



Kuhljevi dnevi 2021

Zbornik del

Zbornik del

Kuhljevi dnevi 2021

Bohinjska Bistrica, 23. – 24. september 2021

Uredila:

Janko Slavič
Martin Česnik



Kuhljevi dnevi 2021

Bohinjska Bistrica, 23. – 24. september 2021

ZBORNİK DEL

Uredila:

Janko Slavič
Martin Česnik

Recenzije:

Milan Batista	Matjaž Hriberšek
Andrej Bombač	Marko Kegl
Miha Brojan	George Mejak
Gregor Čepon	Nikolaj Mole
Matjaž Četina	Jure Ravnik
Matevž Dular	Zoran Ren
Miroslav Halilovič	Božidar Šarler
Marko Hočevar	Matej Vesenjāk
Tomaž Hozjan	Dejan Zupan

Izdalo in založilo:

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

Jamova 2, 1000 Ljubljana

september, 2021

Grafično oblikovanje naslovnice:

Žan Brezec

Cena:

Knjiga je prosto dostopna na spletni strani
Slovenskega društva za mehaniko

Kazalo

M. Bek, L. Slemenik Perše

Reologija kot orodje za proučevanje vedenja visoko polnjenih termoplastičnih kompozitov 1 – 8

M. Borovinšek, Z. Ren

PrePoMax - odprtokodni grafični vmesnik za izvajanje numeričnih analiz po metodi končnih elementov 9 – 14

B. Brank, A. Stanić, M. Lavrenčič

Mešane formulacije za statiko, dinamiko in odpoved materiala 15 – 22

S. K. Chandrashekhara, D. Zupan

Na hitrostih osnovana kvazistatična analiza nosilcev in okvirjev 23 – 30

M. Fike, J. Pavlič, M. Pezdevšek, G. Hren, A. Predin

Meritve mejne plasti pri obtekanju profila lopatice vetrne turbine 31 – 38

R. Flajs

Vpliv inkluzivne preslikave deformiranja telesa na kinematične enačbe nelinearne elastičnosti 39 – 46

T. Gomboc, J. Iljaž, J. Ravnik, M. Zadavec, M. Hriberšek

Sklopljen model prenosa toplote in snovi med delcem in tokom tekočine pri sušenju poroznih delcev na osnovi metode robnih elementov 47 – 54

J. Gostiša, B. Bizjan, B. Širok, M. Zupanc <i>Analiza hidrodinamskih lastnosti rotacijskega kavitatorja in učinkovitosti razgradnje KPK</i>	55 – 62
E. Istenič, V. Šajn, M. Brojan <i>Vpliv lastnosti površine na tok fluida ob steni</i>	63 – 70
B. Kamenik, M. Hriberšek, M. Zadavec <i>Modeliranje procesa depozicije ledu v kondenzatorju liofilizatorja</i>	71 – 78
B. Kamenik, J. Ravnik <i>Ocena negotovosti delovanja toplotnega prenosnika zaradi nepoznavanja lastnosti delovne tekočine</i>	79 – 86
J. Kaplunov, L. Prikazchikova, R. Pušenjak, A. Nikonov <i>Več-parametrično računsko modeliranje upogibno-protipotresnih metapovršin</i>	87 – 92
M. Kegl, B. Harl, J. Predan, N. Gubelj <i>Optimizacija oblike kot orodje za post-procesiranje optimalne topologije nosilnega konstrukcijskega dela</i>	93 – 100
L. Kevorkijan, J. Ravnik, I. Biluš <i>Numerično modeliranje kavitacijske erozije in abrazije delcev na profilu krila NACA 0015</i>	101 – 108
M. Košiček, G. Čepon, M. Boltežar <i>Eksperimentalna karakterizacija vira vibracij z uporabo metode psevdo sil</i>	109 – 116
T. Košir, J. Slavič <i>Karakterizacija mehanskih lastnosti FFF 3D natisnjenih struktur</i>	117 – 126

D. Kovšca, B. Starman, N. Mole <i>Določitev temperaturno odvisne poti dodajanja materiala</i>	127 – 134
A. Mauko, Y. E. Yilmaz, Z. Ren <i>Visokohitrostni preizkusi direktnega udarca (DIHB) z uporabo metode separacije napetostnih valov</i>	135 – 142
G. Mejak <i>Teoretična konstrukcija efektivno izotropičnega kompozita</i>	143 – 150
M. Mihelčič, M. Bek, L. Slemenik Perše <i>Vpliv termokromnega dodatka v PLA polimeru na reološke lastnosti in termokromni odziv kompozita</i>	151 – 160
D. Ocepek, G. Čepon, M. Boltežar <i>Karakterizacija aktivnega vzbujanja podstruktur in prenosnost obratovalnih sil</i>	161 – 168
A. Oseli, L. Slemenik Perše <i>Mehanizmi nastanka omrežja iz ogljikovih nano-cevk v polimernih nano-kompozitih</i> ..	169 – 176
M. Ramšak, M. Hriberšek <i>O numerični MRE rešitvi za ustaljen prevod toplote z izključno konvektivnimi robnimi pogoji</i>	177 – 184
Z. Rek, B. Šarler <i>Hitrostno-tlačna formulacija metode temeljnih rešitev za Stokesov tok</i>	185 – 192
M. Štrakl, M. Hriberšek, J. Ravnik <i>Numerična določitev karakteristike vzgona in upora superelipsoidnih delcev</i>	193 – 200

T. Švarc, A. Špiler, Ž. Volavšek, J. Ravnik <i>Razvoj metode končnih razlik za simulacijo potencialnega toka preko profilov kril</i>	201 – 208
G. Udovč, I. Planinc, T. Hozjan <i>Analiza dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema</i>	209 – 218
J. Urevc, P. Rus, M. Halilovič <i>Uporaba utežene integralske formulacije za izboljšanje natančnosti kolokacijskih metod tipa Runge-Kutta</i>	219 – 224
A. Zorman, J. Slavič, M. Boltežar <i>Frekvenčne cenilke poškodovanosti</i>	225 – 235
E. Zupan, D. Zupan <i>Nelinearna dinamična analiza prostorskih okvirjev s časovno integracijo tretjega reda</i>	236 – 243
A. Žnidarčič, T. Kutrašnik <i>RANS, LES in HRLES simulacije Taylor-Couette-Poiseuille tokov v koncentričnih režah pri višjih Taylorjevih številih</i>	244 – 252



Reologija kot orodje za proučevanje vedenja visoko polnjenih termoplastičnih kompozitov

Marko Bek¹ in Lidija Slemenik Perše¹

Rheology as a tool to investigate the behaviour of highly filled thermoplastic composites

Povzetek. Visoko polnjeni polimerni kompoziti so materiali, kjer koncentracija polnil presega 20 vol %. Visoke koncentracije polnil, kjer postane interakcija med delci pomembna, lahko povzroči težave med predelavo in kasneje tudi pri končni uporabi izdelkov. V prispevku je na dveh primerih predstavljena uporabnost reologije za določitev lastnosti visoko polnjenih termoplastičnih materialov z različnimi matričnimi materiali, polnili in polnitvami. Pokazano je, da večja vsebnost polnila vodi v višje vrednosti dinamičnih modulov in da je lastnost kompozitov opredeljena tako z matrico kot z vrsto polnila. Ob souporabi reologije z ATR-FTIR spektroskopijo in SEM slikami je razloženo nepričakovano vedenje enega izmed kompozitov.

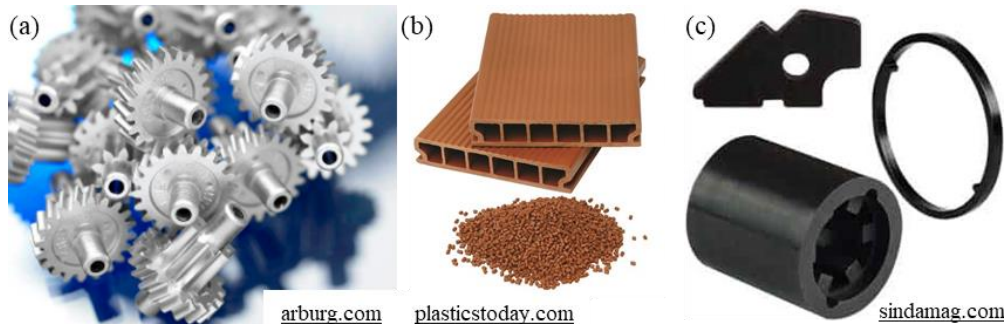
Abstract. Highly filled polymer composites are materials where the concentration of fillers exceeds 20 vol%. High concentrations of fillers, where the interaction between particles becomes important, can cause problems during processing and during the end-use of the products. The paper presents the applicability of rheology to determine the properties of highly filled thermoplastic materials with different matrix materials, fillers and filler concentrations. It is shown that higher filler content leads to higher values of dynamic moduli; moreover, the property of composites is defined by both the matrix and the type of the filler. By combining rheology with ATR-FTIR spectroscopy and SEM images, the unexpected behavior of one of the composites is explained.

1 Uvod

Visoko polnjeni polimeri so polimerni kompoziti z delci, kjer koncentracija delcev presega 20 vol. %. Zaradi te relativno visoke koncentracije delcev ni mogoče zanemariti interakcij med delci, ki pomembno vplivajo na vedenje materiala tako v talini, kot v trdnem stanju [1]. Visoko polnjeni kompoziti vključujejo polimere, ojačane z anorganskimi vlakni [2], lesno polimerne kompozite [3], [4], vezane magnetne [5] in surovino (t.j. mešanica polimerne matrice in navadno anorganskih delcev), ki se uporablja za brizganje, ekstrudiranje ali pa 3D tiskanje [6], [7]. Taki kompoziti se uporabljajo v avtomobilski, letalski, vesoljski, elektronski, gradbeni in

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

potrošniški industriji. Nekaj tipičnih primerov izdelkov z visokim deležem polnil je prikazanih na sliki 1.



Slika 1: a) Majhni kovinski zobniki, narejeni s tehnologijo 'Powder Injection Moulding-PIM', b) talni paneli, narejeni iz lesno-polimernega kompozita, c) vezani magneti.

Pri visoko polnjenih kompozitih je pogosto koristno, da je delež polnila čim večji, saj na ta način izboljšamo magnetne lastnosti pri vezanih magnetih, ali pa dobimo boljšo geometrijsko stabilnost izdelka pri PIM tehnologiji. Večanje koncentracije polnila pa med drugim vodi v težave pri predelavi v staljenem stanju, saj delci ovirajo tok materiala skozi šobo ali orodje. Poleg tega je pri visokih koncentracijah težko zagotoviti homogeno disperzijo delcev po celotnem volumnu materiala. Posledično lahko nehomogenost delcev povzroči geometrijsko nestabilnost izdelkov ali pa notranje napetosti.

Za uporabo visoko polnjenih materialov in izdelavo produktov je torej ključno poznavanje reološkega vedenja materialov v talini. Na reologijo visoko polnjenih polimerov vplivajo številni dejavniki: vrsta polimernega veziva in njegova sestava, vrsta in koncentracija delcev, oblika in porazdelitev delcev, dodatki, medfazna adhezija in predelovalni pogoji.

Iz tega sledi, da je reološko vedenje visoko polnjenih materialov zapleteno, saj nanj vplivajo številni, med seboj povezani dejavniki. Namen tega prispevka je pokazati, kako z reološkimi metodami pridobivamo informacije o vedenju visoko polnjenih polimernih kompozitov in nato določimo, kateri dejavniki bistveno vplivajo na vedenje kompozitov. Konkretnije želimo predstaviti (cilja):

- (i) Kako vrsta polnila in različne koncentracije vplivajo na reološko vedenje visoko polnjenih kompozitov;
- (ii) Kako vrsta matričnega materiala (polimera) in različne koncentracije vplivajo na reološko vedenje visoko polnjenih kompozitov.

Cilja bosta prikazana preko dveh primerov in sicer bo prvi cilj (*visoko polnjeni kompoziti*) prikazan na štirih različnih polnilih z enako velikostjo in obliko delcev. Drugi cilj (*lesno-polimerni kompoziti*) pa bo prikazan na primeru lesno-polimernih kompozitov kjer smo uporabili različna matrična materiala.

2 Materiali in metode

2.1 Primer 1: Visoko polnjeni kompoziti

Kot osnova za pripravo štirih visoko polnjenih kompozitnih materialov je bil uporabljen trikomponentni matrični sistem na osnovi polipropilena (PP). Kompozitni materiali so bili pripravljene s postopkom ekstrudiranja, kjer so bila v polimerno talino uvedena polnila

sferičnih oblik: aluminijeva zlitina, titanova zlitina, 316L nerjavno jeklo in borosilikatno steklo. Vsa štiri polnila so imela podobno velikost delcev s povprečno velikostjo med 15.19 in 17.71 μm . Kompozitne materiale smo pripravili s tremi različnimi polnitvami: 30, 45 in 60 vol.%. Za kontrolno referenco smo pripravili tudi vzorec zgolj matričnega materiala brez polnila. Sestava matričnega materiala je bila prilagojena polnjenju polnila z namenom, da se zagotovi dobra povezava med polnilom in vezivom. Podroben opis postopkov in pogojev izdelave materialov je predstavljen v [8]. Pregled vseh materialov je podan v tabeli 1.

Tabela 1: Vrste kompozitnih materialov in polnitve za primer 1.

Polnilo [kratko ime]	Delež polnitve (vol.%) in oznaka		
	30	45	60
Aluminijeva zlitina [Al]	Al_30	Al_45	Al_60
316L nerjavno jeklo [316L]	316L_30	316L_45	316L_60
Titanova zlitina [Ti]	Ti_30	Ti_45	Ti_45
Borosilikatno steklo [GB]	GB_30	GB_45	GB_60
Matrica [B]	B_30	B_45	B_60

2.2 Primer 2: Lesno-polimerni kompoziti

Za raziskavo sta bila uporabljena dva različna matrična materiala: čisti PP material Amppeleo 1020 GA, Braskem in reciklirani PP material Eco Meplen IC M20 BK, Mepol. Oba materiala sta bila polnjena z lesnimi vlakni, pridobljenimi kot stranski produkt brušenja lesa. Vlakna so bila sestavljena iz smrekovega in borovega lesa (razmerje približno 80 – 20). S postopkom ekstrudiranja smo pripravili kompozite različnih polnitev (mak. 40 masnih %) brez uporabe dodatkov. Podrobnejši opis postopkov in pogojev izdelave materialov je predstavljen v prispevku [3]. Popoln pregled pripravljenih materialov je predstavljen v tabeli 2.

Tabela 2: Vrste kompozitnih materialov in polnitve za primer 2.

Vezivo	Delež polnitve (mas.%) in oznaka					
	0	5	10	20	30	40
Čisti PP	PP	WF-PP-5	WF-PP-10	WF-PP-20	WF-PP-30	WF-PP-40
Reciklirani PP	R-PP	WF-R-PP-5	WF-R-PP-10	WF-R-PP-20	WF-R-PP-30	WF-R-PP-40

2.3 Karakterizacija materialov

Reološka karakterizacija vseh materialov je bila izvedena na rotacijskem reometeru MCR 302, Anton Paar. Preskusi so bili izvedeni z uporabo merilnega sistema plošča-plošča s premerom senzorja 25 mm in razmikom 1 mm pri konstantni temperaturi. Za primer 1 (*visoko polnjeni kompoziti*) je bila izbrana konstantna temperatura 175 °C. Za primer 2 (*lesno-polimerni kompoziti*) pa konstantna temperatura 190 °C. Za reološko karakterizacijo materialov so bili izvedeni oscilacijski frekvenčni testi. Vsa testiranja so bila izvedena v območju linearnega viskoelastičnega odziva (predhodno določenem z amplitudnimi testi). Za primer 1 so bili

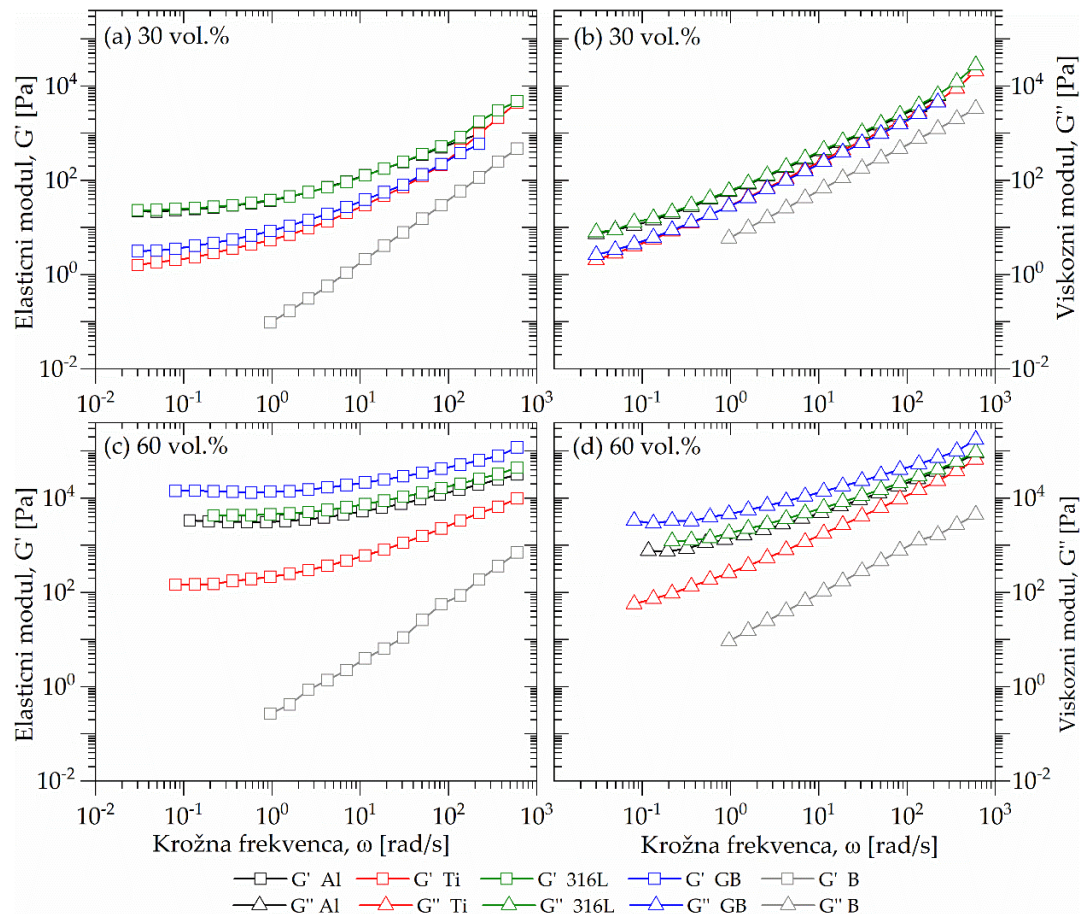
frekvenčni testi izvedeni v območju 0.03 – 600 rad/s, za primer 2 pa v območju 0.062 – 628 rad/s.

Za primer 1 je bila opravljena še dodatna karakterizacija materialov. Za vse materiale je bil določen še infrardeči absorpcijski spekter z uporabo tehnike infrardeče spektroskopije na oslabljen totalni odboj (IR-ATR), Perkin Elmer Spectrum GX NIR FT-Raman. Spekter vzorcev je bil določen v območju od 400 do 4000 cm^{-1} pri sobni temperaturi. Oblika delcev pa je bila raziskana z uporabo vrstičnega elektronskega mikroskopa (SEM) JSM-IT100, JEOL.

3 Rezultati

3.1 Primer 1: Visoko polnjeni kompoziti

Slika 2 prikazuje vpliv vrste polnila in deleža polnitve na dinamična modula v odvisnosti od frekvence oscilacije. Zaradi preglednosti so na sliki prikazani samo rezultati kompozitov s 30 in 60 vol.% dodatkom različnih sferičnih delcev.



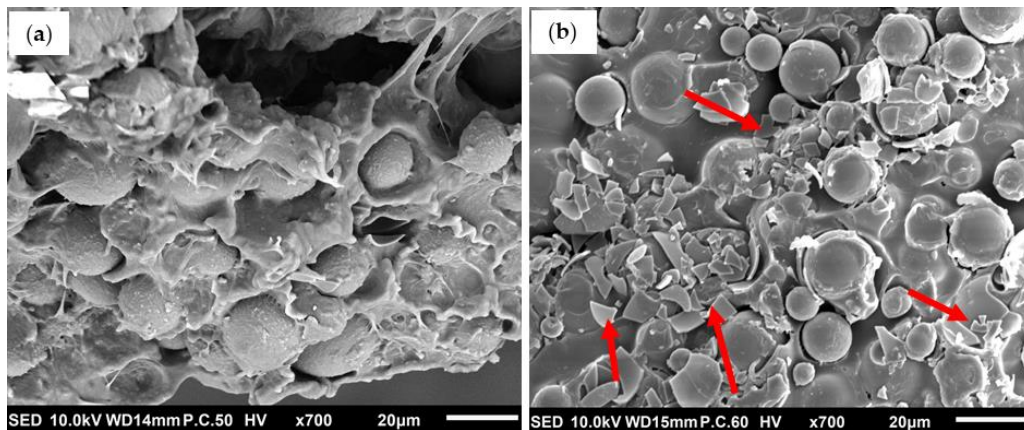
Slika 2: Dinamična modula v odvisnosti od frekvence oscilacije za različna polnila in deleže polnitve: (a) in (c) elastični modul (G'), (b) in (d) viskozni modul (G''). Povzeto po [8].

Vsa polnila so bila sferičnih oblik s podobno velikostjo delcev in enako matrico. Iz slike 2 lahko vidimo, da lahko vedenje vseh kompozitnih materialov razdelimo na dve področji:

vedenje pri visokih (nad cca. 100 rad/s) in nižjih frekvencah (pod cca. 100 rad/s). Pri visokih frekvencah lahko opazimo, da vrednosti G' in G'' konvergirajo ne glede na koncentracijo ali vrsto polnila. Poleg tega je oblika krivulje pri vseh vrstah polnil vzporedna čistemu matričnemu materialu (B). Iz tega lahko sklepamo, da je vedenje vseh kompozitov v tem območju neodvisno od polnila in da odziv materiala diktira polimerna matrica. Pri nižjih frekvencah se krivulji G' in G'' izravnata in odklonita od vedenja čistega matričnega materiala. To območje frekvenčne neodvisnosti povzroči prisotnost polnila, saj postane viskoelastični prispevek polimerne matrice zanemarljiv. Iz tega dela krivulje lahko posledično sklepamo o interakciji delec-delec in delec-polimer.

Iz slike 2 lahko tudi opazimo, da se z večanjem koncentracije polnil povečajo vrednosti obeh dinamičnih modulov. Sprememba modulov ni bila enaka za vsa polnila. V primeru 30 vol.% koncentracije (sliki (a) in (b)) vidimo, da je vedenje kompozitov z Al in 316L polnili praktično enako, saj se obe krivulji prekrivata v celotnem frekvenčnem območju. Vedenje kompozitov z GB in Ti delci je prav tako podobno, izkazujeta pa oba kompozitna materiala nižje vrednosti dinamičnih modulov, še zlasti pri nižjih frekvencah (pod 100 rad/s). Pri koncentraciji 60 vol.% (sliki (c) in (d)) lahko ponovno opazimo podobno vedenje Al in 316L kompozitov, ter nižje vrednosti dinamičnih modulov Ti kompozitov. Opazimo pa lahko precejšen porast modulov GB kompozita (višje vrednosti tudi od modulov Al in 316L kompozitov).

Iz meritev torej lahko sklepamo, da je adhezija med delci in polimerom podobna pri kompozitih, polnjenih z Al ali 316L delci in hkrati, da je ta adhezija močnejša kot v primeru Ti delcev in GB delcev (pri nižjih koncentracijah). Z IR-ATR meritvami smo pokazali, da v primeru Al in 316L polnil prihaja do kovalentne kemijske vezi med delci in matričnim materialom, pri Ti in GB polnili pa le do fizikalne interakcije [8]. S tem pa ne moremo razložiti vedenje kompozitov z GB polnilom pri 60 vol.%, ki izkazuje najvišja dinamična modula. V ta namen so bile narejene SEM slike GB kompozita pri 30 in 60 vol.% polnitvi (slika 4). Izkaže se, da se pri večjih polnitvah steklene sfere polomijo (slika 4 (b)). Drugačna (nepravilna) oblika delcev in večja kontaktna površina med delci in polimerno matrico povzročijo višje vrednosti dinamičnih modulov.

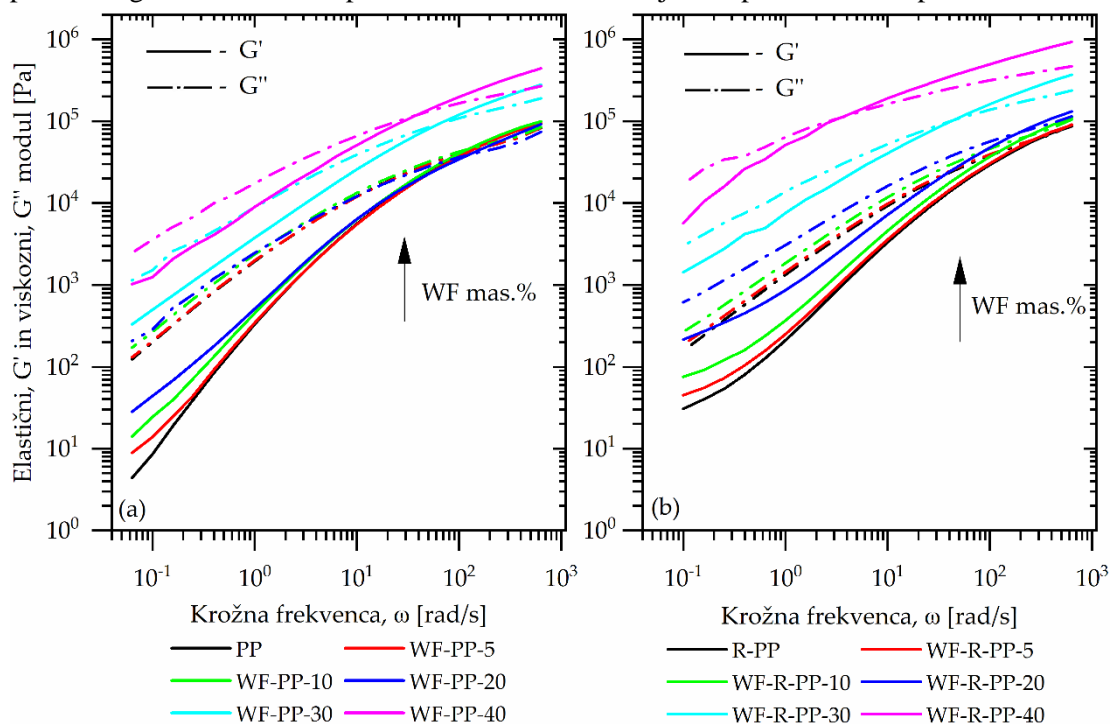


Slika 3: SEM slike GB kompozita pri (a) 30 vol.% in (b) 60 vol.%. Povzeto po [8].

3.2 Primer 2: Lesno-polimerni kompoziti

Na sliki 5 so prikazane vrednosti dinamičnih modulov (G' in G'') v odvisnosti od frekvence oscilacije za kompozite na osnovi čistega PP (a) in recikliranega PP (b). V obeh primerih je

vidno, da dodatek lesnih vlaken (WF) do 10 mas.% nima bistvenega vpliva na vedenje kompozitov, saj se vrednosti dinamičnih modulov v primerjavi s čistim materialom bistveno ne razlikujejo. Nad 10 mas.% lesnih vlaken pa lahko vidimo, da vlakna spremenijo vedenje kompozitov. To lahko opazimo kot zvišanje dinamičnih modulov, ki je še posebej izrazito pri nižjih frekvencah (pod 10 rad/s). Pri dovolj visoki koncentraciji vlaken se v materialu vzpostavi 3D povezana mreža vlaken, moč te mreže pa je opredeljena z velikostjo dinamičnih modulov pri nizkih frekvencah. Pri višjih frekvencah (nad 10 rad/s) lahko pri obeh materialih opazimo, da vrednosti dinamičnih modulov konvergirajo za kompozite do koncentracije 30 mas.% lesnih vlaken. Ker je vedenje kompozitov v tem območju enako kot je vedenje samega matričnega materiala (PP in R-PP) lahko sklepamo, da je v tem območju dominira vedenje polimernega materiala in da prisotnost vlaken na vedenje kompozitov nima vpliva.



Slika 4: Dinamična modula v odvisnosti od frekvence oscilacije lesnih kompozitov, kjer je matrica (a) čisti polipropilen in (b) reciklirani polipropilen. Povzeto po [3].

Drugače je pri koncentracijah s 30 in 40 mas.%, kjer prihaja do bistvenega porasta dinamičnih modulov v celotnem frekvenčnem območju. To nakazuje, da je pri teh koncentracijah 3D mreža vlaken v kompozitu tako gosta, da je prisotnost polimerne matrice manj pomembna. Največjo razliko med kompoziti na osnovi PP ali R-PP opazimo ravno pri teh dveh koncentracijah. Na primer, če primerjamo spremembo viskoznega modula (G'') pri nizkih frekvencah med čistim polimerom in kompozitom s 40 mas. % lesnih vlaken, lahko ugotovimo, da pri kompozitih na osnovi PP polimera prihaja do približno 20% povečanja modula. Pri kompozitih na osnovi R-PP polimera pa je ojačitveni učinek veliko večji, modul se poveča za približno 110%. Iz tega lahko sklepamo, da je interakcija med lesnimi vlakni in med vlakni in polimerno matrico močnejša v primeru recikliranega polimera.

4 Povzetek in zaključek

V prispevku je bil pokazan vpliv vrste polnila, vrste matričnega materiala in deleža polnitve visoko polnjenih kompozitov na njihove reološke lastnosti z namenom demonstracije uporabnosti reologije kot orodja za določitev vedenja kompozitov z visokim deležem polnitve. Pokazali smo, da reološke meritve omogočajo analizo interakcij med polnilom in polimerno matrico. Še bolj poglobljena analiza pa je mogoča v kombinaciji z drugimi eksperimentalnimi metodami (v našem primeru SEM slikami in ATR-FTIR spektroskopijo).

Skozi dva primera 1) pri *visoko polnjenih kompozitih*, kjer smo uporabili različna polnila in enak matrični material, ter 2) pri *lesno-polimernih kompozitih*, kjer smo uporabili enako polnilo in različni matrici, smo pokazali, da se z večanjem deleža polnila povečujejo vrednosti dinamičnih modulov (G' in G'') ne glede na vrsto polnila ali matrice. Poleg tega vedenje materialov pri nizkih frekvencah omogoča sklepanje o interakciji delec-delec in delec-matrica. Pokazali smo, da do boljše adhezije prihaja med delci in polimerno matrico, če se med njimi vzpostavijo močne kemijske vezi (primer 1: *visoko polnjeni kompoziti*) in da se lesna vlakna bolje povežejo s polimerno matrico v primeru uporabe recikliranega polipropilena (primer 2: *lesno-polimerni kompoziti*).

Pri primerjavi vedenja kompozitnih materialov z različnimi polnili (primer 1: *visoko polnjeni kompoziti*) smo pokazali, da je ob enaki polnitvi, obliki delcev, velikosti delcev in matričnem materialu, vedenje takih materialov odvisno predvsem od kemijske interakcije med polnilom in polimerno matrico. Kompozita s 316L in Al, kjer se med polnilom in vezivom vzpostavi kovalentna vez, kažeta enake reološke lastnosti, ne glede na stopnjo polnitve. V primeru GB in Ti polnil, kemijske vezi med polnilom in matrico ni in posledično so dinamični moduli nižji. Tako vedenje je seveda lahko koristno pri predelavi takšnih materialov, vendar pa lahko istočasno to vodi v fazno separacijo med izdelavo ali v aglomeracijo delcev. Izdelek iz takšnega kompozita bi lahko bil anizotropen in imel posledično slabše mehanske lastnosti.

Z reološkimi meritvami smo tudi zaznali nepričakovano vedenje GB kompozitnega materiala pri 60 vol.% polnitvi. Vedenje tega materiala je namreč odstopalo od pričakovanega, ker je material izkazoval višje vrednosti dinamičnih modulov v primerjavi s kompoziti s 316L in Al polnili. Z dodatno SEM analizo smo pokazali, da je pri višji polnitvi prišlo do poškodb polnila (razbitje steklenih sferičnih delcev), kar je vodilo v višje vrednosti in spremenjeno vedenje dinamičnih modulov.

5 Zahvala

To delo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru projekta J2- 9443, programa št. P2-0264 in bilateralnega projekta št. BI-AT / 20-21-028.

Literatura

- [1] J. Gonzalez-Gutierrez *et al.*, "Models to predict the viscosity of metal injection molding feedstock materials as function of their formulation," *Metals (Basel)*, vol. 6, no. 6, 2016.
- [2] A. Oseli, T. Prodan, E. Susič, and L. S. Perše, "The effect of short fiber orientation on long term shear behavior of 40% glass fiber reinforced polyphenylene sulfide," *Polym. Test.*, vol. 81, p. 106262, 2020.
- [3] K. Pušnik Črešnar, L. Fras Zemljič, L. Slemenik Perše, and M. Bek, "Effect of Wood Fiber Loading on the Chemical and Thermo-Rheological Properties of Unrecycled and

- Recycled Wood-Polymer Composites,” *Appl. Sci.*, vol. 10, no. 24, p. 8863, Dec. 2020.
- [4] K. P. Črešnar, M. Bek, T. Luxbacher, M. Brunčko, and L. F. Zemljič, “Insight into the Surface Properties of Wood Fiber-Polymer Composites,” *Polymers (Basel)*, vol. 13, no. 10, p. 1535, May 2021.
- [5] V. Popov, A. Koptioug, I. Radulov, F. Maccari, and G. Muller, “Prospects of additive manufacturing of rare-earth and non-rare-earth permanent magnets,” in *Procedia Manufacturing*, vol. 21, pp. 100–108, 2018.
- [6] U. Scheithauer, E. Schwarzer, H. Richter, and T. Moritz, “Thermoplastic 3D printing— an additive manufacturing method for producing dense ceramics,” *Int. J. Appl. Ceram. Technol.*, vol. 12, no. 1, pp. 26–31, 2015.
- [7] P. Parandoush and D. Lin, “A review on additive manufacturing of polymer-fiber composites,” *Compos. Struct.*, vol. 182, pp. 36–53, 2017.
- [8] M. Bek, J. Gonzalez-Gutierrez, C. Kukla, K. Pušnik Črešnar, B. Maroh, and L. Slemenik Perše, “Rheological Behaviour of Highly Filled Materials for Injection Moulding and Additive Manufacturing: Effect of Particle Material and Loading,” *Appl. Sci.*, vol. 10, no. 22, p. 7993, 2020.



PrePoMax - odprtokodni grafični vmesnik za izvajanje numeričnih analiz po metodi končnih elementov

Matej Borovinšek¹ in Zoran Ren¹

PrePoMax – opensource graphical user interface for numerical analysis using the finite element method

Povzetek. V prispevku je opisan odprtokodni grafični vmesnik PrePoMax, ki je namenjen izvajanju numeričnih analiz po metodi končnih elementov. Program je nastal zaradi potrebe po uporabniku prijazni in enoviti uporabniški izkušnji pri uporabi obstoječih odprtokodnih rešitev na področju analiz po metodi končnih elementov in omogoča delo z numeričnimi analizami od uvoza geometrije do vizualizacije rezultatov.

Abstract. The paper describes the open-source graphical interface PrePoMax, which is intended for performing numerical analyses using the finite element method. The program was created due to the need for a user-friendly and uniform user experience using existing open-source solutions in the field of finite element analysis and enables preparation of analyses from the import of geometry to the visualization of results.

1 Uvod

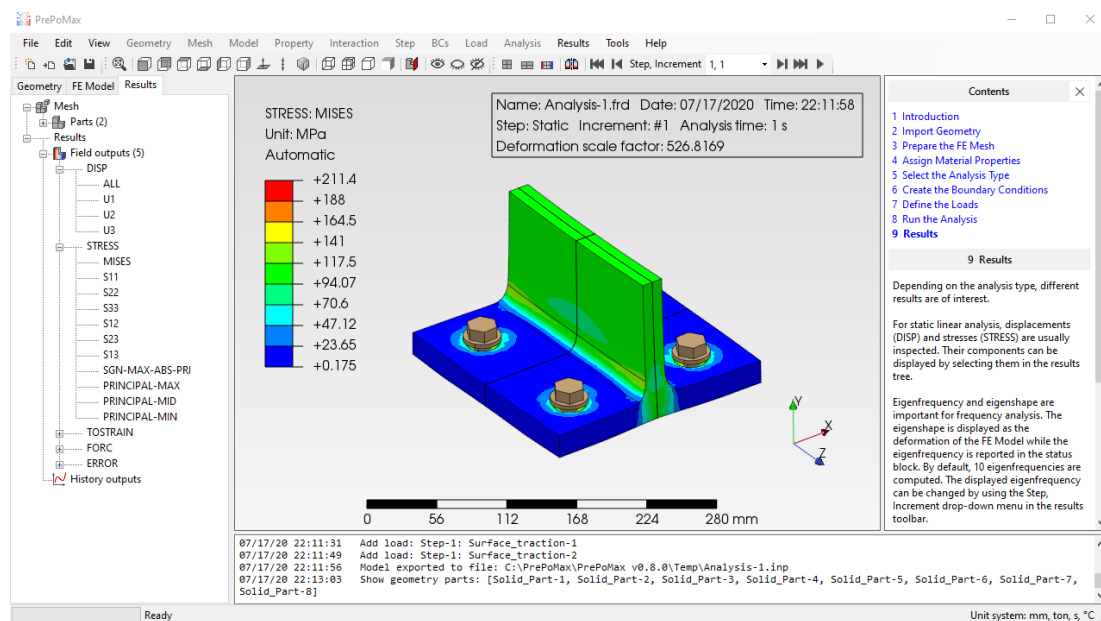
Od začetka razvoja numeričnih analiz po metodi končnih elementov (MKE) je bilo izdelanih veliko število računalniških programov za pripravo, izvedbo in vizualizacijo rezultatov teh analiz. Nekateri so zbrani in primerjani na spletni strani Feacompore [1], ki vključuje tako komercialne programe, kot tudi programe, ki spadajo med odprtokodno programsko opremo. Odprtokodna programska oprema je računalniška programska oprema z licenco, s katero imetnik avtorskih pravic uporabnikom podeli pravice do uporabe, preučevanja, spreminjanja in distribucije programske opreme in njene izvorne kode komur koli in za kakršen koli namen [2], [3].

Med tovrstne odprtokodne programe spada tudi program PrePoMax [4], ki je bil razvit na Fakulteti za strojništvo, Univerze v Mariboru, kot posledica analize obstoječih odprtokodnih programov in knjižnic na področju numeričnih analiz, ki ponujajo različne in uporabne funkcionalnosti. Te funkcionalnosti so razdrobljene med več programov, zahtevajo neposredno urejanje potrebnih datotek ali znanje programiranja in tako niso primerne za nove uporabnike metode končnih elementov ali splošno inženirsko uporabo. Program PrePoMax

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

povezuje več drugih odprtokodnih programov in knjižnic v enovit uporabniški vmesnik prikazan na sliki 1, ki uporabniku omogoča enostavno in učinkovito delo na področju izvajanja MKE analiz. Program podpira delo z enotami, torej vstavljanje veličin s pomočjo enot, pretvorbo veličin v odvisnosti od podanih enot in prikaz rezultatov v ustreznih enotah, skladno s smernicami sodobnih uporabniških vmesnikov. Primarno je bil razvit za uporabo v izobraževanju v okolju MS Windows, zato ima vgrajen tudi vodič, ki uporabnike usmerja pri pripravi modela končnih elementov (slika 1, desna stran). PrePoMax je napisan v programskem jeziku C# z uporabo okolja Visual Studio Community. Izvorna koda je izdana pod licenco GNU General Public License v3.0 in je dosegljiva na portalu GitLab [5]. Minimalne strojne zahteve za uporabo programa so procesor z vsaj enim jedrom in delovno frekvenco 2 GHz ali več ter vsaj 4 GB delovnega pomnilnika.

Najpomembnejši uporabljeni odprtokodni program v ozadju programa PrePoMax je program za izvedbo analiz po metodi končnih elementov CalculiX [6]. Izbran je bil zaradi številnih vrst analiz, ki jih omogoča, podprtih funkcij, razširjene baze uporabnikov, strukturirane in posodobljene dokumentacije in združljivosti vhodne datoteke s komercialnim programom Abaqus. Za pripravo mreže končnih elementov je uporabljen program Netgen [7], z dodano knjižnico za geometrijo Open Cascade Technology [8]. Slednja knjižnica služi za diskretizacijo geometrije oziroma njeno triangulacijo. Za izris 3D modela je uporabljena knjižnica VTK [9] preko C# vmesnika ActiWiz [10].



Slika 1: Uporabniški vmesnik PrePoMax z vodičem za nove uporabnike.

2 Struktura programa

Izvedba analize po MKE je sestavljena iz štirih glavnih korakov: priprava in uvoz geometrije, priprava numeričnega modela, izvedba analize in vizualizacija ter analiza rezultatov. Tem korakom so v programu namenjeni trije moduli in sicer modul za geometrijo, modul za numerični model in modul za vizualizacijo rezultatov.

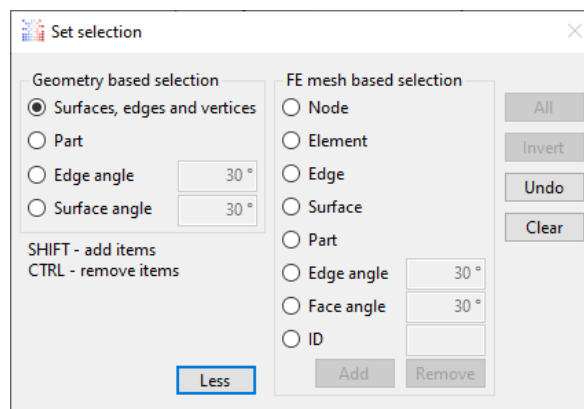
2.1 Priprava in uvoz geometrije

PrePoMax ne omogoča priprave geometrije modela, zato je potrebno geometrijo pripraviti v ustreznem drugem programu za modeliranje. Geometrijo je mogoče uvoziti v modul za geometrijo v formatu stl [11] ali formatu step [12]. Format step je standardiziran format za izmenjavo 3D modelov po standardu ISO 10303. Format stl je na področju MKE postal ponovno aktualen z razvojem 3D tiskalnikov in topološke optimizacije. V obeh formatih je mogoče uvoziti volumsko ali lupinsko geometrijo.

2.2 Priprava modela končnih elementov

Korak priprave numeričnega modela končnih elementov je najpomembnejši korak v izvedbi analize po MKE. V njem je zajeta določitev fizikalnih in materialnih lastnosti, izbira vrste analize, določitev robnih pogojev in priprava mreže končnih elementov. V programu PrePoMax se priprava modela končnih elementov začne s pripravo mreže končnih elementov, saj je program namenjen tudi delu z mrežami končnih elementov, ki so pripravljene v drugih programih. Na ta način je potek priprave modela neodvisen od tega, kje je bila pripravljena mreža končnih elementov.

Eno glavnih orodij, ki ga potrebuje sodoben grafični vmesnik pri pripravi modela, je orodje za izbiro geometrije na 3D modelu za določitev robnih pogojev (slika 2). PrePoMax podpira dva načina izbire: izbiro na podlagi geometrije (slika 2, levi okvir) in izbiro na podlagi mreže končnih elementov (slika 2, desni okvir). Na ta način lahko uporabnik natančno izbere želeno geometrijo za določitev robnih pogojev.



Slika 2: Orodje za izbiranje geometrije na 3D modelu.

2.2.1 Priprava mreže končnih elementov

Priprava mreže se začne v modulu za geometrijo, kjer je potrebno nastaviti velikost, tip in obliko končnih elementov. Volumsko geometrijo je mogoče zamrežiti z linearnimi ali paraboličnimi končnimi elementi s tetraederno obliko. Pri lupinski geometriji je mogoče zraven trikotnih izbrati tudi štirikotne lupinske končne elemente linearne ali parabolične stopnje. Pri tem je mogoče velikost končnih elementov nastaviti za celotno komponento naenkrat ali dodatno podati njihovo velikost le na izbranih delih geometrije. Pri uvozu mreže končnih elementov iz datotek so podprti tudi elementi z obliko prizme in heksaedra linearne ali parabolične stopnje.

2.2.2 Določitev fizikalnih in materialnih lastnosti

V modulu za pripravo modela je najprej potrebno določiti fizikalne lastnosti mreže, ki so lahko volumske ali lupinske. Pri določitvi lupinskih fizikalnih lastnosti je potrebno določiti debelino lupinskih elementov in odmik materiala od modelirane površine. Podprta sta linearno elastični in elasto-plastični materialni model z izotropnim ali kinematičnim utrjevanjem. Obema materialnima modeloma je mogoče dodati parametre potrebne za termične analize, pri čemer so lahko vsi parametri odvisni od temperature. Materiale modele z uporabniškimi podatki je mogoče s pomočjo uporabniškega vmesnika shraniti v bazo materialov, kar omogoča njihovo izmenjavo in ponovno uporabo v drugih modelih.

2.2.3 Izbira vrste analize

PrePoMax omogoča izvedbo linearne ali nelinearne statične analize z upoštevanjem velikih deformacij in materialnih teh strukturnih nelinearnosti. Izvesti je mogoče analizo lastnih oblik in frekvenc ter stabilnostno analizo uklona. Zraven izključno mehanskih analiz je mogoče izvesti tudi analize prenosa toplote. Te analize so lahko ne-vezane ter šibko ali močno vezane mehansko-termične analize. V odvisnosti od vrste analize je mogoče izbirati veličine, ki se shranijo kot rezultati. Te veličine se lahko izpišejo za celoten model ali le za izbrana vozlišča ali končne elemente v obliki skalarnih, vektorskih ali tenzorskih polj.

2.2.4 Določitev robnih pogojev

Določitev robnih pogojev zajema določitev povezav in kontaktov med kosi sestava ter vpetij in obremenitev. Povezave so neločljive in so lahko deformabilne (tie) ali toge (rigid body). Kontakt je mogoče definirati med dvema površinama ali med površino in robom. Izbrati je mogoče med kontakt tipa vozlišče-površina ali površina-površina. CalculiX kontakt rešuje po kazenski metodi. Vpetja se nanašajo na funkcije, ki definirajo vrednosti odvisne spremenljivke. Pri mehanskih analizah je to pomik, pri termičnih analizah pa temperatura. Obremenitve so prav tako deljene med mehanske, kot so sila, tlak, gravitacija, sila prednapetja in termične, kot so toplotni tok, konvekcija in radiacija.

