# Ponazoritev zveznosti funkcije

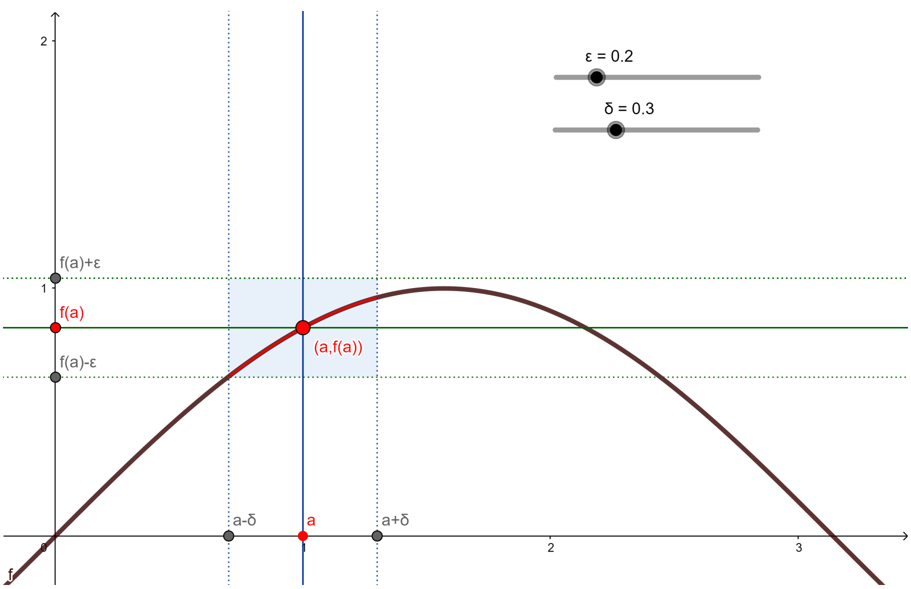
Boštjan Kuzman

**Tokratni prispevek je namenjen predvsem tistim, ki se srečujejo z učenjem ali poučevanjem matematike v srednji šoli ali v začetnih letnikih naravoslovnih študijskih programov. Pri obravnavi realnih funkcij običajno omenimo pojem zveznosti. Za marsikoga v praksi povsem zadošča naivna definicija, da je funkcija na nekem intervalu zvezna, če je njen graf »nepretrgana« krivulja, oz. če lahko graf skiciramo, ne da bi dvignili svinčnik s papirja. Natančnejšo definicijo zveznosti s pomočjo količin $\varepsilon$ in $\delta$ pa je v sodobni jezik matematične analize vpeljal nemški matematik Karl Weierstrass (1815-1897), ki je nadaljeval delo Augustina Louisa Cauhyja (1789-1857) in Bernarda Bolzana (1781-1848). Ta precej bolj abstraktna definicija mnogim povzroča preglavice, zato jo bomo ponazorili z izdelavo ustreznega apleta v GeoGebri. Tovrstne ponazoritve seveda danes zlahka najdemo že izdelane na spletu, vendar ima samostojna izdelava svoj čar, posebej, če se je dijaki in študentje lotijo sami.**

Weierstrassova definicija zvezne funkcije se glasi takole. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ neki odprti interval in naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija, definirana na tem intervalu. Funkcija je *zvezna v točki* $a \in I$, če za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ obstaja tako pozitivno število $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ z lastnostjo $|x - a| < \delta$ velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definicijo bomo najprej ponazorili na primeru funkcije $f(x) = \sin(x)$.

- V kot risalne površine postavimo drsnika $\varepsilon$ in $\delta$, ki zavzameta vrednosti od 0 do 1 z majhnimi koraki 0,01.




**SLIKA 1.**
Na sliki je graf funkcije $f(x) = \sin(x)$. Za vrednost $\varepsilon = 0.2$ v označeni točki $a = 1$ zadošča izbrati vrednost $\delta = 0.3$, pa bo za vsak $x$ v modrem pasu (kjer je $|x - a| < \delta$) vrednost $f(x)$ ležala v zelenem pasu (kjer je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$). Za manjši $\varepsilon = 0.1$ pa je potrebno nekoliko zmanjšati tudi $\delta$, sicer rdeči segment funkcije uide iz zelenega pasu.

