodetskimi datumi preko ustrezno določenih matrik S-transformacije.

Literatura in viri:

Ašanin (1986). Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla. Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju, doktorska disertacija.

Caspary, W. F. (1988). Concepts of network and deformation analysis. The University of New South Wales, Kensington, N. S. W., Avstralija.

Kuang, S. (1996). Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications. Ann Arbor Press, Inc.

Mierlo, J. van (1980). Free Network Adjustment and S – transformation. Karlsruhe: Deutsche Geod. Komm., Series B, št. 252, 41–45.

Rao, C. R., Mitra, S. K. (1971).Generalized Inverse of Matrices and its Application. John Wiley & Sons.

Prispelo v objavo: 30. julij 2007
Sprejeto: 23. avgust 2007

asist. Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.
FGG – Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana
E-pošta: ales.marjetic@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.
FGG – Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana
E-pošta: bojan.stopar@fgg.uni-lj.si