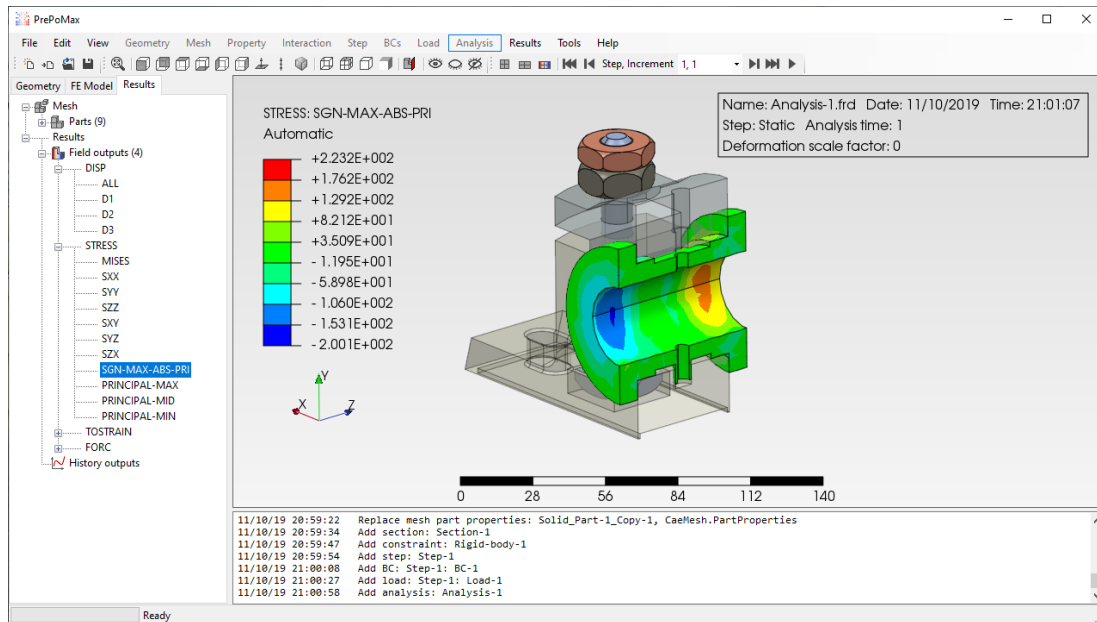
2.3 Izvedba analize

Analize so izvedene s programom CalculiX, ki omogoča izvedbo analiz tudi v vzporednem načinu na več jedrih z deljenim pomnilnikom (SMP). Pri tem je mogoče izbrati med več zunanji direktni reševalniki linearnega sistema (Spooles, PaStiX, Pardiso) ali interni iterativni reševalnik za večje probleme.

2.4 Vizualizacija in analiza rezultatov

V grafičnem vmesniku je mogoče prikazati polja, izpisana za celoten model. Vse vrste polj je mogoče prikazati po komponentah v obliki skalarnih polj z barvno skalo. Pri tem je mogoče izbrati različne barvne skale in omejiti njihove mejne vrednosti. Polje pomikov je mogoče prikazati tudi v obliki skalirane deformacije modela, kar omogoča lažjo analizo obnašanja modela. Deformacijo modela in vrednosti polj je mogoče tudi animirati s pomočjo linearne interpolacije ali izrisa inkrementov nelinearne analize. V primeru uporabe simetrije ali periodičnosti pri pripravi analize je mogoče dobljene rezultate ustrezno zrcaliti, rotirati in vzorčiti. Za natančnejšo analizo rezultatov je na voljo orodje za pripravo prereza modela (slika 3) ter orodje za merjenje vrednosti izbranega polja rezultatov z izbiro vozlišč v grafičnem

vmesniku. Izbrane veličine v odvisnosti od poteka analize je mogoče izrisati tudi v obliki diagramov.



Slika 3: Prerez skalarnega polja rezultatov in pomožne geometrije.

3 Zaključek

V prispevku je opisan odprtokodni grafični vmesnik PrePoMax, ki je namenjen izvajanju numeričnih analiz po metodi končnih elementov. PrePoMax vmesnik je uporabniku prijazen in omogoča predvsem inženirjem enovito uporabniški izkušnjo na področju analiz po metodi končnih elementov. Ker temelji izključno na razvitih odprtokodnih rešitvah z licenco GNU General Public License v3.0, je brezplačen in tako na voljo vsem zainteresiranim uporabnikom.

4 Literatura

- [1] Feacompare, spletna stran: <http://feacompare.com/>.
- [2] A. M. St. Laurent, *Understanding Open Source and Free Software Licensing*. O'Reilly Media, Inc., 2004.
- [3] J. E. Corbly, "The free software alternative: Freeware, open-source software, and libraries," *Inf. Technol. Libr.*, vol. 33, no. 3, pp. 65–75, Sep. 2014.
- [4] M. Borovinšek, PrePoMax, spletna stran: <https://prepomax.fs.um.si/>.
- [5] GitLab/PrePoMax, spletna stran: <https://gitlab.com/MatejB/PrePoMax>.
- [6] G. Dhondt, CalculiX, spletna stran: <http://www.calculix.de/>.
- [7] J. Schöberl, "An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules," *Comput. Vis. Sci.*, vol. 1, no. 1, pp. 41–52, 1997.
- [8] Open Cascade Technology, spletna stran: <https://www.opencascade.com/opencascade-technology/>.

Kuhljevi dnevi 2021

- [9] VTK, spletna stran: <https://vtk.org/>.
- [10] ActiWiz, spletna stran: <https://www.kitware.eu/activiz/>
- [11] Stl File Format, spletna stran: <https://www.loc.gov/preservation/digital/formats/fdd/fdd000504.shtml>.
- [12] ISO 10303-242: Industrial automation systems and integration — Product data representation and exchange — Part 242: Application protocol: Managed model-based 3D engineering, 2014.



Mešane formulacije za statiko, dinamiko in odpoved materiala

Boštjan Brank¹, Andjelka Stanič² in Marko Lavrenčič¹

Mixed formulations for statics, dynamics and material fracture

Povzetek. Na kratko opišemo zelo zmogljive mešane končne elemente, ki temeljijo na kombiniranju mešanih variacijskih principov. Elementi so računsko hitri, imajo odlične konvergenčne lastnosti in so neobčutljivi na popačenost mreže. Z mešanimi verzijami Hamiltonovega principa lahko izpeljemo tudi njihove dinamične verzije. Nadalje na kratko opišemo mešano formulacijo za analizo nastanka in širjenja razpok, ki spada med metode z močno nezveznostjo. Prikazana formulacija ne potrebuje algoritma za sledenje razpok in lahko izračuna primere z razvejanimi razpokami.

Abstract. We briefly describe high-performing mixed finite elements based on a combination of mixed variation principles. The elements are computationally fast, have excellent convergence properties, and are insensitive to mesh distortion. With mixed versions of the Hamilton principle, we can also derive their dynamic versions. Furthermore, we briefly describe a mixed formulation for the analysis of crack propagation, which belongs to the group of strong discontinuity methods. The presented formulation does not require a crack tracking algorithm and can compute cases with branched cracks.

1 Uvod

Pri mešanih končnih elementih za mehanske probleme se poleg pomikov interpolira še eno ali več količin, ki nastopajo v osnovnih enačbah. Navadno so to napetosti in/ali specifične deformacije. Če imamo opraviti s končnim elementom za obravnavo posebnega problema, se interpolira tudi dodatne količine, ki se pojavijo pri opisu takšnega problema. Na primer, pri končnih elementih za opis nastanka in širjenja razpoke s tako imenovano metodo vstavljene nezveznosti – »ang. embedded discontinuity« (ED) – se interpolira odpiranje razpoke. Začetni točki za izpeljavo mešanih končnih elementov sta pogosto Hu-Washizujev (HW) in Hellinger-Reissnerjev (HR) funkcional. Zelo popularni sta tudi izpeljanki HW funkcionala, tako imenovani »ang. enhanced assumed strain« (EAS) in »ang. assumed natural strain« (ANS) metodi. Z EAS se izboljša osnovne specifične deformacije – to je tiste, ki jih dobimo z odvajanjem pomikov, medtem ko se pri ANS v kolokacijskih točkah izvednotene osnovne specifične deformacije interpolira po elementu. V članku na kratko opišemo mešane končne

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² University of Twente, Faculty of Engineering Technology, Nizozemska

elemente za statično in dinamično analizo lupin ter mešane končne elemente za odpoved materiala.

Kombiniranje HW in HR funkcionalov z EAS in/ali ANS koncepti, lahko privede do »optimalnih« konstrukcijskih končnih elementov, kot je to opisano [1] in [4]. Pri tem oznako »optimalen« uporabljamo v smislu: (i) velike hitrosti računanja zaradi zmožnosti izvajanja velikih obtežnih inkrementov pri nelinearni analizi, pri čemer vsak inkrement potrebuje malo iteracij v okviru Newton-Raphsonove sheme reševanja nelinearnih enačb; (ii) majhne občutljivosti na popačenost mrež, to je, popačene mreže le malo pokvarijo rezultate analiz v primerjavi s strukturirano mrežo lepih končnih elementov; in (iii) odličnih konvergenčnih lastnosti, kar pomeni, da se že z grobo mrežo zelo približamo konvergiranim rešitvam.

Dobre lastnosti »optimalnih« končnih elementov se lahko ohranijo tudi pri elastodinamiki [3]. Vendar jih je potrebno v ta namen opremiti s stabilnimi časovnimi integracijskimi shemami, ki ohranjajo osnovne konstante gibanja (ko to omogočajo robni pogoji), kot sta gibalna in vrtilna količina, pa tudi energija sistema. Integracijske sheme lahko tudi numerično sipajo energijo, to je celo zaželeno, saj pripomore k večji stabilnosti sheme, vendar mora biti takšno sipanje kontrolirano. Izvajati se mora v območju visokih frekvenc, ki so zaradi prostorske diskretizacije popačene ali celo umetne, to je nefizikalne. Poleg tega mora biti numerična disipacija znotraj vsakega časovnega koraka pozitivna ali nič, česar klasični algoritmi z numerično disipacijo, na primer alfa-sheme, ne zagotavljajo. Za mešane končne elemente je potrebno ohranitvene sheme posebej izpeljati. V ta namen se lahko uporabi mešane verzije Hamiltonovega principa, kot je opisano v [3] in [5].

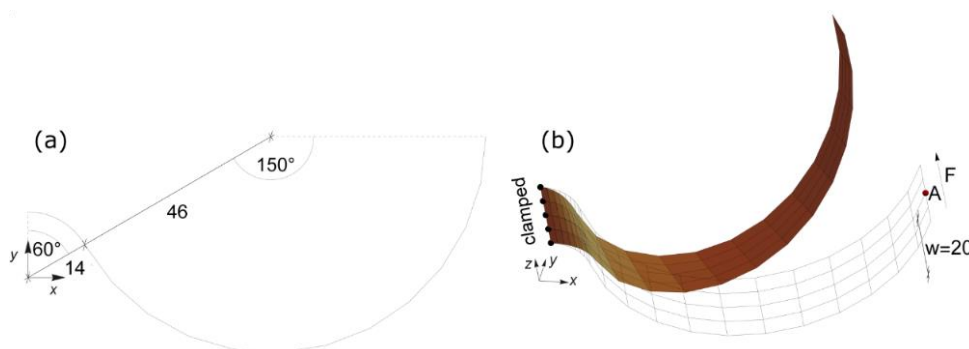
Mešani končni elementi so učinkoviti tudi pri nelinearni mehaniki loma, kar je prikazano v [7] in [8] za ED formulacije. Osnovna ideja prej omenjene ED metode je konsistentna izpeljava končnih elementov, ki so zmožni lokaliziranega sipanja lomne energije. To se doseže z vstavljanjem diskretne razpoke (kot močne kinematične nezveznosti – skoka v pomikih), ko je izpolnjen primeren pogoj, ter z vpeljavo kohezijskega mehčanja v razpoki. Komunikacija med razpoko in ostalim delom končnega elementa omogoči enoznačno sipanje lomne energije, ki je skoraj neodvisno od gostote in oblike mreže. Pri ED metodi se na parametre, ki opisujejo odpiranje razpoke, lahko gleda kot na nekompatibilne pomike. To omogoča enostavno kombiniranje ED formulacij s standardnimi končnimi elementi z nekompatibilnimi pomiki (koncept nekompatibilnih oblik je pravzaprav enak EAS metodi [9]). Zanimivo je, da takšno kombiniranje poveča učinkovitost in enostavnost računanje nastanka in širjenja razpok [7], saj se lahko izognemo sledenju ene same razpoke, kar je še do pred kratkim veljalo za neizogibno, glej npr. [8], [10] in tamkajšnje reference. Z mešano formulacijo [7] se lahko računa tudi zahtevnejše primere loma materiala, med drugim takšne z razvejanimi razpokami.

2 Zmogljivi mešani konstrukcijski končni elementi

Pri lupinah so v HW funkcionalu naslednje neodvisne spremenljivke: trenutna konfiguracija Φ^h , rezultante napetosti (membranske sile, upogibni momenti in prečne sile) $\sigma^{HW} = [\mathbf{n}^{HW,T}, \mathbf{m}^{HW,T}, \mathbf{q}^{HW,T}]^T$ in posplošene specifične deformacije (membranske deformacije, ukrivljenosti in prečne strižne deformacije) $\epsilon^{HW} = [\boldsymbol{\epsilon}^{HW,T}, \boldsymbol{\kappa}^{HW,T}, \boldsymbol{\gamma}^{HW,T}]^T$. Izkaže se, da zamenjava $\epsilon^h(\Phi^h)$ v HW funkcionalu z izboljšanimi specifičnimi deformacijami ϵ^{h+} , dobljenimi z uporabo bodisi ANS bodisi EAS koncepta, ali pa kar s kombiniranjem obeh, vodi k »optimalnim« končnim elementom. Prispevek enega končnega elementa je:

$$\Pi_{+HW}^{e,h}(\Phi^h, \epsilon^{HW}, \sigma^{HW}, \circ) = \int_{A_e} (W(\epsilon^{HW}) + \sigma^{HW} \cdot (\epsilon^{h+}(\Phi^h, \circ) - \epsilon^{HW})) dA - \Pi_{\text{ext}}^e(\Phi^h) \quad (1)$$

kjer je W specifična deformacijska energija, Π_{ext}^e je potencial zunanjih sil, A_e je srednja ploskev končnega elementa. simbol \circ pa predstavlja nove spremenljivke, ki se pojavijo pri morebitni uporabi EAS koncepta. Detajli in podobna izpeljava s Hellinger-Reissner funkcionalom so podani v [1] in [4]. Poglejmo si, kako mešani končni elementi funkcionirajo na primeru Raascheve kljuke s slike 1, kjer je $F = \lambda F_0$ (λ je obtežni faktor), $F_0 = 10^{-4}$, ostali podatki (ki so brez dimenzijski) pa so iz [4]. Uporabljeni elementi so podani v tabeli 1, natančno pa so opisani v [4]. Iz slike 2 in tabele 2 se vidi, da membranska ANS (elementi s simbolom +) omogoča slabo občutljivost na popačenost mreže, HW (in HR) formulacije pa hitre računske čase.



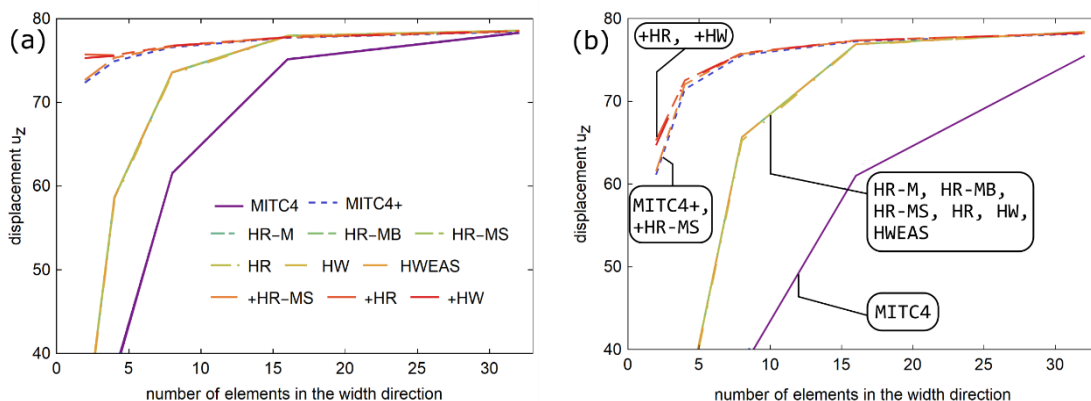
Slika 1: Geometrija (a) ter začetna in deformirana mreža (b).

Tabela 1: Uporabljeni elementi (v oklepaju je število parametrov).

Oznaka	Membrana	Upogib	Prečni strig
MITC4	Pomiki	Pomiki	ANS
MITC4+	ANS	Pomiki	ANS
HR-M	HR (5)	Pomiki	ANS
HR-MB	HR (5)	HR (5)	ANS
HR-MS	HR (5)	Pomiki	ANS & HR (4)
HR	HR (5)	HR (5)	ANS & HR (4)
+HR-MS	ANS & HR (5)	Pomiki	ANS & HR (4)
+HR	ANS & HR (5)	HR (5)	ANS & HR (4)
HW	HW (10)	HW (10)	ANS & HW (8)
HWEAS	EAS (2) & HW (10)	EAS (2) & HW (10)	ANS & EAS (2) & HW (8)
+HW	ANS & HW (10)	HW (10)	ANS & HW (8)

Tabela 2: Računski čas in število obtežnih inkrementov.

	KE	MITC4	MITC4+	HW	+HW
Normiran računski čas		1.00	1.13	0.18	0.22
Št. obtežnih inkrementov		92	96	22	22



Slika 2: Konvergenca pomika točke A pri nelinearni analizi za lepo in popačeno mrežo.

3 Ohranitvene integracijske sheme za mešane končne elemente

Za izpeljavo enačb elastodinamike za Hu-Washizujeve končne elemente za lupine, lahko (še pred prostorsko diskretizacijo s končnimi elementi) uporabimo naslednji mešani funkcional:

$$\Pi_{HW}(\Phi, \mathbf{V}, \epsilon^{HW}, \sigma^{HW}) = \int_{t_0}^{t_e} \int_M \left(\left(\dot{\Phi} - \frac{1}{2} \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{M}_{\rho_0} \mathbf{V} - W(\epsilon^{HW}) - \sigma^{HW} \cdot (\epsilon(\Phi) - \epsilon^{HW}) \right) dA dt - \int_{t_0}^{t_e} \Pi_{ext}(\Phi) dt \quad (2)$$

kjer je \mathbf{V} hitrost, \mathbf{M}_{ρ_0} je masna matrika, M je srednja ploskev lupine, pika po pomeni časovni odvod. Pogoji stacionarnosti, $\delta \Pi_{HW} = 0$, nam da Euler-Lagrangeve enačbe gibanja:

$$\int_M (\delta \Phi \cdot \mathbf{M}_{\rho_0} \dot{\mathbf{V}} + \delta \epsilon(\delta \Phi, \Phi) \cdot \sigma^{HW}) dA = -\delta \Pi_{ext}(\delta \Phi), \quad \int_M \delta \mathbf{V} \cdot (\dot{\Phi} - \mathbf{V}) dA = 0 \quad (3)$$

$$\int_M \delta \sigma^{HW} \cdot (\epsilon(\Phi) - \epsilon^{HW}) dA = 0, \quad \int_M \delta \epsilon^{HW} \cdot (\sigma^{HW} - DW(\epsilon^{HW})) dA = 0$$

kjer je $DW(\epsilon^{HW}) \cdot \delta \epsilon^{HW}$ variacija $W(\epsilon^{HW})$. K enačbam (4) spadajo še robni pogoji za Φ ter začetni pogoji za $\dot{\mathbf{V}}, \dot{\Phi}, \epsilon^{HW}$ in σ^{HW} . Časovna diskretizacija za generični časovni inkrement $[t_n, t_{n+1}]$ sledi sredinskem pravilu:

$$\int_M \left(\delta \Phi \cdot \mathbf{M}_{\rho_0} \frac{\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_n}{\Delta t} + \delta \epsilon(\delta \Phi, \Phi_{n+1/2}) \cdot \sigma^{HW*} \right) dA = -V_{ext}(\delta \Phi)$$

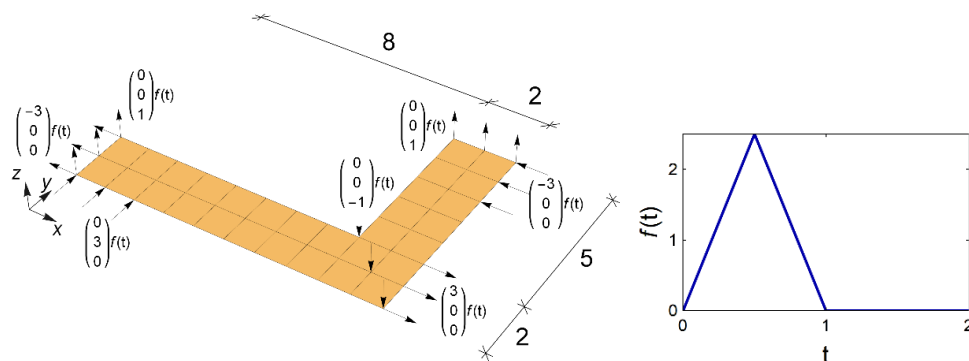
$$\int_M \delta \sigma^{HW} \cdot (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{HW}) dA = 0, \quad \int_M \delta \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{\Delta t} - \mathbf{V}^* \right) dA = 0 \quad (4)$$

$$\int_M \delta \epsilon^{HW} \cdot \left(\sigma_{n+1/2}^{HW} - DW(\epsilon_{n+1/2}^{HW}) \right) dA = 0$$

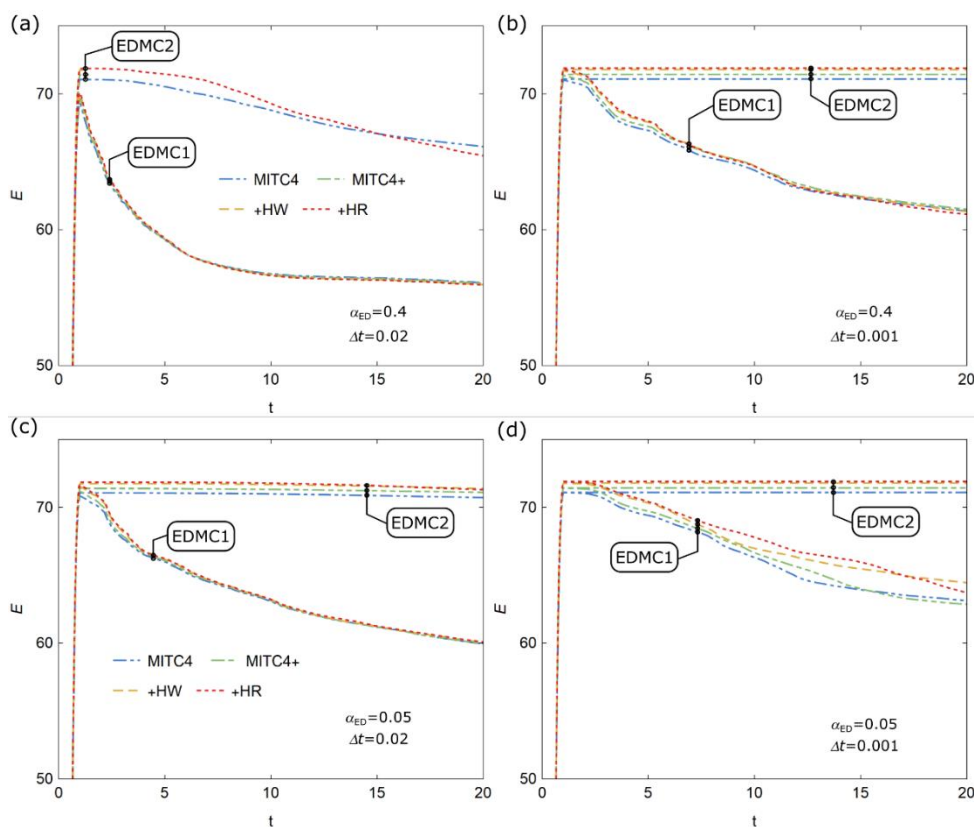
kjer je $\Phi_{n+1/2} = \Phi((t_n + t_{n+1})/2)$, $\sigma_{n+1/2}^{HW} = 1/2(\sigma_n^{HW} + \sigma_{n+1}^{HW})$, V^* in σ^{HW*} pa sta:

$$V^* = V_{n+1/2} + V_{diss}, \quad \sigma^{HW*} = \sigma_{n+1/2}^{HW} + \sigma_{diss}^{HW} \quad (5)$$

Člena z *diss* sta določena tako, da je inkrementalna numerična disipacija večja ali enaka nič, in da se algoritmično ohranja vrtilna količina. Določata tudi stopnjo natančnosti sheme, glej [6] in [2]. Detajli za HW mešane končne elemente in podobna izpeljava za HR elemente so podani v [3].



Slika 3: Geometrija in obtežba za letečo L ploščo.



Slika 4: Energija E v odvisnosti od časa, glede na končni element (MITC4, MITC4+, +HW, +HR), natančnost sheme (EDMC1, EDMC2), dolžino koraka (Δt) in velikost disipacijske konstante $\alpha_{ED} \geq 0$. Grafi na slikah (a)-(d) so dobljeni za štiri pare Δt in α_{ED} .

Poglejmo si primer na sliki 3 s podatki iz [3]. Odziv je izračunan do časa $t_e = 20$ s, pri čemer sta bila v analizi uporabljena konstantna časovna koraka $\Delta t \in \{2 \cdot 10^{-2}, 10^{-3}\}$ s. Slika 4 kaže, da α_{ED} določa velikost numerične disipacije, prav tako pa tudi časovni korak in natančnost sheme (EDMC1 in EDMC2 označujeta shemi z natančnostjo prvega in drugega reda).

4 Modeliranje širjenja razpok z mešanim končnim elementom

Pri štiristranem končnem elementu z vgrajeno nezveznostjo za 2d probleme, so specifične deformacije opisane kot:

$$\epsilon = \sum_{a=1}^4 \mathbf{B}_a \mathbf{d}_a + \sum_{b=1}^2 \tilde{\mathbf{G}}_b \rho_b + \sum_{i=1}^4 \bar{\mathbf{G}}_i \alpha_i + \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{\mathbf{G}}}_i \alpha_i \quad (6)$$

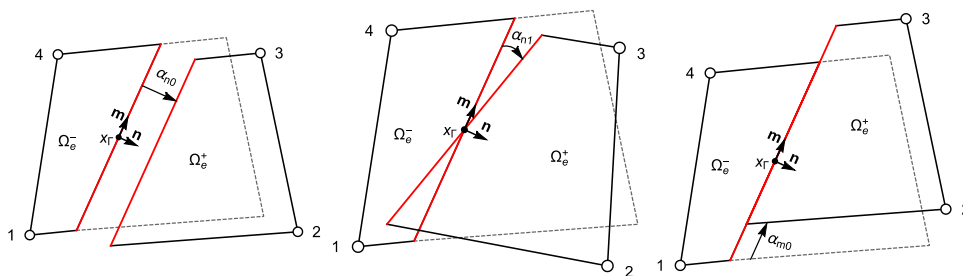
kjer so v \mathbf{B} in \mathbf{G} matrikah odvodi interpolacijskih funkcij, $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_i$ vsebuje Dirac-delta funkcijo, \mathbf{d}_a so vozliščni pomiki, α_i so parametri povezani z odpiranjem in drsenjem razpoke (glej sliko 5, kjer velja $\alpha_{n0} = \alpha_1, \alpha_{n1} = \alpha_2$ itd.), ρ_b pa so parametri nekompatibilnih pomikov (če so vključeni v formulacijo). S Petrov-Galekinovo interpolacijo (pri čemer za virtualne specifične deformacije uporabimo samo prve tri vrste iz (3) ter nadomestimo $\bar{\mathbf{G}}_i$ z $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_i$), lahko v enačbo virtualnega dela s pomočjo $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_i$ vpeljemo normalno in strižno kohezijska napetost v razpoki, t_n in t_m . Enačba virtualnega dela nam potem da standardno enakost notranjih in zunanjih vozliščnih sil $\mathbf{f}^{int,e}$ in $\mathbf{f}^{ext,e}$, poleg tega pa še enačbe, ki povezujejo napetosti v razpoki z napetostmi po končnem elementu (šibko obliko Cauchyjevega robnega pogoja):

$$\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e} = \mathbf{0} \quad (7)$$

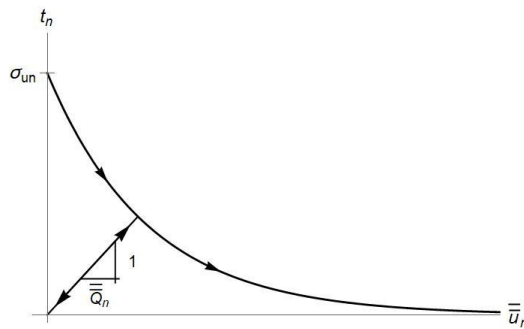
$$\int_{\Omega^e \setminus \Gamma^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_i^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma^e} t_n (\xi_\Gamma)^{i-1} d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

$$\int_{\Omega^e \setminus \Gamma^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_i^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma^e} t_m (\xi_\Gamma)^{i-3} d\Gamma = 0, \quad i = 3, 4 \quad (9)$$

V enačbah (8)-(9) je Γ^e območje razpoke, Ω^e je območje končnega elementa, $\boldsymbol{\sigma}$ so napetosti po elementu, ξ_Γ pa je koordinata po razpoki. Napetosti t_n in t_m sta povezani s širino (oziroma zdrsom) razpoke preko materialnega modela mehčanja, npr. z modelom poškodovanosti s slike 6. Izpeljana formulacija za analizo širjenja razpok je natančneje opisana v [10] in [7].

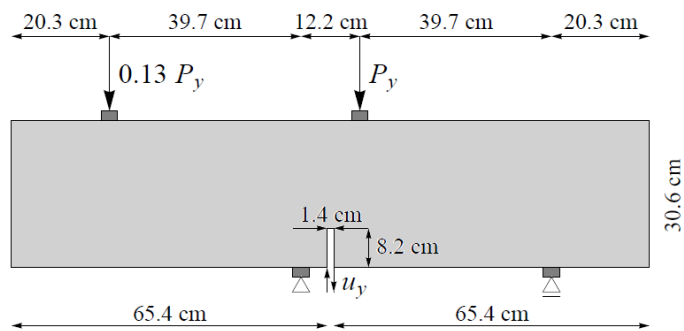


Slika 5: Tri od štirih oblik odpiranja razpoke v štirikotniku.

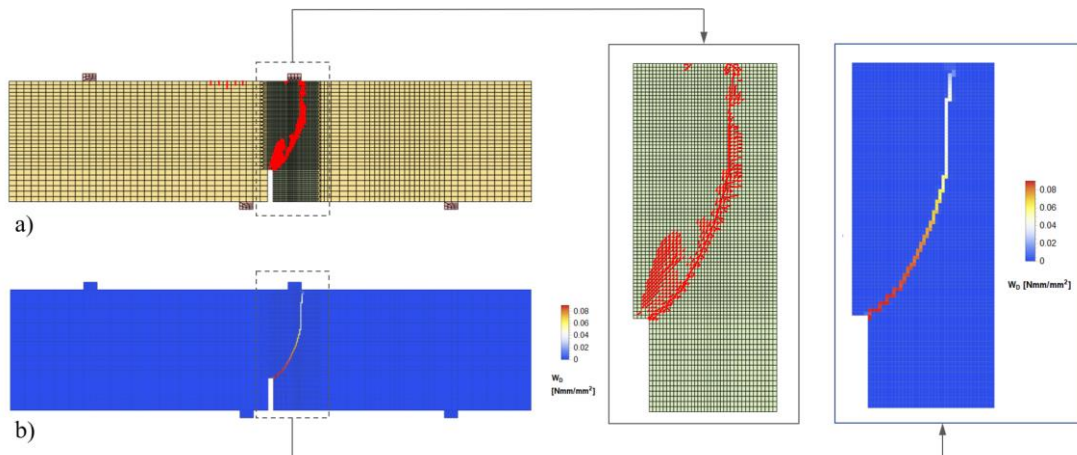


Slika 6: Mehčanje (obremenjevanje in razbremenjevanje) v normalni smeri razpoke.

Poglejmo si primer odpovedi kvadra iz krhkega materiala pri štiritočkovnem testu s slike 7 s podatki iz [7] in z metodo reševanja sistema nelinearnih enačb iz [11]. Rezultati, ki so prikazani na sliki 8, kjer se vidijo razpoke ter disipacija lomne energije, so izračunani brez algoritma za sledenje razpoke, ki je bil do sedaj nujen pogoj pri praktično pri vseh ED in »ang. Extended Finite Element Metod« XFEM formulacijah za širjenje razpok.



Slika 7: Štiritočkovni test.



Slika 8: Razpoke in disipacija lomne energije: a) izračunane razpoke, b) disipirana lomna energija v razpokah.

5 Zaključek

Na kratko so prikazane naše zadnje raziskave s področja tehnologije končnih elementov za statično in dinamično analizo konstrukcij ter s področja analize širjenja razpok z metodo vstavljene močne nezveznosti. Več detajlov je v na voljo v podanih referencah.

Literatura

- [1] M. Lavrenčič, B. Brank, *Hybrid-mixed shell quadrilateral that allows for large solution steps and is low-sensitive to mesh distortion*, *Comput. Mech.* 65: 177-192, 2020.
- [2] M. Lavrenčič, B. Brank, *Comparison of numerically dissipative schemes for structural dynamics: generalized-alpha versus energy-decaying methods*, *Thin-walled structures* 157: 107075, 2020.
- [3] M. Lavrenčič, B. Brank, *Energy-decaying and momentum-conserving schemes for transient simulations with mixed finite elements*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 375 (2021) 113625
- [4] M. Lavrenčič, B. Brank, *Mixed low-order finite elements for geometrically exact shell models: overview and comparison*, *Arch. Computat. Methods Eng.* 2021.
- [5] P. Betsch, A. Janz, *An energy-momentum consistent method for transient simulations with mixed finite elements developed in the framework of geometrically exact shells*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 108: 423-455, 2016.
- [6] I. Romero, F. Armero, *Numerical integration of the stiff dynamics of geometrically exact shells: an energy-dissipative momentum conserving scheme*, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 54: 1043-1086, 2002.
- [7] A. Stanić, B. Brank, A. Ibrahimbegović, H. G. Matthies, *Crack propagation simulation without crack tracking algorithm: embedded discontinuity formulation with incompatible modes*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (v tisku) 2021.
- [8] J. Dujc, B. Brank, *Modeling fracture in elasto-plastic solids by embedded-discontinuity stress-hybrid finite element formulation*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, DOI: 10.1080/15376494.2020.1786755, 2020.
- [9] A. Ibrahimbegovic, *Nonlinear Solid Mechanics. Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*, Dordrecht, Springer Netherlands, 2009.
- [10] A. Stanić, B. Brank, D. Brancherie, *Fracture of quasi-brittle solids by continuum and discrete crack damage models and embedded discontinuity formulation*, *Engineering Fracture Mechanics* 227 (2020) 106924.
- [11] A. Stanić, B. Brank, *A path-following method for elasto-plastic solids and structures based on control of plastic dissipation and plastic work*. *Finite Elem Anal Des* 123: 1–8, 2017.



Na hitrostih osnovana kvazistatična analiza nosilcev in okvirjev

Sudhanva Kusuma Chandrashekhara¹, Dejan Zupan¹

Velocity based elements for the quasi-static analysis of beams and frames

Povzetek. Predstavljamo razširitev sistema enačb na hitrostih in kotnih hitrostih osnovane numerične formulacije prostorskih nosilcev z vezno enačbo sledenja obtežno deformacijski krivulji. Tako lahko parameter poti iz statične analize nadomestimo s časovnim korakom, ki v diskretiziranih enačbah dinamike nosilcev že nastopa. Poleg tega lahko vezno enačbo obtežno deformacijske poti implementiramo v osnovni, šibki obliki. Tak pristop olajša razširitev sistema enačb in olajša izvedbo Newton-Raphsonove sheme. Predlagana metoda omogoča tudi kontrolo časovnega koraka z oceno lokalne napake rešitev. Tako dopolnjena formulacija je odlično orodje za analizo postkritičnega obašanja konstrukcij.

Abstract.

In the present work, we propose the extension of the equilibrium equation based on the velocity based formulation with the introduction of an arc-length constraint. With the configuration variables defined in terms of time dependent quantities, the arc-length parameter in the original arc-length constraint equation can be replaced by increment of time step. Additionally, the constraint equation based on arc-length control is employed in its originally defined differential form. This eases the extension of the system of equations and the procedure can be applied in conjunction with the Newton-Raphson method. The proposed method also provides a flexibility to implement the step-size control and in the present approach, we employ the local error control to determine the new step-size. The proposed method serves as a starting point in the post-critical analysis of the structures and aims at demonstrating the nonlinear responses in post-buckling regimes.

1 Introduction

Simulation of highly flexible slender structures such as beams and frames undergoing large displacements and rotations is important in engineering practice as they are among the essential constituents of several mechanical systems and countless engineering fields. These diverse

¹ Faculty of Civil and Geodetic Engineering, University of Ljubljana

fields demands for advanced formulations and sophisticated solution techniques which are efficient and accurate. Often in the investigation of the complex nonlinear response of the structures near the critical points, the nonlinearities of geometrical nature with the static equilibrium equations were employed. However, near the critical points the response of the structures are usually dynamic in nature. In addition to the complexities associated with the stability analysis, the introduction of three-dimensional rotations of the cross sections to describe the configuration of the beams in space and time makes the mathematical structure become even more demanding and are among the central issue. Rotations although are essentially a linear transformation in 3D Euclidean space and can be represented easily with matrices, it is less convenient for numerical implementations. The four parameter representation of rotations using quaternions gives accurate results particularly for the long time dynamic responses with the avoidance of singularities and faster computations [1].

But in the present work, the rotational quaternion will not be chosen as the primary unknowns due to their non-additive nature which complicates the choice of interpolation functions for the rotations. A more convenient choice is to choose the temporal derivatives of the displacement and rotations as the unknown quantities. When properly expressed with the suitable choice of reference frame, these unknown quantities are additive in nature. This idea motivated for the development of the velocity based finite element model for the dynamic analysis of three dimensional beams. The present work follows the formulation proposed in [2] to perform the quasi-static analysis. This necessitates a strategy for the step size control to simulate the quasi-static load increment. To this end, a method to calculate the local truncation error is implemented with a computationally inexpensive method using a third order backward difference approximation. The time discretization in the present formulation is based on the standard implicit midpoint rule which is performed in two stages and the spatial discretization is based on the Galerkin finite element method. The spatial discretization is implemented using Lagrangian interpolation functions. In the stability analysis one often needs an additional constraint equation describing the variation of the load factor. Over the years, several authors have employed the original arc length control in different forms. Here, we employ the generalized formulation of the arc-length control for extending the system of equations [3]. Since the solution from the equilibrium equations are time dependent quantities, the differential form of arc length constraint is directly applicable. This work is an extension of the model proposed in [2] by combining it with a path following method for the applicability in the post-buckling analysis of beams and frames.

2 Cosserat Beam model

The geometry of a three-dimensional beam is represented by a line of centroid and a family of cross sections, see fig. 1. The model is often attributed to Reissner and Simo [4] and is called the geometrically exact beam model. The line of centroid is a spatial curve at an arbitrary time $t \geq 0$ defined by a position vector $\vec{r}(x, t)$ and an arc-length parameter $x \in [0, L]$. Two orthogonal reference frames are introduced for the description of the equations for the beam. (i) A fixed orthogonal basis represented by $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ at the reference point O and (ii) local orthogonal base vectors $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3\}$. A transformation from the local basis to the fixed

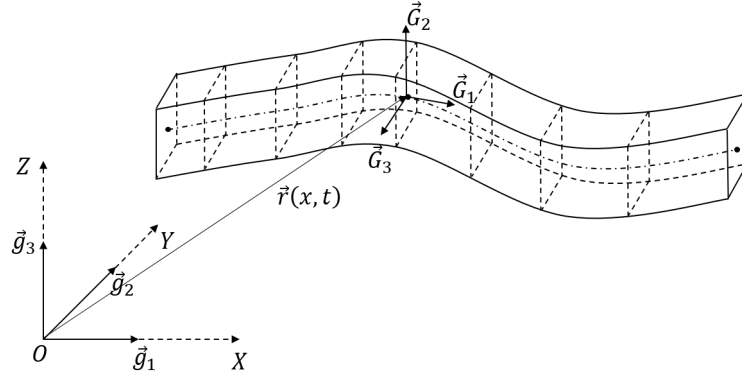


Figure 1: Three-dimensional beam

one is defined by a quaternion multiplication which is read as:

$$\vec{G}_i(x, t) = \hat{q}(x, t) \circ \vec{g}_i \circ \hat{q}^*(x, t) \quad (1)$$

where \hat{q} is a rotational quaternion, \hat{q}^* is its conjugate and (\circ) denotes the quaternion product. The set of quaternions \mathbf{H} is a four dimensional Euclidean space where a quaternion can be described as a sum of a scalar and a vector. $\hat{x} = s + \vec{v} = (s, \vec{v})$, $s \in \mathbf{R}$, $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ and the product of two quaternions $\hat{x} = (s, \vec{v})$ and $\hat{y} = (c, \vec{w})$ is defined as:

$$\hat{x} \circ \hat{y} = (sc - \vec{v} \cdot \vec{w}) + (c\vec{v} + s\vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) \quad (2)$$

where (\cdot) and (\times) denotes scalar and vector products in \mathbf{R}^3 . A quaternion with a unit norm ($\|\hat{q}\| = 1$) defines the rotation which can be described in polar form as,

$$\hat{q} = \cos\left(\frac{\|\theta\|}{2}\right) + \sin\left(\frac{\|\theta\|}{2}\right) \vec{n}, \quad (3)$$

where, $\|\theta\|$ is the angle of rotation and $\vec{n} = \frac{\theta}{\|\theta\|}$ denotes the unit vector on the axis of rotation.

2.1 Kinematic equations

In the geometrically exact description of beams, the strain resultants at the centroid of each cross sections relate with the configuration variables by a first order differential equations which are given by,

$$\Gamma = \hat{q}^* \circ r' \circ \hat{q} + \Gamma_0 \quad (4)$$

$$K = 2\hat{q}^* \circ \hat{q}', \quad (5)$$

where Γ and K denote translational and rotational strains in the local basis, \hat{q} is the rotational quaternion and r denotes the position vector. The prime denotes the derivative with respect to the arc-length parameter x . Similarly, the rate of change of configuration variables with respect to time is given by

$$v = \dot{r} \quad (6) \quad \Omega = 2\hat{q}^* \circ \dot{\hat{q}}, \quad (7)$$

where, v is the velocity in the fixed basis and Ω is the angular velocity in the local basis. The dot denotes the time derivative. The strains, velocities and angular velocities are mutually dependent and a direct relation is obtained with mixed partial derivatives leading to

$$\dot{\Gamma} = \hat{q}^* \circ v' \circ \hat{q} + (\Gamma - \Gamma_0) \times \Omega \quad (8)$$

$$\dot{K} = \Omega' + K \times \Omega. \quad (9)$$

Equations (8) and (9) describe kinematic compatibility equations and play an important role in our numerical formulation.

2.2 Constitutive relation

The relation between the stress resultants and the strain vectors are given by the constitutive relations. In the present work, a linear constitutive law is assumed in the following form

$$N = C_{\Gamma\Gamma}\Gamma + C_{\Gamma K}K \quad (10) \quad M = C_{K\Gamma}\Gamma + C_{KK}K. \quad (11)$$

The matrix $C = \begin{bmatrix} C_{\Gamma\Gamma} & C_{\Gamma K} \\ C_{K\Gamma} & C_{KK} \end{bmatrix}$ represents the cross-sectional tangent stiffness matrix. The matrix can be fully populated but in the present work, we will assume it is symmetric. The stress resultants N and M represent force and moment vectors of the cross section in local basis. The transformation of stress resultants from local to the fixed basis gives

$$n = \hat{q} \circ N \circ \hat{q}^* \quad (12) \quad m = \hat{q} \circ M \circ \hat{q}^*. \quad (13)$$

2.3 Equations of motion

For a given external distributed force and moment vectors per unit length, \tilde{n} and \tilde{m} , the balance equations for the beam need to be satisfied. The balance equations expressed in terms of quaternion algebra are given by

$$n' + \tilde{n} - \rho A \dot{v} = 0 \quad (14)$$

$$M' + K \times M + (\Gamma - \Gamma_0) \times N + \hat{q}^* \circ \tilde{m} \circ \hat{q} - \Omega \times J_\rho \Omega - J_\rho \dot{\Omega} = 0, \quad (15)$$

where ρ is the mass density and J_ρ is the mass moment of inertia of the cross section. Note that the preservation of the angular momentum (15) is here expressed in the local basis. This enables the use of the standard additive interpolation functions for the primary unknowns (velocities and angular velocities). The boundary conditions are also expressed in a suitable basis and are given by

$$n^0 + f^0 = 0 \quad (16)$$

$$n^L - f^L = 0 \quad (17)$$

$$M^0 + \hat{q}^*(0) \circ \mathbf{h}^0 \circ \hat{q}(0) = 0 \quad (18)$$

$$M^L - \hat{q}^*(L) \circ \mathbf{h}^L \circ \hat{q}(L) = 0, \quad (19)$$

where f^0 , \mathbf{h}^0 , f^L and \mathbf{h}^L are the external point forces and moments at the boundaries, $x = 0$ and $x = L$. For a conservative external loads, an important property of the continuous system is the conservation of total mechanical energy which is defined as, $W = W_k + W_d$. The contribution to the kinetic energy, W_k consists of inertia of motion of the reference axis represented by the translational part (expressed in the fixed frame) and the inertia of motion of the cross sections representing the rotational part (expressed in the local frame). The kinetic energy equation reads

$$W_k = \frac{1}{2} \int_0^L \left[v \cdot \rho A v + \Omega \cdot J_\rho \Omega \right] dx, \quad (20)$$

while the strain energy, W_d of a linear elastic beam is evaluated as

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{bmatrix} \Gamma \\ K \end{bmatrix} \cdot C \begin{bmatrix} \Gamma \\ K \end{bmatrix} dx. \quad (21)$$

For the long term stability of the calculation, it is highly beneficial to conserve this property after the discretization of the equations.