- Vnos `f(x)=sin(x)` nariše graf funkcije (lahko poskusimo tudi s kakšno drugo funkcijo).
- Z orodjem *Dodaj točko* izberemo poljubno točko $A$ na $x$-osi. Njeno $x$ koordinato označimo z `a=x(A)`. Nato označimo `b=f(a)` in ustvarimo novi točki `B=(0,b)` in `C=(a,b)`, ki ležita na osi $y$ oz. na grafu funkcije. Prikaz imen točk $A, B, C$ zamenjamo z napisi $a$, $f(a)$ in $(a, f(a))$.
- Narišimo tri navpične premice z ukazi `x=a`, `x=a+`$\delta$, `x=a-`$\delta$, in 3 vodoravne premice z ukazi `y=b`, `y=b+`$\varepsilon$, `y=b-`$\varepsilon$. Premice lahko obarvamo tako, da so navpične modre, vodoravne zelene, srednja pa je črtkana.
- Pravokotnik s koordinatami $(a-\varepsilon, b-\delta)$, $(a+\varepsilon, b-\delta)$, $(a+\varepsilon, b+\delta)$, $(a-\varepsilon, b+\delta)$ narišemo z ukazom `Mnogokotnik` in nekoliko osenčimo.
- Z dodajanjem točk in ustreznim označevanjem lahko označimo tudi vrednosti $a \pm \delta$ in $f(a) \pm \varepsilon$ na koordinatnih oseh.
- Vnos `If(a-`$\delta$`<x<a+`$\delta$`,f)` nariše segment funkcije $f$, definiran na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, ki ga lahko pobarvamo z drugo barvo.

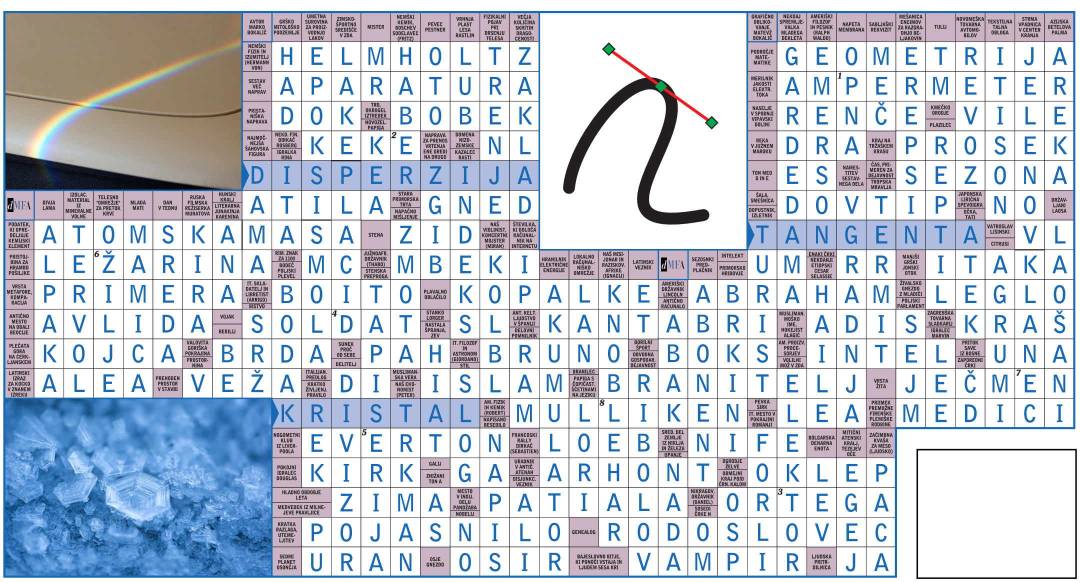
Zdaj preizkusimo delovanje ponazoritve tako, da za izbrano točko $a$ na osi $x$ pri različnih vrednostih $\epsilon$ poiščemo ustrezen $\delta$, da je izpolnjen pogoj iz definicije.

Če smo aplet izdelali po teh navodilih, lahko zdaj v algebrskem oknu na enostaven način spremenimo predpis za funkcijo $f(x)$ in opazujemo obnašanje še drugih funkcij, npr. kvadratne funkcije `f(x)=x`$^2$ ali stopničaste funkcije `f(x)=If(x<0,1,0)`, ki je nezvezna v $a = 0$. Že izdelani aplet, pri katerem lahko z drsnikom izbirate med nekaj pripravljenimi funkcijami, lahko preizkusite na spletnem naslovu `www.geogebra.org/m/ywvearkd`.



× × ×

↓↓↓



## REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 49/2

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke Preseka letnika 49 je **Pet dežel**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Anžeta Mihelčiča iz Kresnic, Igorja Veselinovića iz Ljubljane in Marijano Marinšek iz Celja, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×