3 Numerical method

The system of governing equations is a set of nonlinear partial differential equations which needs to be discretized in time and space. The spatial discretization is based on the standard Galerkin finite element method and the time discretization is in accordance with the implicit midpoint rule performed in two stages for the evaluation at times $t_{n+\tau}$ and t_{n+1} . The computation at the third stage is obtained using a third order backward difference approximation based on the solution at the time steps, t_n , $t_{n+\tau}$ and t_{n+1} . The discrete kinematic relations for translational and rotational strains between any two successive time steps are derived from discretizing the compatibility equations (8) and (9):

$$\Gamma^{[n+1]} = \Gamma^{[n]} + h \left[\hat{q}^{*[n+1/2]} \circ \bar{v}' \circ \hat{q}^{[n+1/2]} + (\Gamma^{[n+1/2]} - \Gamma_0) \times \bar{\Omega} \right], \quad (22)$$

$$K^{[n+1]} = K^{[n]} + h \left[\bar{\Omega}' + K^{[n+1/2]} \times \bar{\Omega} \right], \quad (23)$$

where $h = t_{n+1} - t_n$ is the time step and the upper index $[n + 1/2]$ denotes the quantities at the mid time $t_{n+1/2} = t_n + h/2$. The velocities and angular velocities at mid time are given by

$$v^{[n+1/2]} = \bar{v} = \frac{v^{[n]} + v^{[n+1]}}{2}, \quad (24)$$

$$\Omega^{[n+1/2]} = \bar{\Omega} = \frac{\Omega^{[n]} + \Omega^{[n+1]}}{2}. \quad (25)$$

The position vector and the rotational quaternion, which are the configuration variables are given at mid time as

$$r^{[n+1/2]} = r^{[n]} + \frac{h}{2}\bar{v}, \quad (26)$$

$$\hat{q}^{[n+1/2]} = \hat{q}^{[n]} \circ \exp\left(\frac{h}{4}\bar{\Omega}\right). \quad (27)$$

The rotational and translational strains at mid time are expressed as

$$\Gamma^{[n+1/2]} = \hat{q}^{*[n+1/2]} \circ r'^{[n+1/2]} \circ \hat{q}^{[n+1/2]} + \Gamma_0 \quad (28)$$

$$K^{[n+1/2]} = \exp^*\left(\frac{h}{4}\bar{\Omega}\right) \circ K^{[n]} \circ \exp\left(\frac{h}{4}\bar{\Omega}\right) + 2\exp^*\left(\frac{h}{4}\bar{\Omega}\right) \circ \exp'\left(\frac{h}{4}\bar{\Omega}\right). \quad (29)$$

The constitutive material relations at the midtime are derived using the constraint of preservation of total mechanical energy and they are given by the following formulae.

$$\bar{N} = C_{\Gamma\Gamma} \frac{(\Gamma^{[n+1]} + \Gamma^{[n]})}{2} + C_{\Gamma K} \frac{(K^{[n+1]} + K^{[n]})}{2} \quad (30)$$

$$\bar{n} = \hat{q}^{*[n+1/2]} \circ \bar{N} \circ \hat{q}^{[n+1/2]}$$

$$\bar{M} = C_{K\Gamma} \frac{(\Gamma^{[n+1]} + \Gamma^{[n]})}{2} + C_{KK} \frac{(K^{[n+1]} + K^{[n]})}{2}. \quad (31)$$

The spatial discretization is based on Galerkin finite element method where the velocities and angular velocities at mid time are interpolated through p discrete points. The approximations of the primary unknowns $\bar{v}(x, t)$ and $\bar{\Omega}(x, t)$ are given by

$$\bar{v}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{v}^i(t) \quad (32a)$$

$$\bar{\Omega}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{\Omega}^i(t) \quad (32b)$$

The interpolation points, x_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, p$ are chosen between the interval $[0, L]$. Thus the velocities and angular velocities at the mid time at discrete points $(\bar{v}^i, \bar{\Omega}^i)$ are the discrete unknowns of the problem. Finally the discrete governing equations in accordance with the method of weighted residuals are given by:

$$\int_0^L \left[\frac{\rho A}{h} \left(v^{[n+1]} - v^{[n]} \right) P_i + \bar{n} P_i' - \bar{n}^{[n+1/2]} P_i \right] dx - \bar{\lambda} f_e = 0 \quad (33)$$

$$\int_0^L \left[\frac{J\rho}{h} \left(\Omega^{[n+1]} - \Omega^{[n]} \right) P_i + \bar{\Omega} \times J\rho \bar{\Omega} P_i - K^{[n+1/2]} \times \bar{M} P_i + \bar{M} P_i' - P_i \left(\Gamma^{[n+1/2]} - \Gamma_0 \right) \times \bar{N} - \left(\hat{q}^{*[n+1/2]} \circ \bar{m}^{[n+1/2]} \circ \hat{q}^{[n+1/2]} \right) P_i \right] dx - \bar{\lambda} M_e = 0, \quad (34)$$

where $\bar{\lambda}$ is the load factor at mid time, f_e and M_e are the vector of external point forces and moments respectively. The time dependent load factor is defined using the differential form of arc-length constraint.

4 Arc-length method

The objective in the stability analysis of structures is to obtain the equilibrium states at various load levels. The equilibrium states trace the load-displacement responses where, the applied load is a function of a unique load parameter. Thus, the above equilibrium equations (33) and (34) can be expressed in the following form

$$R(\bar{V}, \bar{\lambda}) = F_{int}(\bar{V}) - \bar{\lambda}P = 0, \quad (35)$$

where $\bar{V} = [\bar{v}, \bar{\Omega}]^T$ is the vector of average velocities and angular velocities at mid time $t_{n+1/2}$, R is the column of equilibrium equations, F_{int} is the vector of internal forces and moments, P is the vector of external reference point loads and $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\lambda^{[n]} + \lambda^{[n+1]})$ is the load factor at the mid time. With the introduction of an additional quantity $\bar{\lambda}$ in the equation, we now have $n+1$ unknowns, n -dimensional vector \bar{V} and the load factor $\lambda^{[n+1]}$. The time dependent load-displacement response of the structure can be represented using a tangent vector, $y = [\dot{r}, \dot{\lambda}]^T$. The standard constraint equation relating the unknowns is given by a generalized formulation of arc-length control [3]

$$\xi(\dot{r}, \dot{\lambda}) = \dot{r}^T W \dot{r} + \dot{\lambda}^2 P^T H P - 1 = 0. \quad (36)$$

From the perspective of velocity based approach, it is more convenient to use the following modified constraint equation discretized in time.

$$\xi(\bar{V}, \lambda^{[n+1]}) = h^2 \bar{V}^T W \bar{V} + (\lambda^{[n+1]} - \lambda^{[n]})^2 P^T H P - h^2 = 0, \quad (37)$$

where W and H are arbitrary symmetric scaling matrices. We now have an extended system of equations. After linearizing equations (35) and (37), we get the following matrix system for the Newton-Raphson method:

$$\begin{bmatrix} K_T(\bar{V}) & -\frac{1}{2}P \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{V} \\ \delta \lambda^{[n+1]} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(\bar{V}, \lambda^{[n+1]}) \\ \xi(\bar{V}, \lambda^{[n+1]}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

where, $a = 2h^2 \bar{V}^T W$ and $b = 2(\lambda^{[n+1]} - \lambda^{[n]}) P^T H P$ and K_T are the blocks of the tangent matrix obtained by linearizing equations (33) and (34).

To determine the optimal values for the time step h with the implementation of the local error control, the solutions at the intermediate time step $t_{n+\tau}$ i.e. $v^{n+\tau}$ and $\Omega^{n+\tau}$, are first obtained. For this purpose the above set of time discrete equations are evaluated first using τh instead of h . The third order approximation for the configuration variables at time t_{n+1} is obtained from the solutions from two implicit second order approximations at $t_{n+\tau}$ and t_{n+1} and solution at t_n using the following relations.

$$r^{[n+1]} = r^{[n]} + h \left(\frac{(1-w)}{3} v^{[n]} + \frac{(3w+1)}{3} v^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{6} v^{[n+1]} \right) \quad (39)$$

$$\hat{q}^{[n+1]} = \hat{q}^{[n]} \circ \exp \left(Corr + \frac{h}{2} \left(\frac{(1-w)}{3} \Omega^{[n]} + \frac{(3w+1)}{3} \Omega^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{6} \Omega^{[n+1]} \right) \right) \quad (40)$$

where $\tau = \sqrt{2} - 2$, $w = \frac{\sqrt{2}}{4}$ and the correction term *Corr* is given by,

$$Corr = \frac{h^2}{48\tau(\tau-1)} \Omega^{[n]} \times \left(\tau^2 \Omega^{[n+1]} - \Omega^{[n+\tau]} \right)$$

From the obtained third order approximation, we can determine the local truncation error (*LTE*) as difference between the approximation from third and second stage and the new step size.

$$h_{n+1} = h_n \left(\frac{2^k - 1}{2^k} \frac{\epsilon_{tol}}{\|LTE\|} \right)^{(1/k+1)} \quad (41)$$

5 Conclusion

In the present work, we propose a quasi-static analysis using a dynamic solver with the implementation of an arc-length control in its original form. The method proposed in the present work is in accordance with the discretization employed in [2]. We have also employed an approach for the adaptive step-size control which in turn assists in determining the appropriate load factor. The proposed methodology serves as a starting point in the post-critical analysis of elastic structures.

Bibliography

- [1] E. Zupan, M. Saje, and D. Zupan. Dynamics of spatial beams in quaternion description based on the newmark integration scheme. *Computational Mechanics*, page 47–64, 2013.
- [2] E. Zupan and D. Zupan. On conservation of energy and kinematic compatibility in dynamics of nonlinear velocity-based three-dimensional beams. *Nonlinear Dynamics*, page 1379–1394, 2019.
- [3] Massicotte. B Fafard. M. Geometrical interpretation of the arc-length method. *Computers and Structures*, 46(4):603–615, 1993.
- [4] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:125–161, 1988.



Meritve mejne plasti pri obtekanju profila lopatice vetrne turbine

M. Fike¹, J. Pavlič¹, M. Pezdevšek¹, G. Hren¹, A. Predin¹

Boundary layer measurements on the turbine blade profile

Povzetek. V prispevku je predstavljena izvedba in rezultati meritev mejne plasti pri obtekanju profila NREL S826. Hitrosti obtekanja so bile izmerjene z LDA merilnim sistemom v 9 točkah oziroma linijah pri dveh različnih napadnih kotih 0° in 17° . Meritve so pokazale, da do odcepitve mejne plasti pride pri obeh napadnih kotih, pri kotu 0° v 8 merilni točki, ki je oddaljena od vstopnega roba 84 % dolžine tetive in pri kotu 17° v 7 merilni točki oziroma na 71 % dolžine tetive od vstopnega roba. Na podlagi meritev ugotavljamo, da je premik točke odcepitve proti vstopnemu robu kljub veliki spremembi napadnega kota majhen.

Abstract. The paper presents the experimental setup and results of boundary layer measurements on profile NREL's S826. A laser doppler anemometry (LDA) system was used for velocity measurements at nine characteristic points (lines) at two angles of attack, 0° and 17° , respectively. Based on the measurements, the boundary layer separates at the 8th measuring point (84 % of chord from leading edge) at AOA 0° and the 7th measuring point (71 % of chord from leading edge) at AOA 17° . We found out the small shift towards the leading edge of the boundary layer separation point with an increasing angle of attack.

1 Uvod

Vetrne turbine obratujejo v širokem področju hitrosti vetra, obratovati začnejo pri hitrosti pod 3 m/s in obratujejo do 25 m/s, pri višjih hitrostih se vetrne turbine iz varnostnih razlogov ustavijo. Obstajajo različne vetrne turbine s konstantno in spremenljivo hitrostjo vrtenja ter s fiksnimi lopaticami in z lopaticami, ki so vrtljive okoli svoje osi. Pri določenih pogojih obratovanja, predvsem kadar se hitrost vetra poveča, se napadni kot relativne hitrosti vetra poveča, kar lahko privede do odcepitve toka na sesalni strani lopatice in do zastoja pri obtekanju lopatice. Na področju letalstva se izogibajo razmeram, pri katerih bi lahko prišlo do odcepitve, razen pri ustavljanju oziroma zaviranju letala, pri vetrnih turbinah pa se ta pojav izkorišča pri nekaterih tipih vetrnic. Te so konstruirane tako, da lahko dosežejo maksimalno moč nekajkrat na leto. Določitev maksimalne moči vetrne turbine in moči pri še višjih hitrostih

¹Fakulteta za energetiko, Univerza v Mariboru

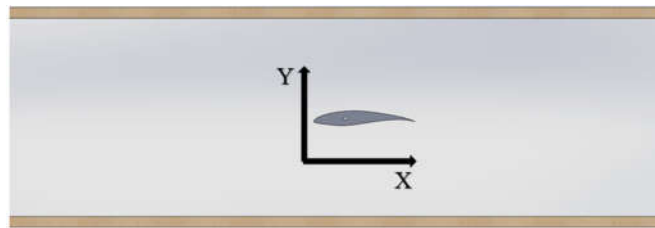
vetra je pomembna pri konstruiranju vetrnih turbin s konstanto in s spremenljivo hitrostjo vrtenja, ki so regulirane s pojavom zastoja na lopaticah vetrne turbine. Informacija glede stanja mejne plasti na sesalni strani lopatice je nujna pri oblikovanju lopatic predvsem zaradi določitve točke prehoda obtekanja iz laminarnega v turbulentno področje na lopaticah vetrnih turbin, ki delujejo pri nizkih Reynoldsovih številih. Režim toka, laminarni oziroma turbulentni tok, ima pomemben vpliv na trenje ob steni in na pojav odcepitve toka, kar se odraža v koeficientu vzgona in upora. Že od nekdanjih znanstveniki in inženirji raziskujejo mejno plast z namenom izkoriščanja fizikalnih lastnosti v tehničnih aplikacijah. Namen tega prispevka je raziskovanje karakteristike mejne plasti oziroma nestacionarnega zastoja na sesalni strani lopatice vetrne turbine. Obtekanje lopatic pri nizkih Reynoldsovih številih pomeni, da imamo glede na velikost lopatice oziroma dolžino tetive nizko hitrost zraka, ki obteka lopatico. Pri visokih Reynoldsovih številih inženirji lahko zanemarijo vplive viskoznosti oziroma omejijo vpliv na tanek sloj tik ob lopatici. Pri nizkih Reynoldsovih številih se vpliv viskoznosti odraža v hitrem povečevanju debeline mejne plasti in kasneje v odcepitvi toka, ki bistveno vpliva na fizikalne lastnosti krila (sila upora in vzgona). Laminarna mejna plast težko kljubuje negativnim tlačnim gradientom, kar se odraža v odcepitvi toka.

Namen tega prispevka je predstavitev meritev mejne plasti pri obtekanju lopatice vetrne turbine pri dveh karakterističnih napadnih kotih.

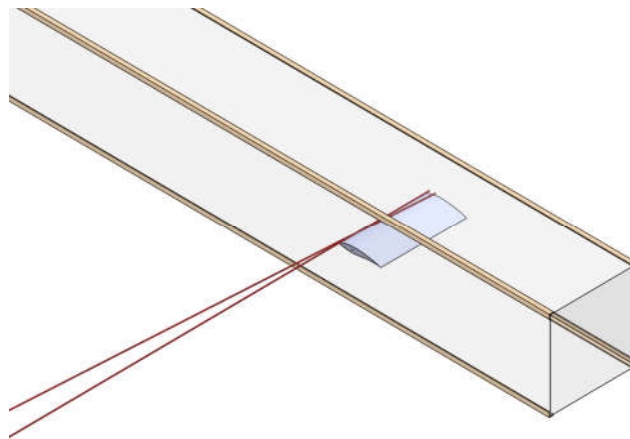
2 Postavitev eksperimenta

2.1 Geometrija

Meritve so bile izvedene na aerodinamičnem profilu NREL S826 v majhnem vetrovniku pretočnega preseka 200 mm x 200 mm (slika 1). Dolžina tetive profila je bila 95 mm, dolžina pa je bila omejena z dimenzijami vetrovnika in je znašala 200 mm. Profil je bil vpet v vetrovnik s pomočjo vijakov na vsaki strani. S pomočjo le teh smo spreminjali vpadni kot profila. LDA naprava je bila postavljena pravokotno glede na vetrovnik, tako da sta se žarka sekala v točki merjenja, kot je prikazano na sliki 2.



Slika 1: Aerodinamični profil S826



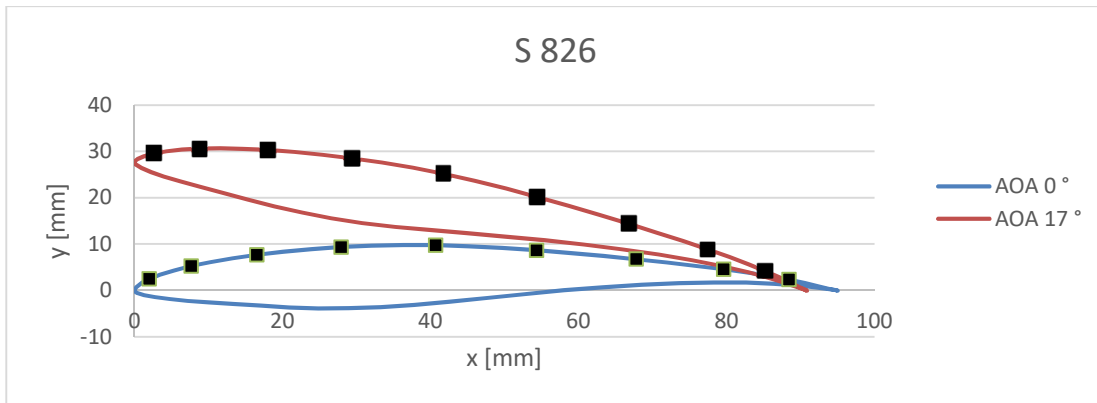
Slika 2: Sečišče žarkov v točki merjenja obtakanja aerodinamičnega profila

2.2 LDA merilni sistem

Uporabljen je bil 2D merilni sistem Flow Explorer proizvajalca Dantec Dynamics s procesorjem BSA F 600. Moč diodnega laserja je znašala 70 mW, valovna dolžina laserskih žarkov 660/785 nm (1D/2D). Goriščna razdalja leč je znašala 500 mm. Laserska naprava je bila pritrjena na koordinatno pozicionirni sistem, ki je skrbel za premikanje in pozicioniranje naprave za izvedbo meritev v željeni točki. Omogoča pomik v x, y in z smeri. Izvede lahko 360 pomikov na mm torej je najmanjši možni pomik 0.00277 mm. Za krmiljenje naprave je bil uporabljen program BSA Flow proizvajalca merilne naprave. Osemenitev toka je bila izvedena z meglo proizvedene z generatorjem megle Ibiza LSM-800 W in tekočine Cameo Xtra heavy fluid. Merilna negotovost merilnega sistema znaša manj kot 0,1 %.

2.3 Merilne točke

Pri eksperimentalnih meritvah nas je zanimal potek ter razvoj mejne plasti ter nastanek povratnega toka tekočine. Meritve smo opravili tako, da smo laser pozicionirali v točko vstopnega roba aerodinamičnega profila. To točko smo nato v pozicionirnem sistemu nastavili kot koordinatno izhodišče. Nato smo se pomaknili v prvo merilno točko, ter opravili meritve hitrosti tako, da smo se pomikali vertikalno po y-osi. Velikost pomika po y-osi se je med potekom meritev spreminjala. Na začetku, kjer smo pričakovali velike spremembe hitrosti smo uporabili pomik $\Delta y = 0.025$ mm, ko pa smo prišli do hitrosti prostega toka, smo pomik povečali na 0.1 mm. S tem smo skrajšali čas meritev v področju, kjer vemo, da je hitrost relativno konstantna. Postopek smo ponovili za vse merilne točke, ki so označene z črno barvo na sliki 3. Meritve so bile izvedene za dva napadna kota 0° in 17° .



Slika 3: Merilne točke (črne pike) pri napadnem kotu 0° in 17°

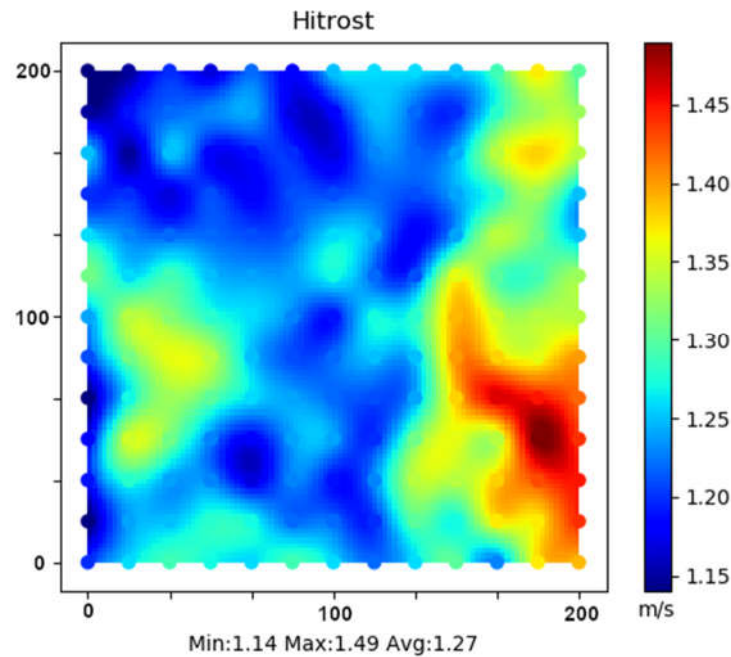
V tabeli 1 so podane pozicije merilnih točk oziroma linij na katerih so bile izvedene meritve. Točke so podane z oddaljenostjo od vstopnega roba profila v procentih dolžine tetive.

Tabela 1: Položaj merilnih točk oziroma linij

Merilna točka	oddaljenost od vstopnega roba (v % dolžine tetive)
1	2.1
2	8.0
3	17.4
4	29.4
5	42.8
6	57.1
7	71.3
8	83.8
9	93.1

3 Rezultati

Pred meritvami mejne plasti obtakanja profila smo izvedli meritve tokovnega polja vetrovnika brez vstavljenega profila oziroma lopatice. Meritve hitrosti v vetrovniku so prikazane na sliki 4.

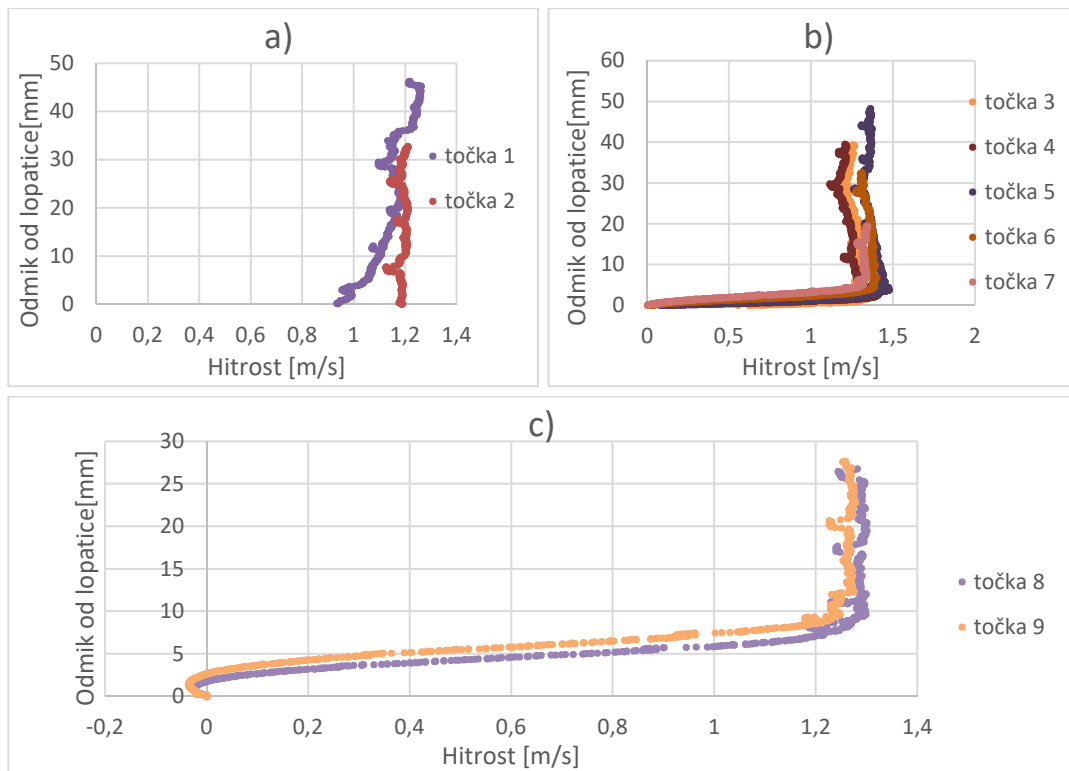


Slika 4: Hitrostno tokovno polje v vetrovniku

Iz meritev hitrostnega tokovnega polja je razvidno, da polje ni čisto homogeno, hitrosti po merilnem preseku se razlikujejo. Najvišje hitrosti so izmerjene v desnem spodnjem delu pretočnega polja. Aritmetična srednja vrednost hitrosti, merjena točno na sredini vetrovnika, kjer so opravljane meritve z aerodinamičnim profilom je 1.36 m/s. Pri teh podatkih izračun pokaže, da imamo obtekanje profila pri nizkem Reynoldsovem številu.

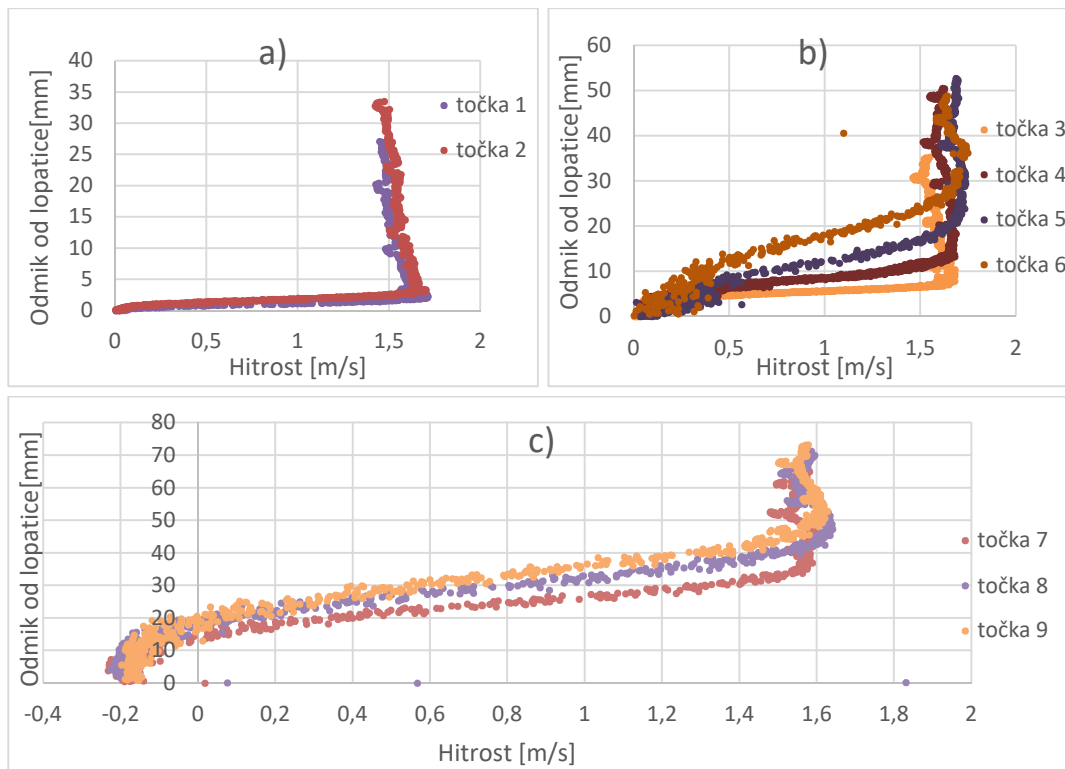
$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{1.36 \cdot 0.095}{1.511 \cdot 10^{-5}} = 8550 \quad (1)$$

Na sliki 5 so na treh diagramih prikazane izmerjene hitrosti v merilnih točkah v odvisnosti od oddaljenosti od stene lopatice. Na sliki 5a so prikazane izmerjene hitrosti v merilnih točkah 1 in 2, na sliki 5b v točkah od 3 do 7 in 5c v točkah 8 in 9. V merilni točki 1 in 2, na začetnem delu lopatice, je debelina mejne plasti zelo tanka in je nismo uspeli izmeriti. Najnižja izmerjena hitrost je 0,9 m/s. Z oddaljenosti od stene se hitrost bistveno ne spreminja. Iz slike 5b, kjer so prikazane hitrosti v točkah 3 do 7, je lepo razvidna debelina mejne plasti. Hitrost tik ob steni je 0 m/s, nato pa linearno narašča do približno 1,5 m/s. Debelina mejne plasti znaša okoli 5 mm. Iz merilnih točkah 8 in 9 je tudi pri napadnem kotu 0 ° razvidna odcepitev toka. Hitrost tik ob steni je enaka 0 m/s, nato pa se hitrost z oddaljenostjo od stene zmanjšuje, torej imamo povratni tok, pri oddaljenosti 3 mm od stene pa začne hitrost naraščati dokaj linearno do oddaljenosti 10 mm, kolikor znaša debelina mejne plasti.



Slika 5: Potek hitrosti v merilnih točkah pri napadnem kotu 0°

Na sliki 6 so prikazani poteki hitrosti v odvisnosti od oddaljenosti od stene v izbranih merilnih točkah pri napadnem kotu 17° . Poteki hitrosti so združeni na treh diagramih glede na skupne lastnosti. Na sliki 6a so prikazane hitrosti v merilnih točkah 1 in 2. Debelina mejne plasti znaša 2 mm, zaradi oblike lopatice je na tej oddaljenosti tudi hitrost najvišja, nato pa hitrost pada k vrednosti hitrosti toka v vetrovniku. Proti zadnjemu delu lopatice se debelina mejne plasti povečuje, v merilni točki 3 znaša 7 mm in se povečuje do 30 mm, kolikor znaša v točki 6. V točki 6 prihaja ob steni do oddaljenosti 10 mm do trganja mejne plasti kar je razvidno z velikim raztrosom izmerjenih hitrosti. V točkah 7 do 9 na podlagi izmerjenih hitrosti ugotavljamo, da prihaja do zastoja, kjer se mejna plast odcepi in nastane vrtinec na sesalni strani lopatice. Velikost oziroma višina vrtinca oziroma zastoja se proti izstopnemu delu povečuje, v točki 7 znaša višina 35 mm, v točki 9 pa 50 mm. Ta zastoj bistveno vpliva na koeficient vzgona, posledično na silo vzgona obravnavane lopatice.



Slika 6: Potek hitrosti v merilnih točkah pri napadnem kotu 17°

4 Zaključek

V prispevku so prikazane meritve mejne plasti pri obtekanju aerodinamičnega profila, v našem primeru lopatice vetrne turbine. Hitrost je bila merjena z uporabo LDA merilnega sistema, pritrjenega na pozicionirni računalniško voden sistem, ki je omogočal točno pozicioniranje in zelo majhne pomike oziroma razdalje med posameznimi točkami merjenja. Mejna plast oziroma hitrosti obtekanja je bila izmerjena v 9 točkah oziroma linijah za dva napadna kota 0° in 17° . Meritve so pokazale, da do odcepitve mejne plasti pride pri obeh napadnih kotih, pri kotu 0° v 8 merilni točki in pri kotu 17° v 7 merilni točki. Na podlagi meritev ugotavljamo, da je premik točke odcepitve proti vstopnemu robu kljub veliki spremembi napadnega kota majhen.

Literatura

- [1] F. Durst, A. Melling in J. H. Whitelaw, Principles and practice of laser doppler anemometry, second edition, Academic press, 1981.
- [2] Hermann Schlichting, Klaus Gersten, Boundary-Layer Theory. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 2017.
- [3] M. Fike, G. Bombek, M. Hriberšek, A. Hribernik. The unsteady static-stall aerodynamic characteristics of an S809 airfoil at low Reynolds numbers. Journal of energy technology, letnik 6, iss. 1, str. 33-50, 2013.

- [4] J. Bartl, K. F. Sagmo, T. Bracchi, L. Sætran. Performance of the NREL S826 airfoil at low to moderate Reynolds numbers – A reference experiment for CFD models. Preprint submitted to European Journal of Mechanics – B/Fluids, 2018.
- [5] K.F. Sagmo, J. Bartl, L. Sætran. Numerical simulations of the NREL S826 airfoil. Journal of Physics: Conference Series 753, 2016.



Vpliv inkluzivne preslikave deformiranja telesa na kinematične enačbe nelinearne elastičnosti

Rado Flajs¹

The influence of the inclusive deformation mapping into the kinematic equations of the nonlinear elasticity

Povzetek. V prispevku obravnavamo vpliv inkluzivne preslikave deformiranja telesa na kinematične enačbe nelinearne mehanike. Problem nastopi pri vložitvi, pri preslikavi območja iz prostora R^n v območje, ki se nahaja v prostoru R^m , pri čemer sta dimenziji prostorov n in m nujno različni. Omenjen pristop predstavlja posplošitev uveljavljenega pristopa in tako odpira nove možnosti pri opisu deformiranja telesa. Zaradi omenjene posplošitve nujno nastopijo težave, ki jih pri običajnem pristopu ni zaslediti. V prispevku so podani predlogi rešitev omenjenih težav. Hkrati pa v prispevku osvetlimo tudi nekatere težave, povezane z uveljavljenim pristopom in predlagamo njihovo rešitev.

Abstract. In this paper, we discuss the influence of inclusive deformation mapping of the body to the kinematic equations of the nonlinear mechanics. The problem occurs when inserting a domain from the space R^n to the domain located in the space R^m , where the dimensions of the spaces are necessarily different. This approach represents a generalization of the established approach and thus opens up new possibilities in describing body deformation. Due to the mentioned generalization, problems necessarily arise that cannot be traced by the classical approach. The article presents a proposal for solving the mentioned problems. At the same time, the paper also highlights some of the problems associated with the established approach and proposes solutions to them.

1 Uvod

V prispevku opišemo deformiranje telesa z uporabo vložitev. Omenjenega pristopa v dostopni literaturi nismo zasledili. Preslikava $\phi : (\vec{r}_0, t) \mapsto \vec{r}$ tako slika iz prostora R^n v prostor R^m , pri čemer sta dimenziji prostorov m in n nujno različni, običajno je $n < m$. Pri izbranem času t in izbranem delcu, določenem z materialnimi koordinatami x_0 , y_0 in z_0 , deformacijski gradient F tako predstavimo z linearno preslikavo iz R^n v R^m . Zaradi različnih dimenzij m in n ,

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, 1000 Ljubljana

determinanta preslikave ni definirana, preslikava pa ni obrnljiva. To oteži izračun temeljnih kinematičnih količin, ko sta $J = \det F$ in transponirani inverz F^{-T} , ki nastopa v Nansonovi enačbi za spremembo površine. V prispevku izpeljemo izraze za te količine. Po našem mnenju pomiki v [4, str. 96] niso dobro definirani. Sicer že avtorji sami opozarjajo na to dejstvo. V nadaljevanju poskusimo to pomankljivost odpraviti. Na začetku uvedemo osnovne količine, potrebne pri opisu deformiranja telesa. Nato si ogledamo par primerov deformiranja telesa, od koder povzamemo praktične zaključke. Te kasneje posplošimo. Pri opisu problema se izkaže kot zelo uporabna količina Moore-Penrosejev posplošeni inverz.

1.1 Oznake

V splošnem bomo deformiranje telesa predstavili z vložitvijo $\phi : R^n \rightarrow R^m$. Uporabljali bomo materialni in prostorski opis. Materialne koordinate delca (iz domene v prostoru R^n) bomo opremili z indeksom 0, t.j. z (x_0, y_0, x_0) , pri prostorskih koordinatah delca (iz slike preslikave ϕ v prostoru R^m) pa bomo ta indeks opustili. Označili jih bomo z (x, y, z) . Z indeksom 0 bomo opremili tudi nekatere druge materialne količine.

Pri zapisu vektorjev, linearnih funkcionalov in linearnih preslikav bomo v nadaljevanju uporabljali Diracove oznake. Vektor \vec{a} bomo zapisali s tako imenovanimi *ket* vektorji.

$$\vec{a} = A_x \vec{E}_x + A_y \vec{E}_y + A_z \vec{E}_z \equiv |a\rangle = a_x |E_x\rangle + a_y |E_y\rangle + a_z |E_z\rangle = a_x |I\rangle + a_y |J\rangle + a_z |K\rangle.$$

Linearne funkcionalne bomo označevali s tako imenovanimi *bra* vektorji $\langle b|$. Linearni funkcionali $\{\langle I|, \langle J|, \langle K|\}$ tvorijo dualno bazo baze $\{|I\rangle, |J\rangle, |K\rangle\}$.

Skalarni produkt vektorjev $|a\rangle$ in $|b\rangle$ bomo označili z $\langle a|b\rangle$. Fiziki skalarni produkt definirajo podobno, vendar ne povsem enako kot matematiki. Skalarni produkt zapišejo z enačbo

$$\langle y|x\rangle := \langle x, y\rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i,$$

kjer $\langle x, y\rangle$ označuje skalarni produkt, običajen v matematiki. Po Rieszovem izreku moremo delovanje poljubnega zveznega linearnega funkcionala f v Hilbertovem prostoru enolično izraziti s skalarnim produktom

$$\langle f| : |x\rangle \mapsto \langle g|x\rangle.$$

Vektor $|g\rangle$, enolično določen s funkcionalom $\langle f|$, bomo zato označili kar s $|f\rangle$ in tako pisali

$$\langle f| : |x\rangle \mapsto \langle f|x\rangle.$$

Skalarni produkt $\langle f|x\rangle$ lahko razumemo tudi kot rezultat delovanja linearnega funkcionala $\langle f|$ na vektorju $|x\rangle$.

Linearne preslikave lahko interpretiramo kot elemente ustreznega vektorskega prostora, zato jih moremo, podobno kot vektorje, zapisati z vsoto baznih linearnih preslikav tako imenovanih diadnih ali tenzorskih produktov $|a\rangle \langle b|$. Po definiciji diadni produkt $|a\rangle \langle b|$ preslika vektor $|c\rangle$ v vektor $\langle b|c\rangle |a\rangle$ tj.

$$|a\rangle \langle b| : |c\rangle \mapsto \langle b|c\rangle |a\rangle. \quad (1)$$

Diadni produkt $|a\rangle\langle b|$ vektorjev $|a\rangle = \vec{a}$ in $|b\rangle = \vec{b}$ pogosto označimo tudi z oznako $\vec{a} \otimes \vec{b}$ [1]. Po naši presoji je zapis diadnega produkta s ket in bra vektorji še bolj nazoren, saj izraz (1) v drugem delu "kliče" po skalarnem produktu. Uporabljali bomo transponiranje $(|a\rangle\langle b|)^T = |b\rangle\langle a|$ in kompozitum $(|a\rangle\langle b|) \circ (|c\rangle\langle d|) = \langle b|c\rangle |a\rangle\langle d|$ diadnih produktov.

2 Vložitve

Deformiranje telesa bomo opisali z vložitvami, zato bomo najprej definirali potrebne osnovne pojme za opis vložitev.

Definicija 0.1 [2, str. 123] Zvezna preslikava $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je homeomorfizem na $F(A)$, če je F bijektivna na $F(A)$ in ima zvezen inverz $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Rečemo, da sta množici A in $F(A)$ homeomorfni.

Definicija 0.2 [2, str. 433] Diferencialna preslikava $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstraktne ploskve S v \mathbb{R}^3 je imerzija (tudi pogreznjenost ali potopitev), če je diferencial $d\phi_p : T_p(S) \rightarrow T_p(\mathbb{R}^3)$ injektiven. Če ima dodatno S metriko $\langle | \rangle$ in velja

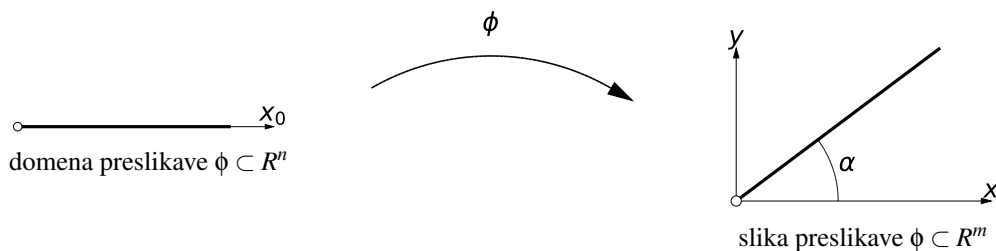
$$\langle d\phi_p v | d\phi_p w \rangle = \langle v | w \rangle, \quad |v\rangle, |w\rangle \in T_p(S)$$

potem preslikavo ϕ imenujemo izometrična imerzija.

Definicija 0.3 [2, str. 435] Naj bo S abstraktna ploskev. Diferencialna preslikava $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vložitev, če je ϕ imerzija in homeomorfizem na svojo sliko.

3 Primera deformiranj teles

3.1 Zasuk stene okrog navpične osi



Slika 1: Zasuk stene okrog navpične osi - tloris

Zasuk opišemo s preslikavo ϕ

$$\phi : |r_0\rangle = x_0 |I\rangle + z_0 |K\rangle \mapsto x |i\rangle + y |j\rangle + z |k\rangle = x_0 \cos(\alpha) |i\rangle + x_0 \sin \alpha |j\rangle + z_0 |k\rangle = |r\rangle, \quad \alpha = ct.$$

Preslikava ϕ je pri poljubnem času t izometrična vložitev. Določimo deformacijski gradient F

$$F = \frac{\partial \phi(|r_0\rangle, t)}{\partial |r_0\rangle} = \cos \alpha |i\rangle \langle I| + \sin \alpha |j\rangle \langle I| + |k\rangle \langle K|.$$

Zapišemo inverzno preslikavo ϕ^{-1}

$$\phi^{-1} : |r\rangle \mapsto |r_0\rangle = \sqrt{x^2 + y^2} |I\rangle + z |K\rangle$$

in od tu še inverz deformacijskega gradienta F^{-1}

$$F^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}(|r\rangle, t)}{\partial |r\rangle} = \frac{x}{x_0} |I\rangle \langle i| + \frac{y}{x_0} |I\rangle \langle j| + |K\rangle \langle k| = \cos \alpha |I\rangle \langle i| + \sin \alpha |I\rangle \langle j| + |K\rangle \langle k|.$$

3.1.1 Posplošeni inverz deformacijskega gradienta F^+

V izbranem koordinatnem sistemu bi deformacijski gradient predstavili s pravokotno matriko. Ker inverz takšne matrike ne obstaja, poskusimo zadrego obiti s posplošenim inverzom. Pod imenom posplošeni inverz na tem mestu označimo uveljavljen Moore–Penrosejev inverz, definiran spodaj:

Definicija 0.4 [3] Če ima $A \in R^{m \times n}$, $m \geq n$ poln rang, definiramo

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T, \quad (2)$$

sicer ($m < n$) je

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1}.$$

Moore Penrosejev inverz lahko definiramo tudi z Moore–Penrosejevimi pogoji.

Definicija 0.5 Moore Penrosejev inverz A^+ je določen s spodnjimi Moore–Penrosejevimi pogoji:

$$\begin{aligned} A A^+ A &= A, \\ A^+ A A^+ &= A^+, \\ (A A^+)^T &= A A^+, \\ (A^+ A)^T &= A^+ A. \end{aligned}$$

Z uporabo enačbe (2) dobimo

$$F^+ = \cos \alpha |I\rangle \langle i| + \sin \alpha |I\rangle \langle j| + |K\rangle \langle k| = F^{-1}$$

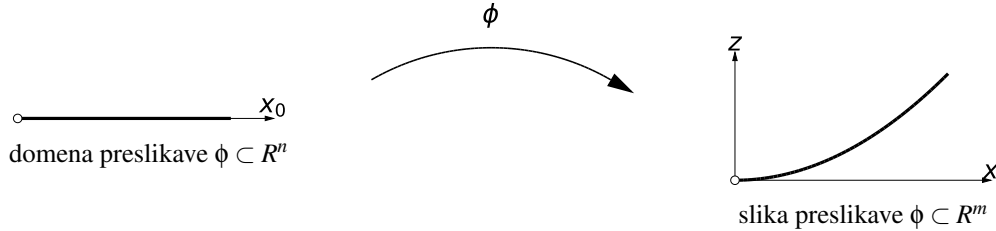
Z uporabo deformacijskega gradienta določimo še Green Cauchyeva tenzorja C in B

$$\begin{aligned} C &= F^T F = |I\rangle \langle I| + |K\rangle \langle K|, \\ B &= F F^T = \cos^2 \alpha |i\rangle \langle i| + \sin^2 \alpha |j\rangle \langle j| + \sin \alpha \cos \alpha (|i\rangle \langle j| + |j\rangle \langle i|) + |k\rangle \langle k|, \end{aligned}$$

ter pripadajoča polarna razcepa deformacijskega gradienta $F = R U = V R$

$$\begin{aligned} U &= |I\rangle \langle I| + |K\rangle \langle K|, \\ V &= B, \\ R &= F. \end{aligned}$$

3.2 Obračanje in raztezanje tankega lista



Slika 2: Obračanje in raztezanje tankega lista - pogled v smeri $-|j\rangle$

Deformiranje lista predpišemo s preslikavo ϕ

$$\phi : |r_0\rangle = x_0 |I\rangle + y_0 |J\rangle \mapsto x_0 |i\rangle + y_0 |j\rangle + ct x_0^2 |k\rangle = |r\rangle.$$

Preslikava ϕ je pri poljubnem času t vložitev. Določimo smerni odvod

$$D\phi(|r_0\rangle, t)[|u_0\rangle] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\phi(|r_0\rangle + \Delta |u_0\rangle, t) - \phi(|r_0\rangle, t)}{\Delta}, \quad |u_0\rangle = u_0 |I\rangle + v_0 |J\rangle.$$

Po krajšem računu dobimo

$$D\phi(|r_0\rangle)[|u_0\rangle] = u_0 |i\rangle + v_0 |j\rangle + 2ct x_0 u_0 |k\rangle = \frac{\partial \phi(|r_0\rangle, t)}{\partial |r_0\rangle} : |u_0\rangle = F : |u_0\rangle = F |u_0\rangle.$$

Z uporabo skrčitve najdemo deformacijski gradient F , Green Cauchyjev tenzor C in posplošeni inverz deformacijskega gradienta F^+

$$\begin{aligned} F &= |i\rangle \langle I| + |j\rangle \langle J| + 2ct x_0 |k\rangle \langle I|, \\ C &= F^T F = (1 + 4c^2 t^2 x_0^2) |I\rangle \langle I| + |J\rangle \langle J|, \\ F^+ &= (F^T F)^{-1} F^T = C^{-1} F^T. \end{aligned}$$

4 Osnovne deformacijske količine

4.1 Deformacijski gradient

Deformacijski gradient podaja zvezo med diferencialoma dolžine v prostorskem in materialnem opisu

Izrek 0.1 Veljata zvezi

$$\begin{aligned} |dr\rangle &= F |dr_0\rangle \implies |dr_0\rangle = F^+ |dr\rangle, \\ |dr_0\rangle &= F^{-1} |dr\rangle \implies |dr\rangle = (F^{-1})^+ |dr_0\rangle, \end{aligned}$$

Dokaz: Ker imamo zagotovljen obstoj inverza od C in inverza od B^{-1} , lahko pišemo

$$\begin{aligned} F^+ |dr\rangle &= F^+ F |dr_0\rangle = C^{-1} F^T F |dr_0\rangle = C^{-1} C |dr_0\rangle = |dr_0\rangle, \\ F^{-T} |dr_0\rangle &= B^{-1} |dr\rangle \implies B F^{-T} |dr_0\rangle = |dr\rangle \implies (F^{-1})^+ |dr_0\rangle = |dr\rangle. \end{aligned}$$

4.2 Pomiki

Vektor pomikov $|u\rangle$ je običajno definiran s predpisom [4, str. 96]

$$|u\rangle = |r\rangle - |r_0\rangle, \quad (3)$$

vendar je ta definicija sporna, saj se v splošnem vektorja $|r\rangle$ in $|r_0\rangle$ nahajata v različnih prostorih. V naših primerih se niti dimenziji teh prostorov ne ujemata. Že avtorji [4] opozarjajo na dejstvo, da enačba (3) ni tenzorska enačba.

Definicija 0.6 *Ob predpostavki, da se deformiranje začne pri času $t = 0$, vektor pomikov $|u\rangle$ definiramo z enačbo*

$$|u\rangle = \phi(|r_0\rangle, t) - \phi(|r_0\rangle, 0) = |r\rangle - \phi(|r_0\rangle, 0). \quad (4)$$

V definiciji poudarimo razliko med vektorjem $|r_0\rangle$ in sliko tega vektorja $\phi(|r_0\rangle, 0)$ pri času $t = 0$. K tej definiciji se bomo povrnili pri zapisu tenzorjev deformacij s pomiki.

4.3 Sprememba volumna

Najprej bomo zapisali specifično spremembo volumna. V pomoč nam bo spodnja trditev.

Izrek 0.2 *Preslikavi $A^T A$ in AA^T imata enake lastne vrednosti $\lambda_i^2 > 0$ in velja,*

$$A = \sum_j \lambda_j |\xi_j\rangle \langle \eta_j|,$$

kjer tvorijo lastni vektorji $|\xi_j\rangle$ preslikave AA^T in lastni vektorji $|\eta_j\rangle$ preslikave $A^T A$ ortonormirani bazi.

Dokaz:

Naj bodo λ_j^2 lastne vrednosti in $|\eta_j\rangle$ pripadajoči ortonormirani lastni vektorji preslikave $A^T A$. Definiramo vektorje

$$|\xi_j\rangle := \lambda_j^{-1} A |\eta_j\rangle. \quad (5)$$

Preverimo, da tvorijo ortonormirano bazo

$$\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \langle \eta_i | A^T A | \eta_j \rangle = \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \langle \eta_i | \eta_j \rangle \lambda_j^2 = \delta_{ij}.$$

Iz enačbe (5) dobimo

$$A |\eta_j\rangle = \lambda_j |\xi_j\rangle. \quad (6)$$

Enačbo pomnožimo z leve z AA^T in dobimo

$$AA^T A |\eta_j\rangle = \lambda_j AA^T |\xi_j\rangle = A(A^T A) |\eta_j\rangle = A \lambda_j^2 |\eta_j\rangle = \lambda_j^3 |\xi_j\rangle.$$

Od tu povzamemo, da so $|\xi_j\rangle$ lastni vektorji preslikave AA^T , ki pripadajo lastnim vrednostim λ_j^2 . Ker tvorijo vektorji $|\eta_j\rangle$ ortonormirano bazo, lahko ob upoštevanju enačbe (6) pišemo

$$A = \sum_j \lambda_j |\xi_j\rangle \langle \eta_j|. \quad (7)$$

Specifične spremembe volumna ne moremo definirati z enačbo $J = \det(F)$, ker determinanta deformacijskega gradienta ne obstaja, lahko pa jo predpišemo z enačbo

$$J := \prod_{\lambda_i > 0} \lambda_i. \quad (8)$$

Ob upoštevanju razcepa $F = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i |m_i\rangle \langle m_i^0|$, kjer so λ_i^2 lastne vrednosti C , $|m_i\rangle$ lastni vektorji B in $|m_i^0\rangle$ lastni vektorji C , dobimo še iskano spremembo volumna

$$\begin{aligned} dV &= (|da\rangle, |db\rangle, |dc\rangle) = (F|da_0\rangle, F|db_0\rangle, F|dc_0\rangle) \\ &= \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k (|m_i\rangle, |m_j\rangle, |m_k\rangle) \langle m_i^0 | da_0\rangle \langle m_j^0 | db_0\rangle \langle m_k^0 | dc_0\rangle = J dV_0. \end{aligned}$$

4.4 Sprememba dolžine

Spremembo dolžine določimo z izrazom

$$ds = \sqrt{\langle dr | dr \rangle} = \| |dr\rangle \| = \| U |dr_0\rangle \|.$$

4.5 Sprememba površine

Z upoštevanjem enakosti za spremembo volumna

$$dV = \langle dS | da \rangle = J dV_0 = J \langle dS_0 | da_0 \rangle = J \langle dS_0 | F^+ da \rangle = J \langle (F^+)^T dS_0 | da \rangle.$$

Nansonova enačba $|dS\rangle = J (F^{-1})^T |dS_0\rangle$ preide v posplošeno Nansonovo enačbo

$$|dS\rangle = J (F^+)^T |dS_0\rangle.$$

4.6 Tenzorji deformacij

4.6.1 Tenzor majhnih deformacij ϵ , izražen s pomiki

Najprej določimo smerni odvod deformacijskega gradienta [1, str. 115]

$$\begin{aligned} DF(\phi(|r_0\rangle, t)) [|u\rangle] &= \frac{d}{d\Delta} |_{\Delta=0} F(\phi(|r_0\rangle, t) + \Delta |u\rangle) = \frac{d}{d\Delta} |_{\Delta=0} \frac{\partial(\phi(|r_0\rangle, t) + \Delta |u\rangle)}{\partial |r_0\rangle} \\ &= \frac{d}{d\Delta} |_{\Delta=0} \left(\frac{\partial \phi(|r_0\rangle, t)}{\partial |r_0\rangle} + \Delta \frac{\partial |u\rangle}{\partial |r_0\rangle} \right) = \frac{\partial |u\rangle}{\partial |r_0\rangle} = \frac{\partial |u\rangle}{\partial |r\rangle} F = (\nabla |u\rangle) F. \end{aligned} \quad (9)$$

Vektor pomikov $|u\rangle$ v enačbi (9) mora biti določen v skladu z definicijo 0.6, sicer količine v enačbi (9) ne bodo dobro definirane. Izraz $\nabla |u\rangle$ označuje prostorski gradient pomikov.

Določimo še smerni odvod Green Lagrangevega tenzorja velikih deformacij E [1, str. 120]

$$\begin{aligned} DE[[u]] &= \frac{1}{2} (F^T DF[[u]] + DF^T[[u]]F) = \frac{1}{2} (F^T \nabla |u\rangle F + F^T (\nabla |u\rangle)^T F) \\ &= \frac{1}{2} F^T (\nabla |u\rangle + (\nabla |u\rangle)^T) F = F^T \varepsilon F. \end{aligned}$$

Iz gornje enačbe izluščimo prostorski tenzor majhnih deformacij ε , izražen s komponentami pomikov

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla |u\rangle + (\nabla |u\rangle)^T) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) |i\rangle \langle j|.$$

4.6.2 Green Cauchyjeva tenzorja $B = FF^T$ in $C = F^T F$

Tenzorja igrata pomembno vlogo pri določitvi posplošenega inverza deformacijskega gradienta F . Po definiciji 0.4 dobimo

Definicija 0.7 Če ima $F \in R^{m \times n}$, $m \geq n$ poln rang, definiramo $F^+ = C^{-1} F^T$, sicer ($m < n$) je $F^+ = F^T B^{-1}$.

5 Zaključek

- V prispevku je predstavljen nov način opisa deformiranja telesa, ki temelji na pojmu vložitve. Podane so korekcije nekaterih kinematičnih količin, kot posledica omenjene posplošitve. Opisani pristop odpira nove možnosti pri opisu deformiranja telesa.
- Iz računskih primerov in teoretičnega dela je razviden vpliv Moore–Penrosejevega posplošenega inverza na deformacijske količine.
- Podan je predlog korektne definicije pomikov.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je finančno podprla delo preko temeljnega raziskovalnega projekta št. P2-0260.

Viri

- [1] J. Bonet and R. D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [2] M. P. D. Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [3] W. J. Demmel. *Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.
- [4] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, Mineola, 1994.



Sklopljen model prenosa toplote in snovi med delcem in tokom tekočine pri sušenju poroznih delcev na osnovi metode robnih elementov.

Timi Gomboc¹, Jurij Iljaž¹, Jure Ravnik¹, Matej Zadravec¹, Matjaž Hriberšek¹

The model of conjugate heat and mass transfer between a particle and a fluid flow in porous particles drying based on the Boundary Element Method.

Povzetek. Sušenje vlažne snovi je ena izmed najstarejših procesnih tehnik, ki se uporablja na številnih industrijskih področjih. Sušenje je zapleten fizikalni proces, ki obsega vezan večfazni prenos toplote, snovi in gibalne količine. Pri sušenju delcev, kot je na primer razpršilno sušenje, je čas sušenja odvisen od lokalnih pogojev v sušilnem plinu, in sicer na poti vsakega posameznega delca skozi sušilnik. Iz tega razloga je zelo pomembno poznavanje temperaturnega polja kot tudi polja vlažnosti v sušilniku, ki se zaradi toplotne in masne izmenjave med delci in sušilnim plinom nenehno spreminja. V prispevku je obravnavan numerični model za izračun sušenja poroznih delcev v toku sušilnega plina, pri čemer je reševanje problema izvedeno v sklopu Euler-Lagrange modela računske dinamike tekočin, in sicer z metodo robnih elementov. Povezava med delci in tokom tekočine je izvedena z nadgradnjo modela točkovnega izvora, ki upošteva konvektivni prenos toplote in snovi v sušilnem plinu. Testni izračuni potrjujejo primernost in pomembnost razvitega numeričnega modela za prostorski in časovni izračun sušenja delcev v toku sušilnega plina.

Abstract. Drying is one of the oldest process technologies, which is used in different industrial applications. Drying process is complex physical process that involves coupled multiphase heat, mass and momentum transfer. As for example by spray drying process, local drying conditions inside the dryer affect to total drying time of porous particles. For this reason, the influence between particle and drying gas is very important. Through the drying process heat and mass exchange between particles and drying gas occurs, which results in local change of drying conditions. Two-way interaction (drying air to particle and particle to drying air) need to be considered to obtain accurate results. Fully coupled model for heat and mass transfer between particles and drying gas on the base of the Boundary Elements Method was developed in the present work, were particles were modelled as points. The results presented in this work show that two-way coupling between particles and drying gas is important in order to provide accurate results.

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

1 Uvod

Kadar govorimo o sušenju poroznih kapljic (delcev), govorimo o ločevanju trdne faze iz kapljevito-trdne zmesi (suspenzije) s tem, da kapljevito fazo odparimo. Suspenzije se kot takšne pojavljajo pri številnih procesih kot glavni ali pa stranski produkt. Pri ločevanju trdne faze se najpogosteje odločimo za proces razpršilnega sušenja, kjer pride do intenzivnega stika med razpršeno fazo in sušilnim plinom, katerega glavni nalogi sta dovod toplote in odvod vlage.

Pri razprševanju suspenzije v sušilno komoro, ki je lahko posebej prirejena ali pa je to zgolj cev, skozi katero poteka tok sušilnega plina, ki je največkrat kar zrak, se tvorijo majhni delci (kapljice), ki po razpršitvi pridejo v stik s sušilnim plinom. Njihova velikost je določena z izbiro razpršilne šobe ali s procesnimi pogoji na rotacijskem atomizerju. Po stiku s sušilnim plinom se začnejo delci zaradi toka sušilnega plina in sil, ki delujejo nanje, gibati skozi sušilno komoro. Ker ima sušilni plin višjo temperaturo kot suspenzija, pride med nastalimi delci in plinom do prenosa toplote, ki delce segreva in povzroči uparjanje kapljevine, torej sušenje delcev. Pri tem delci porabljajo toploto, ki jo v proces prinaša sušilni plin, ta pa nase prevzema vlago, ki se uparja pri sušenju. Ker pri razpršilnem sušenju obravnavamo veliko delcev, se v sušilni komori vzpostavijo lokalni procesni pogoji, kot sta lokalna vlažnost zraka in lokalna temperatura sušilnega plina; ti določata kinetiko sušenja delca, ki se v nekem trenutku znajde na dotičnem mestu. Drugi del procesa se dogaja v sušečem se delcu. V primeru da obravnavamo sušenje poroznih delcev moramo to obravnavati v več stopnjah [1].

Poleg razvoja numeričnih modelov za izračun sušenja delca v njegovi notranjosti je uspešnost sklopljenega numeričnega modela delci – tekočina odvisna tudi od natančnosti numeričnega modela za izračun vpliva delca na razmere v tekočini. Najsplošnejši model za izračun stanja v tekočini je računalniška dinamika tekočin, ki predstavlja numerično reševanje Navier-Stokesovih enačb, ki so parcialne diferencialne enačbe, kjer poznamo le malo analitičnih rešitev. Reševanje Navier-Stokesovih enačb je omogočeno z različnimi numeričnimi metodami, kot so metoda končnih elementov, metoda končnih volumnov in metoda končnih razlik. Pri reševanju problema sušenja poroznih delcev avtorji v veliki meri uporabljajo metodo končnih razlik. Podane metode v primerjavi z metodo robnih elementov (boundary element method; BEM) diskretizirajo računsko območje po celotnem volumnu in tvorijo deloma prazne systemske matrike, medtem ko metoda robnih elementov diskretizira računsko območje po robu in uporablja polne matrike [7]. Prednost metode robnih elementov je, da moramo razdeliti le rob računskega območja, zato ji rečemo tudi delno brez mrežna metoda. Uporabljamo jo lahko za reševanje homogenih enačb, za katere poznamo osnovno oz. fundamentalno rešitev, kot je reševanje Laplaceove enačbe. Reševanja nehomogenih parcialnih diferencialnih enačb pa se lotimo na osnovi robno-območne integralske metode. Pri tem moramo poleg roba diskretizirati še območje, kar je z vidika računske zahtevnosti dodatna obremenitev. Večfazne tokove (tekočina in delci) lahko simuliramo na dva načina, in sicer po pristopu Euler-Euler ali Euler-Lagrange. Pri pristopu

Euler-Lagrange velja, da je tekoča faza zvezna, delci pa razpršeni v njej. Pri zadnjem načinu modeliranja se pojavijo težave, kadar imamo opravka z velikim številom delcev, saj je postopek računsko zelo potraten. Kadar imamo opravka z majhnimi delci, lahko delce modeliramo tako, da jih nadomestimo s točkovnimi izvori. Osnovna značilnost takšnega pristopa je, da prenos gibalne količine, snovi in energije med zvezno fazo in delci modeliramo z uporabo lokalno definiranih izvorov, katerih vrednost je izračunana na ravni modela posameznega delca [3, 2]. Kljub dokazani uporabnosti modela točkovnih izvorov je eden izmed numeričnih problemov, ki so rešeni zgolj delno, aproksimacija Diracove funkcije, ki opisuje točkovno naravo izvora in je po svojih lastnostih singularna v točki izvora, s funkcijami, ki vpliv delca na tekočine ne opišejo popolnoma natančno. Njeno implementacijo v metodo robnih elementov v svojem delu obravnavajo Verhnjak in sod. [6].

V danem prispevku je obravnavan dvosmerni sklopljen model prenosa toplote in snovi med sušečim se delcem in tokom tekočine na osnovi metode robnih elementov. Rezultati in primerjava časov sušenja med enosmernim sklopljenim sistemom in dvosmernim sklopljenim sistemom kažeta na pomembnost uporabe dvosmerne sklopljenih sistemov pri doseganju natančnosti rezultatov.

2 Vodilne enačbe

2.1 Sile na delec v toku tekočine

Delce v tekočini lahko obravnavamo na dva načina, in sicer po pristopu Euler-Euler ali Euler-Lagrange. Kadar imamo opravka z zelo majhnimi delci (nanodelci), ki so razporejeni po tekočini, obravnavamo sistem po pristopu Euler-Euler, kadar pa imamo opravka z večjimi delci, ki v tekočini niso razporejeni enakomerno, je takšen sistem bolje obravnavati po pristopu Euler-Lagrange. Če pogledamo z vidika tekočine, lahko na delec delujejo naslednje sile: sila upora, gravitacijska sila, Brownova sila, sila termoforeze, Saffmanova sila vzgona, sila rotacije, Bassetova sila, sila virtualne mase in Magnusova sila.

Enačbo ohranitve gibalne količine majhnih delcev lahko zapišemo kot:

$$m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \sum \vec{F}. \quad (1)$$

Desna stran enačbe predstavlja vsoto vseh sil, ki delujejo na delec, in je sestavljena iz sile upora \vec{F}_D , gravitacije \vec{F}_G , Brownove sile \vec{F}_B , termoforeze \vec{F}_T , Saffmanove sile vzgona \vec{F}_L , sile rotacije \vec{F}_R , Bassetove sile \vec{F}_{BA} , sile virtualne mase \vec{F}_V in Magnusovega učinka \vec{F}_M . V razširjeni obliki jo lahko zapišemo kot:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_G + \vec{F}_B + \vec{F}_T + \vec{F}_L + \vec{F}_M + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_V. \quad (2)$$

2.2 Modeliranje prenosa toplote in snovi med delcem in tekočino

Pri obravnavi sušenja delcev s tokom vročega zraka pride do izmenjave toplote med sušilnim plinom in delcem, ki se zaradi segrevanja začne sušiti. V sušilnem plinu to povzroča ponor toplote, kar pomeni, da se temperatura sušilnega plina lokalno zniža. Obratno stanje dobimo, če se osredotočimo na vlažnost sušilnega plina, saj se vlažnost delca skozi sušenje znižuje

in prehaja v sušilni plin, ki se mu vlažnost zviša. Prenosne pojave na strani prenosa toplote opišemo z enačbo:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \lambda \vec{\nabla}^2 T + I_T, \quad (3)$$

kjer I_T predstavlja izvor ali ponor toplote v tekočini. Na strani prenosa snovi nam to opisuje enačba:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) C = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} C) + I_C, \quad (4)$$

kjer I_C predstavlja izvor oz. ponor snovi.

2.2.1 Prenos toplote

Prenos toplote podamo z zgoraj zapisano konvektivno-difuzijsko enačbo (3), ki smo jo pretvorili v brezdimenzijsko obliko. Delci, ki potujejo v toku tekočine in med katerimi bo potekala toplotna izmenjava s sušilnim plinom, so obravnavani kot točkovni delci; tako lahko zapišemo:

$$I_T = \dot{Q}_T \delta(\vec{r}^* - \vec{p}^*), \quad (5)$$

kjer \dot{Q}_T predstavlja velikost toplotnega izvora, $\delta(\vec{r}^* - \vec{p}^*)$ Diracovo delta funkcijo, vektor \vec{r}^* je vektor lokacije in vektor \vec{p}^* položaj delca. Delta funkcija predstavlja točno vrednost za točkovni delec. Tako lahko enačbo (3) preuredimo, preoblikujemo in jo v brezdimenzijski obliki zapišemo kot:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{1}{RePr} \nabla^2 T + \vartheta_T \delta(\vec{r} - \vec{p}), \quad (6)$$

upoštevajoč, da je $\vartheta_T = I_0 L / (\Delta T v_0 \rho_0 c_0)$, Re Reynoldsovo število in Pr Prandtlovo število.

2.2.2 Prenos snovi

Podobno kot smo naredili pri prenosu toplote, moramo narediti tudi pri prenosu snovi, kjer obravnavamo enačbo (4), ki smo jo prav tako brezdimenzionirali. Tudi tukaj so delci, ki potujejo v toku tekočine in med katerimi bo potekala snovna izmenjava s sušilnim plinom, obravnavani kot točkovni delci; tako lahko zapišemo:

$$I_C = \dot{Q}_C \delta(\vec{r}^* - \vec{p}^*), \quad (7)$$

kjer \dot{Q}_C predstavlja velikost snovnega izvora. Podobno kot smo naredili z enačbo (3), moramo tudi enačbo (4) preurediti in preoblikovati in jo lahko zapišemo kot:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) C = \frac{1}{ScRe} \nabla^2 C + \vartheta_C \delta(\vec{r} - \vec{p}), \quad (8)$$

kjer posamezne spremenljivke predstavljajo brezdimenzijsko vrednost in so zapisane brez *, upoštevajoč, da je $\vartheta_C = I_{C0} L / (C_0 v_0)$ in Sc Schmidtovo število.

3 Metoda robnih elementov za izračun vpliva točkovnih delcev

V tem poglavju je predstavljen numerični model na osnovi metode robnih elementov, ki ga je prvi predstavil avtor Verhnjak in sod. [6] ter pomeni novost na področju modeliranja dvostranskega vpliva med delci in tekočino, saj omogoča izredno natančno izvedenost vpliva delcev na toplotno in snovno stanje v tokovnem polju. V danem primeru poleg difuzijskega člana [6] dodajemo še konvektivni člen. Ker energijska in snovska enačba vsebujeta enake člene, kot so konvekcija, difuzija in izvor, bo izpeljava metode robnih elementov predstavljena za splošno transportno enačbo

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}^2 u(\vec{r}, t) + I(\vec{r}), \quad (9)$$

pri čemer je u splošna funkcija polja, ki je v našem primeru lahko temperatura ali koncentracija, \vec{r} poljubni krajevni vektor, \vec{v} hitrost, ∇^2 Laplaceov operator, t čas in I izvor.

Rešitev transportne enačbe temelji na eliptični osnovni rešitvi, zaradi česar se ta obravnava v obliki Poissonove enačbe

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = b(\vec{r}), \quad (10)$$

pri čemer je b nehomogeni člen, ki se v primeru enačbe (3) zapiše kot

$$b(\vec{r}) = \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u(\vec{r}) - I(\vec{r}). \quad (11)$$

Robno-območno integralsko obliko zapisane enačbe so prvič predstavili avtor Ravnik in sod. [5]. Z uporabo integralske oblike druge Greenove identitete se Poissonova enačba (10) zapiše v integralski obliki kot:

$$c(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} u(\vec{R})q^*(\vec{\xi}, \vec{R})d\Gamma + \int_{\Omega} b(\vec{r})u^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\Omega = \int_{\Gamma} q(\vec{R})u^*(\vec{\xi}, \vec{R})d\Gamma, \quad (12)$$

pri čemer je Ω računsko območje, Γ rob območja, $\vec{\xi}$ položaj izvorne točke, \vec{R} poljubni vektor na površini, $\vec{q} = \vec{\nabla}u \cdot \vec{n}$ normalni odvod funkcije polja, c prosti koeficient, ki je odvisen od položaja izvorne točke, u^* in q^* pa predstavljata osnovno rešitev in njen normalni odvod.

S postavitvijo izvorne točke $\vec{\xi}$ v vsako vozlišče računске mreže pridemo do nelinearnega sistema enačb, ki se lahko zapiše v sledeči matrični obliki:

$$[H] \{u^t\} = [G] \{q^t\} + \alpha_1 [S] \{u^t\} + \alpha_2 [S] \{u^{t-1}\} + \alpha_3 [S] \{u^{t-2}\} + [\vec{A}] \{\vec{v}u^t\} - [\vec{D}] \{\vec{v}u^t\} - [S] \{I\}, \quad (13)$$

pri čemer je $\alpha_1 = 3/2\Delta t$, $\alpha_2 = -2/\Delta t$, $\alpha_3 = 1/2\Delta t$ in predstavlja diskreten zapis splošne transportne enačbe, ki ga je mogoče rešiti ob poznavanju robnih pogojev oz. po preureditvi v obliko $[A] \{u^t\} = \{b\}$, pri čemer $\{b\}$ predstavlja znani vektor na desni strani. Pri obravnavi izvorov, ki jih povzročajo delci, z metodo robnih elementov območni integral, ki vsebuje izvor iz enačbe

preuredimo, tako da se integralna enačba v končni obliki zapiše kot

$$\begin{aligned}
 & c(\vec{\xi})u^t(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} u^t(\vec{R})q^*(\vec{\xi}, \vec{R})d\Gamma + \\
 & \int_{\Omega} \frac{3u^t(\vec{r}) - 4u^{t-1}(\vec{r}) + u^{t-2}(\vec{r})}{2\Delta t} u^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\Omega + \\
 & \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot (u^*(\vec{\xi}, \vec{R})\vec{v}u(\vec{R}))d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{v}u(\vec{R})) \cdot \vec{\nabla}u^*(\vec{\xi}, \vec{R})d\Omega - \\
 & = \int_{\Gamma} q(\vec{R})u^*(\vec{\xi}, \vec{R})d\Gamma + \dot{Q}u^*(\vec{\xi}, \vec{p}). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Zaporedje in način izračuna vpliva gibajočih se točkovnih izvorov toplote in snovi na tok zvezne faze nam podaja spodnji algoritem:

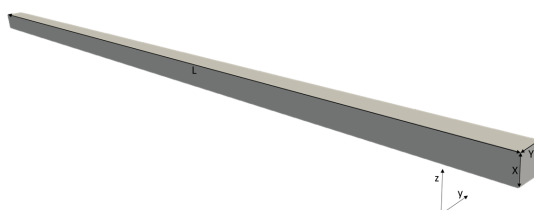
ALGORITEM

1. Izračun novega položaja delca na osnovi enostranskega algoritma, ki upošteva vpliv sušilnega plina (zvezne faze) na delec, kjer je bila upoštevana samo sila upora [4].
2. Izračun prenosa toplote in snovi na ravni posameznega delca [1], kjer so upoštewane vrednosti temperatur in koncentracij v sušilnem plinu na mestu položaja delca:
 - določitev snovnega toka uparjene vlage I_C , ki predstavlja izvor v sušilnem plinu,
 - določitev toplotnega toka, ki se prenese iz zvezne faze na delec I_T , in v sušilnem plinu predstavlja ponor toplote.
3. Izračun novega temperaturnega polja v sušilnem plinu z robno območno integralsko metodo, pri čemer so kot točkovni ponori toplote upoštewane vrednosti, izračunane na ravni delca.
4. Izračun novega polja koncentracije vodne pare v sušilnem plinu z robno-območno integralsko metodo, pri čemer so kot točkovni izvori snovi upoštewane vrednosti, izračunane na ravni delca.

Zapisani algoritem poteka v zanki, ki teče do števila delcev, ki so v računskem območju tekočine.

4 Računski primeri in rezultati

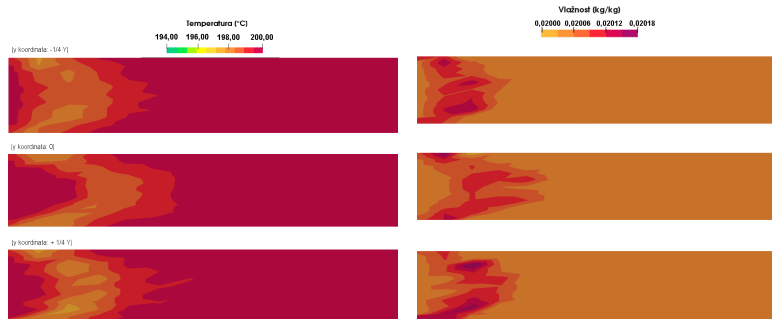
Predstavljeni računski model je bil uporabljen za preračun sušenja delcev aktivnega blata velikosti $100 \mu m$ v toku sušilnega plina. Obravnavana sta bila dva različna primera, in sicer smo v enem primeru obravnavali sušenje 1000 delcev in v drugem primeru 10000 delcev. Sušilni prostor predstavlja cev kvadratnega prereza dolžine $L = 2000 \text{ mm}$, širine $X = 15 \text{ mm}$ in višine $Y = 15 \text{ mm}$ ($X = Y$), kot je prikazano na Sliki 1. Cev je bila diskretizirana s 7000 kvadratnimi heksaedrskimi elementi, kar predstavlja 62.181 računskih vozlišč. Sušenje delcev poteka z vročim zrakom, ki vstopa v cev s povprečno hitrostjo $v_g = 0,15 \text{ m/s}$, kar pomeni, da je Reynoldsovo število za ta primer enako $Re = 76,0$, tako da je profil hitrosti na vstopu v sušilnik



Slika 1: Geometrija sušilnega prostora.

laminarni. Temperatura delcev na vstopu v sušilni prostor je $T_p = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$. V simulacijah je bil za preračun sledenja delcem in preračun dogajanja v sušilnem plinu uporabljen časovni korak $\Delta t = 0,001\text{ s}$. Temperatura sušilnega plina v sušilniku je $T_g = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$ in je pred vstopom delcev homogena v celotnem sušilniku. Vlažnost sušilnega plina je $X = 0,02\text{ kg/kg}$ in je pred začetkom sušenja prav tako homogena znotraj sušilnega prostora.

Ker je temperatura v sušilniku $200\text{ }^{\circ}\text{C}$, se delci, ki vsebujejo vlago, začnejo sušiti. Pri tem se za uparjanje vlage porablja toplotna energija, ki jo v proces prinaša segreti sušilni plin. V sušilnem plinu se tako na mestih, kjer so delci, pojavijo izvori z negativnim predznakom – ponori, ki povzročijo lokalno znižanje temperature, proporcionalno porabi energije za uparjanje vlage pri sušenju delca. Slika 2 prikazuje temperaturno in vlažnostno polje na treh presečnih ravninah vzdolž sušilnika s 1000 sušečimi se delci.



Slika 2: Temperaturno polje na treh različnih ravninah vzdolž sušilnega prostora levo in vlažnostno polje na treh različnih ravninah vzdolž sušilnega prostora desno.

Slika 3 prikazuje temperaturno in vlažnostno polje na treh presečnih ravninah vzdolž sušilnika s 10000 sušečimi se delci. Vidimo lahko, da je vpliv na temperaturno in vlažnostno polje v primeru sušenja 10000 delcev večji. Eden izmed ključnih parametrov, ki jih opazujemo pri sušenju delcev, je čas sušenja. Če želimo, da so naši delci, ko zapuščajo sušilno komoro, suhi, mora biti njihov čas sušenja krajši od njihovega zadrževalnega časa v sušilniku. V želji po optimizaciji procesov pa si želimo, da sta si ta dva časa čim bližje. Vpliv dvosmernega sklopljenega modela najbolj nazorno predstavimo, če primerjamo povprečni čas sušenja delcev v modelu kjer ne upoštevamo vpliva delcev na tekočino z modelom, ki to upošteva. Povprečni čas sušenja 1000 delcev v dvostranskem sklopljenem modelu tako znaša $0,737\text{ s}$ in je daljši od časa sušenja, ko



Slika 3: Temperaturno polje na treh različnih ravninah vzdolž sušilnega prostora levo in vlažnostno polje na treh različnih ravninah vzdolž sušilnega prostora desno.

povratni vpliv sušenja delcev na sušilni plin ni upoštevan in ki znaša 0,709 s. Povprečni čas sušenja 10000 delcev v dvostranskem sklopljenem modelu znaša 0,836 s. Maksimalni čas, ki ga za sušenje potrebujejo delci, ki potujejo skozi sušilnik po trajektorijah z najmanj ugodnimi razmerami za sušenje znaša 1,075 s.

5 Zaključek

Določanje časa sušenja posameznega materiala ima pomembno vlogo pri snovanju obratovalnih procesnih pogojev. Razvit numerični model na osnovi metode robnih elementov nam omogoča natančno določanje časa sušenja in pri tem upošteva lokalne procesne pogoje znotraj sušilnika.

6 Literatura

- [1] T. Gomboc, J. Iljaž, J. Ravnik, and M. Hriberšek. Spherical porous particle drying using BEM approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 108:158–167, 2019.
- [2] M. R. Maxey and J. J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *The Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [3] A. Prosperetti and G. Tryggvason. *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] J. Ravnik and M. Hriberšek. High gradient magnetic particle separation in viscous flows by 3D BEM. *Computational Mechanics*, 51(4):465–474, 2013.
- [5] J. Ravnik, L. Škerget, and Z. Žunič. Velocity–vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined enclosure by BEM. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(17-18):4517–4527, 2008.
- [6] O. Verhnjak, M. Hriberšek, and J. Ravnik. Derivation of numerical models of point source loads in bem solution of the velocity-vorticity form of Navier-Stokes equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements-submitted*.
- [7] L. C. Wrobel and A. Kassab. Boundary element method, volume 1: Applications in thermo-fluids and acoustics. *Appl. Mech. Rev.*, 56(2):B17–B17, 2003.



Analiza hidrodinamskih lastnosti rotacijskega kavitatorja in učinkovitosti razgradnje KPK

Jurij Gostiša¹, Benjamin Bizjan¹, Brane Širok¹ in Mojca Zupanc¹

Investigation of rotational cavitator hydrodynamic properties and COD removal efficiency

Povzetek. V študiji so obravnavane lastnosti rotacijskega generatorja hidrodinamske kavitacije za čiščenje odpadnih voda. V kavitatorju pride do pojave kavitacije zaradi nenadnega padca tlaka na čepastih kavitacijskih elementih, ki so nameščeni na obodu gonilnika. Na pilotni napravi smo z metodo sočasne meritve tlaka in vizualizacije s hitro kamero ovrednotili hidrodinamske razmere za različne konfiguracije čepastih kavitacijskih elementov in na osnovi rezultatov izbrali tri različice, ki smo jih ovrednotili z vidika učinkovitosti razgradnje KPK na 200-litrskem vzorcu komunalne odpadne vode. Rezultati eksperimenta kažejo na visok vpliv vrtilne frekvence in števila kavitacijskih elementov in manjši vpliv premera in površinske obdelave čepa na agresivnost kavitacije in učinkovitost razgradnje KPK. S konfiguracijo čepov na gonilniku, ki se je izkazala kot najugodnejša smo v 15 prehodih onesnažene vode KPK znižali za 31%, za kar smo porabili 8,2 kWh/kg KPK. Pri tem smo pokazali značilen vpliv števila prehodov na energijsko učinkovitost.

Abstract. The study comprises of hydrodynamic and wastewater treatment performance of the rotational generator of hydrodynamic cavitation. The cavitation occurs due to sudden pressure drop on the pin protrusions arranged on the rotor circumference. Various geometrical configurations of cavitation elements were experimentally evaluated on the pilot measurement rig with simultaneous pressure fluctuation measurement and high-speed flow visualization. Three promising configurations were chosen and furthermore evaluated with respect to COD removal efficiency on the 200-liter communal wastewater sample. The experimental results show that the rotational speed and the spacing of the rotor pins have a significant effect on the cavitation intensity and effectiveness, while the pin diameter and the surface roughness are less significant design parameters. Optimal cavitation element configuration yielded in 31% COD reduction in 15 liquid passes, consuming 8,2 kWh/kg COD, while number of liquid passes was found to be a significant parameter regarding energy efficiency.

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani

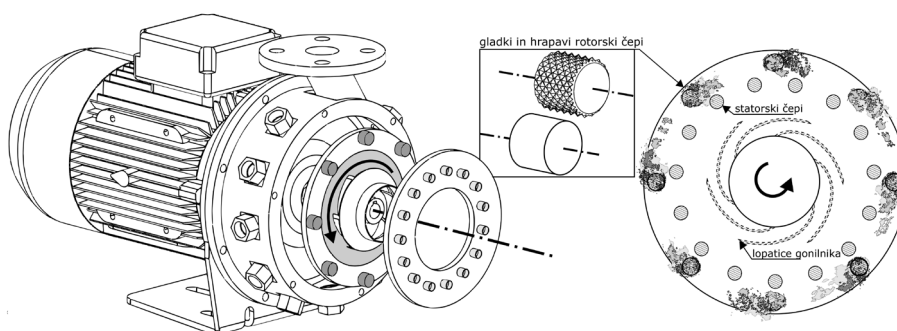
1 Uvod

Vzporedno z rastjo svetovnega prebivalstva in življenjskega standarda narašča tudi onesnaževanje okolja. Vedno večji nabor mikrokontaminantov prisotnih v industrijskih in komunalnih odpadnih vodah predstavlja velik izziv za učinkovito delovanje čistilnih naprav. Vse bolj stroga okoljska zakonodaja v razvitih državah je pripomogla k poglobljenim raziskavam alternativnih tehnologij čiščenja odpadne vode, ki bi lahko v povezavi s konvencionalnih biološkim čiščenjem pripomogle k bolj učinkovitem celokupnem čiščenju odpadnih voda. Ena izmed takšnih perspektivnih tehnologij, je hidrodinamska kavitacija (HK), ki zajema nastanek, rast in kolaps parnih mehurčkov v tekočini zaradi mehansko povzročene lokalnega padca in rekuperacije tlaka. Hitro kolapsiranje parnih mehurčkov je povezano z ekstremnim lokalnim tlakom, hitrostjo in temperaturo [1], kar povzroči mehansko dezintegracijo in kemično razgradnjo onesnaževal. Medtem ko mehanski učinki, kot so udarni valovi in strižne sile, običajno vodijo do razpada delcev [2], se kemični učinki kažejo kot tvorba hidroksilnih radikalov (\bullet OH) in drugih reaktivnih vrst, ki spodbujajo oksidativno uničenje organskih onesnažil [3].

Učinkovitost hidrodinamske kavitacije kot postopka čiščenja (odpadne vode) je bila v zadnjih letih kritično ocenjena v številnih preglednih člankih [1], [3]. Med bolj pogoste preučevane mehanizme za nastajanje hidrodinamske kavitacije sodijo rotacijski generatorji hidrodinamske kavitacije (RGHK) [2], [4]. Le-ti se vse bolj uveljavljajo, predvsem kot učinkovita tehnologija za uničevanje različnih onesnaževal v odpadnih vodah in dezintegracijo odpadnega blata. Intenzivnost kavitacije, ki se razvije v rotirajočih napravah, je enakovredna intenzivnosti v ostalih kavitacijskih napravah, vendar z veliko manjšo porabo energije in lažjim prenosom na pilotni in industrijski nivo [1]. Glavna cilja predstavljene študije sta: i) integralna in lokalna hidrodinamska analiza različic geometrije rotorja in statorja ter ii) ovrednotenje izbranih različic RGHK in delovnih pogojev z vidika razgradnje KPK v vzorcih odpadne vode.

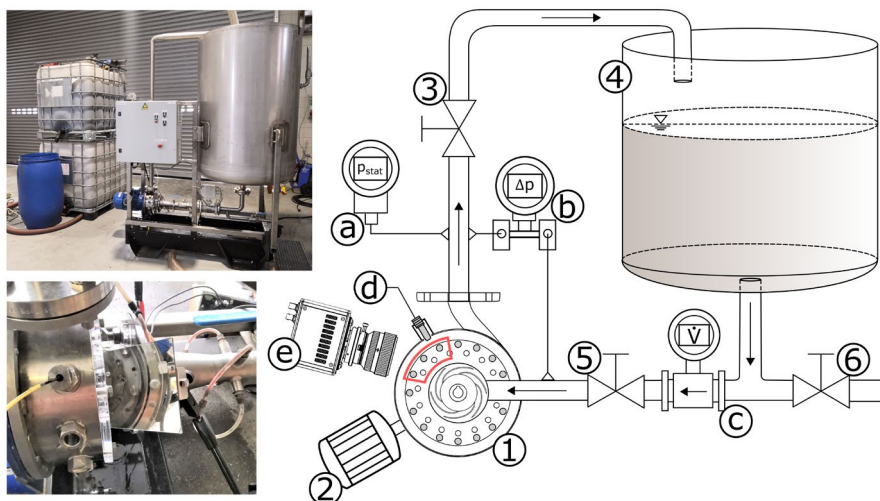
2 Metodologija dela

Za potrebe eksperimentalne evalvacije je bila zasnovana nova, robustnejša različica pilotnega rotacijskega generatorja hidrodinamske kavitacije s čepastimi kavitacijskimi elementi nameščenimi na rotorju in statorju. Naprava je zasnovana tako, da omogoča preprosto menjavo kavitacijskih elementov, pri čemer lahko na delilni krog premera 174 mm na rotorju in 145 mm na statorju namestimo 16 oz. 15 elementov. Sodo število rotorskih in liho število statorskih elementov je bilo izbrano v izogib harmoničnemu pulziranju. V okviru študije smo uporabili statorske elemente premera 12 mm, medtem ko smo na rotorju obravnavali vpliv premera, števila in površinske obdelave valjastih elementov. Površina hrapavega valja je bila obdelana s postopkom rebričenja (ang. knurling), pri katerem je v površino pod kotom 30° zavaljan vzorec piramidaste oblike s korakom 1 mm in profilnim kotom 90° . Način vgradnje RGHK v ohišje in koncept delovanja sta prikazana na spodnji sliki.



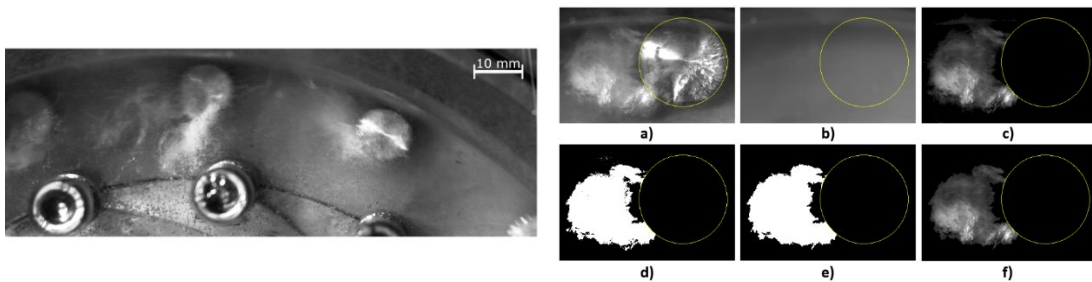
Slika 1: Način vgradnje rotacijskega generatorja hidrodinamske kavitacije (levo) in koncept delovanja (desno).

Eksperiment smo izvedli na merilni progi v prostorih Centralne čistilne naprave Domžale-Kamnik. Kavitator, ki je hkrati v funkciji črpalke (slika 2 - 1), je gnan s 5.5 kW frekvenčno krmiljenim asinhronskim elektromotorjem (slika 2 - 2). Kavitator je vgrajen v zaprt pretočni sistem z dušilnim ventilom na tlačni in sesalni strani (slika 2 - 3, 5), 1000-litrskim rezervoarjem (slika 2 - 4) in ventilom za izpust (slika 2 - 6). Tlačna razlika je bila izmerjena z diferencialnim tlačnim pretvornikom ABB 2600T (slika 2 - b), statični tlak na tlačni strani pa z absolutnim tlačnim pretvornikom enake serije (slika 2 - a). Pretok je bil izmerjen z elektromagnetnim merilnikom pretoka ABB WaterMaster DN40 (slika 2 - c). Za potrebe vizualizacije smo izdelali transparenten pokrov črpalke in si pomagali z zrcalom nameščenim pod kotom 45° (slika 2 - levo). S hitro kamero Photron Mini UX100 smo s frekvenco 10kHz zajeli sekvenco slik ločljivosti 1280x480px in sočasno s hidrofonom Reson TC4013 s frekvenco vzorčenja 100kHz posneli časovno vrsto tlaka.



Slika 2: Ključni elementi merilne proge: 1 – RGHC, 2 – 3-fazni asinhronski motor, gnan s frekvenčnim pretvornikom, 3 – dušilni ventil na tlačni strani, 4 – 1000 L rezervoar, 5 – dušilni ventil na sesalni strani, 6 – ventil za izpust. Merilna oprema: a – absolutni tlačni pretvornik, b – diferencialni tlačni pretvornik, c – elektromagnetni merilnik pretoka, d – hidrofon, e – hitra kamera.

Visoka učinkovitost RGHK za razgradnjo KPK je vezana na visoko intenzivnost kolapsa kavitacijskega oblaka, kar popišemo z metodo vizualizacije s hitro kamero. Za potrebe popisa dinamike kavitacijskega oblaka smo surove slike (slika 3 - desno) najprej transformirali v rotirajoč koordinatni sistem (slika 3 - a) in jih nato obdelali na način, da izoliramo kavitacijski oblak. Od surove slike smo najprej odšteli srednjo vrednost ozadja (slika 3 - a) in s tem značilno povečali kontrast. Odločili smo se, da kavitacijskega oblaka na vrhu elementa ne bomo upoštevali, zaradi česar smo na mestu uvedli masko. Tako dobljeno sliko smo binarno segmentirali z mejno vrednostjo svetlega dela 0,7 (slika 3 - d) in s pomočjo filtriranja zaprte konture odstranili majhne delce (slika 3 - e). Tako dobljeno sliko smo uporabili kot masko za izvorno sliko in na osnovi dobljene slike določili časovno vrsto velikosti kavitacijskega oblaka $A(t)$.



Slika 3: Surova slika (levo) in postopek obdelave v stacionarnem koordinatnem sistemu (desno): a) surova slika, b) srednja vrednost ozadja, c) razlika slik (a) in (b), d) binarna segmentacija, e) morfološka segmentacija zaprte konture, f) implementacija maske-slike (e).

Integralno dinamiko kavitacijskega oblaka smo ovrednotili s faznim povprečenjem časovne vrste tlaka $p(t)$ in velikosti kavitacijskega oblaka $A(t)$ v faznem prostoru ψ . Ta popisuje položaj rotorja glede na lokacijo hidroфона tako, da sta se kavitacijski element hidrofonu najbolj približa v vrednosti $\psi = 1 \text{ ms}$. V vsaki obratovalni točki smo s hitro kamero in hidrofonom posneli $M = 80$ prehodov in dinamiko popisali s povprečno površino kavitacijskega oblaka

$$\bar{A}(\psi) = \frac{1}{n} \sum_0^{2,5} A(t) \text{ in standardno deviacijo } \sigma_A(\psi) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_0^{2,5} (A(\psi) - \bar{A}(\psi))^2}.$$

Na enak način smo fazno povprečili tudi časovno vrsto tlačnega signala. Sočasnost vizualizacije in zajema tlaka smo zagotovili s posnetkom impulznega signala, ki ga generira kamera ob pričetku zajema slike, čas prehoda $\psi = 1 \text{ ms}$ pa na osnovi poznanege mesta hidroфона na sliki.

Za ovrednotenje učinkovitosti razgradnje KPK smo vzeli vzorec 1000 L komunalne odpadne vode na mestu za primarnim usedalnikom in ga tekom izvajanja shranili v zaprti posodi z mešalom. Za vsak eksperiment smo v rezervoar merilne proge prečrpali 200 L vzorca in ga pri dani konfiguraciji procesirali do enakega števila ciklov $N_p = \frac{Q \cdot t}{V}$, pri čemer predstavlja Q volumski pretok, t čas procesiranja in V volumen vzorca. Analize skupnega KPK (kemijska potreba po kisiku), s katerimi smo ovrednotili učinkovitost RGHK, so bile opravljene z LCK 514 kivetnimi testi Hach-Lange ter izmerjene na DR/3900 spektrofotometru (Hach-Lange, Nemčija).

Tabela 1: Eksperimentalni pogoji za tri izbrane režime obratovanja

Oznaka	Konfiguracija statorja	Konfiguracija rotorja	n (RPM)	V, N_p	Δp (kPa)	Q (L/s)	P (kW)
E1	$\Phi 12$ mm x 15, gladki	$\Phi 16$ mm x 8, hrapavi	2700	200 L, vzorčen po 15 ciklih	65	8.5	5.3
E2		$\Phi 10$ mm x 8, gladki	3000		65	7.7	5.2
E3		$\Phi 10$ mm x 16, gladki	3000		93	8.5	6.5

Na osnovi vrednosti KPK izmerjene pred (indeks i) in po (indeks $i+t$) zaključku procesiranja lahko ocenimo energijsko učinkovitost naprave na osnovi značilk:

- Učinkovitost razgradnje KPK:
$$CR = \frac{(KPK_i - KPK_{i+t})}{(KPK_i)} [\%] \quad (1),$$

- Hitrost razgradnje KPK:
$$CM = \frac{(CR - KPK_i) \cdot V}{t} \left[\frac{gKPK}{h} \right] \quad (2),$$

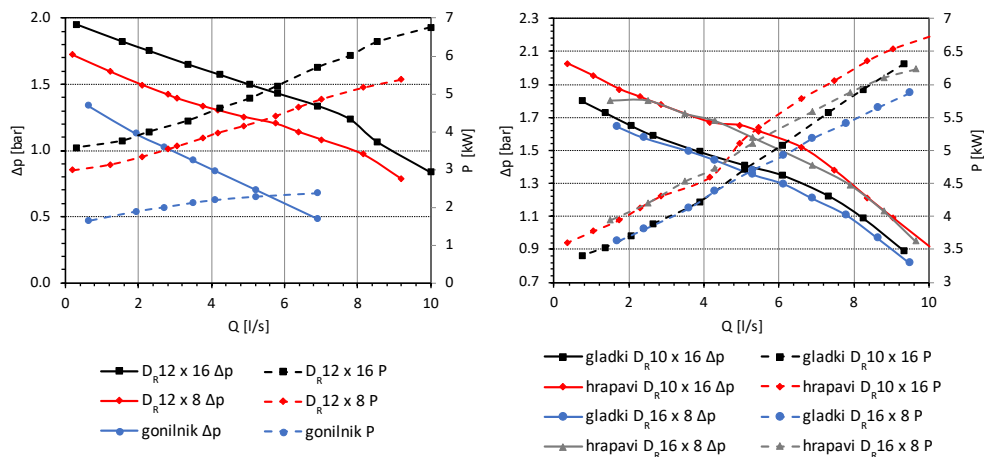
- Normirana raba el. energije:
$$ECV = \frac{P \cdot t}{V} \left[\frac{kWh}{m^3} \right] \quad (3),$$

- Specifična raba el. energije:
$$EEM = \frac{P \cdot t}{CR \cdot KPK_i \cdot V} \left[\frac{kWh}{kgKPK} \right] \quad (4).$$

3 Rezultati in diskusija

Rezultati so razdeljeni na integralne hidrodinamske lastnosti RGHK, dinamiko kavitacijskega oblaka in funkcionalne lastnosti naprave. Na ta način poskušamo povezati funkcionalnost s hidrodinamiko in ovrednotiti rabo el. energije z vidika razgradnje KPK.

3.1 Integralne hidrodinamske karakteristike



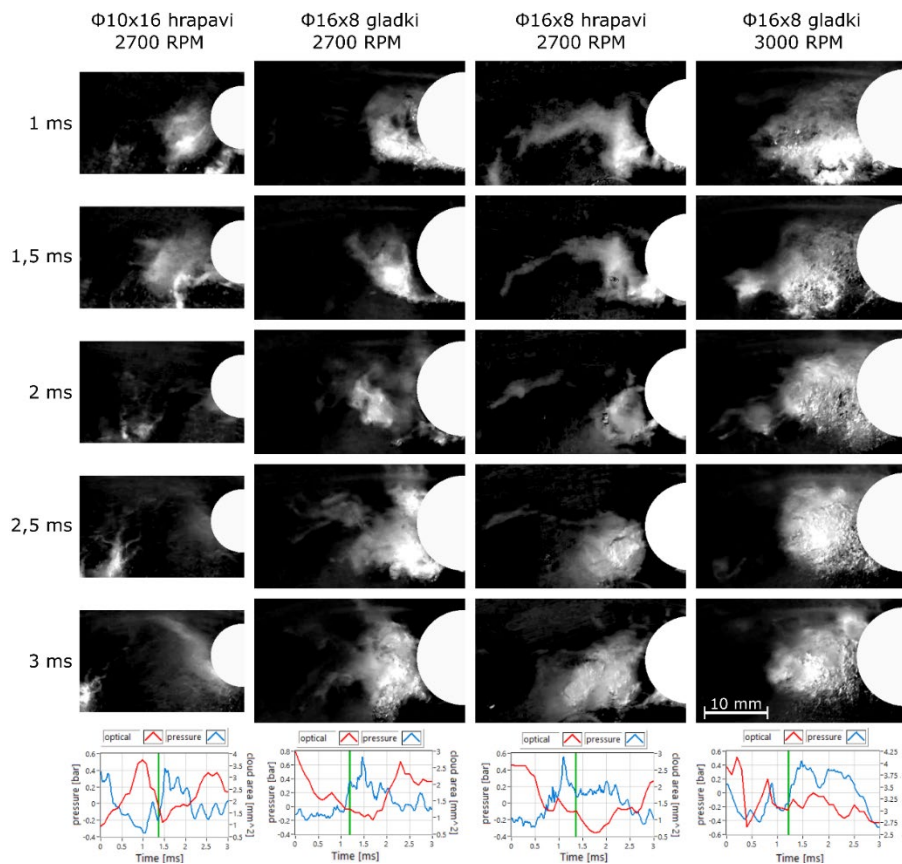
Slika 4: Hidrodinamska karakteristika različic števila in premera kavitacijskih elementov

Višanje rabe el. energije s povečevanjem števila elementov pripisujemo povečanju momenta na gonilnik zaradi povečanja skupne površine in s tem sile upora kavitacijskih elementov. Viša

pa se ne zgolj raba energije, ampak tudi tlačna razlika oz. pretok, ki ga zagotavlja RGHK. Slednje kaže na pozitiven učinek višanja števila kavitacijskih elementov na črpalne lastnosti naprave. V nadaljevanju razvoja naprave bi lahko z namenom povišanja energijske učinkovitosti odstranili gonilnik črpalke in ohranili zgolj kavitacijske elemente. V primeru obravnave površinske obdelave kavitacijskih elementov se izkaže malo višja tlačna razlika oz. pretok in s tem raba el. energije za primer hrapavih elementov. Slednje lahko pripisujemo višjem koeficientu upora hrapavih elementov in s tem večjo črpalno sposobnost.

3.2 Dinamika kavitacijskega oblaka

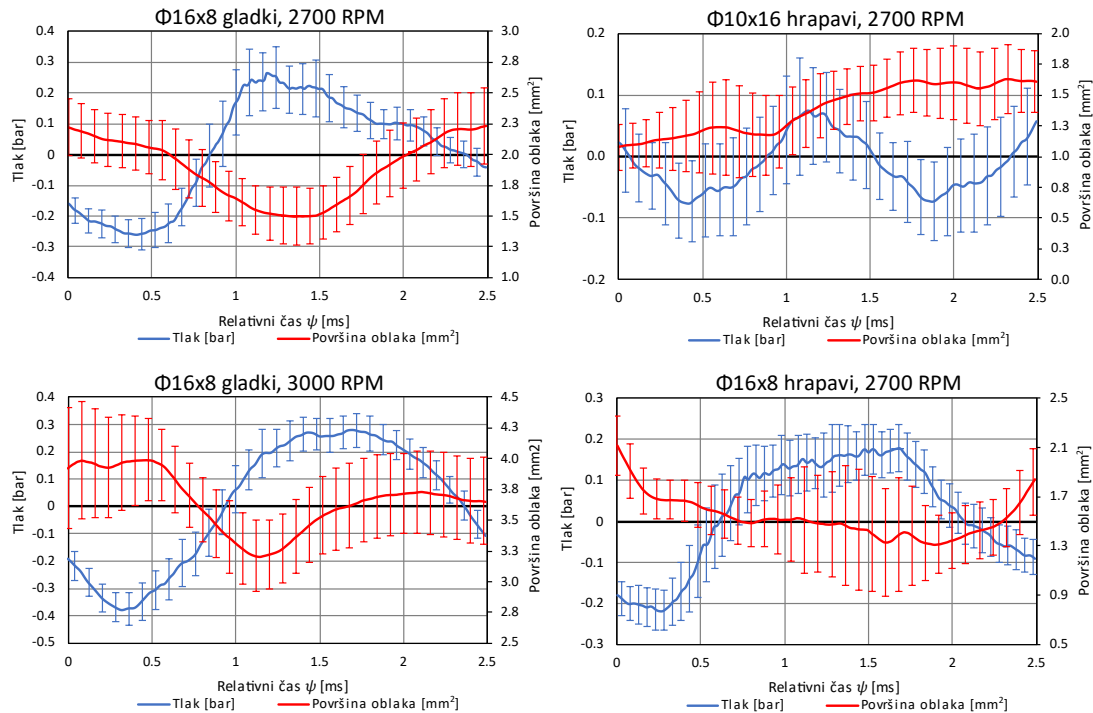
Osnovo za popis dinamike kavitacijskega oblaka predstavljajta sinhronizirana časovna vrsta velikosti kavitacijskega oblaka in tlaka. Slika 5 prikazuje surove vrednosti - slike v rotirajočem koordinatnem sistemu (zgoraj) in časovni potek obeh spremenljivk za periodo enega prehoda n . Na grafu časovnih vrst je z rdečo označena časovna vrsta površine, z modro časovna vrsta tlaka in z zeleno mesto prehoda kavitacijskega elementa.



Slika 5: Dinamika kavitacijskega oblaka – zgoraj slike oblaka in spodaj časovne vrste za en prehod n .

Časovne vrste, fazno povprečene za 80 prehodov kavitacijskega elementa so prikazane na grafih na sliki 6. Rezultati kažejo na visoko fluktuacijo vrednosti s tipičnim potekom, pri katerem se najvišja vrednost tlaka pojavi pri $\psi=1$. Slednje pripisujemo prehodu kavitacijskega elementa preko zaznavala. Z vidika interpretacije dinamike kavitacijskega oblaka je bolj

zanimiv potek časovne vrste tlaka pri $\psi > 1$ ms, ko pride do kolapsa kavitacijskih struktur v brazdi za kavitacijskim elementom. Maksimalne vrednosti tlaka sovpadajo z minimalnimi površinami parnih struktur, kar kaže na to, da so tlačne pulzacije v področju $\psi > 1$ ms pretežno posledica njihovega kolapsa. Iz slike 6 in Tabele 2 je razvidno tudi to, da s hidrofonom izmerjena amplituda tlačnih nihanj narašča z vrtljaji rotorja ter s premerom in razmikom kavitacijskih elementov, pada pa s hrapavostjo kavitacijskih elementov.



Slika 6: Fazno povprečene vrednosti časovne vrste tlaka in površine kavitacijskega oblaka za obravnavane različice rotorja. Kavitacijski element prečka hidrofona pri $\psi = 1$ ms.

Tabela 2: Karakteristični kavitacijski parametri, dobljeni z analizo časovnih vrst

Konfiguracija rotorja	n (RPM)	σ_p (bar)	σ_A (mm ²)	\bar{A} (mm ²)	$p_{max} - p_{min}$ (bar)	$A_{max} - A_{min}$ (mm ²)
Φ10 mm x 16, hrapavi	2700	0.144	0.550	1.388	0.151	0.553
Φ16 mm x 8, gladki	2700	0.130	0.474	1.883	0.525	0.741
Φ16 mm x 8, hrapavi	2700	0.125	0.576	1.528	0.397	0.806
Φ16 mm x 8, gladki	3000	0.128	0.665	3.657	0.663	0.787

Učinkovitost razgradnje KPK je predstavljena v Tabeli 3. Rezultati kažejo, da se je v poskusih E1-E3 stopnja razgradnje KPK gibala med 17% in 31%. Ker KPK predstavlja količino organskih in anorganskih spojin, ki jih je mogoče oksidirati v vzorcu odpadne vode, njegovo zmanjšanje potrjuje kemijske učinke vseh treh izbranih kavitacijskih režimov. Rezultata dobljena za E1 in E2 sta primerljiva, medtem ko smo pri E3 dosegli le 17 % razgradnjo KPK kljub večji pretočnosti tekočine in porabi energije. Ker smo tukaj imeli 16 rotorskih elementov v nasprotju z 8 rotorskimi elementi pri E1 in E2, je edina možna razlaga za nižjo stopnjo razgradnje KPK veliko manj agresivna kavitacija, ko je obodni razmik med elementi zmanjšan.

Vrtinčna sled za cilindričnimi rotorskimi elementi lahko negativno vpliva na tokovne razmere, če so le-ti pregosto razporejeni in s tem zmanjšujejo kavitacijo. Ko se razmik med elementi podvoji, se učinek vrtinčne steze močno zmanjša in postane kavitacija veliko bolj agresivna, kar se odraža v znatno višji stopnji razgradnje KPK kljub 50-odstotnemu zmanjšanju števila rotorskih elementov.

Tabela 3: Primerjava razgradnje KPK in rabe energije pri različnih kavitacijskih režimih

Oznaka	KPK _i (mg/L)	CR	V (L)	t (mm:ss)	N _p	CM (gKPK/h)	ECV (kWh/m ³)	EEM (kWh/kgKPK)
E1	1432	28%	200	05:50	15	813	3.28	8.25
E2	1432	31%	200	06:30	15	815	3.62	8.22
E3	1432	17%	200	05:50	15	493	3.99	13.6

4 Zaključek

V okviru študije je bila izdelana nov pilotni RGHK v kateri pride do pojava kavitacije v nizkotlačni brazdi za kavitacijskim elementom intenziteta kolapsa oblaka pa je dinamsko ojačana ob prehodu statorskimi elementi. Pilotna naprava omogoča obdelavo vzorca volumna 1 m³ in analizo hidrodinamskih lastnosti z metodo vizualizacije s hitro kamero ter sočasnega zajema tlaka s hidrofonom. Rezultat obravnave različnih konfiguracij rotorskih kavitacijskih elementov kaže na trend visokega vpliva števila in nižjega vpliva premera kavitacijskih elementov na rabo el. energije pri čemer ugotavljamo, da imajo kavitacijski elementi visok doprinos k ugodnim črpalnim lastnostim naprave. Analiza dinamike kavitacijskega oblaka kaže na najvišjo amplituda tlaka ob kavitacijskih elementih v področju kolapsa kavitacijskih struktur in narašča z vrtljaji rotorja ter z razmikom kavitacijskih elementov. Kot najugodnejša z vidika učinkovitost razgradnje se izkaže konfiguracija rotorja z 8 gladkimi elementi premera 10 mm s katerimi smo KPK v vzorcu znižali za 31% in pri tem porabili 8,2 kWh/kg KPK električne energije. Novo razvit RGHK se je izkazal kot ugodna alternativa za obdelavo visoko obremenjenih komunalnih voda, pri čemer bomo nadaljnje delo usmerili v optimizacijo oblike kavitacijskih elementov, odstranitev lopatic črpalke in funkcionalno analizo procesiranja različnih tipov onesnaženih voda.

Literatura

- [1] X. Sun, J. Liu, L. Ji, G. Wang, S. Zhao, J.Y. Yoon, S. Chen, *A review on hydrodynamic cavitation disinfection: The current state of knowledge*, Sci. Total Environ. 737 (2020). doi:10.1016/j.scitotenv.2020.139606.
- [2] H. Kim, X. Sun, B. Koo, J.Y. Yoon, *Experimental investigation of sludge treatment using a rotor-stator type hydrodynamic cavitation reactor and an ultrasonic bath*, Processes. 7 (2019). doi:10.3390/pr7110790.
- [3] M. Dular, T. Griessler-Bulc, I. Gutierrez-Aguirre, E. Heath, T. Kosjek, A. Krivograd Klemenčič, M. Oder, M. Petkovšek, N. Rački, M. Ravnikar, A. Šarc, B. Širok, M. Zupanc, M. Žitnik, B. Kompare, *Use of hydrodynamic cavitation in (waste)water treatment*. Ultrason. Sonochem. 29, (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2015.10.010>.
- [4] J. Gostiša, B. Širok, S.K. Repinc, M. Levstek, M. Stražar, B. Bizjan, M. Zupanc, *Performance evaluation of a novel pilot-scale pinned disc rotating generator of hydrodynamic cavitation*, Ultrason. Sonochem. 72 (2021). doi:10.1016/j.ultsonch.2020.105431.



Vpliv lastnosti površine na tok fluida ob steni

Enej Istenič¹, Viktor Šajn¹ in Miha Brojan¹

Influence of surface properties on fluid flow near a wall

Povzetek. Gibanje toka fluida ob steni in povezano dogajanje v mejni plasti je pojav, na katerega vplivajo tudi lastnosti stene na nižjih prostorskih skalah. Te vplive je mogoče razumeti in določiti, če problem obravnavamo prek kinetične teorije. V tem delu bomo predstavili izpeljavo izrazov za relevantne veličine ob steni in komentirali, kako lahko s pristopom prek kinetične teorije pojasnimo nekatera empirična opažanja s področja omejenih tokov.

Abstract. The phenomenon of wall-bounded fluid flow and the associated boundary layer phenomena are influenced by the microscopic-scale properties of the bounding walls. These influences can be understood and quantified using the kinetic theory of fluids. In this paper we will determine expressions for quantities relevant to wall-bounded flows and discuss how the kinetic theory approach might explain certain empirical observations related to bounded flows.

1 Uvod

V velikem številu tehničnih ved se pojavi potreba po razumevanju gibanja toka fluida ob stenah, predvsem zaradi prednosti, ki jih prinaša obvladovanje mejne plasti. Medtem je bil na tem področju že dosežen znaten napredek prek klasičnega pristopa mehanike kontinuuma, ki velja na makroskopski prostorski skali, dosednji pristopi niso zmogli v analizo vključiti geometrijskih karakteristik stene na mikroskopski prostorski skali. Kot rešitev se ponuja formalizem kinetične teorije, prek katerega je mogoče dinamiko plina in interakcije s površino stene na mikroskopski skali upoštevati pri izpeljavi enačb, ki določajo dinamiko na makroskopski prostorski skali.

V tem delu bomo obravnavali problem določitve komponent statističnih povprečij hitrosti in elementov napetostnega tenzorja ob steni, mimo katere teče tok, prek formalizma kinetične teorije. Pri tem predpostavimo, da obravnavamo površino polneskončnega monokristalnega telesa, ki jo opišemo prek trigonometrične funkcije oziroma trigonometrične vrste.

¹ Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani

2 Teoretične osnove

Obsežen pregled dosedanjih dosežkov na tem področju podaja delo Roldughina ter Zhdanova [4]. Nekateri avtorji so v svojih delih analizirali strižne tokove prek kinetične teorije in določili koeficiente zdrsa za različne modele sipanja delcev na površini, kot sta npr. storila Siewert in Garcia [2]. Veliko avtorjev je tudi pokazalo, kako lahko modeli sipanja tvorijo osnovo za določitev robnih pogojev, kot so storili npr. Aoki idr. [1]. Dinamika sipanja delcev na steni je bila analizirana v različnih delih, kakršen je prispevek Goodmana [3].

Makroskopske veličine, kot so gostota, hitrost in napetostni tenzor, lahko določimo kot statistična povprečja primernih mikroskopskih ustreznice. Statistično povprečje neke lastnosti delcev, ki je funkcija položaja r_i ali hitrosti delcev v_i , $i = x, y, z$, predstavlja integral prek možnih hitrosti

$$\Psi(r_i, t) = \langle \psi(r_i, v_i) \rangle = \iiint_{\partial F.P.} \psi(r_i, v_i) f(r_i, v_i, t) dv_i dv_j dv_k. \quad (1)$$

Integriramo prek dela faznega prostora hitrosti označenega s $\partial F.P.$, ki je za dani primer dosegljiv. Funkcijo gostote verjetnosti $f(r_i, v_i, t)$, ki ustreza določenemu sistemu, v kinetični teoriji določa Boltzmannova enačba

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \frac{F_i}{m_d} \frac{\partial f}{\partial v_i} = Q(f, f), \quad (2)$$

kjer je F_i komponenta zunanje sile, $Q(f, f)$ pa je kolizijski operator, ki določa vpliv trkov oz. interakcij med delci na spreminjanje funkcije gostote verjetnosti. Kolizijski operator je odvisen od značilnosti interakcij in lahko v primerih različnih modelov interakcij zavzame različne funkcijske oblike. Rešitve Boltzmannove enačbe so v splošnem kombinacije lastnih funkcij celotnega diferencialno-integralskega operatorja, ki ga predstavlja enačba (2). Najpreprostejša rešitev, ki velja, ko je sistem v termodinamskem ravnovesju, je Maxwell-Boltzmannova funkcija gostote verjetnosti hitrosti

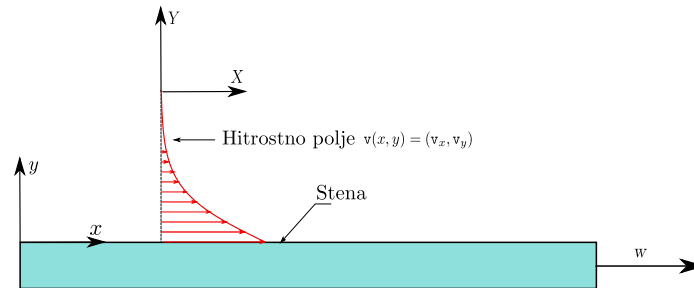
$$f_0 = n \left(\frac{m_d}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_d(v_i - v_i)^2}{2k_B T}}, \quad (3)$$

kjer je n številska gostota, m_d masa posameznega delca, k_B Boltzmannova konstanta ($k_B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$) in T temperatura. Z v_i smo označili statistično povprečje hitrosti na nekem mestu v prostoru. Ta rešitev je v neposredni bližini stene veljavna, ko so interakcije oz. trki v tem območju zanemarljivi.

3 Opis fizikalnega in matematičnega modela

Obraavnani primer prikazuje slika 1. Na sliki sta prikazana globalni in lokalni referenčni sistem, kjer se slednji giblje skupaj s steno. Pri analizi napravimo predpostavke, zaradi katerih postane problem obvladljiv. Predpostavimo, da se fluid vede kot idealni plin, in da lahko valovito površino stene opišemo kot trigonometrično funkcijo oziroma vrsto, pri čemer je površina valovita le v eni, npr. x - y ravnini. To dovoljuje dejstvo, da ima sipanje v smeri vzdolž osi z zanemarljiv vpliv, saj v tej smeri ni makroskopskega gibanja. Potencial, ki določa sipanje delcev, lahko izrazimo s predpisom

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \infty & : y \leq f_S(x), \\ 0 & : y > f_S(x), \end{cases} \quad (4)$$



Slika 1: Tok fluida pri relativnem gibanju.

kjer je funkcija $f_S(x)$ enaka

$$f_S(x) = \frac{h_0}{2} \cos \frac{2\pi x}{L_0}. \quad (5)$$

V zgornji enačbi L_0 in h_0 označujeta valovno dolžino in amplitudo valovitosti in sta označeni na sliki (2), ki prikazuje sipanje oz. vedenje ravni delcev. Ker je valovitost, ki jo določa enačba (5) prisotna na mikroskopski prostorski skali in na makroskopski skali ne pride do izraza, zato ni prikazana na sliki 1.

Definiramo lahko tudi Knudsenovo plast, kjer prevladujejo interakcije med delci v fluidu in površino, in kjer lahko zanemarimo trke med posameznimi delci. Debelina tega območja je enakega reda velikosti kot povprečna prosta pot delcev. V tem območju hitrost in napetost zavzameta tisto vrednost, ki jo v pristopu mehanike kontinuuma predpišemo kot robni pogoj. Predpostavimo tudi, da sta fluid in stena v relativnem gibanju, pri čemer je relativna hitrost enaka w in je enakovredna hitrosti prostega toka, če stena miruje. Hitrosti v lokalnem referenčnem sistemu lahko zapišemo tudi prek polarnih koordinat, kar prikazujejo izrazi

$$\begin{aligned} v'_x &= u'_0 \sin \theta' + w, & v'_y &= u'_0 \cos \theta', & v'_z &= u'_z, \\ v_x &= u_0 \sin \theta + w, & v_y &= u_0 \cos \theta, & v_z &= u_z, \end{aligned} \quad (6)$$

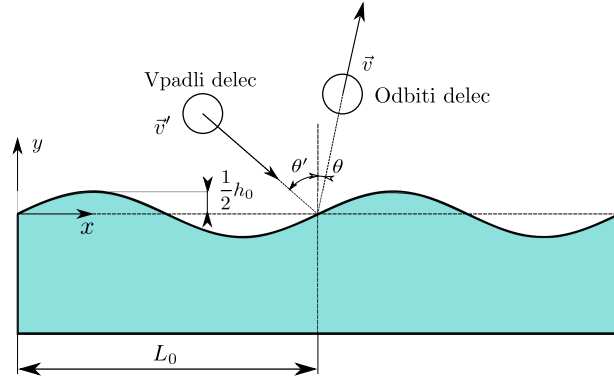
kjer so v'_i in v_i , $i = x, y, z$ komponente vektorja hitrosti vpadlih in odbitih delcev v kartezičnih kooordinatah, u'_0 in u_0 sta absolutni vrednosti hitrosti vpadlih in odbitih delcev, θ' in θ pa kota, ki določata smeri gibanja vpadlih in odbitih delcev glede na y os.

4 Funkcija gostote verjetnosti hitrosti ob steni

Funkcijo gostote verjetnosti, ki določa hitrosti gradnikov v Knudsenovi plasti, razdelimo na prispevka, ki ustrezata vpadlim in odbitim delcem, kar prikazuje spodnji izraz

$$f = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(v_y))f^-(v_i) + \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(v_y))f^+(v_i). \quad (7)$$

V izrazu $\text{sgn}(x)$ označuje signum funkcijo, faktorja $1/2$ pa sta prisotna zaradi normalizacije verjetnosti. Funkcija gostote verjetnosti vpadlih delcev f^- je enaka produktu funkcije f_0 , ki določa verjetnosti velikosti hitrosti delcev, in funkcije f_{inc} , ki določa verjetnost vpadnega kota



Slika 2: Sipanje delcev na površini monokristalne stene.

θ glede na y os, in ima obliko

$$f^-(v'_i, y_{Kn}) = f_0(v'_0) \cdot f_{\text{inc}}(\theta') = \frac{\pi}{2} n \left(\frac{m_d}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_d(u_0'^2 + u_z'^2)}{2k_B T}} \cos \theta', \quad (8)$$

kjer y_{Kn} označuje interval Knudsenove plasti, v katerem velja zgornji izraz. Funkcijo gostote verjetnosti odbitih delcev v izrazu (7) dobimo prek konvolucije s funkcijo pogojne verjetnosti sipanja $P(u_0, u'_0, \theta, \theta', u_z, u'_z, x)$ ki je zaradi valovitosti površine vzdolž x osi tudi funkcija položaja. To prikazuje izraz

$$f^+(u_0, \theta, u_z, x, y_{Kn}) = \iiint_{v'_y < 0} f^-(u'_0, \theta', u'_z) P(u_0, u'_0, \theta, \theta', u_z, u'_z, x) (-u_0') du'_0 d\theta' du'_z. \quad (9)$$

Funkcija pogojne verjetnosti sipanja ima za model valovite površine obliko

$$P(u_0, u'_0, \theta, \theta', u_z, u'_z, x, y_{Kn}) = \frac{1}{\pi(-u'_0)} \delta(u_0 - u'_0) \delta(u_z - u'_z) \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa^m}{m!} \right)^2 (\cos \theta' + \cos \theta)^{2m} e^{i \frac{2\pi m}{L_0} x} + 1 \right), \quad (10)$$

kjer smo s κ označili izraz $\kappa = \frac{\pi}{2} \frac{h_0 m_d}{h} \sqrt{u_0'^2 + u_z'^2}$, h pa je Planckova konstanta ($h = 6,62607 \cdot 10^{-34} \text{Js}$). Z vstavitvijo zgornjega izraza (10) v konvolucijski integral (9) in upoštevanjem izraza (7) tako dobimo izraz za celotno funkcijo gostote verjetnosti hitrosti delcev v Knudsenovi plasti

$$f(u_0, \theta, u_z, x, y_{Kn}) = \frac{\pi}{4} n \left(\frac{m_d}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_d(u_0^2 + u_z^2)}{2k_B T}} \cos \theta (1 - \text{sgn}(u_0 \cos \theta)) + \frac{1}{4} n \left(\frac{m_d}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_d(u_0^2 + u_z^2)}{2k_B T}} \cos \theta (\pi + 2\mathcal{F}_0(u_0, u_z, \theta, x)) (1 + \text{sgn}(u_0 \cos \theta)), \quad (11)$$

kjer \mathcal{F}_0 označuje funkcijo

$$\mathcal{F}_0(u_0, u_z, \theta, x) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\kappa^m}{m!} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \frac{\cos^k \theta}{2^{2m-k}} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \text{sinc} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \cos \left(\frac{2\pi m}{L_0} x \right). \quad (12)$$

5 Komponente hitrosti in napetostnega tenzorja ob steni

Na tem mestu bomo predstavili izpeljavo statističnih povprečij komponent hitrosti in elementov napetostnega tenzorja. Čeprav bomo uporabili teoretične metode, s katerimi lahko izpeljemo izraze za veličine na skali zvezne snovi, v tem primeru to ni mogoče, saj funkcija f opisuje spreminjanje gostote verjetnosti v odvisnosti od položaja na prostorski skali veličine L_0 , ki je bistveno manjša od minimalne razdalje, vzdolž katere je potrebno določiti prostorsko povprečje, da lahko govorimo o zvezni snovi.

Statistična povprečja veličin ob steni določimo tako, da v izraz (1) vnesemo funkcijo gostote verjetnosti v Knudsenovi plasti (11) in integriramo prek ustrezne spremenljivke. Pri določitvi statističnega povprečja hitrosti je relevantna spremenljivka hitrost delcev $\psi = v_i$, iz česar sledi izraz

$$v_i = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_i f(r_i, v_i, t) dv_i dv_j dv_k. \quad (13)$$

Rešitvi zgornjega integrala za v_x in v_y sta statistični povprečji tangencialne in normalne komponente hitrosti, ki ju določata izraza

$$\begin{aligned} v_x(x, y_{Kn}, w) &= w \left(e^{-\frac{m_d w^2}{2k_B T}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma(m+1, k_1 w^2) \right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right) \\ &= w \left(e^{-\frac{m_d w^2}{2k_B T}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{F}_{2a}(x, w) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

in

$$\begin{aligned} v_y(x, y_{Kn}, w) &= \sqrt{\frac{\pi k_B T}{2m_d}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}, \frac{m_d w^2}{2k_B T}\right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_d}} \mathcal{F}_{1a}(x, w). \end{aligned} \quad (15)$$

Konstanta c_1 označuje $c_1 = \frac{m_d}{2k_B T}$. Funkciji \mathcal{F}_{1a} in \mathcal{F}_{2a} v zgornjih izrazih sta določeni kot

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1a}(x, w) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}, \frac{m_d w^2}{2k_B T}\right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right) \end{aligned} \quad (16)$$

in

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2a}(x, w) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma\left(m+1, \frac{m_d w^2}{2k_B T}\right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Pri določitvi napetosti je relevanten pretok gibalne količine delcev $\psi = m_d c_i c_j$. Z upoštevanjem definicije relativne hitrosti $c_i = v_i - v_i$ sledi izraz

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_d (v_i - v_i)(v_j - v_j) f(r_i, v_i, t) dv_i dv_j dv_k = m_p (\langle v_i^2 \rangle - n v_i^2), \quad (18)$$

kjer je ρ gostota fluida. Z rešitvijo statističnega povprečja v zgornjem izrazu dospemo do izrazov za elemente napetostnega tenzorja ob steni. Ugotovimo, da strižno napetost σ_{yx} v Knudsenovi plasti na meji med steno in fluidom določa izraz

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(x, y_{Kn}, w) &= -m_d n (w v_y - v_x v_y) \\ &= -\rho v_y (w - v_x) \\ &= -\frac{1}{4} \rho \sqrt{\frac{8\pi k_B T}{m_d}} w \mathcal{F}_{1a}(x, w) \left(1 - e^{-\frac{m_d w^2}{2k_B T}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{F}_{2a}(x, w) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Izraze za normalne napetosti σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{zz} lahko povežemo v izraz za tlak v Knudsenovi plasti, ki je enak

$$\begin{aligned} p(x, y_{Kn}, w) &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= p_0 \left[e^{-\frac{m_d w^2}{2k_B T}} \left(1 + \frac{m_d w^2}{3k_B T} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left(\frac{1}{2} \mathcal{F}_{2a}(x, w) + \mathcal{F}_{3a}(x, w) + \mathcal{F}_{4a}(x, w) \right) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{1a}^2(x, w) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

pri čemer je p_0 povprečni statični tlak. Funkciji \mathcal{F}_{3a} in \mathcal{F}_{4a} v zgornjih izrazih sta določeni kot

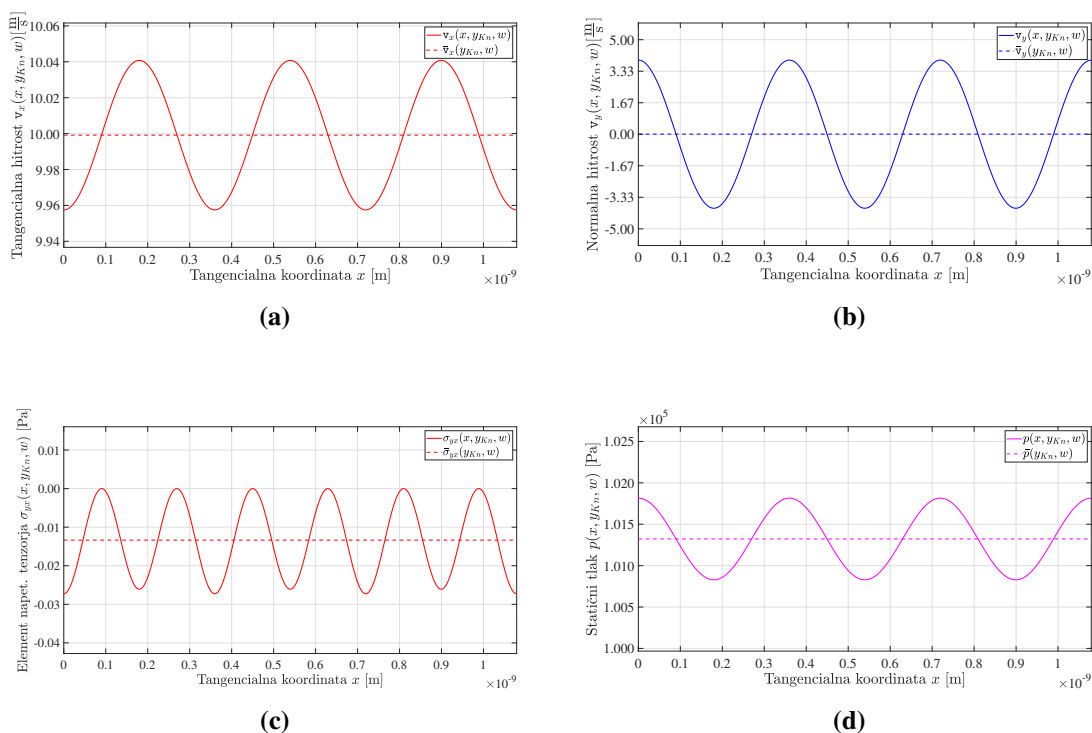
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{3a}(x, w) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma\left(m+2, \frac{m_d w^2}{2k_B T}\right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right) \end{aligned} \quad (21)$$

in

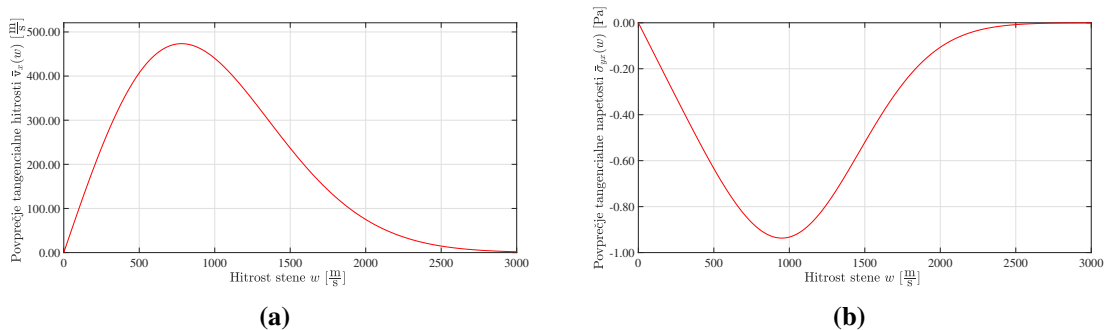
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{4a}(x, w) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c_1^2}{k_1}\right)^m}{(m!)^2} \Gamma\left(m+2, \frac{m_d w^2}{2k_B T}\right) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} 2^{k-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)} \sum_{n=0}^{2m-k} \binom{2m-k}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi m}{L_0} x\right). \end{aligned} \quad (22)$$

6 Rezultati

Rezultate prikažemo za primer, ko ob steni iz monokristalnega bakra teče tok helija. Predpostavimo temperaturo $T = 298,15$ K in statični tlak $p = 1,0125$ bar. Vrednosti ostalih parametrov so $m_d = 6,64647670 \cdot 10^{-27}$ kg, $L_0 = 3,597 \cdot 10^{-10}$ m, $h_0 = 0,025 \cdot 10^{-10}$ m in $w = 10$ m/s.



Slika 3: a) Tangencialna komp. hitrosti ob steni $v_x(x)$, b) Normalna komp. hitrosti ob steni $v_y(x)$, c) Tangencialna napetost ob steni $\sigma_{yx}(x)$ d) Statični tlak ob steni $p(x)$



Slika 4: a) Prost. povp. tang. hitrosti $\bar{v}_x(w)$, b) Prost. povp. tang. napetosti $\bar{\sigma}_{yx}(w)$

7 Zaključki

Rezultate, ki jih določajo izrazi (14), (15), (19) in (20), prikazujejo slike 3a, 3b, 3c in 3d, sliki 4a in 4b pa prikazujeta prostorski povprečji tangencialne hitrosti \bar{v}_x in strižne napetosti $\bar{\sigma}_{yx}$ vzdolž osi x . Na slikah 3a in 3b je razvidno, da se statistični povprečji komponent hitrosti v_x in v_y spreminjata kot kosinusni funkciji koordinate položaja x . Obe lahko razdelimo na konstantni in na oscilatorni del, ki je funkcija položaja. Prostorsko povprečje normalne komponente hitrosti ob steni \bar{v}_y je vzdolž celotne x osi enako 0, prostorsko povprečje tangencialne komponente hitrosti ob steni \bar{v}_x pa je funkcija relativne hitrosti w in je strogo manjše od relativne hitrosti, kar nakazuje verodostojnost izpeljanega modela. Sliki 3c in 3d kažeta na to, da se podobno vedejo tudi napetosti ob steni.

Slika 4a nakazuje, da pri nizkih vrednostih w povprečna hitrost \bar{v}_x narašča linearno v odvisnosti od w , pri visokih vrednostih pa pada kot funkcija e^{-cw^2} , kjer je c neka konstanta. Na podlagi tega lahko sklepamo, da je naš model sposoben (pri določenih vrednostih parametrov modela) teoretično razložiti robni pogoj brez zdrs. Na sliki 4b je medtem razvidno, da ima prostorsko povprečje tangencialne napetosti $\bar{\sigma}_{yx}$ podobno funkcijsko odvisnost, saj (negativna vrednost) napetosti za majhne w narašča linearno. Ta rezultat se zadovoljivo ujema z linearno odvisnostjo med hitrostjo in strižno napetostjo, opaženo v naravi.

Rezultati analize torej nakazujejo, da je valovita oblika površine stene vzrok za veljavnost robnega pogoja brez zdrs in (pri večini pogojev) in nastanek mejne plasti. Nihanja statističnih povprečij hitrosti in napetosti morda predstavljajo tudi izvor motenj, ki povzročijo prehod iz laminarnega v turbulentno tokovno vedenje. Pri tem je treba poudariti, da se izpeljana statistična povprečja izrazijo na vmesni mezoskopski skali, saj je valovna dolžina valovitosti manjša od minimalne razdalje, na kateri lahko govorimo o veljavnosti teorije kontinuuma, ki se izrazi na makroskopski prostorski skali. Tako ostaja odprt problem vzpostavitve povezave med izpeljanimi statističnimi povprečji in veličinami iz teorije kontinuuma.

Literatura

- [1] K. Aoki, C. Baranger, M. Hattori, S. Kosuge, G. Martalo, J. Mathiaud, and L. Mieussens. Slip boundary conditions for the compressible navier–stokes equations. *Journal of Statistical Physics*, 169(4):744–781, 2017.
- [2] R. Garcia and C. Siewert. Viscous-slip, thermal-slip, and temperature-jump coefficients based on the linearized boltzmann equation (and five kinetic models) with the cercignani–lampis boundary condition. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 29(3):181–191, 2010.
- [3] F. O. Goodman. Scattering of atoms by a stationary sinusoidal hard wall: rigorous treatment in $(n+1)$ dimensions and comparison with the rayleigh method. *The Journal of Chemical Physics*, 66(3):976–982, 1977.
- [4] V. Roldughin and V. Zhdanov. Non-equilibrium thermodynamics and kinetic theory of gas mixtures in the presence of interfaces. *Advances in colloid and interface science*, 98(2):121–215, 2002.



Modeliranje procesa depozicije ledu v kondenzatorju liofilizatorja

Blaž Kamenik¹, Matjaž Hriberšek¹ in Matej Zadavec¹

Modeling of ice deposition in lyophilizer condenser

Povzetek. V prispevku je predstavljen numeričen model depozicije ledu v kondenzatorju. Depozicijo ledu se je v programu Ansys Fluent modeliralo kot volumski ponor s pomočjo uporabniško definiranih funkcij (ang. user defined functions oz. UDF). S tem se meja modeliranja prestavi v kondenzator, oziroma izstopno cev iz kondenzatorja. Za namen validacije numeričnega modela je bil na realni laboratorijski napravi izveden eksperiment, kjer se je določila kinetika sublimacije ledu v pladnju in kinetika depozicije ledu v kondenzatorju. Napoved numeričnega modela pokaže ujemanje z vzorcem depozicije ledu na realni napravi.

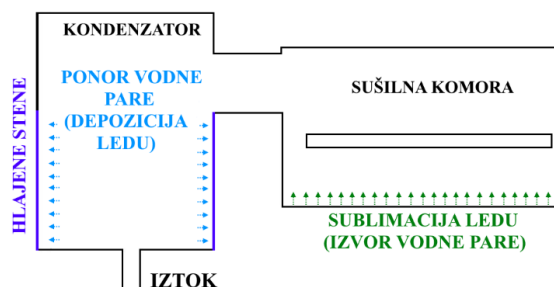
Abstract.

In this work, a numerical model of ice deposition in a condenser is presented. Ice deposition was modeled in Ansys Fluent as a volume sink using user defined functions (UDF). With this approach the modeling boundary is moved to the condenser, namely the outlet pipe from the condenser. For the purpose of validation of the numerical model, an experiment was performed on a laboratory dryer, where the kinetics of ice sublimation in a tray and of ice deposition in a condenser were determined. The prediction of the numerical model shows agreement with the ice deposition pattern on a real device.

1 Uvod

Zamrzovalno sušenje je oblika sušenja, kjer se voda pri nizkih tlakih, odstranjuje iz zamrznjenega produkta s procesom sublimacije. Produkt se v farmaciji (farmaceutvska učinkovina) ponavadi nahaja v vijalah ali kaki drugi stekleni ovojnini oz. v živilski industriji so pladnji s produktom direktno naloženi na temperaturno regulirane police znotraj sušilne komore. Po fazi zamrzovanja, se ob znižanju systemskega tlaka in dovodu toplote iz polic prične odvijati proces sublimacije ledu (sproščanje vodne pare). Vodna para nato potuje skozi povezovalno cev v kondenzator, kjer se na hladnih stenah odvija depozicija ledu (zamrzovanje vodne pare). V tem primeru, gre za fazni prehod, pri katerem plin preide direktno v trdno fazo, brez prehoda

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru



Slika 1: Shematski prikaz liofilizatorja in fizikalnih pojavov, ki se odvijajo znotraj sistema.

skozi tekočo fazo. Preostanek neodstranjene vlage skupaj z inertnim plinom potuje skozi iztok oziroma cev priključeno na vakuumsko črpalko. Shema procesa in dogajanje v sistemu je prikazana na sliki 1. Zasnova povezovalne cevi med sušilno komoro in kondenzatorjem pomembno vpliva na proces, saj lahko pride do zadržitve toka (ang. Choked flow). To se zgodi, kadar je masni tok vodne pare skozi povezovalno cev zelo visok in hitrost vodne pare doseže hitrost zvoka. V tem primeru prične tlak znotraj komore naraščati, kar vodi do povišanja dovoda toplote na produkt, s čimer se poveča možnost kolapsa produkta zaradi taljenja. Temu se izognemo z uporabo konservativnejših ciklov sušenja, kar podaljša čas sušenja. Zaradi težnje po optimizaciji sušenja, kar dosežemo z agresivnejšimi sušilnimi cikli, je potrebno poznati pogoje, pri katerih pride do pojava zadržitve toka, ter vpliv geometrije sistema. Vse navedene vplive težko ovrednotimo eksperimentalno (ali pa je za vse možne cikle časovno potratno), zato se za proučevanje pojava vse pogosteje uporabljajo numerične simulacije. Primer modela za napoved in proučevanja pogojev pri katerih pride do zadržitve toka je delo avtorjev Patel et al. [3]. V navedenem delu mejo modeliranja predstavlja vstop v kondenzator, brez modeliranja procesa depozicije ledu na hladnih stenah kondenzatorja, s čimer bi bil proces numerično celovito opisan.

2 Numeričen model

V predstavljenem delu je poudarek na modeliranju procesa depozicije ledu na hladnih stenah kondenzatorja. Za simuliranje toka plina znotraj sistema je bila uporabljena komercialna programska oprema ANSYS Fluent, kateri se je s pomočjo uporabniško definiranih funkcij (deli doprogramirane C kode, ang. user defined functions oz. UDF) do-programiralo dodatne volumnske ponore.

2.1 Vodilne enačbe in numeričen model

Vodilne enačbe, ki jih rešuje program ANSYS Fluent, v katerem se je do-programiral model depozicije ledu, opisujejo osnovne fizikalne zakone v toku tekočine. Enačba za ohranitev mase (kontinuitetna enačba) se zapiše kot [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = S_m, \quad (1)$$

kjer S_m predstavlja izvor. Ravnotežje gibalne količine se zapiše kot [2]:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\tau) + \rho \vec{g} + \vec{F}, \quad (2)$$

kjer \vec{F} predstavlja zunanje sile (external body forces). V programski opremi ANSYS Fluent, ki je bila uporabljena v tem delu, se energijska enačba rešuje v naslednji obliki [2]:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}(\rho E + p)) = \nabla \cdot \left(k_{eff} \nabla T - \sum_j h_j \vec{J}_j + (\tau_{eff} \cdot \vec{u}) \right) + S_h, \quad (3)$$

kjer je k_{eff} efektivna prevodnost ($k_{eff} = k + k_t$, kjer drug člen predstavlja turbulentno toplotno prevodnost) in \vec{J}_j predstavlja difuzijski tok komponente j . Prvi člen na desni strani enačbe predstavlja prenos energije zaradi prevoda, drugi zaradi difuzije komponent in tretji viskoznostno disipacijo. Člen S_h predstavlja izvor energije (npr. energija, pridobljena iz kemijskih reakcij ali drugih volumetričnih izvorov). Za izračun gostote več-komponentnega stisljivega plina je uporabljen model idealnega plina, ki računa gostoto po naslednji enačbi

$$\rho = \frac{p_{op} + p}{RT \sum_i \frac{Y_i}{M_{w,i}}}, \quad (4)$$

kjer je p lokalni relativni tlak predpostavljen v ANSYS Fluent-u, p_{op} obratovalni tlak (ang. operating pressure), Y_i masni delež i -te komponente in $M_{w,i}$ molska masa i -te komponente. Zaradi nizkih sistemskih tlakov, je v modelu uporabljen tudi Maxwellov model zdrsa tekočine na steni.

2.2 Model depozicije ledu

V literaturi ne zasledimo veliko primerov modeliranja depozicije ledu na hladnih stenah kondenzatorja. Primer takšnega tipa modeliranja je delo Petitti s sodelavci [4] in magistrsko delo Sarjaša [6], kjer je depozicija ledu opisana s kinetiko prvega reda

$$j = k\rho\varepsilon_v A, \quad (5)$$

kjer j predstavlja gostoto masnega toka desublimirane vodne pare [kg/s], k konstanto hitrosti reakcije [m/s], ρ gostoto plina in ε_v masni delež vodne pare. V obeh opisanih primerih je uporabljena tudi predpostavka, da je kondenzator ustrezno dimenzioniran in da temperatura hlajenih sten kondenzatorja tekom depozicije ostaja konstantna. V tem primeru je stopnja depozicije odvisna le od gostote, masnega deleža vodne pare in empirične konstante k . V nadaljevanju je predstavljen mehanističen model depozicije ledu, s katerim se želimo izogniti uporabi empiričnega modela. Proces depozicije ledu je modeliran kot enosmerna difuzija vodne pare v smeri normale na hladne stene kondenzatorja v naslednji obliki [5]:

$$\vec{J}_v = \frac{C_v}{C_v + C_i} \vec{J}_v - D_{v,i} \vec{\nabla} C_v. \quad (6)$$

kjer J_v predstavlja desublimacijski molski tok, $\vec{\nabla} C_v$ koncentracijski gradient, C_v koncentracijo vodne pare, C_i koncentracijo inertnega plina, ter $D_{v,i}$ difuzivnost binarne zmesi vodne pare in inertnega plina. V smeri z , pravokotno na površino hladne stene kondenzatorja (lokalno), je molski tok vodne pare [5]:

$$J_v = \frac{C_v}{C_v + C_i} J_v - D_{v,i} \frac{dC_v}{dz}. \quad (7)$$

Koncentracije z uporabo enačbe idealnega plina nadomestimo s parcialnimi tlaki

$$p_v = C_v RT, \quad (8)$$

in enačba za molski tok s parcialnimi tlaki se tako glasi

$$J_v = \frac{p_v}{p_v + p_i} J_v - \frac{D_{v,i}}{RT} \frac{dp_v}{dz}. \quad (9)$$

Difuzivnost vodne pare v binarni zmesi se izračuna po teoriji difuzije v plinih pri nizkih gostotah [5] kot:

$$D_{v,i} = 0.01883 \frac{\sqrt{T^3 \left(\frac{1}{M_v} + \frac{1}{M_i} \right)}}{(p_i + p_v) \sigma_{vi}^2 \Omega_D}, \quad (10)$$

kjer je Ω_D integral trka in T temperatura plina. Lennard-Jonesovi parametri za binarno zmes so

$$\sigma_{vi} = \frac{\sigma_v + \sigma_i}{2}, \quad \epsilon_{vi} = \sqrt{\epsilon_v \epsilon_i}, \quad (11)$$

kjer je premer trka za vodno paro $\sigma_v = 3.737 \text{ \AA}$ in za inertni plin $\sigma_i = 3.771 \text{ \AA}$. Če vstavimo enačbo (10) v enačbo (9) dobimo

$$p_i J_v = -0.01883 \frac{\sqrt{T \left(\frac{1}{M_v} + \frac{1}{M_i} \right)}}{R \sigma_{vi}^2 \Omega_D} \frac{dp_v}{dz}. \quad (12)$$

Da dobimo molski tok, je potrebna integracija od centra celice ($p_{v,g}$) do hladne stene kondenzatorja ($p_{v,i} = p_v^*$),

$$J_v \int_0^h dz = -0.01883 \frac{\sqrt{T \left(\frac{1}{M_v} + \frac{1}{M_i} \right)}}{p_i R \sigma_{vi}^2 \Omega_D} \int_{p_{v,g}}^{p_{v,i}} dp_v, \quad (13)$$

kjer se tlak vodne pare tik nad ledom (tlak nasičenja) $p_{v,i}$ izračuna iz Arden Buckove enačbe

$$p_{v,i} = 0.61115 \exp \left(\left(23.036 - \frac{T_i}{333.7} \right) \left(\frac{T_i}{279.82 + T_i} \right) \right), \quad (14)$$

kjer je T_i temperatura hladne stene kondenzatorja. Končen izraz za izračun molskega toka se glasi

$$J_v = -0.01883 \frac{\sqrt{T \left(\frac{1}{M_v} + \frac{1}{M_i} \right)}}{p_i R \sigma_{vi}^2 \Omega_D} \frac{p_{v,i} - p_{v,g}}{h}. \quad (15)$$

Ponor vodne pare zaradi procesa depozicije S_m , ki poteka na hladnih stenah kondenzatorja, je modeliran kot volumski ponor v naslednji obliki

$$S_m = J_v M_{H_2O} \frac{\delta A}{\delta V}, \quad (16)$$

kjer je δA površina hladne stene in δV volumen prve celice tik ob medfazni površini, J_v molski tok, v smeri od centra prve celice tik ob steni (kjer se nahaja vodna para) do centra ploskve stene (stena kondenzatorja). Enačba v tej obliki z enoto $kg/(m^3s)$ predstavlja maso vodne pare, ki se zaradi procesa desublimacije na časovno enoto odstrani iz celice tik ob steni. Na medfazni površini, kjer vodna para zamrzne, prihaja do izgube gibalne količine, ki je v tem primeru upoštevana v enačbi ohranitve gibalne količine kot ponor v naslednji obliki za vse tri smeri

$$F_U = US_m, F_V = VS_m, F_W = WS_m, \quad (17)$$

kjer U, V, W predstavljajo hitrost v smeri x, y in z . Zaradi procesa depozicije prihaja do odvoda toplote iz plinske domene, ki pa je modeliran kot dodatni ponor v enačbi ohranitve energije S_h

$$S_h = S_m h_v = \int_{T_g}^{T_i} c_{p,v} dT, \quad (18)$$

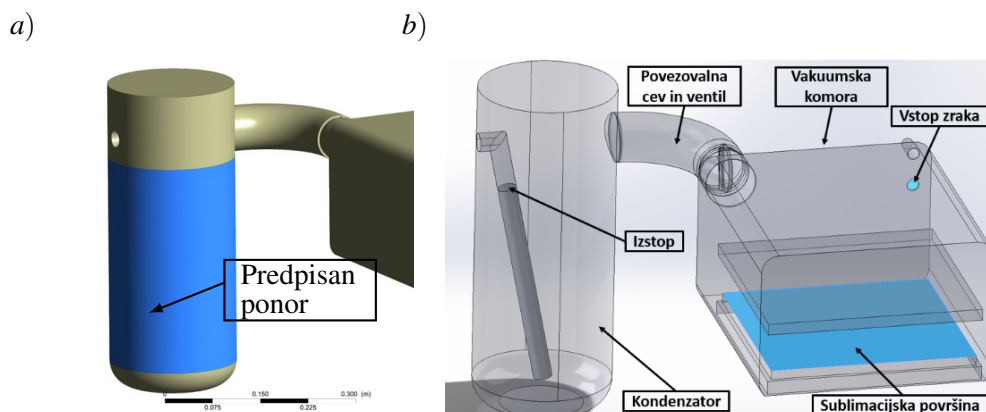
kjer h_v predstavlja senzibilno entalpijo vodne pare.

2.2.1 Snovske lastnosti upoštevanih snovi

Za izračun so bile uporabljene naslednje snovske lastnosti. Za vodno paro so uporabljene naslednje vrednosti: molska masa 18.015 kg/kmol , karakteristična dolžina $\sigma = 2.605 \text{ \AA}$, energijski parameter $\varepsilon/k_b = 572,5 \text{ K}$, energijski akomodacijski koeficient $\alpha_c = 0.48$, tangencialni akomodacijski koeficient $\alpha_t = 0.91$ in specifična toplota $c_{p,v} = 1859 \text{ J/(kgK)}$. Za inertni plin (dušik) so uporabljene naslednje vrednosti: molska masa 28.0134 kg/kmol , karakteristična dolžina $\sigma = 3.798 \text{ \AA}$, energijski parameter $\varepsilon/k_b = 71 \text{ K}$, energijski akomodacijski koeficient $\alpha_c = 0.45$, tangencialni akomodacijski koeficient $\alpha_t = 0.91$ in specifična toplota $c_{p,v} = 1006 \text{ J/(kgK)}$. Za viskoznost je v obeh primerih uporabljena potenčna zveza $\mu = \mu_{ref}(T/T_{ref})^n$ (ang. power law) z vrednostma za vodo $\mu_0 = 8.9e-06 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $T_{ref} = 273 \text{ K}$ in $n = 1$ [1], ter za dušik $\mu_0 = 1.66e-05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $T_{ref} = 273 \text{ K}$ in $n = 0.74$ [1].

2.3 Geometrija in robni pogoji

Geometrija obravnavanega sistema je prikazana na sliki 2. Modelirana je celotna geometrija sistema, tako da je meja modeliranja izstopna cev iz kondenzatorja (skozi le to se odstranjuje inertni plin in neodstranjena vodna para). Model je sestavljen iz sušilne komore (višina 0.21 m , širina 0.34 m , ter globina 0.39 m), kjer je dodana cev skozi katero se v komoro dovaja inertni plin za vzdrževanje nastavljenega tlaka v komori, dveh polic dimenzij $0.3 \times 0.3 \text{ m}$ (na spodnji je pladenj, zgornja je prazna), kondenzator s premerom 0.2 m (v katerem se odvija depozicija ledu), povezovalne cevi med komoro in kondenzatorjem s premerom 0.072 m , ter ventila. Za obratovalni tlak, je bila predpisana ocenjena vrednost na izstopu in sicer 9 Pa . Na površinah polic, je bila predpisana temperatura $+5 \text{ }^\circ\text{C}$, na površini, kjer se odvija depozicija ledu $-60 \text{ }^\circ\text{C}$, ostale površine so adiabatne. Na površini "sublimacijska površina", ki predstavlja sublimacijsko fronto, je predpisan masni tok vodne pare $1.94 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$ s temperaturo $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ in na površini vstop zraka $1.02 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$ s temperaturo $20 \text{ }^\circ\text{C}$.



Slika 2: Geometrija obravnavanega modela: a) površina na kateri se odvija proces depozicije ledu b) glavni elementi numeričnega modela.

2.3.1 Numerične metode

Izračun je izveden z algoritmom SIMPLE in shemo PRESTO! za diskretizacijo tlaka, s shemo upwind drugega reda za gostoto, gibalno količino, masni delež komponent in energijo. Ker je simuliran material plin, ki je sestavljen iz dveh komponent (H_2O pare in N_2), je bil uporabljen model za večkomponentni sistem (ang. species transport model). Za izračun lastnosti zmesi so bili uporabljeni različni zakoni. Za specifično toploto je bil uporabljen zakon mešanja, za toplotno prevodnost in viskoznost zakon idealnega mešanja plinov in kinetična teorija za izračun difuzivnosti med komponentami.

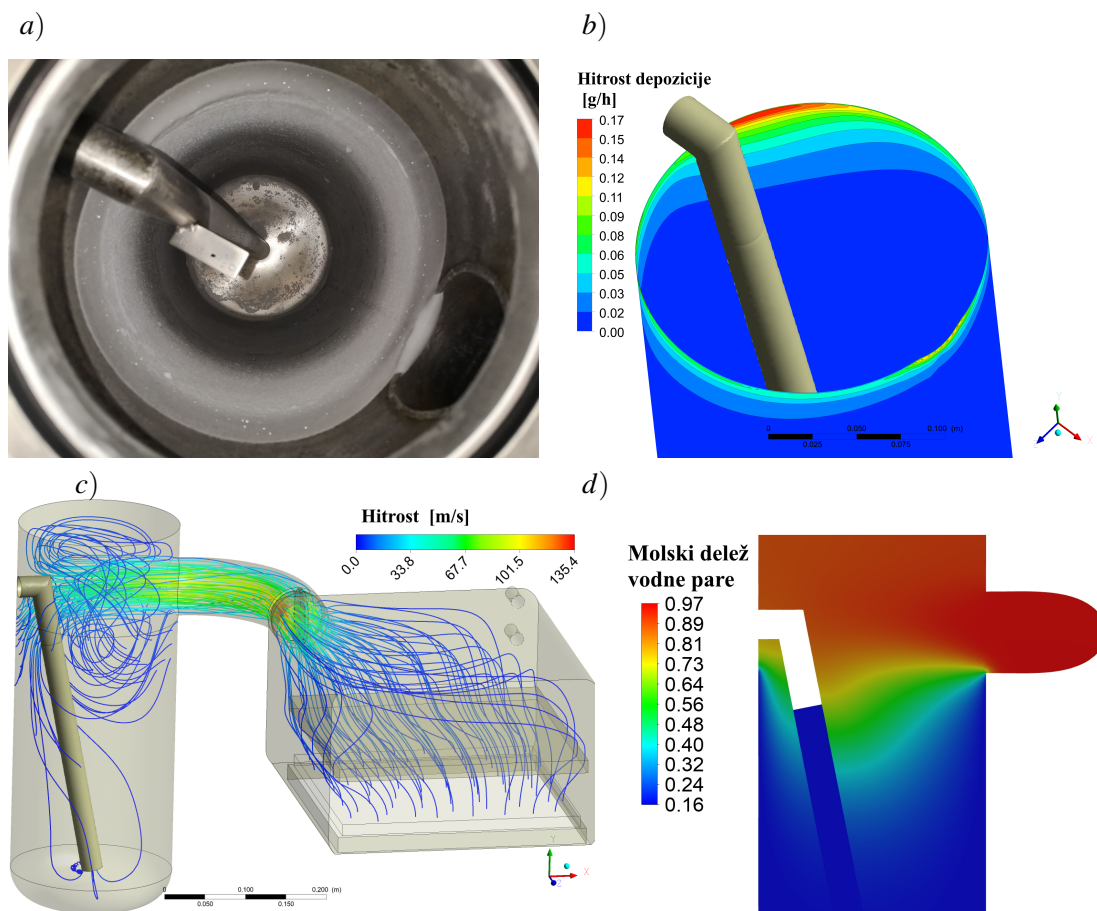
2.4 Eksperimentalna analiza

Na napravi je bil izveden eksperiment s destilirano vodo, z namenom določitve kinetike depozicije ledu. V pladenj se je natočilo 1.2 kg destilirane vode, le ta pa se je nato postavil na spodnjo polico. Zamrzovanje je potekalo pri temperaturi $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$, nato se je sistemski tlak (tlak znotraj komore) znižal na 13.16 Pa in temperatura police povečala na $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Skozi ventil se je v komoro spuščal zrak, s čimer se je vzdrževal nastavljen sistemski tlak. Po eni uri sublimacije se je proces zaustavilo in pladenj se je stehal. Na ta način se je določil povprečen sublimacijski tok, ki ga predpišemo kot robni pogoj v simulaciji.

3 Rezultati eksperimenta in numeričnega preračuna

Kot je razvidno iz slike 3a, ki prikazuje depozicijo na realnem sistemu (eksperiment), je depozicija ledu najintenzivnejša tik na vstopu, saj je to tudi mesto, kjer je koncentracijski gradient najvišji. V tej točki je namreč delež vodne pare najvišji, saj predhodno v sistemu ne prihaja do odstranjevanja vlage (ni depozicije). Drugo mesto, kjer je depozicija intenzivnejša, je na nasprotni strani od vstopa, oziroma mesto, kamor je usmerjena povezovalna cev (vodna para, ki vstopi v kondenzator, potuje v smeri, kamor jo usmeri povezovalna cev). Preostanek vodne pare se skoraj enakomerno izloča po obodu, v smeri proti dnu kondenzatorja, pa se stopnja depozicije zmanjšuje.

Kot vidimo na sliki 3b, numeričen model prav tako napove, da je depozicija intenzivna na



Slika 3: Rezultati depozicije ledu a) realna depozicija ledu tekom eksperimenta b) depozicijski tok, pridobljena z numeričnim modelom, c) tokovnice vodne pare d) molski delež vodne pare po prerezu kondenzatorja.

vstopu, najintenzivnejša pa je na nasprotni strani od vstopa. Ena izmed prednosti numeričnega modela je ta, da lahko iz rezultatov pridobimo tudi kvantitativne rezultate, ki jih pri eksperimentu težko določimo. Pri eksperimentu, se je namreč intenziteta depozicije ledu ocenjevala vizualno. Eden izmed rezultatov je depozicijski tok, ki na vstopnem delu dosega okoli 0.13 g/h, na nasprotni strani (steni) pa doseže okoli 0.167 g/h. Po obodu lahko nato opazimo, da je depozicija manj intenzivna, v smeri proti dnu kondenzatorja pa se izrazito zmanjša. Vzrok za manjši depozicijski tok je manjša koncentracija vodne pare, kar se vidi na sliki 3d, ki prikazuje molski delež vodne pare. Ta je najvišji na vstopu, kjer znaša 0.97, nato pa se v smeri proti dnu kondenzatorja, zaradi izločanja vlage s procesom depozicije ledu zmanjša do vrednosti 0.16. Na sliki 3c, so prikazane tokovnice vodne pare. Vidimo, da se hitrost vodne pare zaradi ventila v povezovalni cevi poveča na 135 m/s in nato zmanjša. Vodna para ob vstopu v kondenzator potuje proti nasprotni steni, kjer se del tekočine preusmeri navzgor, del pa navzdol (proti dnu kondenzatorja). Vodna para se nato izloča na stenah, kjer je predpisan ponor. Sistemski tlak znotraj komore, ki ga napove numerični model znaša 12.86 Pa, kar se dobro ujema z eksperimen-

mentom, kjer je povprečen tlak znotraj komore znašal 13.16 Pa. Rezultati numeričnega modela nam tudi omogočajo določitev učinkovitosti kondenzatorja η

$$\eta = \frac{\dot{m}_{in,H_2O} - \dot{m}_{out,H_2O}}{\dot{m}_{in,H_2O}} \quad (19)$$

V tem primeru je učinkovitost kondenzatorja 99.4%, kar kaže na dobro učinkovitost izločanja vodne pare iz sistema.

4 Zaključki

V delu je predstavljen mehanističen model depozicije ledu na hladnih stenah kondenzatorja. Rezultati numeričnega modela pokažejo dobro kvalitativno ujemanje z rezultati eksperimenta, stopnja depozicije je najvišja tik na vstopu in na nasprotni strani. Model se bo v prihodnje uporabil za napoved pojava zastoja toka (ang. choked flow), saj je ta pojav zaradi možnosti kolapsa strukture produkta (previsok dovod toplote na produkt) nesprejemljiv. V prihodnje se bo numeričen model razširil in dodale se bodo modelirane trdne stene, kjer bo dodan model sproščanja latentne toplote tekom depozicije ledu.

Zahvala

Raziskovalni program št. P2-0196 je sofinancirala Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz državnega proračuna.

Literatura

- [1] A. Ganguly and A. A. Alexeenko. Modeling and measurements of water-vapor flow and icing at low pressures with application to pharmaceutical freeze-drying. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(21-22):5503–5513, 2012.
- [2] A. Inc. ANSYS® Academic Research, Release 17.2, Help System, Solver Theory, Multi-phase Flow Theory. 2016.
- [3] S. M. Patel, S. Chaudhuri, and M. J. Pikal. Choked flow and importance of Mach I in freeze-drying process design. *Chemical Engineering Science*, 65(21):5716–5727, 2010.
- [4] M. Petitti, A. A. Barresi, and D. L. Marchisio. CFD modelling of condensers for freeze-drying processes. *Sadhana - Academy Proceedings in Engineering Sciences*, 38(6):1219–1239, 2013.
- [5] E. L. RB Bird, WE Stewart. *Transport phenomena*. Wiley, 2007.
- [6] A. Sarjaš. Razvoj in numerična analiza kondenzatorja v procesu zamrzovalnega sušenja. Master's thesis, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2019.



Ocena negotovosti delovanja toplotnega prenosnika zaradi nepoznavanja lastnosti delovne tekočine

Blaž Kamenik¹ in Jure Ravnik¹

Estimation of uncertainty of heat exchanger performance due to unknown working fluid properties

Povzetek. V prispevku obravnavamo dvocevni toplotni prenosnik v protitočni izvedbi, kjer se toplota prenaša iz nanotekočine na vodo. Nanotekočina, ki jo obravnavamo, je stabilna suspenzija nanoploščic grafena v vodi. Lastnosti takšne nanotekočine so znane z določeno stopnjo negotovosti. Glavni namen prispevka je ugotoviti kako takšna negotovost vpliva na negotovost cenilk delovanja prenosnika, kot so Nusseltovo število, koeficient prestopa toplote, tlačne izgube, itd. V ta namen uporabimo stohastično kolokacijsko metodo v kombinaciji s empirični nastavki za oceno delovanja dvocevnega toplotnega prenosnika. Rezultati kažejo, da negotovost pri poznavanju gostote nanotekočine ne vpliva pomembneje na rezultat. Negotovost, ki izvira iz nepoznavanja toplotne prevodnosti, viskoznosti in specifične toplotne kapacitete pa ni zanemarljiva.

Abstract. In this paper, a tube-in-tube heat exchanger of countercurrent design is discussed in which heat is transferred from a nanofluid to water. The nanofluid considered is a stable suspension of graphene nanoplatelets in water. The properties of such a nanofluid are known with a certain degree of uncertainty. The main purpose of this work is to find out how this uncertainty affects the uncertainty of heat exchanger performance estimators, such as the Nusselt number, the heat transfer coefficient, the pressure drop, etc. For this purpose, we use the Stochastic Collocation Method in combination with an empirical Ansatz to evaluate the heat exchanger performance. The results show that the uncertainty in knowing the density of the nanofluid does not affect the result significantly. However, the uncertainty arising from the ignorance of thermal conductivity, viscosity and specific heat is not negligible.

1 Uvod

Večina matematično-fizikalnih modelov, ki se uporabljajo v inženirski praksi, je determinističnih. To pomeni, da se za dani nabor vhodnih parametrov izvede izračun, ki daje en sam sklop rezultatov. Tak pristop ne omogoča ocene negotovosti rezultatov, kjer so vhodni parametri obremenjeni z določeno stopnjo negotovosti.

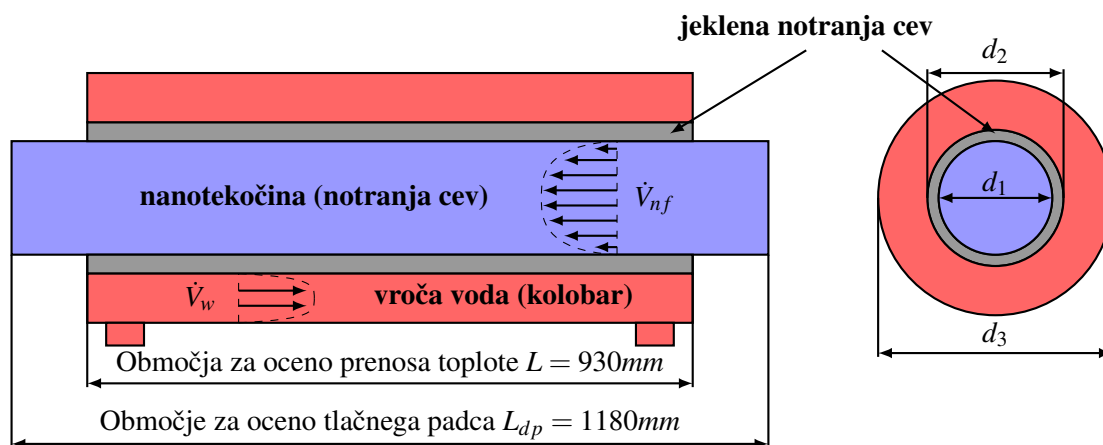
¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

Inženirski primer takšne situacije je obravnava toplotnih prenosnikov, kjer se kot delovna tekočina uporablja nanotekočina. Pod pojmom nanotekočina razumemo stabilno suspenzijo trdnih delcev velikosti nekaj deset nanometrov v nosilni kapljevini. Delci so lahko kovinski oksidi, ogljikove nanocevke ali nanoploščice grafena, nosilna kapljevina pa voda ali etilen glikol. Fizikalno-matematični model za oceno toka in prenosa toplote v nanotekočinah obravnava nanotekočino kot enofazno zvezno kapljevino s lastnostmi, ki so odvisne od temperature in koncentracije nanodelcev ter od postopka priprave. Lastnosti nanotekočine lahko izmerimo [6] ali ocenimo [2] in hkrati ocenimo negotovost takšnega postopka.

Stohastična kolokacijska metoda [3] omogoča prenos negotovosti vhodnih parametrov determinističnega fizikalno-matematičnega modela na izhodne spremenljivke. V prispevku uporabimo stohastično kolokacijsko metodo za prenos negotovosti iz lastnosti nanotekočin kot so gostota, toplotna prevodnost, specifična toplotna kapaciteta in viskoznost na negotovost inženirsko pomembnih lastnosti toplotnega prenosnika kot so Nusseltovo število, tlačni padec in koeficient prestopa toplote.

2 Matematično-fizikalni model

V delu obravnavamo dvocevni prenosnik toplote, ki deluje v protitočnem režimu in je prikazan na sliki 1. Agromayor et. al [1] so takšen toplotni prenosnik izdelali in eksperimentalno ovrednotili z uporabo nanotekočine z delci iz grafenovih nanoploščic. Zunanja cev je izolirana, tako da je mogoče zanemarjati toplotne izgube v okolje. Hladna nanotekočina kroži po notranji cevi, vroča voda pa kroži skozi zunanji kolobar, posledično se vrši prenos toplote iz vode na nanotekočino. Za celotno dolžino prenosa toplote se predpostavljajo enaki pogoji (izračuna se le povprečni koeficient prenosa toplote).



Slika 1: Na sliki je prikazan dvocevni toplotni prenosnik, ki smo ga obravnavali. Eksperimentalno oceno delovanja toplotnega prenosnika in meritve lastnosti uporabljene nanotekočine so izvedli Agromayor et al. [1].

2.1 Lastnosti tekočin

Lastnosti nanotekočin, kot so gostota, toplotna prevodnost, specifična toplotna kapaciteta in viskoznost, so odvisne od temperature in koncentracije nanodelcev in so običajno določene z eksperimentalnimi meritvami. Predvidevamo, da pri teh parametrih obstaja določena stopnja negotovosti. Lastnosti tekočine obravnavamo kot naključne spremenljivke in predpostavljamo, da je funkcija gostote verjetnosti (PDF) konstantna v območju okoli eksperimentalno izmerjene vrednosti. Namen tega dela je prenesti negotovost iz lastnostih nanotekoče na ciljne inženirske rezultate. Za nanotekočine, uporabljene v delu Agromayor et. al [1] (nanoploščice grafena GNP) smo za vsako koncentracijo nanodelcev, glede na eksperimentalne meritve iz dela [1], poiskali temperaturno odvisno funkcijo za lastnosti nanotekočine $f(T)$. Negotovost je bila določena kot največja merilna negotovost v celotnem temperaturnem območju. Predpostavimo, da je gostota verjetnosti konstantna med $(1 - \omega)f(T)$ in $(1 + \omega)f(T)$, kjer je ω ocenjena negotovost. Ocenjene vrednosti negotovosti ω za nanoploščice grafena (GNP) so: gostota 0,05 %, specifična toplotna kapaciteta 2,9 %, toplotna prevodnost 5 % in dinamična viskoznost 4 %.

2.2 Izračun toplotne prehodnosti

Za oceno skupnega koeficienta prehoda toplote U predpostavljamo, da na površinah za prenos toplote ni nečistoč (depozitov). Skupna površina prenosa toplote A je definirana kot zunanja površina cevi, ki ločuje obe tekočini (d_2). Skupni koeficient prehoda toplote U (izračunan za zunanjo steno notranje cevi) se za izbrani prenosnik toplote izračuna kot

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{d_2}{2\lambda_{wall}} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{d_2}{\alpha_{nf}d_1}, \quad A = \pi d_2 L \quad (1)$$

kjer α_w predstavlja toplotno prestopnost za vročo vodo (kolobar), α_{nf} toplotno prestopnost za nanotekočino v notranji cevi in λ_{wall} toplotno prevodnost cevi.

2.3 Toplotna prestopnost za notrajno cev

Na strani nanotekočine (notranja cev) se toplotna prehodnost izračuna z dvema korelacijama: standardno Gnielinski korelacijo [5], ki je bila razvita za splošno tekočino in Agromayor et. al [1] korelacijo, ki je bila pridobljena iz eksperimentalnih podatkov uporabe nanotekočine GNP v toplotnem prenosniku. Reynoldsovo Re_{nf} in Prandltlovo Pr_{nf} število za nanotekočino, se izračuna z lastnostmi tekočine pri povprečni temperaturi $T_{nf,avg}$, karakteristično hitrost dobimo iz znanega volumetričnega pretoka in karakteristične dolžine d_1 . Gnielinski korelacija [5] za izračun toplotne prestopnosti pri toku tekočine skozi cev se glasi:

$$\alpha_{nf} = \frac{Nu_{nf}\lambda_{nf}}{d_1}, \quad Nu_{nf} = \frac{(\xi_{nf}/8)(Re_{nf} - 1000)Pr_{nf}}{1 + 12.7\sqrt{\xi_{nf}/8}(Pr_{nf}^{2/3} - 1)} \quad (2)$$

kjer se faktor trenja ξ_{nf} izračuna iz korelacije za gladko cev, ki jo je predlagal Petukhov [5] $\xi_{nf} = (0,79 \ln(Re_{nf}) - 1,64)^{-2}$. Korelacija Agromayor et. al [1] je bila pridobljena iz eksperimentalnih podatkov. Nusseltovo število je v tem primeru odvisno tudi od volumskega deleža nanodelcev ϕ_v :

$$Nu_{nf} = 0.011(1 + 100\phi_v)^{-0.095} Re_{nf}^{0.886} Pr_{nf}^{0.545} \left(\frac{Pr_{nf}}{Pr_{nf,wall}} \right)^{-0.495}, \quad (3)$$

kjer faktor (Pr_{nf}/Pr_{wall}) upošteva učinek različnih temperaturnih profilov, ki so odvisni od načina prenosa toplote (če se tekočina ohlaja ali ogreva). Pr_{wall} se izračuna za lastnosti nanotekočine pri temperaturi stene $T_{wall,nf}$ (stena v stiku z nanotekočino) in se izračuna kot

$$T_{wall,nf} = T_{w,avg} - \frac{\dot{m}_w c_{p,w} (T_{w,in} - T_{w,out})}{U_{par} A}, \quad \frac{1}{U_{par}} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{d_2}{2\lambda_w} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right). \quad (4)$$

kjer je A zunanja površina toplotnega prenosnika, U_{par} pa delna toplotna prehodnost, ki upošteva upor za prestop toplote iz vroče vode na cev in prevod skozi le to.

2.4 Toplotna prestopnost za kolobarni kanal

Toplotna prestopnost za vročo vodo, ki teče skozi zunanji kolobarni kanal, se izračuna iz korelacije, ki jo je predlagal Gnielinski [4], za popolnoma razvite turbulentne tokove v kolobarnih kanalih z izoliranimi zunanji površinami

$$\alpha_w = \frac{Nu_w \lambda_w}{d_h}, \quad Nu_w = \frac{(\xi_w/8) Re_w Pr_w}{k_1 + 12.7 \sqrt{\xi_w/8} (Pr_w^{2/3} - 1)} \left[1 + \left(\frac{d_h}{L} \right)^{2/3} \right] F_w \quad (5)$$

kjer

$$k_1 = 1.07 + \frac{900}{Re_w} - \frac{0.63}{(1 + 10Pr_w)}, \quad \xi_w = (1.8 \log_{10}(Re^*) - 1.5)^{-2} \quad (6)$$

$$Re^* = Re_w \frac{[1 + a^2] \ln a + [1 - a^2]}{[1 - a]^2 \ln(a)}, \quad F_{w,in} = 0.75 a^{(-0.17)} \quad (7)$$

kjer je $d_h = d_3 - d_2$ hidravlični premer, ξ_w je faktor trenja za kolobarni kanal, ki je odvisen od razmerja $a = (d_2/d_3)$. Re_w in Pr_w uporabljata hidravlični premer za značilno dolžino in $F_{w,in}$ je korekcijski faktor.

2.5 ε - NTU metoda za izračun toplotnega toka

Metoda ε -NTU [5] podaja oceno toplotnega toka v toplotnem prenosniku. V prenosnik vstopa nanotekočina z vstopno temperaturo $T_{nf,in}$ v notranji cevi in voda z vstopno temperaturo $T_{w,in}$ v zunanjem kolobarnem kanalu. V prvem koraku najdemo najmanjši kapacitivni koeficient C_{min} in največji kapacitivni koeficient C_{max}

$$C_{min} = \min[\dot{m}_{nf} c_{p,nf}, \dot{m}_w c_{p,w}], \quad C_{max} = \max[\dot{m}_{nf} c_{p,nf}, \dot{m}_w c_{p,w}]. \quad (8)$$

Iz učinkovitosti ε in največjega možnega toplotnega toka $\dot{Q}_{max} = C_{min} (T_{w,i} - T_{nf,i})$, se dejanski toplotni tok izračuna kot

$$\dot{Q} = \varepsilon C_{min} (T_{w,in} - T_{nf,in}), \quad \varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}, \quad (9)$$

kjer je $C_r = C_{min}/C_{max}$ je razmerje kapacitivnih koeficientov, $NTU = (UA)/C_{min}$ pa število prenosnih enot. Izstopne temperature se nato izračunajo iz energijskih bilanc.

$$T_{nf,out} = T_{nf,in} + \frac{\dot{Q}}{c_{p,nf}\dot{m}_{nf}}, \quad T_{w,out} = T_{w,in} + \frac{\dot{Q}}{c_{p,w}\dot{m}_w} \quad (10)$$

2.6 Tlačni padec pri toku tekočine skozi cev

Tlačni padec skozi notranjo cev se izračuna iz Darcy-Weisbachove enačbe

$$\Delta p_{nf} = \xi_{nf} L_{dp} \frac{\rho u_{nf}^2}{2d_1}, \quad (11)$$

kjer je faktor trenja odvisen od korelacije, ki se uporabi za izračun Nusseltovega števila. Za primer, kjer se uporablja Gnielinski korelacija, se izračuna iz $\xi_{nf} = (0,79 \ln(Re_{nf}) - 1,64)^{-2}$, in za primer korelacije, ki jo predlaga [1], se uporabi $\xi_{nf} = 0,109(1 + 100 \nu)^{0,215} Re_{nf}^{-0,159}$.

2.7 Stohastična kolokacijska metoda

Toplotno prevodnost, gostoto, specifično toplotno kapaciteto in viskoznost nanotekočine obravnavamo naključne spremenljivke σ_i z enakomerno porazdeljeno verjetnostjo v omejenem območju $\sigma_i \in (\sigma_{i,min}, \sigma_{i,max})$. Njihova gostota verjetnosti (PDF) je

$$p(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} & \sigma \in (\sigma_{min}, \sigma_{max}) \\ 0 & \text{drugje} \end{cases} \quad (12)$$

Naj bo število naključnih spremenljivk n in naj $y(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ predstavlja deterministični model za izračun inženirskih parametrov toplotnega prenosnika, ki je bil opisan zgoraj. Za izračun pričakovane vrednosti μ_y , variance var_y in standardnega odklona std_y inženirskih parametrov metoda SCM uporabi naslednje izraze [8]:

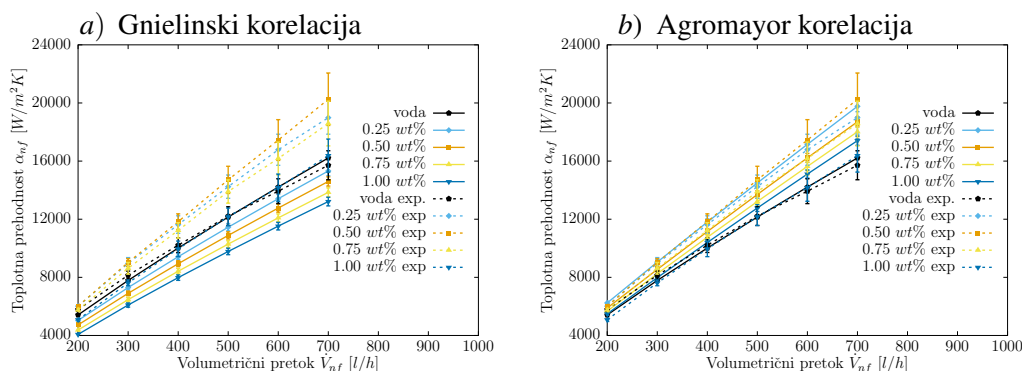
$$Y_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [y(\sigma_1, \dots, \sigma_n)]^i p(\sigma_1) \dots p(\sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n \quad (13)$$

$$\mu_y = Y_1, \quad var_y = Y_2 - \mu_y^2, \quad std_y = \sqrt{var_y} \quad (14)$$

Integral (13) računamo numerično z uporabo Smolyak algoritma [7], ki deluje na zmanjšanem številu integracijskih točk in s tem oceni integral s kar se da majhnim številom izvedb determinističnega modela. Za izračune v tem prispevku smo za $n = 4$ v Smolyak algoritmu uporabili 7 kolokacijskih točk, ki zahtevajo izvedbo 2401 determinističnih izračunov.

3 Rezultati

Gnielinski korelacija predstavlja standardni pristop, ki se uporablja za izračun Nuseltovega števila. Korelacija, ki jo predlaga Agromayor et al. [1] je bila razvita posebej za izbrano nanotekočino GNP v dvocevni toplotni prenosniku. Če primerjamo pričakovane vrednosti in standardni odklon koeficienta prestopa toplote v notranji cevi α_{nf} in eksperimentalne vrednosti (slika 2), opazimo veliko boljše ujemanje z korelacijo, ki jo predlaga Agromayor et al. [1]. To



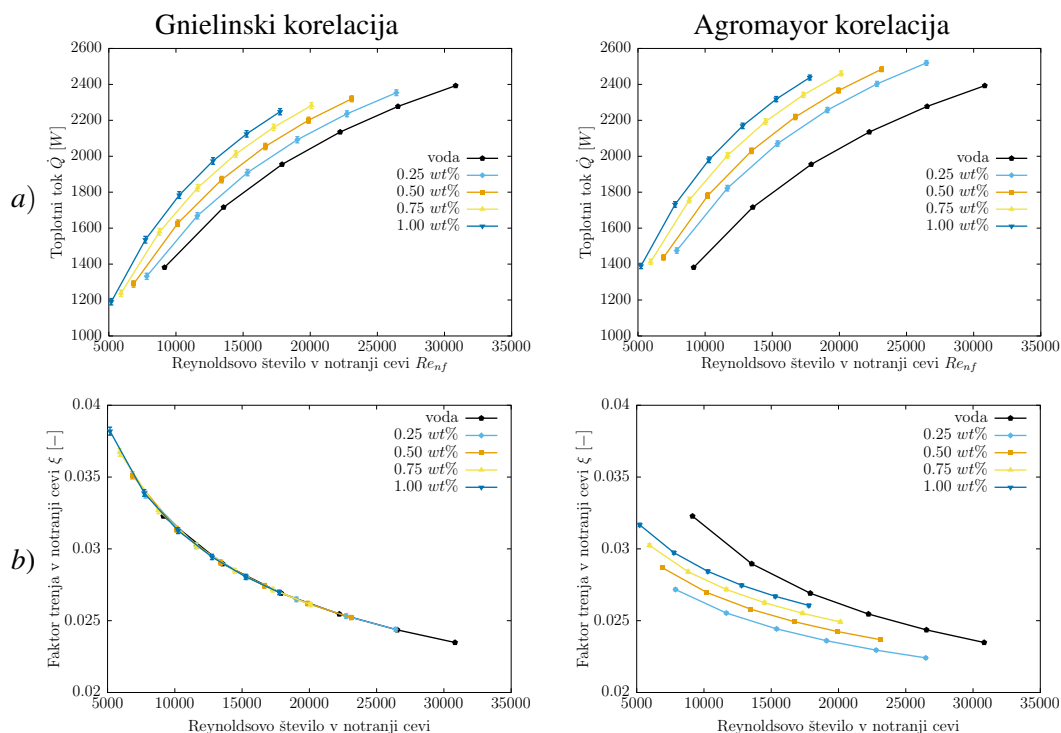
Slika 2: Primerjava toplotne prestopnosti na notranjo cev, izračunanih *a)* Gnielinski (levo) in *b)* Agromayor et al. [1] (desno) korelacijo za dvocevni prenosnik toplote.

je pričakovano, saj je bila ta korelacija določena za nanotekočino GNP in dvocevni prenosnik toplote.

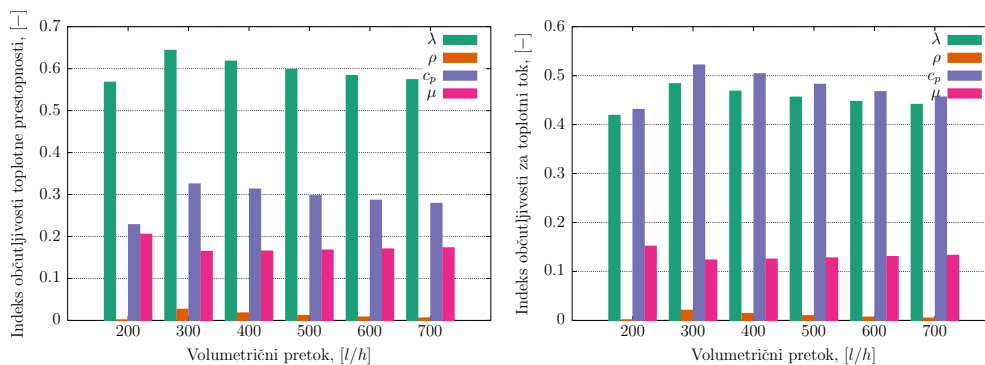
Gnielinski korelacija močno podceni koeficient prestopa toplote pri vseh pretokih, ti so celo nižji, kot pri čisti vodi. Opazimo, da se v primeru uporabe vode namesto nanotekočine numerična napoved zelo dobro ujema z eksperimentom. To nakazuje, da se nanotekočina GNP vede bistveno drugače, kot običajna Newtonska tekočina. Pri uporabi korelacije, ki jo predlaga Agromayor et al. [1] je razlika v izmerjenem in ocenjenem koeficientu prenosa toplote znotraj mej negotovosti. To utrjuje sklep, da negotovosti pri oceni delovanja prenosnika toplote z nanotekočino GNP, ni mogoče pripisati le negotovosti lastnosti nanotekočine. Druga pomembna razlika med modelom in eksperimentom je, da je najprimernejša tekočina za prenos toplote tista z masno koncentracijo GNP 0.25 wt% in ne 0.5 wt%, kot je bilo ugotovljeno v eksperimentu. Na sliki 3 so predstavljeni rezultati za toplotni tok in faktor trenja za notranjo cev. Opazamo, da se toplotni tok povečuje z deležem nanodelcev pri izbranem Reynoldsovem številu. To kaže na boljše toplotne lastnosti (višja toplotna prestopnost), po drugi strani pa je v primeru nanotekočine, za doseganje istega Reynoldsovega števila potreben višji volumetrični tok. Ko primerjamo rezultate za faktor trenja ξ_{nf} na sliki 3 levo, kjer je bila uporabljena Gnielinski korelacija za gladko cev s predlagano eksperimentalno korelacijo avtorja Agromayor et al. na sliki 3 desno lahko opazimo, da je faktor trenja, pridobljen z Gnielinski korelacijo, večji. Eksperimentalni rezultati kažejo, da je faktor trenja odvisen tudi od volumske koncentracije nanodelcev. Tega pojava ni mogoče zajeti s korelacijo za gladko cev, ker je faktor trenja odvisen samo od Reynoldsovega števila. Utemeljitev uporabe te korelacije pa je, da se rezultati za koeficient prestopa toplote vode dobro ujemajo s eksperimentom (slika 2). Zaradi dejstva, da uporabljamo predpostavko, da je delovna tekočina nanotekočina in ne suspenzija, bi za faktor trenja naj veljala enaka odvisnost.

3.1 Analiza občutljivosti

Analizo občutljivosti izvedemo tako, da zgoraj omenjeno analizo ponovimo za primer, ko zgolj enega od parametrov obravnavamo kot naključno spremenljivko, ostale pa obravnavamo kot konstante.



Slika 3: Primerjava *a)* toplotnih tokov in *b)* faktor trenja v notranji cevi, dobljen z uporabo Gnilelinski (levo) in Agromayor et al. [1] (desno) korelacij v dvocevnem prenosniku toplote.



Slika 4: Analiza občutljivosti za koeficient prestopa toplote in toplotni tok. Rezultati so dobljeni z analizo variance za primer 0.5% wt GNP nanotekočine v dvocevnem toplotnem prenosniku.

Indeks občutljivosti definiramo kot razmerje med varianco, ki jo dobimo na tak način, in varianco, ki jo zabeležimo v primeru ko vse parametre obravnavamo kot naključne spremenljivke. Velike vrednosti indeksa občutljivosti kažejo na večji relativni pomen naključne spremenljivke. Rezultati na koeficient prestopa toplote in toplotni tok so prikazani na sliki 4, kjer lahko opazimo, da ima gostota nanotekočine zelo majhen indeks občutljivosti. To pomeni, da na parametre prenosnika toplote ne vpliva negotovost poznavanja gostote nanotekočine. Toplotna prevodnost nanotekočine je najpomembnejši parameter, ki vpliva na koeficient prestopa toplote, medtem ko ima specifična toplotna kapaciteta bistveno manjši učinek. Viskoznost igra še manjšo

vlogo. Rezultati kažejo, da na negotovost ocene toplotnega toka najbolj vplivata negotovosti toplotne prevodnosti in specifične toplotne kapacitete. Gostota in viskoznost imata zanemarljivi vlogi.

4 Zaključki

Prikazali smo uporabo metodo stohastične kolokacije v kombinaciji z empiričnim modelom za oceno delovanja toplotnega prenosnika z uporabo nanotekočine kot delovne tekočine. Raziskali smo vpliv netočnega poznavanja lastnosti nanotekočine na pričakovano delovanje toplotnega prenosnika. Ugotovili smo, da ima največji vpliv na negotovost poznavanje toplotne prevodnosti, pomembni sta tudi viskoznost in specifična toplotna kapaciteta. Najmanj vpliva netočnost poznavanja gostote.

Zahvala

Raziskovalni program št. P2-0196 je sofinancirala Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz državnega proračuna.

Literatura

- [1] R. Agromayor, D. Cabaleiro, A. Pardinas, J. Vallejo, J. Fernandez-Seara, and L. Lugo. Heat transfer performance of functionalized graphene nanoplatelet aqueous nanofluids. *Materials*, 9(6):455, 2016.
- [2] J. Avsec and M. Oblak. The calculation of thermal conductivity, viscosity and thermodynamic properties for nanofluids on the basis of statistical nanomechanics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(21-22):4331–4341, 2007.
- [3] R. Feng. Improving uncertainty analysis in well log classification by machine learning with a scaling algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 196:107995, 2021.
- [4] V. Gnielinski. Heat transfer in concentric annular and parallel plate ducts. *VDI Heat Atlas*, page 701–708, 2010.
- [5] F. P. Incropera. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2006.
- [6] V. Y. Rudyak, A. Minakov, and M. Pryazhnikov. Preparation, characterization, and viscosity studding the single-walled carbon nanotube nanofluids. *Journal of Molecular Liquids*, 329:115517, 2021.
- [7] S. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Soviet Math. Dokl.*, 4:240–243, 1963.
- [8] A. Šušnjara, O. Verhnjak, D. Poljak, M. Cvetković, and J. Ravnik. Stochastic-deterministic boundary element modelling of transcranial electric stimulation using a three layer head model. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 123:70–83, 2021.



Več-parametrično računsko modeliranje upogibno-protipotresnih metapovršin

Julius Kaplunov^{1,2}, Ljudmila Prikazchikova², Rudolf Pušenjak¹, Anatolij Nikonov¹

Multi-parametric computational modelling of flexural-seismic metasurfaces

Povzetek. Članek obravnava rezultate parametrične analize protipotresne upogibne metapovršine, ki je bila v zadnjem obdobju razvita na osnovi sestava elastičnega polprostora v interakciji s periodičnim poljem Euler-Bernoullijevih nosilcev. Eksplicitna približna formula za konstrukcijo disperzijskih krivulj je prirejena za nadzorovanje in upravljanje površinskih Rayleighovih valov, vključno z izračuni pripadajočih zapornih pasov. V članku so predstavljeni numerični zgledi.

Abstract. The results of parametric analysis of a seismic flexural metasurface recently developed starting from the setup of an elastic half-space interacting with a periodic array of Euler-Bernoulli beams, have been discussed. Explicit approximate formula for dispersion curves has been adapted for control of the surface Rayleigh wave, including evaluation of associated stop bands. Numerical examples have been presented.

1 Uvod

Metamateriali se med različnimi drugimi aplikacijami načrtujejo tudi za nadzorovanje in upravljanje valovanj v elastičnih strukturah. To zamisel lahko razširimo na površinske valove, vključno z razširjanjem valovanj na elastičnih površinah, imenovanih metapovršine, glej [6]. Metapovršine imajo v primerjavi z metamateriali znatne prednosti in jih relativno lahko izdelujemo.

Metapovršine imajo, kot vse kaže, velik potencial na področju zaščite pred potresnimi površinskimi valovi. Tako na primer metapovršine lahko zasnujemo z vključki v obliki resonatorjev, glej npr. [7]. Od takšne strukture pričakujemo, da ustvarja frekvenčne zaporne pasove, v katerih se površinski potresni valovi ne morejo razširjati zaradi interakcij med induciranimi polji valovanj in posameznimi resonatorji.

V zadnjem obdobju je bila razvita nova asimptotična formulacija, ki je bila prvotno vpeljana v [4], glej tudi novejša publikacije [5], ki omogoča analizo interakcij med elastičnimi

¹ Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto, Slovenija

² School of Computing and Mathematics, Keele University, UK

površinskimi valovi in poljem Euler-Bernoullijevih nosilcev, pritrjenih na polprostor [8]. Ta asimptotični pristop sestoji iz eksplicitne hiperbolične enačbe, ki obvladuje razširjanje Rayleighovih valov in psevdo-statične eliptične enačbe, ki opisuje upadanje valovanja v notranjost polprostora. Prvotno [8] je bil ta pristop uporabljen v analizi raznovrstnih dinamičnih pojavov v bližini površin in se je izkazal za močno orodje pri številnih problemih elastodinamike, vključno s tridimenzionalnimi problemi z gibljivimi obremenitvami in učinkom dodanih prednapetosti v elastičnem polprostoru. Omenjeni hiperbolično-eliptični model je bil uporabljen tudi za niz palic, ki podpirajo longitudinalne vibracije in so pritrjene na polprostor [3]. V [8] je bil razviti pristop še nadalje razširjen z vključitvijo učinkov upogibnega gibanja v tankih nosilcih, pri čemer so bili obravnavani različni tipi kontaktnih pogojev na mestu sklopa resonatorjev s polprostorom.

V pričujoči študiji, ki temelji na analitični obravnavi, predstavljeni v [8], je v numerični obliki predstavljen učinek parametrov problema, vključno z geometrijo nosilcev, pri čemer je pozornost usmerjena na lego zapornih pasov. Prikazan je tudi znaten potencial, ki ga nudi uporaba eksplicitne približne formule v računalniških eksperimentih s protipotresnimi metapovršinami.

2 Razširjanje valovanja v elastičnem polprostoru s periodičnim nizom nosilcev pripetih na površino

Obravnavamo razširjanje površinskih valov v elastičnem polprostoru ($-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, $0 \leq x_3 < \infty$) nad katerim je pritrjen niz tankih Euler-Bernoullijevih nosilcev. V analizi se osredotočamo na harmonično valovanje, ki se širi vzdolž površine, v notranjost polprostora pa eksponentialno upada.

V primeru ravninskih deformacij se pomiki $u_1(x_1, x_3, t)$ in $u_3(x_1, x_3, t)$, kjer t pomeni čas, izražajo s pomočjo valovnih potencialov $\varphi(x_1, x_3, t)$ and $\psi(x_1, x_3, t)$, glej npr. [1]

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad \text{in} \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1)$$

Valovne potenciale opisujejo hiperbolične enačbe

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

kjer sta $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ in $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, z ρ označujemo masno gostoto na enoto prostornine, λ in μ pa sta Laméjeva parametra.

Upogibno gibanje tankih elastičnih nosilcev, ki oblikujejo površino elastičnega polprostora in tvorijo polje resonatorjev, obvladuje Euler-Bernoullijeva enačba nosilca

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial x_3^4} + M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

kjer so $U(x_3, t)$ pomiki nosilca, E je Youngov modul, M je masa na enoto dolžine resonatorjev, I pa pomeni vztrajnostni moment prečnega prereza nosilcev.

Na koncih nosilcev $x_3 = -L$ (kjer z L označujemo dolžino nosilca) predpostavljamo, da so nosilci prosti, zaradi česar velja

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x_3^3} = 0. \quad (4)$$

Posebnosti dinamičnega obnašanja, ki ga analiziramo, so močno odvisne od robnih pogojev, s katerimi izrazimo lastnosti kontakta med nosilci in polprostorom.

3 Primer resonatorjev v obliki prosto podprtih nosilcev

Kot zgled si oglejmo niz resonatorjev, ki so na površini polprostora prosto podprti. Po porazdelitvi diskretnih resonatorjev imamo v tem primeru [8]

$$U(t, 0) = u_1|_{x_3=0} \quad (5)$$

in

$$N(t, 0) = l^2 \sigma_{31}|_{x_3=0}, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} \right|_{x_3=0} = 0, \quad (6)$$

kjer je l razdalja med resonatorji, $N = IE \frac{\partial^3 U}{\partial x_3^3}$, σ_{31} pa označuje napetost, določeno z enačbo

$$\sigma_{31} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}. \quad (7)$$

Disperzijska relacija se za podani problem izraža v obliki

$$[\lambda k^2 - (\lambda + 2\mu)k^2 \alpha^2][\mu k^2(1 + \beta^2) + k\hat{N}\beta] + 2\mu k^2 \beta(2\mu k^2 \alpha + k\hat{N}) = 0, \quad (8)$$

kjer je k valovno število, ω je krožna frekvenca in veljajo relacije

$$\hat{N} = \frac{EI}{l^2} \frac{\cos(KL) \cosh(KL) - 1}{\cosh(KL) \sin(KL) - \cos(KL) \sinh(KL)},$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c_1 k}\right)^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{c_2 k}\right)^2}, \quad K = \left(\frac{M}{EI}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

Zgornjo formulo lahko poenostavimo pri valovanjih, ki se razširjajo s hitrostmi, ki so blizu Rayleighovemu valu ter so najbolj zanimiva za potresne aplikacije. Če predpostavimo, da velja $\left|1 - \frac{\omega}{c_R k}\right| \ll 1$, kjer c_R označuje hitrost Rayleighovega vala, lahko izpeljemo enostavno eksplisitno formulo za določitev valovnega števila

$$k = -\hat{N} \beta_R \frac{1 - \beta_R^2}{4\mu B} + \sqrt{\hat{N}^2 \beta_R^2 \left(\frac{1 - \beta_R^2}{4\mu B}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c_R^2}}, \quad (9)$$

kjer je $B = \frac{\beta_R}{\alpha_R}(1 - \alpha_R^2) + \frac{\alpha_R}{\beta_R}(1 - \beta_R^2) - (1 - \beta_R^4)$ ter velja $\alpha_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}$, $\beta_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}$.

Enak rezultat izhaja tudi iz specializiranega hiperbolično-eliptičnega modela za Rayleighov val, glej [8] ter [5] za več podrobnosti.

4 Analiza vpliva parametrov problema na disperzijo valovanja na metapovršini

Za izvedbo analize disperzije valovanja na površini polprostora s periodičnim nizom nosilcev pripetih na njegovo površino smo izbrali ustrezne vrednosti parametrov problema, ki so prikazani v tabeli 1. Nosilci so valjaste oblike z okroglim prerezo, zato v izračunu vztrajnostnega momenta uporabimo formulo $I = \frac{\pi h^4}{64}$, kjer je h premer nosilca.

Tabela 1: Vrednosti parametrov za resonatorje in polprostor.

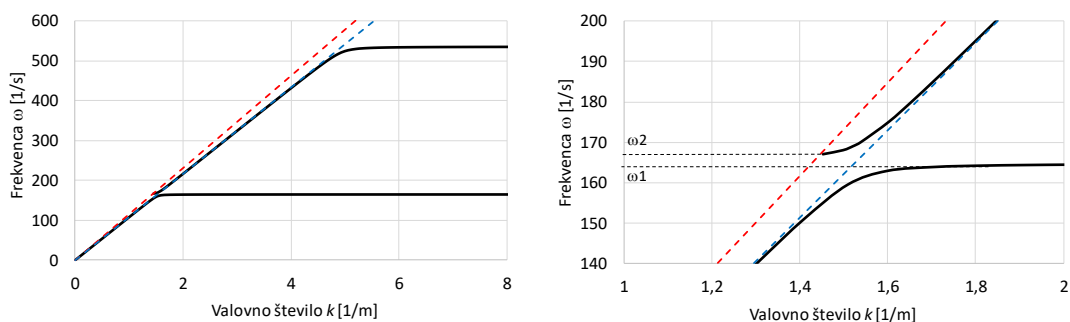
Fizikalni parametri	Vrednosti
Razmik med resonatorji, l	2 m
Gostota polprostora, ρ	1500 kg/m ³
Lamejev parameter λ	50 MPa
Lamejev parameter μ	20 MPa
Dolžina resonatorjev, L	8 m
Premer resonatorjev, h	0,5 m
Gostota resonatorjev, ρ_r	500 kg/m ³
Youngov modul resonatorjev, E	15 GPa

Z ozirom na izbrane vrednosti parametrov problema, prikazane v tabeli 1, so bile izračunane hitrosti longitudinalnega valovanja c_1 , tranzverzalnega valovanja c_2 ter Rayleigheva hitrost valovanja c_R ; njihove vrednosti so prikazane v tabeli 2.

Tabela 2: Vrednosti hitrosti valovanja na površini polprostora.

Fizikalni parametri	Vrednosti
hitrost c_1	244,95 m/s
hitrost c_2	115,47 m/s
hitrost c_R	108,08 m/s

Na sliki 1 sta prikazani prvi dve disperzijski krivulji z uporabo izbranih parametrov. Horizontalna asimptotična poteka, ki ju ustvarjajo upogibne resonance nosilcev, razširjajo območje veljavnosti asimptotičnega pristopa onstran režima majhnih vrednosti valovnih števil k in majhnih napetosti, kjer lahko pričakujemo veliko natančnost metode. Upogibne resonance, povezane s temi asimptotičnimi poteki, ustvarjajo fine globoke pasovne vrzeli, za katere se je izkazalo, da imajo poseben fizikalni pomen pri nekaterih inženirskih aplikacijah, glej npr. [2].



Slika 1: Disperzijske krivulje za površinske valove na polprostoru z resonatorji.

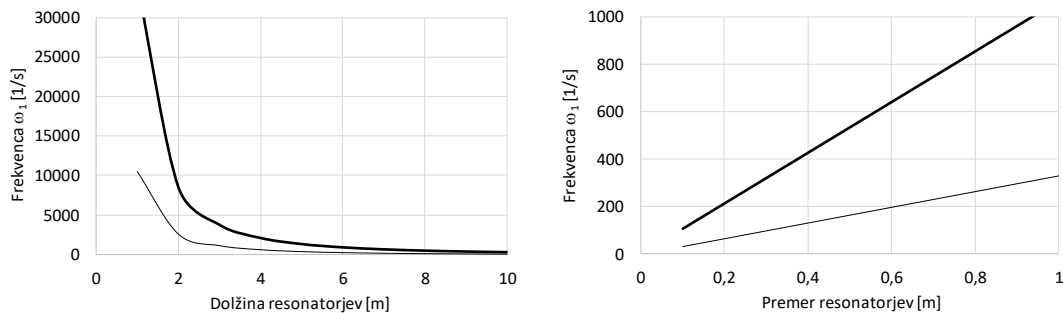
Na sliki 1 je z ω_1 označena frekvenca, ki pripada spodnjemu robu pasu, in ki ustreza naravni frekvenci nosilca s prostim zgornjim koncem in prosto podprtim spodnjim koncem. Ustrezno

je z ω_2 označena frekvenca, ki pripada zgornjemu robu pasu, in ki ustreza naravni frekvenci nosilca z obema prostima koncema.

Ti dve frekvenci prikazujeta dva limitna odziva analiziranega sistema »polprostor - resonatorji«. Prvi odziv ustreza Rayleighovemu valovanju na prosti površini elastičnega polprostora, drugi odziv pa je povezan s prostim nihanjem nosilcev z zgornjim prostim koncem in prosto podprtim spodnjim koncem.

Polne črte na sliki 1 prikazujejo prvi dve veji disperzijskih krivulj izračunanih s pomočjo formule (9). Črtkana rdeča premica predstavlja valovno črto, ki ustreza strižni hitrosti valovanja, z modro barvo pa je označena črtkana premica, ki ustreza Rayleighovi hitrosti valovanja. Povezane horizontalne asimptote prikazujejo ničelne fazne in skupinske hitrosti, ki ne podpirajo širjenja valovanja vzdolž površine polprostora. Na ta način se energija površinskega vala spremeni v energijo upogibnega nihanja nosilca v skladu s prvotno idejo upogibne metapovršine.

Analiza vpliva geometrijskih karakteristik resonatorjev v obliki nosilcev valjaste oblike je prikazana na sliki 2. Na levi strani slike 2 je s tanko črto prikazano, kako se spremeni frekvenca ω_1 , ki pripada prvi veji disperzijske krivulje, če povečamo dolžino nosilca, z debelejšo črto pa je ta odvisnost prikazana za drugo vejo disperzijske krivulje. Na desni strani slike 2 sta prikazani odvisnosti frekvence ω_1 za obe veji disperzijske krivulje s povečanjem premera nosilca.



Slika 2: Vpliv dolžine (levo) in premera (desno) resonatorjev na frekvenco ω_1 .

Iz prikazanih diagramov na sliki 2 je razvidno, da tako zmanjševanje vrednosti frekvence ω_1 , ki pripada drugi veji disperzijske krivulje, z večanjem dolžine nosilca L , kot tudi njeno naraščanje z večanjem premera resonatorja h poteka hitreje v primerjavi z ustreznimi spremembami vrednosti frekvence ω_1 za prvo vejo disperzijske krivulje.

5 Zaključki

V članku je analiziran periodični niz upogibnih resonatorjev, ki so pritrjeni na površino elastičnega polprostora. S prilagoditvijo kontaktnih pogojev so resonatorji obravnavani kot Euler-Bernoullijevi nosilci, ki so na površini polprostora prosto podprti. Za disperzijo harmoničnih valov, ki se razširjajo s hitrostmi, ki so blizu hitrosti Rayleighovih valov, je izpeljana enostavna asimptotična formula.

Prikazane disperzijske krivulje kažejo vrsto zelo ozkih pasovnih vrzeli v okolici naravnih frekvenc nosilca s prostim zgornjim in prosto podprtim spodnjim koncem. Z razvitim

pristopom je prikazano, da lahko takšne sisteme uporabljamo pri nadzoru širjenja površinskih valov.

V članku je prav tako prikazan tudi vpliv parametrov problema, to je dolžine in premera resonatorskih nosilcev na dinamično obnašanje analizirane metapovršine, vključno z lego in s širino zapornih pasov.

Zahvala

Avtorji se zahvaljujejo Javni Agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS) za sofinanciranje raziskav v okviru temeljnega projekta J2-9224.

Literatura

- [1] J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland: Amsterdam, the Netherlands, 1973.
- [2] A. Colombi, P. Roux, M. Rupin, *Sub-wavelength energy trapping of elastic waves in a metamaterial*, *J. Acoust. Soc. Am.* 136, EL192–EL198, 2014.
- [3] N. Ege, B. Erbas, J. Kaplunov, P. Wootton, *Approximate analysis of surface wave-structure interaction*, *J. Mech. Mater. Struct.* 13, 297–309, 2018.
- [4] Y. D. Kaplunov, L. Y. Kossovich, *Asymptotic model of Rayleigh waves in the far-field zone in an elastic half-plane*, *Dokl. Phys.* 49, 234–236, 2004.
- [5] J. Kaplunov, D. A. Prikazchikov, *Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves*, *Adv. Appl. Mech.* 50, 1–106, 2017.
- [6] A. A. Maradudin, *Structured Surfaces as Optical Metamaterials*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [7] P. Roux, D. Bindi, T. Boxberger, A. Colombi, F. Cotton, I. Douste-Bacque, S. Garambois, P. Gueguen, G. Hillers, D. Hollis, T. Lecocq, I. Pondaven, *Toward Seismic Metamaterials: The METAFORÉ Project*, *Seismol. Res. Lett.* 89(2A), 582-593, 2018.
- [8] P. T. Wootton, J. Kaplunov, D. J. Colquitt, *An asymptotic hyperbolic–elliptic model for flexural-seismic metasurfaces*, *Proc. R. Soc. A* 475: 20190079, 2019.



Optimizacija oblike kot orodje za post-procesiranje optimalne topologije nosilnega konstrukcijskega dela

M. Kečl¹, B. Harl¹, J. Predan¹ in N. Gubeljak¹

Shape optimization as a tool for optimal topology post-processing of a load-carrying structural part

Povzetek. Prispevek obravnava problematiko in možne rešitve za optimizacijo oblike nosilnih konstrukcijskih delov v posebnih okoliščinah. Konkretno je pozornost usmerjena na post-procesiranje rezultata dobljenega s topološko optimizacijo. Pri tem predpostavljamo, da je prehod iz topološke optimizacije na optimizacijo oblike narejen brez vmesne izdelave novega CAD in MKE modela. Namesto tega potreben MKE model naredimo z odstranjevanjem nematerialnih končnih elementov originalnega MKE modela. To ima za posledico precej specifične okoliščine, pri čemer so najpomembnejše prisotnost zelo majhnih in/ali degradiranih končnih elementov ter nazobčanih rezanih površin. To pa zahteva specifične oziroma nestandardne rešitve, da zagotovimo učinkovit in robusten proces optimizacije oblike.

Abstract. The paper addresses the problems and possible solutions for shape optimization of load-carrying structural parts under special circumstances. More precisely, attention is focused on post-processing of the result derived by topology optimization. It is supposed that the transition from topology to shape optimization is done without creating new CAD and FEA models. Instead, the needed FEA model is derived by removal of void finite elements from the original FEA model. This results in specific circumstances, most important being the presence of tiny or/and geometrically distorted finite elements and jagged cut surfaces. This requires specific, i.e., non-standard solutions in order to assure an efficient and robust shape optimization process.

1 Uvod

Optimizacija topologije postaja nujni sestavni del projektiranja nosilnih konstrukcijskih delov. Če uporabljamo klasični pristop, ki temelji na minimizaciji deformacijske energije, lahko namreč konstrukcijski del oblikujemo tako, da ima ob predpisanem volumnu najvišjo možno togost, napetosti pa so *pretežno* na najnižjih možnih nivojih. Beseda *pretežno* tukaj pomeni to, da v specifičnih lokalnih regijah napetosti niso najnižje možne, pač pa bi jih lahko še znižali z ustreznimi popravki geometrije topološko optimiziranega dela.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

Popravljanja geometrije se lahko lotimo z uporabo optimizacije oblike. Tukaj sta možni dve izvedbeno precej različni varianti, ki ju lahko na kratko opišemo tako:

- **Varianta 1:** rezultat topološke optimizacije uporabimo za izdelavo novega CAD modela optimiziranega dela; na osnovi CAD modela se nato pripravi nov MKE model in izvede klasična optimizacija oblike (glej na pr. [1]), ki lahko temelji na optimizaciji geometrijskih parametrov nove MKE mreže končnih elementov (KE).
- **Varianta 2:** rezultat topološke optimizacije uporabimo direktno v tem smislu, da vzamemo originalni MKE model iz katerega odstranimo nematerialne KE (ang. void elements); modificiran MKE model z odrezanimi nematerialnimi KE nato uporabimo za optimizacijo oblike, ki pa ne more temeljiti na optimizaciji geometrijskih parametrov prvotne mreže KE.

Prednosti variante 1 so v tem, da lahko optimizacijo oblike izvedemo v klasičnem smislu, to je, na osnovi kvalitetne MKE mreže in njenih geometrijskih parametrov. Vendar pa se v praksi vse pogosteje dogaja, da izdelavo klasičnega CAD modela opuščamo, ali pa se ta naredi čisto na koncu, ko je geometrija optimalnega dela že natančno in dokončno določena. V teh primerih pride v poštev varianta 2, ki omogoča eleganten prehod iz topološke optimizacije v optimizacijo oblike končnega nosilnega dela. Zaradi tega lahko na ta postopek gledamo kot na neke vrste post-procesiranje rezultata topološke optimizacije. Zaradi specifikke MKE modela pri tem ne gre za klasično optimizacijo oblike, ampak za izvedbeno precej drugačno zadevo, pri kateri je treba čim boljše rešiti kar nekaj tehničnih in numeričnih težav. V tem prispevku predstavljamo tako razloge za omenjene težave kakor tudi konkretne rešitve, ki se trenutno uporabljajo v komercialnem programskem paketu CAESS ProTOp [2]. Struktura prispevka je naslednja: v poglavju 2 je predstavljen modificiran MKE model, ki predstavlja osnovo za vse nadaljnje operacije, v poglavju 3 pa so opisani postopki popravljanja njegove geometrije.

2 Modificiran MKE model z odrezanimi nematerialnimi elementi

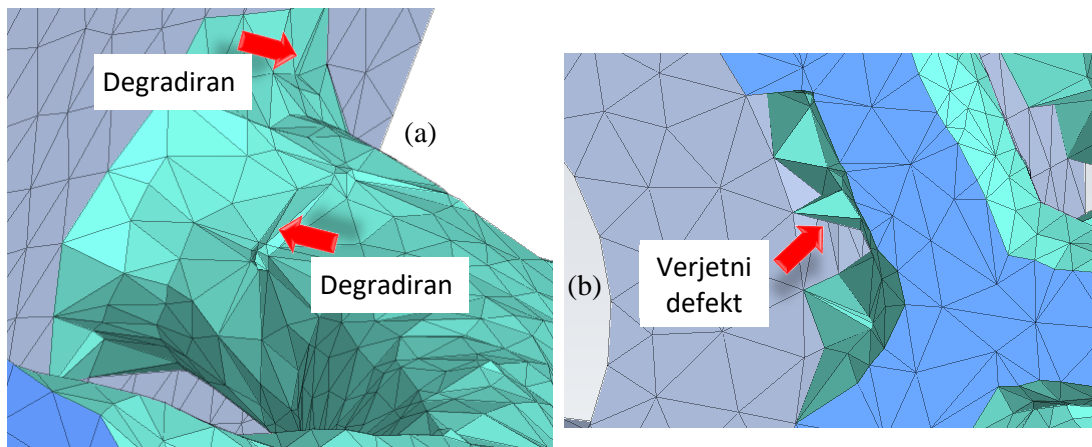
Za razvoj učinkovitih postopkov popravljanja geometrije je treba najprej natančno vedeti s kakšnim tipom numeričnega modela imamo opravka. V našem primeru je to MKE model nosilnega dela, kateremu smo z ustreznim numeričnim postopkom odstranili oziroma *odrezali* nematerialne KE. Morda je tukaj na mestu opozoriti, da tudi sam postopek rezanja KE ni ravno trivialen in da smo prisiljeni v kompromisno izbiranje med natančnostjo rezanja in kvaliteto mreže rezultirajočega MKE modela – ta MKE model bomo v nadaljevanju zaradi enostavnosti imenovali kar *modificiran model*.

Najprej naštejmo nekaj geometrijskih lastnosti modificiranega modela, oziroma pripadajoče mreže KE:

- Mreža nima več povezave s kakšnimi geometrijskimi parametri, preko katerih bi lahko optimirali obliko; vse kar o mreži vemo, so: (a) pozicije vozlišč KE, (b) topologija KE, ter (c) podatek o tem kateri deli zunanjega površja so *originalne* površine in kateri so tako imenovane *rezane* površine.

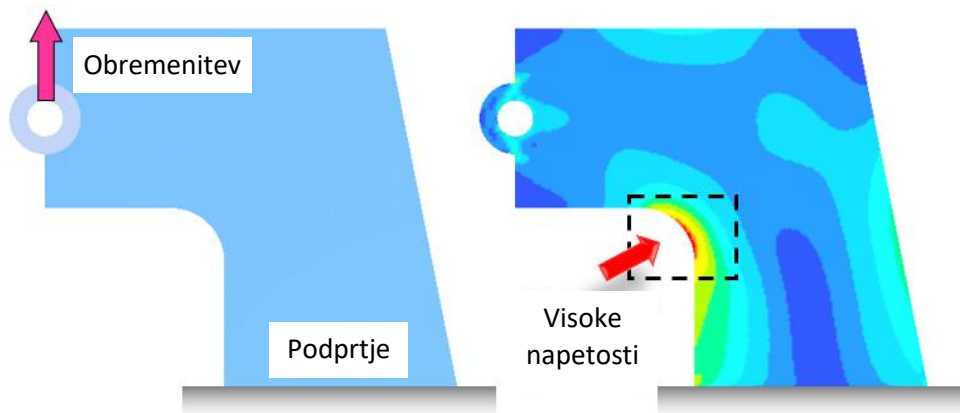
- Mreža vsebuje relativno veliko: (a) izredno *majhnih* KE in (b) zelo *geometrijsko degradiranih* KE (zelo slaba kvaliteta oziroma zelo nizek razmernik *volumen/površina*), slika 1a.
- Mreža lahko vsebuje precej geometrijskih defektov in artefaktov, predvsem na (a) krajiščih ozkih oziroma podolgovatih praznin, ki so nastale z rezanjem materiala, ter (b) na stičiščih fiksnih in prostih optimizacijskih regij, slika 1b.
- Rezano površine modela niso gladke, pač pa so lahko celo precej *nazobčane*.

Verjetno je precej očitno, da imamo torej opravka z dokaj problematično mrežo KE, kar ima seveda posledice pri izbiri oziroma razvoju numeričnih postopkov za popravljanje njene geometrije.



Slika 1: Modificirana mreža KE vsebuje precej: (a) majhnih in/ali geometrijsko degradiranih KE ter (b) geometrijskih defektov in artefaktov

Namen popravljanja geometrije v našem primeru seveda ni le glajenje zunanjih površin. To je stranski cilj, ki pa je manj pomemben od glavnega cilja: znižanje napetostnih nivojev in koncentracij napetosti. Optimizacija topologije načelno mora določiti geometrijo, ki ne izkazuje koncentracij napetosti. Vendar pa je pomembno opozoriti na to, da slednje velja le v primeru neskončne domene brez geometrijskih omejitev. V praksi so optimizacijske domene seveda vedno omejene, razen tega pa dodatne geometrijske omejitve vrinemo z uporabo posebnih orodij, kot so na primer konfiguratorji [3]. Problem omejene domene ilustrira slika 2, kjer na označenem območju dobimo koncentracijo napetosti tudi po opravljeni topološki optimizaciji. Če bi želeli to preprečiti, bi morali razširiti optimizacijsko domeno.



Slika 2: Omejena optimizacijska domena ima lahko v nekaterih regijah za posledico koncentracije napetosti tudi po optimizaciji topologije

Omejene optimizacijske domene lahko torej rezultirajo v koncentracijah napetosti na originalnih površinah našega konstrukcijskega dela. V primeru, da lahko geometrijo teh površin vsaj še nekoliko korigiramo, je to eden od poslov, ki jih lahko prevzame optimizator oblike. Vendar pa je običajno večino dela treba opraviti na rezanih površinah, kjer so lahko koncentracije napetosti posledica uporabe konfiguratorjev. Rezano površine lahko praviloma izdatneje popravljamo, vendar pa so te površine praviloma tudi dokaj nazobčane in vsebujejo precej majhnih ali degradiranih KE. Zato lahko sklepamo, da bo tukaj naloga za optimizator oblike dokaj težavna.

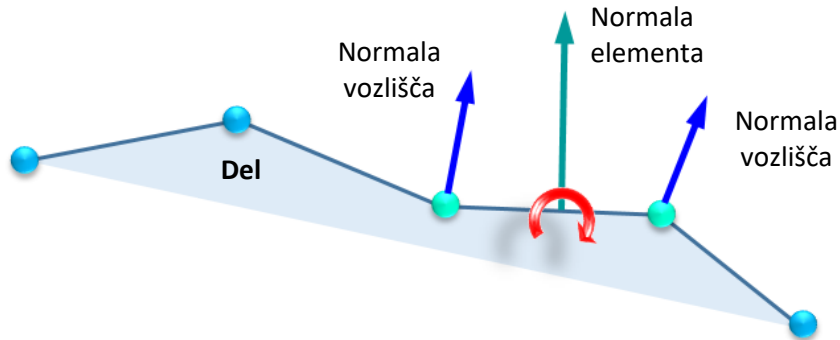
3 Popravljanje geometrije modificiranega MKE modela

Za uspešno implementacijo optimizacije oblike modificiranega MKE modela moramo izhajati iz predpostavke, da je površina, ki jo popravljamo nazobčana. Izračun odvodov napetosti glede na pozicije vozlišč torej tukaj verjetno nima pretiranega smisla, saj je malo verjetno, da bi na osnovi teh informacij lahko zgradili robusten in zanesljiv postopek. Zaradi tega smo se reševanje te naloge lotili iz povsem druge smeri, s čimer smo želeli maksimizirati robustnost in zanesljivost algoritma. Postopek, ki smo ga razvili temelji na tem, da je vsak optimizacijski korak sestavljen iz dveh popravkov, in sicer:

- popravek za zmanjšanje geometrijske nazobčanosti površine in
- popravek za zmanjšanje koncentracij napetosti.

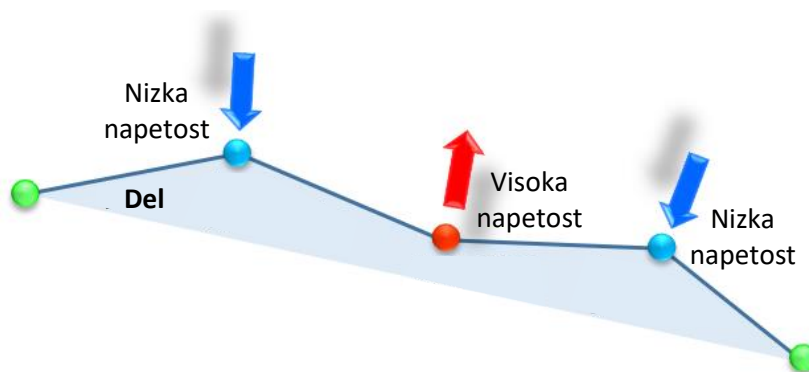
Popravek za zmanjšanje geometrijske nazobčanosti površine je povsem geometrijska operacija, pri kateri naredimo popravke pozicij vozlišč tako, da normale ploskev KE na površju čim bolj poravnamo s srednjo vrednostjo vozliščnih normal (vozlišč, ki definirajo ploskev KE

na površju), slika 3. Numerične izkušnje kažejo, da ta postopek lepo gladí površje modela, brez da bi opazili kakšne negativne pojave, kot je na primer pretirano krčenje vitkih materialnih povezav.



Slika 3: Popravek za zmanjšanje geometrijske nazobčanosti površine

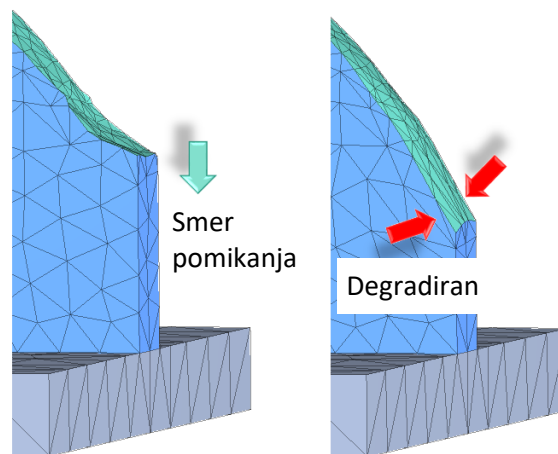
Popravek za zmanjšanje koncentracij napetosti pa temelji na rezultatih MKE analize, saj za njegov izračun potrebujemo napetostno stanje (rabimo samo napetosti, ne potrebujemo pa njihovih odvodov glede na pozicije vozlišč). Ta popravek predpostavlja, da se koncentracije napetosti pojavljajo na vbočenih delih zunanjske površja ter da lahko te napetosti zmanjšamo, če vozlišča z višjimi napetostmi pomikamo v smeri zunanjske normale površja. V dejanski implementaciji lahko višje obremenjena vozlišča pomikamo navzven, nižje obremenjena pa navznoter, slika 4. Pri tem je treba opozoriti na dejstvo, da zmanjšanje napetosti s pomikanjem vozlišča navzven ni teoretično zajamčeno. Vendar pa praksa na realnih primerih kaže, da je ta postopek presenetljivo učinkovit.



Slika 4: Popravek za zmanjšanje koncentracij napetosti

4 Praktična izvedba optimizacije oblike

Ko je način popravljanja geometrije načelno znan, je treba seveda vse to implementirati v delujoč, učinkovit in robusten postopek. V praksi se izkaže, da nas tukaj čaka glavnina dela. Pri tem je potrebno implementirati nove podporne algoritme, ki so v bistvu bolj zapleteni od postopkov, s katerimi dejansko popravljamo geometrijo. Natančen opis teh podpornih algoritmov presega okvir tega prispevka. Zaradi tega bomo izpostavili le najbolj bistvene zadeve. Te bomo na kratko predstavili znotraj opisa enega kompletnega optimizacijskega koraka.



Slika 5: Sprotno popravljanje kvalitete elementov na in pod popravljenim površjem je nujno, da postopek optimizacije nebi obtičal

Optimizacija oblike je seveda iterativen postopek, ki se sestoji iz niza zaporednih optimizacijskih korakov. V našem primeru je treba v vsakem koraku izvesti naslednje operacije:

- **Analiza geometrije površja:** izračun vseh zunanjih normal ter dopustnih načinov oziroma smeri gibanja vozlišč na površju. Namreč, medtem ko so vozlišča na rezanih površinah dokaj prosta, pa je gibanje vozlišč na originalnih površinah precej omejeno; te omejitve oziroma dopustne smeri gibanja morajo biti natančno znane.
- **Čiščenje in popravljanje mreže (opcijsko):** občasno je potrebno (običajno ročno) zagnati orodje, za eliminacijo majhnih ali zelo pokvarjenih elementov. To orodje mora tudi pregledati mrežo KE za morebitne defekte in jih po možnosti popraviti.
- **Izboljšanje kvalitete mreže:** zaradi lastnosti modificiranega MKE modela je to obvezen postopek v vsakem koraku. Najpomembnejša naloga tega algoritma je, da popravlja kvaliteto KE na površju in tik pod površjem, saj bi sicer optimizacija oblike hitro obtičala zaradi nesprejemljive geometrijske degradacije KE, slika 5.

- **Popravek oblike:** izvedemo koraka za zmanjšanje nazobčanosti površja ter za znižanje koncentracij napetosti.

Vse našete algoritme je treba implementirati namensko, saj je treba upoštevati naslednja dejstva:

- Opravka imamo z velikim mrežami KE, saj je modificiran MKE model pridobljen iz modela za topološko optimizacijo; to pomeni, da imamo hitro opravka z mrežo KE velikosti nekaj deset milijonov elementov.
- Zaradi velikih mrež KE morajo biti vsi našeti algoritmi narejeni tako, da delujejo samo na aktivnih regijah, ki so praviloma le lokalne okolice površja, kjer se izvaja popraviljanje geometrije, slika 6.
- Vse operacije, ki spreminjajo pozicije vozlišč je treba sproti nadzorovati v smislu kvalitete vpletenih KE. Degradacije kvalitete so lahko dopuščene le izjemoma, nikakor pa nikoli kak KE ne sme postati singularen.
- Vse algoritme je treba implementirati tako, da se maksimizira možnosti paralelizacije procesiranja. Vpleteni algoritmi se v osnovi namreč slabo paralelizirajo, računski napor pa so precejšnji in se ponavljajo v vsakem optimizacijskem koraku. Vsako povečanje stopnje paralelizacije je zato z vidika učinkovitosti zelo pomembno in dobrodošlo.



Slika 6: Aktivne regije (obarvano rdeče), kjer tečejo postopki čiščenja, popraviljanja in izboljševanja kvalitete mreže KE

5 Zaključek

Upoštevanje vseh predstavljenih priporočil in skrbno načrtovanje ter razvoj vseh vpletenih algoritmov zagotovo obrodi sadove. Ko so ti postopki enkrat dobro usklajeni in stabilni, s tem v bistvu dosežemo skoraj neopazen prehod med optimizacijo topologije in oblike. To pa je

scenarij, ki ga razvojni inženirji zelo cenijo. S tem si namreč lahko prihranimo precej napornega dela vezanega na pripravo novega CAD in MKE modela. Pod črto tak postopek omogoča precej hitrejši razvoj prototipnih rešitev, pri katerih so napetostna polja glede na okolščine praktično najboljša možna.

Literatura

- [1] KEGL, M. *Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept*. International journal for numerical methods in engineering 49, 1571–1588, 2000.
- [2] <https://caess.eu/site/Software.html>
- [3] Harl B, Predan J, Gubelj N and Kegl M. *On configuration-based optimal design of load-carrying lightweight parts*. International journal of simulation modelling 16(2), 219–228, 2017.



Numerično modeliranje kavitacijske erozije in abrazije delcev na profilu krila NACA 0015

Luka Kevorkijan¹, Jure Ravnik¹ in Ignacijo Biluš¹

Numerical modeling of cavitation erosion and particle abrasion on a NACA 0015 hydrofoil

Povzetek. Predstavljeno je modeliranje abrazije delcev in kavitacijske erozije na primeru profila krila NACA 0015. Cilj tega dela je bil združiti obravnavo obeh mehanizmov, kar je v tem delu izraženo s skupno globino erozijskega profila. Za napoved kavitacijske erozije je uporabljen model Schenke-Melissaris-van Terwisga, ki temelji na prenosu potencialne energije kavitacijskih struktur na površino stene. Za napoved abrazije delcev je uporabljen empirični Ahlertov model z McLauryjevimi koeficienti. Napovedana je kombinirana obraba na sesalni strani krila s prevladujočim vplivom kavitacijske erozije, na tlačni strani in na sprednjem robu pa zgolj zaradi abrazije delcev.

Abstract. Particle abrasion and cavitation erosion modelling of a NACA 0015 hydrofoil is presented. The goal of this work was to consider erosion due to both mechanisms in a unified framework, which is accomplished via a total erosion profile depth. Schenke-Melissaris-van Terwisga cavitation erosion model, which transfers potential energy of cavitation structures to the wall surface, is used to predict cavitation erosion. For particle abrasion prediction an empirical Ahlert model is used with McLaury coefficients. Combined wear is predicted on suction side of the hydrofoil with prevailing influence of cavitation erosion. On pressure side and leading edge only particle abrasion is predicted.

1 Uvod

Hidravlične turbine v hidroelektrarnah so projektirane za obratovanje v točki največjega izkoristka, vendar pa dejansko obratujejo v širokem razponu režimov, tako zaradi spremenljivosti odjema v omrežju kot tudi zaradi spremembe razpoložljivega pretoka. V določenih obratovalnih režimih se lahko pojavi kavitacija, ki vodi v izgubo materiala pretočnih delov hidravlične turbine. Hkrati so v rekah prisotni sedimenti, ki lahko neodvisno od pojava kavitacije povzročajo abrazijske poškodbe ali povročajo poškodbe v interakciji s kavitacijo.

Suspendirani delci v tekočini se ob trku s steno odbijejo in pri tem oddajo del gibalne količine steni. Odvisno od hitrosti delcev pred trkom s steno, njihovih materialnih lastnosti, oblike in

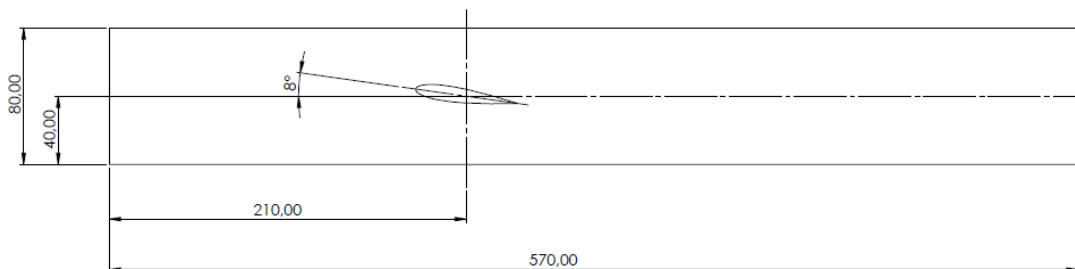
¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

velikosti ter mehanskih lastnosti stene nastopi poškodba stene. Pomemben vpliv ima predvsem vpadni kot delcev na steno.

Kavitacija se pojavi, ko so izpolnjeni pogoji za lokalno izotermno uparjanje kapljevine. V toku kapljevine je iz praktičnega vidika najbolj relevantna hidrodinamska kavitacija, ki je posledica spremenjene dinamike toka (lokalnega povečanja hitrosti in posledičnega padca tlaka do tlaka uparjanja). Ker je nastala parna struktura obdana z višjim okoliškim tlakom ta kolapsira, v okoliški kapljevini je povzročena tlačna motnja, ki se razširja skozi kapljevino. Po enem od predlaganih mehanizmov kavitacijske erozije, je ponavljajoča tlačna obremenitev na steni vzrok za lokalno plastično deformacijo ali celo porušitev materiala.

2 Modeliranje toka z delci, kavitacije in napoved obrabe

Numerične simulacije so bile izvedene s komercialnim računalniškim programom ANSYS Fluent 2020 R2. Izbran je profil krila NACA 0015 z dolžino tetive $c = 60$ mm. Zadnji rob profila je zaokrožen, težišče je na sredini tetive. Profil je postavljen v kanal tako, da je težišče oddaljeno tri in pol dolžine tetive od vstopa in šest dolžin tetive od izstopa ter 40 mm od dna in od stropa kanala. Napadni kot 8° je dosežen z zavrtitvijo profila okoli težišča kot prikazuje slika 1. Kanal je pravokotnega preseka širine 40 mm in višine 80 mm, profil krila se razteza čez celotno širino kanala.



Slika 1: Geometrija profila krila NACA 0015 v zaprtem kanalu.

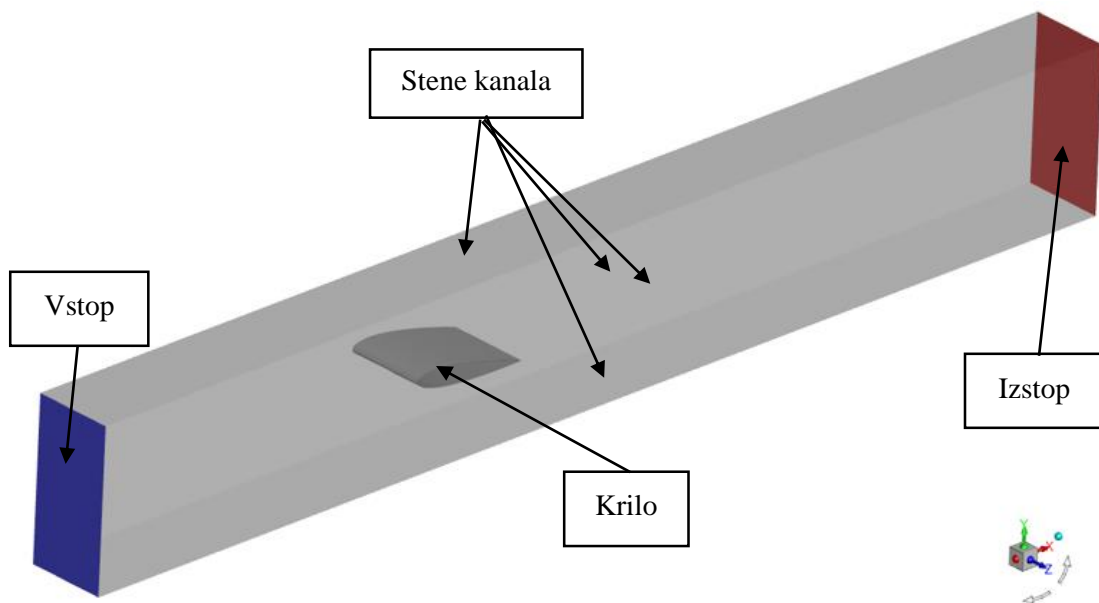
2.1 Modeliranje toka

Modeliranje nestisljivega turbulentnega toka vode je izvedeno z Reynoldsovo povprečenimi Navier-Stokesovimi enačbami. Turbulentni model je spremenjen $k - \omega$ SST, spremenjena je turbulentna viskoznost s korekcijo gostote zmesi po predlogu Rebouda in sodelavcev [1], [2]. Kavitacija je modelirana s Schnerr-Sauer kavitacijskim modelom [3], pri tem sta voda in vodna para obravnavani kot homogena zmes. Lagrangevo sledenje delcem peska je izvedeno po metodi delec-v-elementu (*particle-in-cell*, PIC), v Fluentu pod imenom *Discrete Particle Method* (DPM). Delci so modelirani kot idealne krogle premera $25 \mu\text{m}$. Sklapljanje gibalne količine in turbulence med delci in zvezno fazo je dvosmerno. Na delcu se upošteva sila upora, sila tlačnega gradienta, sila virtualne mase, sila vzgona in teža. Turbulentna disperzija delcev je modelirana stohastično, uporabljen je model DRW (*Discrete Random Walk*).

Robne pogoje za tok s pojavom kavitacije je Lijeva določila v doktorskem delu iz leta 2012 [4]. Poleg teh so v tabeli 1 podane še snovne lastnosti vode [4], vodne pare [4] in peska (SiO_2) ter robni pogoji, ki se nanašajo na tok delcev.

Tabela 1: Robni pogoji in snovne lastnosti.

Robni pogoji	Zvezna faza		Disperzna faza
Vstop	$ \vec{u} = 17,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$		$\vec{v} = (17,3 \ 0 \ 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Izstop	302295 Pa		izpust
Stene kanala	Stena brez zdrsa		Odboj Grant & Tabakoff
Krilo	Stena brez zdrsa		Odboj Grant & Tabakoff
Intenziteta turbulence	1%		-
Razmerje turbulentne viskoznosti	10		-
Snovne lastnosti	Voda	Vodna para	Pesek (SiO ₂)
gostota	$998,85 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$0,01389 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$2520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Dinamična viskoznost	$9,63 \cdot 10^{-6}$ Pas	0,011 Pas	-
Tlak uparjanja	1854 Pa		-



Slika 2: Prikaz računske domene z označenimi mesti predpisovanja robnih pogojev.

Na stenah kanala in krilu je potrebno delcem predpisati koeficienta restitucije v normalni (e_n) in tangentni smeri (e_t) za izračun hitrosti po odboju. Uporabljen je Grant & Tabakoff model odboja [5], kjer sta koeficienta restitucije podana v odvisnosti od vpadnega kota α (90° vpadni kot pomeni normalni trk):

$$e_n = 0,993 - 1,76\alpha + 1,56\alpha^2 - 0,49\alpha^3, \quad (1)$$

$$e_t = 0,988 - 1,66\alpha + 2,11\alpha^2 - 0,67\alpha^3. \quad (2)$$

Za izračun stopnje erozije smo uporabili snovne lastnosti nerjavnega jekla, kjer je gostota znašala 7800 kg/m^3 in trdota po Brinellu 210 HB.

2.2 Modeliranje kavitacijske erozije

Model kavitacijske erozije je dodan v Fluent s pomočjo uporabniško definiranih funkcij (*User Defined Functions*, UDF). Uporabljen je model Schenke - Melissaris - van Terwisga [6]–[8]. V nadaljevanju je predstavljena izpeljava enačbe ohrantive energije parne faze in enačbe, ki jo modelirajo.

Za parno strukturo v vodi (na primer mehurček) se zapiše enačba (3) za potencialno energijo parne faze [9], [10].

$$E_{pot} = (p_d - p_v) \cdot V_v \quad (3)$$

V enačbi (3) predstavlja p_d gonilni tlak za kolaps parne strukture, p_v tlak uparjanja in V_v volumen parne strukture. Avtorji [8] predlagajo uporabo časovno povprečenega tlaka kot gonilnega tlaka, ker je v primeru uporabe trenutnega tlaka v celici razlika do tlaka uparjanja blizu nič.

Za potencialno energijo zapišemo materialni odvod, celoten izraz delimo z volumnom računске celice V_{cell} in dobimo enačbo (2) za specifično potencialno moč pare.

$$\dot{e}_{pot} = \frac{1}{V_{cell}} \frac{DE_{pot}}{Dt} = (p_d - p_v) \cdot \left(\frac{\partial \alpha_v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha_v \right) + \left(\frac{\partial p_d}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p_d \right) \cdot \alpha_v \quad (4)$$

V enačbi (4) je \vec{u} hitrost zmesi vode in vodne pare v računski celici, α_v je volumski delež parne faze, definiran kot:

$$\alpha_v = \frac{V_v}{V_{cell}}. \quad (5)$$

Za napoved erozije je pomembna energija, ki se sprosti zaradi kondenzacije parne faze, zato je vpeljan pogoj, za izračun potencialne moči kot ga podaja enačba (6). Drugi člen na desni strani enačbe (4), ki predstavlja spremembo potencialne energije zaradi spremembe gonilnega tlaka zanemarimo, ker je velikostni razred manjši od prvega člena, ki predstavlja spremembo potencialne energije zaradi spremembe volumna parne strukture.

$$\dot{e}_{pot} = \min \left[\frac{\partial \alpha_v}{\partial t}, 0 \right] \quad (6)$$

Pri kolapsu parne strukture se potencialna energija pretvori v specifično kinetično energijo medfazne površine ε , po zaključenem kolapsu pa se le ta sprosti kot specifična energija tlačnega vala $\dot{e}_{rad} \Delta t$.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{u}) = -\dot{e}_{rad} \quad (7)$$

Za prenosno enačbo (7) so Schenke, Melissaris in van Terwisga izpeljali model [8], po eksplisitivni diskretizaciji je izraz za specifično kinetično energijo v novem časovnem koraku:

$$\varepsilon|_{t+\Delta t} = \varepsilon|_t + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Big|_t \Delta t = (1 - \beta|_t) [(k - 1) \dot{e}_{pot} \Delta t - \varepsilon(P_u - 1)] \Big|_t. \quad (8)$$

V enačbi (8) so P_u projekcijski operator, ki zagotavlja, da se specifična kinetična energija zaradi kolapsa kopiči na notranji strani medfazne površine, k ohranitveni parameter, ki zagotavlja globalno ohranitev energije in kriterij β , ki določa ali v danem trenutku pride do sprostitve energije.

$$P_u = \max \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon}{|\vec{u}| |\vec{\nabla} \varepsilon|}, 0 \right] \quad (9)$$

$$k = \frac{\int_V \frac{\varepsilon}{\Delta t} P_u dV}{\int_V \dot{e}_{pot} dV} \quad (10)$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{če } p > p_\infty \text{ in } \alpha_v = 0 \\ 0, & \text{drugače.} \end{cases} \quad (11)$$

V enačbi (11) je p_∞ tlak daleč stran od parne strukture. Ta tlak predstavlja prag za razširjanje tlačnega vala navzven iz točke kolapsa, za njegovo vrednost avtorji [8] predlagajo uporabo tlaka na izstopu iz domene. Kriterij $\alpha_v = 0$ predstavlja zaključek kolapsa, ko v računski celici ni več parne faze.

Sproščena energija po kolapsu je izražena kot specifična moč tlačnega vala:

$$\dot{e}_{rad}|_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\beta \varepsilon)|_t. \quad (12)$$

Ploskovni element na steni prejme del oddane energije, avtorji [11] so vpeljali zvezno formulacijo projekcije krogelnega vala. Prejeto energijo izrazimo kot specifično moč:

$$\dot{e}_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \dot{e}_{rad} \left[\frac{(\vec{x}_{cell} - \vec{x}_s) \cdot \vec{n}}{|\vec{x}_{cell} - \vec{x}_s|^3} \right] dV, \quad (13)$$

kjer je \vec{x}_{cell} vektor pozicije središča računske celice, \vec{x}_s vektor pozicije središča ploskovnega elementa na steni in \vec{n} normala na ploskovni element.

2.3 Modeliranje abrazije delcev

V programu ANSYS Fluent so na voljo trije modeli abrazije delcev, za obravnavan primer je izbran model McLaury. Ahlert je leta 1994 v doktorski disertaciji [12] predstavil nov erozijski model na podlagi eksperimentov trkov delcev peska vpadne hitrosti 21,3 m/s različnih oblik in pod različnimi koti z jeklenim vzorcem AISI 1018. Stopnja erozije (*Erosion Rate*, ER), izražena z enoto [$\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$] je:

$$ER = A(HB)^{-0,59} F_s f(\alpha) |\vec{v}|^n. \quad (14)$$

V enačbi (14) za stopnjo erozije je A empirična konstanta, HB trdota po Brinellu, F_s faktor oblike delca (1,0 za ostre, 0,53 za polkrogelne in 0,2 za krogelne delce), $f(\alpha)$ funkcija odvisnosti stopnje erozije od vpadnega kota α in \vec{v} hitrost delca ob trku s steno, kjer je n eksponent hitrosti z vrednostjo 1,73. Odvisnost stopnje erozije od vpadnega kota je izražena kot:

$$f(\alpha) = \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha, & \text{če } \alpha \leq \alpha_0 \\ X\cos^2(\alpha)\sin(W\alpha) + Y\sin^2(\alpha) + Z, & \text{če } \alpha > \alpha_0 \end{cases} \quad (15)$$

kjer so a , b , X , Y , Z in W empirični koeficienti ter α_0 mejni kot med dvema funkcijskima odvisnostima. Za tok vode z delci peska v območju vpadnih hitrosti peska med 0 in 10 m/s je

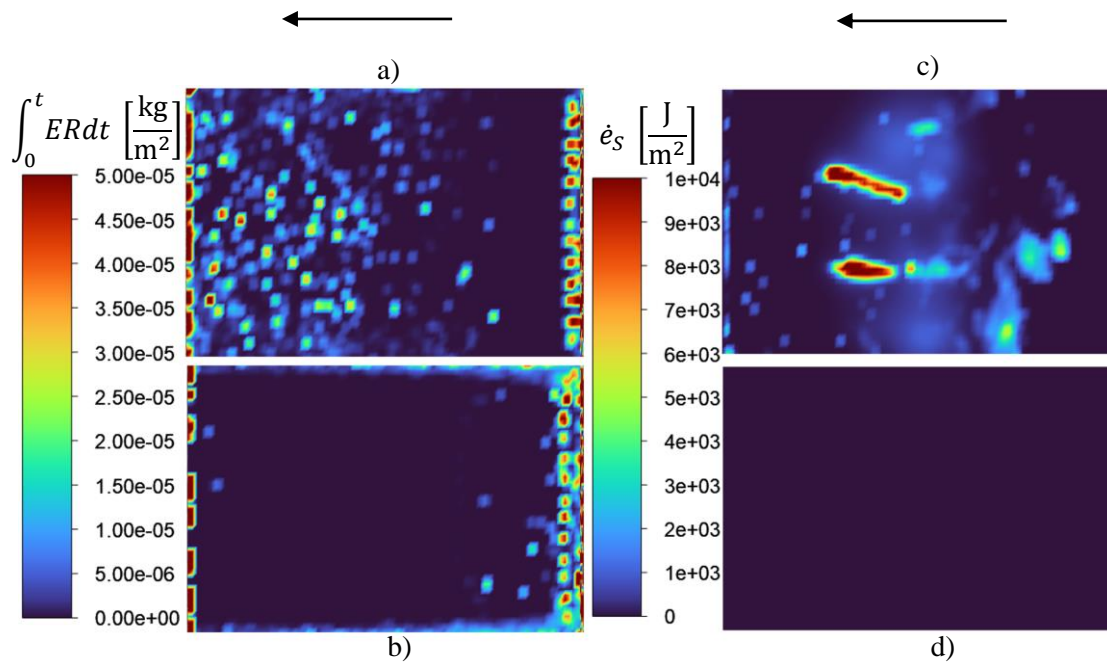
leta 1996 McLaury s sodelavci [13] ugotovil vrednosti parametrov, ki so podane v tabeli 2. Parameter Z se izračuna, da velja vrednost mejnega kota α_0 .

Tabela 2: Vrednosti parametrov stopnje erozije po McLauryu [13].

A	a	b	X	Y	W	α_0
$1,997 \cdot 10^{-7}$	-13,3	7,85	1,09	0,125	1,0	15°

3 Rezultati numeričnih simulacij in diskusija

Obraba krila je ovrednotena po času $t = 5,465$ s od prvega stika delcev s krilom ($t = 0$ s). Slika 3 prikazuje rezultate enačbe (13) in po času integrirane enačbe (14).



Slika 3: Obraba krila: a) na sesalni strani zaradi abrazije delcev, b) na tlačni strani zaradi abrazije delcev, c) na sesalni strani zaradi kavitacijske erozije in d) na tlačni strani zaradi kavitacijske erozije. S puščico je označena smer toka.

Opazimo, da delci poškodujejo sprednji rob krila, ki ga kavitacija ne poškoduje. Na sliki 3 je erozija zaradi kavitacije posredno ovrednotena preko energije implozij, ki jo prejme površina krila. Iz Ludwikove aproksimacije krivulje plastičnosti $\sigma = \sigma_y + K\epsilon^{n'}$ dobimo po integraciji do točke porušitve materiala gostoto deformacijske (porušitvene) energije

$$w_r = \int_0^{\epsilon_r} \sigma d\epsilon = \sigma_y \epsilon_r + K \frac{\epsilon_r^{n'+1}}{n'+1}, \quad (16)$$

kjer je σ_y meja tečenja, K aproksimacijska konstanta, ϵ_r specifična deformacija pri natezni trdnosti in n' aproksimacijska konstanta. Iz definicije gostote deformacijske energije $w = \frac{W}{V}$ izrazimo za element površine S globino izgube materiala (z):

$$z = \frac{\dot{\epsilon}_S}{w_r}, \quad (17)$$

kjer je W deformacijska energija in $V = Sz$ prostornina materiala. Raziskovalci Berchiche, Franc in Michel [14] so v eksperimentalnem preučevanju kavitacijske erozije z vzorcem iz nerjavnega jekla 316L ugotovili vrednosti parametrov podanih v tabeli 3.

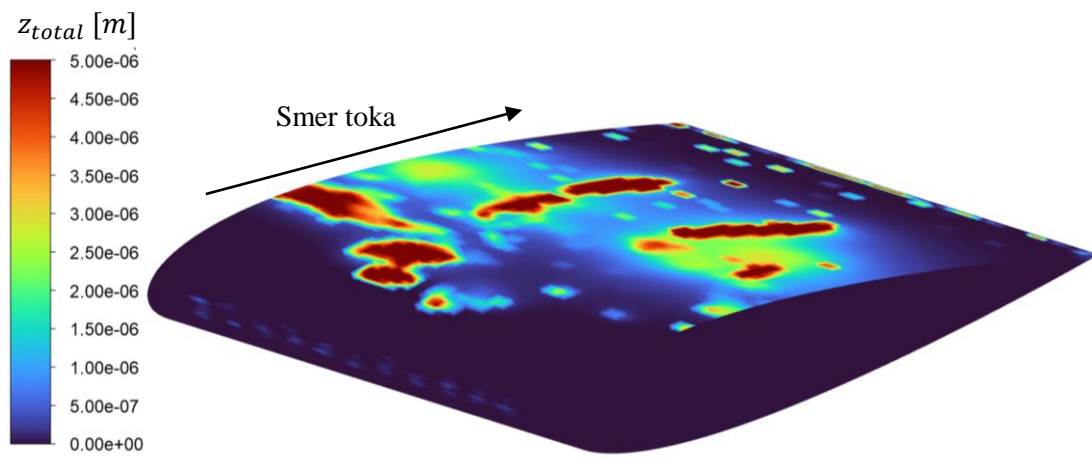
Tabela 3: Lastnosti nerjavnega jekla 316L [14].

σ_r	σ_y	K	n'
1020 MPa	400 MPa	900 MPa	0,5

Če enačbo (14) delimo z gostoto materiala krila dobimo izraz za stopnjo penetracije erozije (*Penetration Rate*, PR) z enoto [m/s]. Po integraciji po času je tako dobljena globina erozijskega profila $z = \int_0^t PR dt$ z enoto [m]. Tako lahko sedaj poenoteno obravnavamo erozijo zaradi delcev in zaradi kavitacije, kjer predpostavimo v tem delu, da sta pojava neodvisna drug od drugega, torej je skupna globina erozijskega profila:

$$z_{total} = z_c + z_p. \quad (18)$$

V enačbi (18) smo z indeksom c označili erozijski profil zaradi kavitacije in z indeksom p erozijski profil zaradi delcev. Skupna globina erozijskega profila je prikazana na sliki 4. Napovedan je prevladujoč vpliv kavitacijske erozije za obravnavan primer.



Slika 4: Globina erozijskega profila zaradi delcev in kavitacije.

4 Zaključek

Izvedena je bila numerična simulacija turbulentnega toka z delci in pojavom kavitacije z namenom napovedovanja obrabe na profilu krila NACA 0015. Uporabili smo erozijska modela za oba pojavi ločeno in predstavili poenoteno obravnavo izraženo s skupno globino erozijskega profila. Ugotovili smo, da delci poškodujejo sprednji rob krila in tlačno stran krila, na sesalni strani sta prisotna oba mehanizma erozije, prevladuje kavitacijska erozija. V

nadaljevanju predlagamo podrobnejše raziskovanje odziva materiala v primeru kavitacijske erozije in raziskovanje vpliva interakcije med kavitacijo in delci na kombinirano erozijo.

Zahvala

Raziskovalni program št. P2-0196 je sofinancirala Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz državnega proračuna.

Literatura

- [1] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, and J. L. Reboud, "Evaluation of the turbulence model influence on the numerical simulations of unsteady cavitation," *Proc. ASME Fluids Eng. Div. Summer Meet.*, vol. 1, pp. 341–346, 2003.
- [2] J.-L. Reboud, B. Stutz, and O. Coutier-Delgosha, "Two-phase flow structure of cavitation: experiment and modelling of unsteady effects," 1998.
- [3] G. H. Schnerr and J. Sauer, "Physical and Numerical Modeling of Unsteady Cavitation Dynamics," *4th Int. Conf. Multiph. Flow*, no. June, pp. 1–12, 2001.
- [4] Z. Li, *Assessment of Cavitation Erosion with a Multiphase Reynolds-Averaged Navier-Stokes Method*. 2012.
- [5] G. Grant and W. Tabakoff, "An Experimental Investigation of the Erosive Characteristics of 2024 Aluminum Alloy," Springfield, 1973.
- [6] T. Melissaris, S. Schenke, N. Bulten, and T. J. C. van Terwisga, "On the accuracy of predicting cavitation impact loads on marine propellers," *Wear*, vol. 456–457, no. June, p. 203393, 2020, doi: 10.1016/j.wear.2020.203393.
- [7] S. Schenke and T. J. C. van Terwisga, "An energy conservative method to predict the erosive aggressiveness of collapsing cavitating structures and cavitating flows from numerical simulations," *Int. J. Multiph. Flow*, vol. 111, pp. 200–218, 2019, doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.11.016.
- [8] S. Schenke, T. Melissaris, and T. J. C. Van Terwisga, "On the relevance of kinematics for cavitation implosion loads," *Phys. Fluids*, vol. 31, no. 5, 2019, doi: 10.1063/1.5092711.
- [9] A. Vogel, W. Lauterborn, and R. Timm, "Optical and acoustic investigations of the dynamics of laser-produced cavitation bubbles near a solid boundary," *J. Fluid Mech.*, vol. 206, no. September 1989, pp. 299–338, 1989, doi: 10.1017/S0022112089002314.
- [10] F. Hammit, "Observations on cavitation damage in a flowing system," *ASME J. Basic Eng.*, vol. 85, no. 3, 1963.
- [11] T. J. C. Van Terwisga, "Erosive Aggressiveness of Collapsing Cavitating Structures," *Proc. 10th Int. Symp. Cavitation*, no. 1, pp. 357–362, 2019, doi: 10.1115/1.861851_ch69.
- [12] K. R. Ahlert, "Effects of Particle Impingement Angle and Surface Waiting on solid Partilce Erosion of AISI 1018 Steel," 1994.
- [13] B. S. McLaury, S. A. Shirazi, J. R. Shadley, E. F. Rybicki, and A. F. E. Division, "Modeling Erosion in Chokes," in *Erosion processes: Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division summer meeting -1996-*, 1996, pp. 773–782.
- [14] N. Berchiche, J. P. Franc, and J. M. Michel, "A cavitation erosion model for ductile materials," *J. Fluids Eng. Trans. ASME*, vol. 124, no. 3, pp. 601–606, 2002, doi: 10.1115/1.1486474.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2021

Eksperimentalna karakterizacija vira vibracij z uporabo metode psevdo sil

Matjaž Košiček¹, Gregor Čepon² in Miha Boltežar²,

Experimental Characterisation of the Vibration Source Using Pseudo Forces Method

Povzetek. V računalniških simulacijah sestavov strojev pogosto nastopajo vibrirajoče (aktivne) komponente. Pri tem se navadno pojavlja vprašanje, na kakšen način numerično opisati vibracije teh komponent, ki se prenašajo tudi na okoliške komponente. Ena izmed metod, ki se uporabljajo za ta namen, je tudi metoda psevdo sil. Pri tej metodi predpostavimo, da lahko vibracije aktivnih komponent nadomestimo z namišljenimi silami (imenovanimi »psevdo sile«), ki delujejo na zunanjo površino aktivne komponente. Z njihovo določitvijo lahko torej karakteriziramo vibracije aktivnih komponent. S poznavanjem frekvenčnih prenosnih funkcij med točkami, v katerih delujejo psevdo sile, in poljubno točko v strukturi lahko določimo odziv te točke na psevdo sile (torej na vibracije aktivnih komponent). V članku je predstavljen in na primeru prikazan postopek določitve psevdo sil. Prikazan je tudi izračun odziva strukture v poljubni točki na vibracije aktivne komponente prek določenih psevdo sil. Narejena je tudi primerjava med dobljenim odzivom in neposredno izmerjenim odzivom na vibracije aktivne komponente. Na ta način je ocenjena natančnost metode psevdo sil.

Abstract. In the computer simulations of the machine assemblies oftentimes vibration producing components (active components) are present. With regards to that, question arises in which manner to describe vibrations, that also transmit to other components. One of the methods used for this purpose is the pseudo forces method. In this method it is assumed, that vibrations of the active components can be replaced with fictional forces (named “pseudo forces”) acting on the outer surface of the active component. With their determination, vibrations of the active components can be characterised. With known frequency response functions between the points of the acting pseudo forces and the arbitrary point on the structure, the response in that point to the pseudo forces (and therefore to the vibrations of the active component) can be determined. In the paper, the procedure of determining the pseudo forces is described and demonstrated on the example. The calculation of the response of the structure in the arbitrary point to the vibrations of the active component through determined pseudo forces is shown. The comparison between calculated response and directly measured response to the vibrations of the active component is also reported. That way the accuracy of the pseudo forces method is assessed.

¹ MAHLE Electric Drives Slovenija

² LADISK, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani

1 Uvod

Eden izmed glavnih problemov, s katerimi se spopada današnja strojna industrija, so neželene vibracije, ki so v nekaterih primerih ključni dejavnik pri odpovedi strojnega izdelka. Z namenom nadzora omenjenih vibracij se dandanes pri razvoju izdelkov uporabljajo simulacijska orodja, katerih uporaba znatno zmanjša stroške razvoja. Uporaba učinkovitih simulacijskih metod in orodij je torej ključnega pomena. Področje, ki preučuje pot vibracij od vira do poljubnih geometrijskih točk na izdelku, se imenuje »analiza prenosnih poti« (ang. »transfer path analysis«, TPA). S pomočjo tovrstnih analiz je mogoče predvideti, po katerih poteh po izdelku se prenašajo največji deleži vibracij in na ta način z ustreznimi konstrukcijskimi popravki znatno zmanjšati škodljive vplive vibracij. V tovrstnih analizah komponente strojnega izdelka delimo na aktivne (proizvajalce vibracij) in pasivne (prejemnike vibracij). Eno izmed vprašanj, ki se pri postopku TPA vselej pojavlja, je, kako numerično popisati izvor vibracij, aktivnih komponent. V ta namen je bilo v zadnjih desetletjih razvitih več metod, ki tvorijo eno izmed področji TPA. Med temi metodami je tudi metoda psevdo sil, ki je obravnavana v tem prispevku.

Glavni namen metode psevdo sil je karakterizacija vibracij aktivne komponente prek t. i. psevdo sil. Temelji na predpostavki, da lahko omenjene vibracije nadomestimo s časovno odvisnimi namišljenimi »psevdo« silami, ki delujejo na zunanjo površino aktivne komponente. Čeprav bi teoretično za točen opis vira vibracij na ta način potrebovali neskončno mnogo psevdo sil, se v večini primerov dovolj dobro aproksimacijo lahko doseže že z njihovim manjšim številom na primerno izbranih lokacijah, zaradi česar je tudi izbira lokacij točk, v katerih naj psevdo sile delujejo, ključnega pomena. Za določitev psevdo sil je najprej potrebno napraviti meritve vibracij na pasivni komponenti. Nato se izvede meritve frekvenčnih prenosnih funkcij med točkami psevdo sil ter točkami izmerjenih odzivov na pasivni komponenti. Iz okarakteriziranih lastnosti opazovanega sistema nato z računskim postopkom določimo psevdo sile.

V nadaljevanju članka je na primeru elektromotorja, privijačenega na jekleno ploščo, predstavljen postopek določevanja psevdo sil. Zapisane so teoretične osnove postopka njihovega določevanja ter njene prednosti in slabosti v primerjavi s sorodnimi metodami. Opisani so principi ter izvedba meritev odzivov na plošči na vibracije elektromotorja in frekvenčnih prenosnih funkcij. V nadaljevanju je opisana izvedba postopka izračuna psevdo sil. Na koncu je izvedena še validacija dobljenih psevdo sil s primerjavo odziva, določenega s pomočjo izračunanih psevdo sil ter neposredno izmerjenega odziva na določeni točki pasivne komponente.

Glavni cilj dela je torej v celoti prikazati postopek karakterizacije aktivne komponente na primeru s pomočjo uporabe psevdo sil. Meritve so bile opravljene v prostorih podjetja MAHLE Electric Drives Slovenija.

2 Metoda psevdo sil

Metoda psevdo sil spada med skupino »komponentno osnovanih« metod TPA [1]. Ta skupina metod temelji na predpostavki, da lahko vibracije, ki jih proizvaja vir vibracij, nadomestimo s skupino časovno odvisnih robnih pogojev (kinetičnih ali kinematičnih), ki nadomestijo fizikalni popis vibracij aktivne komponente. Cilj eksperimentalnega dela komponentno osnovanih metod je torej iskanje omenjenih robnih pogojev. Uporabnost teh metod izhaja

predvsem iz neodvisnosti teh robnih pogojev od pasivne komponente (so lastnost izključno aktivne komponente). Če torej pasivno komponento v sestavu, ki ga uporabimo za karakterizacijo teh robnih pogojev, nadomestimo z neko drugo pasivno komponento, lahko za vir vibracij uporabimo prej določene robne pogoje, kar je posebej uporabno v simulacijah.

Metoda s psevdo silami (podrobno predstavljena v viru [2]) predpostavlja, da lahko vibracije aktivne komponente nadomestimo s časovno odvisnimi silami (»psevdo sile«), ki delujejo na zunanjo površino aktivne komponente [1]. Določitev psevdo sil poteka po naslednjem postopku:

1. Izberemo lokacije psevdo sil na aktivni komponenti. Lokacije sil naj bodo primerne za kasnejše meritve frekvenčnih prenosnih funkcij. Lokacij naj bo vsaj šest (dve v vsaki izmed ortogonalnih smeri) ob togih kontaktnih razmerah med aktivno in pasivno komponento ter več kot šest ob kompleksnejših kontaktnih razmerah.
2. Izberemo lokacije na pasivni komponenti, na kateri bomo kasneje merili odzive. Odzivi so lahko različne fizikalne veličine. V pričujočem primeru izberemo kot fizikalno veličino odziva v vseh točkah pospešek. Odzive delimo na »primarne odzive« (po zgledu v viru [1] v nadaljevanju označene z \mathbf{u}_4) ter na »ciljne odzive« (v nadaljevanju označene z \mathbf{u}_3). Primarne odzive potrebujemo za izračun psevdo sil, priporočeno pa je, da je njihovo število večje od števila psevdo sil. Ciljne odzive potrebujemo predvsem zato, da kasneje preverimo ustreznost končnega izračuna psevdo sil, njihovo število pa je poljubno.
3. Izvedemo meritve odzivov \mathbf{u}_3 in \mathbf{u}_4 na vzbujanje aktivne komponente.
4. Izmerimo frekvenčne prenosne funkcije med točkami psevdo sil in točkami odzivov \mathbf{u}_3 in \mathbf{u}_4 . V ta namen v pričujočem primeru uporabimo modalno kladiivo. Matriko frekvenčnih prenosnih funkcij med psevdo silami in odzivi \mathbf{u}_3 označimo s \mathbf{H}_{3ps} , matriko frekvenčnih prenosnih funkcij med psevdo silami in odzivi \mathbf{u}_4 pa s \mathbf{H}_{4ps} .
5. Izračunamo psevdo sile po enačbi (1).

$$\mathbf{F}_{ps} = (\mathbf{H}_{4ps})^+ \mathbf{u}_4 \quad (1)$$

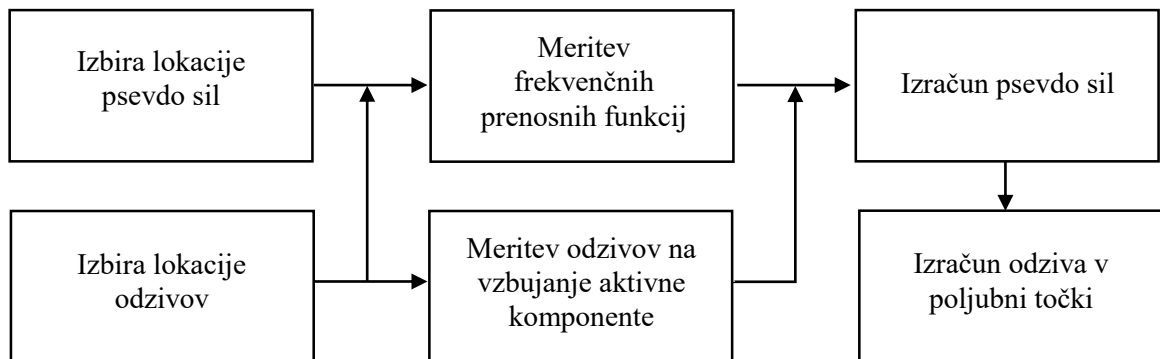
Pri tem $(\mathbf{H}_{4ps})^+$ predstavlja pseudo inverz matrike \mathbf{H}_{4ps} . Matrika namreč ni nujno kvadratna, saj število psevdo sil vektorja \mathbf{F}_{ps} ni nujno enako številu odzivov vektorja \mathbf{u}_4 , zaradi česar njen inverz ne nujno obstaja. V našem primeru v ta namen uporabimo Moore Penrose-ov inverz matrike.

6. Ko so psevdo sile znane, lahko z njihovo pomočjo rekonstruiramo odziv \mathbf{u}_3 , ki ga označimo z \mathbf{u}_{3rek} ter ga primerjamo z neposredno izmerjenim odzivom:

$$\mathbf{u}_{3rek} = \mathbf{H}_{3ps} \mathbf{F}_{ps} \quad (2)$$

Z dobrim ujemanjem \mathbf{u}_3 in \mathbf{u}_{3rek} so dobljene sile validirane.

Postopek je shematsko prikazan na sliki 1:



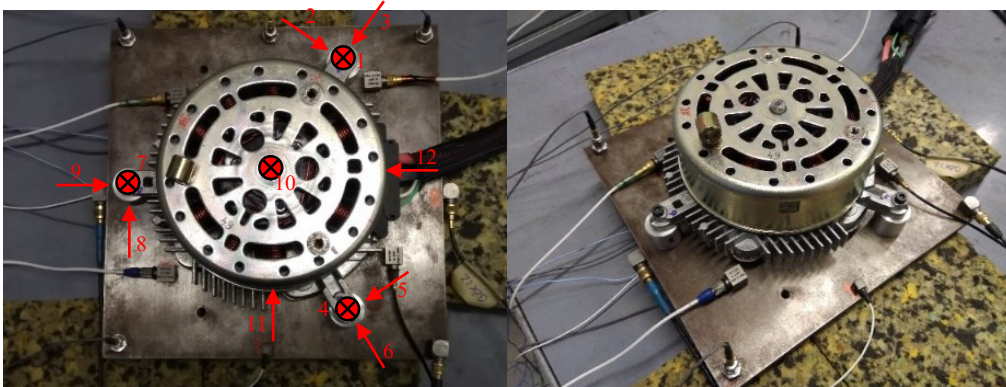
Slika 1: Postopek karakterizacije vira vibracij z metodo psevdo sil.

Prednost metode s psevdo silami pred ostalimi komponentno osnovanimi metodami je predvsem njena prilagodljivost danim pogojem [2]. Lokacije psevdo sil lahko namreč prosto izberemo, kjerkoli na aktivni komponenti, s čimer se izognemo težavam z dostopnostjo izbranih točk za meritve z modalnim kladivom. Postopek meritve pri metodi se tudi lahko izvede kjerkoli, saj metoda ne zahteva posebnega merilnega okolja ali opreme. Prilagodljivost metode pa je hkrati tudi njena slabost, saj niso vse lokacije enako primerne za izbiro, zaradi česar so pri izbiri primernih točk za lokacijo psevdo sil pomembne izkušnje izvajalca meritev.

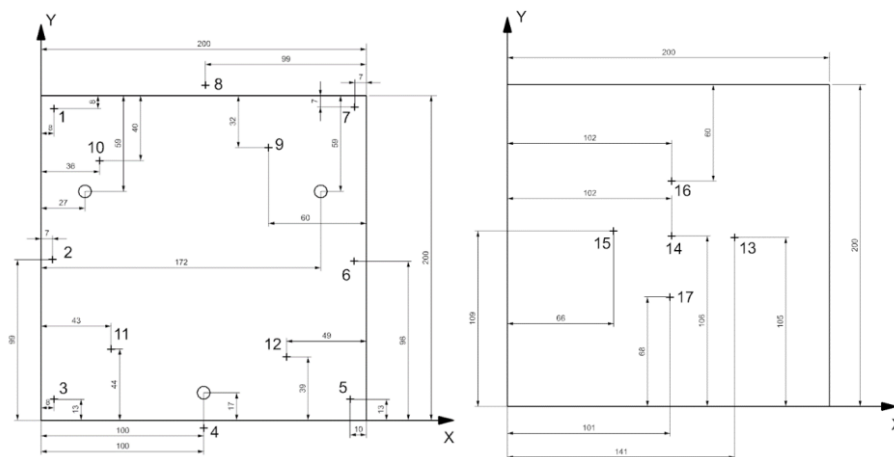
3 Meritve

3.1 Merilni sistem

Opazovani sistem v pričujočem primeru je elektromotor, prek treh aluminijastih podpor privijačen na jekleno ploščo dimenzij $200\text{mm} \times 200\text{mm} \times 12\text{mm}$ (slika 2). Kot aktivno komponento izberemo elektromotor (s podporami vred) za pasivno pa jekleno ploščo. Za lokacijo psevdo sil izberemo tri med seboj ortogonalne sile na vsaki podpori ter tri med seboj ortogonalne sile na rotorju motorja (slika 2). Sile so na sliki označene s puščicami. Lokacije odzivov razporedimo, kot je prikazano na sliki 3. Točke odzivov od 1 do vključno 12 z izjemo točk 4 in 8 so bile postavljene na ploskev plošče, na kateri se je nahajal tudi elektromotor. Točke od vključno 13 do vključno 17 so se nahajale na nasprotni (spodnji) strani plošče. Točki 4 in 8 sta se nahajali na straneh plošče (na ploskvah visokih 12 mm). Po zgledu v viru [3] so bili odzivi merjeni samo v smeri normale ploskev plošče dimenzij $200\text{mm} \times 200\text{mm}$, saj je v ostalih smereh plošča veliko bolj toga. Ker so odzivi vektorja \mathbf{u}_4 pomembni za izračun psevdo sil, odzivi vektorja \mathbf{u}_3 pa služijo zgolj validaciji izračuna, se odločimo, da bo vektor \mathbf{u}_4 vseboval 16 izmed 17 odzivov, en sam odziv pa bo člen vektorja \mathbf{u}_3 . Za oceno vpliva izbire števila in lokacij odzivov vektorjev \mathbf{u}_3 in \mathbf{u}_4 na izračun psevdo sil bi bile potrebne nadaljnje raziskave. Odziv na lokaciji, oštevilčeni s številko 1, določimo za odziv \mathbf{u}_3 vektorja \mathbf{u}_3 , ostali odzivi so odzivi vektorja \mathbf{u}_4 .



Slika 2: Merilni sistem in lokacije psevido sil.

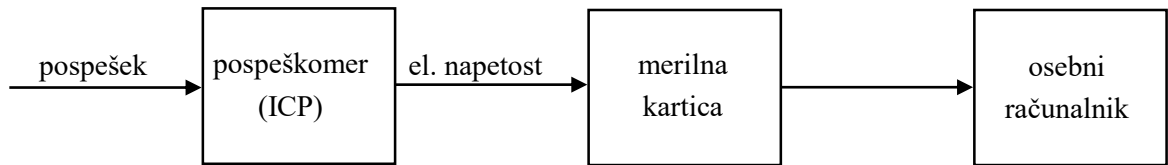


Slika 3: Točke odzivov na zgornji strani in ob straneh (levo) in na spodnji strani (desno) plošče.

Preizkus izvedemo po postopku, zapisanem v poglavju 2. Najprej izmerimo odzive na vibracije, ki jih proizvaja motor, na vseh določenih lokacijah na plošči. Za meritev frekvenčnih prenosnih funkcij nato na strani vzburjanja uporabimo modalno kladivo. Za obdelavo podatkov je bil uporabljen računalniški program SIEMENS Simcenter Testlab 18.

3.2 Merjenje odzivov

Merilni sistem merjenja odzivov je shematsko prikazan na sliki 4.

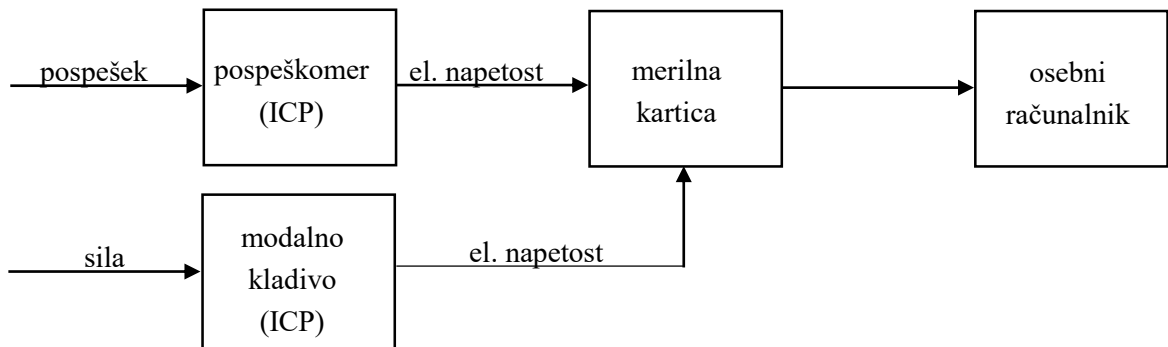


Slika 4: Postopek merjenja odzivov na vzbujanje aktivne komponente.

Odzivi u_3 in u_4 so bili izmerjeni enostavno tako, da smo pognali elektromotor ter zajeli meritev odzivov na izbranih lokacijah v času 5 s. Ker je sam elektromotor proizvajal vibracije s precej nizko amplitudo, je bila na rotorju elektromotorja privijačena dodatna masa, ki je povečala predvsem amplitudo vibracij pri frekvenci vrtenja motorja (38 Hz) zaradi statične neuravnoteženosti. Pospeškometri so bili na ploščo prilepljeni z voskom. Frekvenčno območje merjenja je bilo 4096 Hz, frekvenčna ločljivost pa 1 Hz.

3.3 Določevanje frekvenčnih prenosnih funkcij

Merilni sistem določevanja frekvenčnih prenosnih funkcij je shematsko prikazan na sliki 5.



Slika 5: Postopek merjenja frekvenčnih prenosnih funkcij.

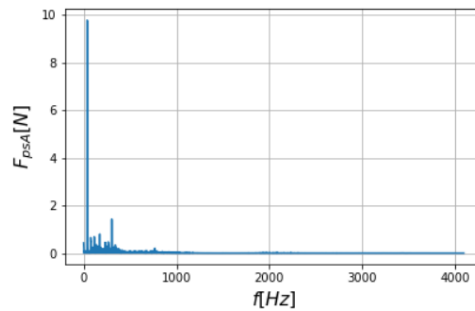
Z modalnim kladivom smo opazovano strukturo ob mirujočem motorju vzbujali v točkah psevdo sil ter s pospeškometri merili odzive v prej določenih lokacijah. V vsaki točki udarca je bilo narejenih pet meritev, ki so bile nato povprečene, informacijo o njihovi ponovljivosti daje koherenca. Frekvenčno območje merjenja je bilo 4096 Hz, frekvenčna ločljivost pa 1 Hz. Čas zajema signala je trajal 1 s. Meritvam odzivov ni bilo dodano nobeno okno, medtem ko je bilo sili dodano tranzientno okno. Dolžine oken so po večini znašale med 0,2 in 1 % celotnega časa meritve. Čas od začetka meritve do začetka udarca s kladivom je pri vseh meritvah znašal med 0,0005 in 0,0009 s.

3.4 Obdelava podatkov

Rezultati meritev so bili nato izvoženi iz programa Simcenter Testlab v besedilni dokument ter obdelani v programskem okolju Python, kjer so bile po enačbah (1) in (2) izračunane psevdo sile ter odziv u_{3rek} .

3.5 Rezultati

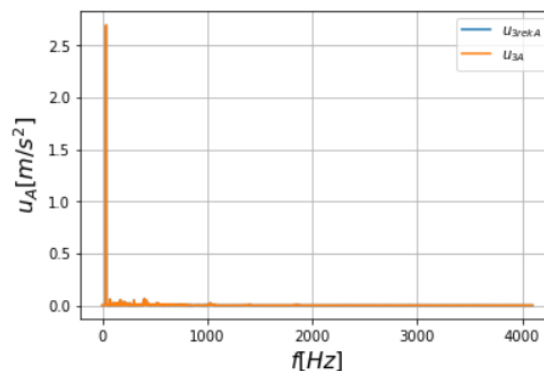
Pri meritvah frekvenčnih prenosnih funkcij se je koherenca med merjenji v različnih geometrijskih točkah precej razlikovala. Izrazito slaba koherenca se je pojavljala pri vzbujanju na rotorju motorja (v točkah 10, 11 in 12). Pri vseh ostalih je bila koherenca čez veliko večino merjenega frekvenčnega območja nad 0,9. Iz izmerjenih podatkov prek enačbe 1 določimo vektor psevdo sil. Amplitudni spekter v točki 1 določene psevdo sile je prikazan na sliki 6.



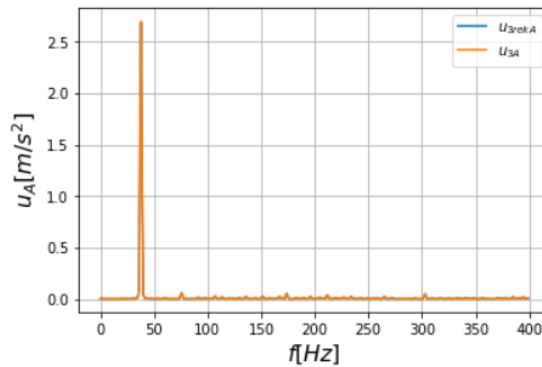
Slika 6: Amplitudni spekter določene psevdo sile v točki 1.

Po enačbi 2 izračunamo odziv v točki 1 na plošči (u_{3rek}) in ga primerjamo z izmerjenim odzivom v tej točki (u_3). Primerjava amplitudnih spektrov obeh odzivov (u_{3rekA} in u_{3A}) je prikazana na sliki 7. Na sliki 8 je prikazana primerjava med obema odzivoma na frekvenčnem območju od 0 do 400 Hz, kjer je posebej pomembno dobro ujemanje obeh odzivov. Na sliki 9 je prikazana absolutna razlika med obema amplitudnima spektroma:

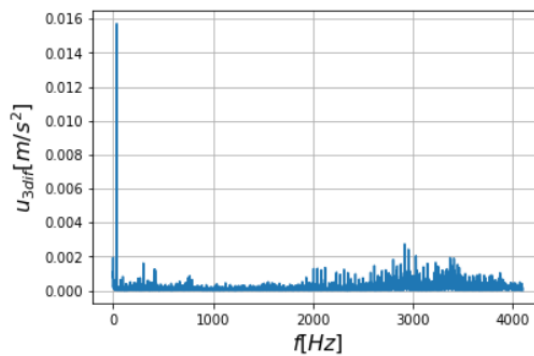
$$u_{3dif} = |u_{3rekA} - u_{3A}| \quad (3)$$



Slika 7: Primerjava amplitudnih spektrov u_{3rek} in u_3 .



Slika 8: Primerjava amplitudnih spektrov u_{3rek} in u_3 do 400 Hz.



Slika 9: Absolutna razlika med amplitudnima spektroma u_{3rek} in u_3 .

4 Zaključek

V prispevku je prikazan postopek karakterizacije vibracij aktivne komponente v sestavu z metodo psevdo sil. Iz prikaza na slikah 7, 8 in 9 je razvidno dobro ujemanje izmerjenega odziva z izračunanim prek psevdo sil. Za širšo sliko o uporabnosti metode bi bile potrebne nadaljnje raziskave na različnih komponentah pri različnih pogojih. Zaključimo lahko, da psevdo sile v prikazanem primeru pri njihovem zadostnem številu in primerno izbranih lokacijah, dobro okarakterizirajo vibracije, ki jih proizvaja aktivna komponenta.

Literatura

- [1] M. van der Seijs: *Experimental dynamic substructuring: analysis and design strategies for vehicle development: doktorska disertacija*. Heiloo, 2016.
- [2] M. H. A. Janssens, J. W. Verheij: *A pseudo-forces methodology to be used in carachterisation of structure-borne sound sources*. *Applied Acoustics* **61**:3 (2000), str. 285–308.
- [3] K. Chen: *Numerical and experimental studies of blocked force determination on an offset interface for plate and shell structures and duct acoustic systems: doktorska disertacija*. University of Kentucky, 2020.



Karakterizacija mehanskih lastnosti FFF 3D natisnjenih struktur

Tilen Košir¹, Janko Slavič¹

Mechanical Properties Characterization of FFF 3D printed structures

Povzetek. Strukturam izdelane s FFF tehnologijo tiska, so učinkovite mehanske lastnosti težko določljive. V okviru tega prispevka je predstavljena relativno enostavna metoda določevanja učinkovitih mehanskih lastnosti 3D tiskanih struktur, ki bazira na identifikaciji 1. lastne frekvence obravnavane strukture.

Metodo smo preverili na vzorcih enakega materiala in različnih dimenzij, ter med posameznimi vzorci dobili zadovoljivo ujemanje. V drugem koraku smo uporabnost metode predstavili na vzorcih enakih dimenzij, narejenih iz štirih različnih materialov in dveh različnih smereh tiska. Ugotovljeno je bilo, da smer tiska lahko bistveno vpliva na učinkoviti elastični modul ter gostoto 3D tiskanih vzorcev.

Predstavljena metoda omogoča enostaven način identifikacije učinkovitih materialnih lastnosti 3D tiskanih struktur, ki se jih preučuje na področju strukturne dinamike.

Abstract. Effective material properties of structures manufactured via the FFF 3D printing technique are sometimes difficult to identify. In the scope of this manuscript, a simple method is presented for identifying effective material properties of 3D printed structures based on first natural frequency identification.

In the first step, the method was validated on specimens with different geometry dimensions and made of the same material. A good agreement of measured effective material properties was found between the specimens. In the second step, the effective material properties were measured on specimens with the same dimensions, manufactured from four different materials with two different printing directions. The usefulness of the method was shown and the dependence of effective modulus of elasticity and density on the printing direction was identified.

The presented method offers a simple technique of identifying effective material properties of 3D printed structures, that are studied in the field of structural dynamics.

¹ Fakulteta za strojninstvo, Univerza v Ljubljani

1 Uvod

Strukturam, izdelanim s pomočjo aditivnih tehnologij zlasti s pomočjo FFF (Fused Filament Fabrication) tehnike, se mehanske lastnosti glede na način tiska lahko močno razlikujejo [1]. Za potrebe napovedovanja dinamskega odziva 3D tiskanih struktur, je potrebno poznavanje njihovih učinkovitih mehanskih materialnih lastnosti. Učinkovite mehanske lastnosti 3D tiskanih struktur lahko napovedujemo teoretično z analitičnimi modeli kot sta klasična teorija laminatov in mikromehanski pristop, ali numerično z modeliranjem mikrostrukture s pomočjo končnih elementov [2]. Na drugi strani lahko učinkovite materialne lastnosti merimo. Natezne [3], upogibne [3] in torzijske [4] meritve lahko izvajamo statično na trgalnem stroju, dinamično preko DMA testov [5], mehanske lastnosti pa lahko merimo tudi preko identifikacije lastnih frekvenc [6].

V okviru tega prispevka je predstavljena enostavna metoda določevanja učinkovitih mehanskih lastnosti 3D tiskanih struktur, ki temelji na identifikaciji 1. lastne frekvence iz dinamskega odziva strukture. Metoda je predstavljena na dveh primerih. V prvem metodo preverimo na različnih geometrijah vzorcev enakega materiala in primerjamo ujemanje pomerjenih elastičnih modulov ter gostot materiala. V drugem primeru predstavimo uporabnost metode na vzorcih enakih dimenzij iz štirih različnih materialov in dveh različnih smereh tiska.

V prispevku je sprva predstavljena teorija, ki jo potrebujemo pri določevanju elastičnega modula strukture. Za tem je predstavljena enostavna geometrija vzorca, na kateri bomo določevali mehanske lastnosti materialov, ki se uporabljajo pri 3D tisku. Sledi postopek izračuna prve lastne vrednosti lastnega nedušenega nihanja, ki jo potrebujemo pri nadaljnjem izračunu elastičnega modula, nato je predstavljen postopek merjenja 1. lastne frekvence in pa gostote posameznih vzorcev. V naslednjem delu predstavimo postopek merjenja elastičnih modulov. Sledi predstavitve rezultatov, diskusija in zaključki.

2 Teorija

Pri izpeljavi v nadaljevanju bomo predpostavili frekvenčno neodvisnost materialov in linearno teorijo elastičnosti. S pomočjo metode končnih elementov lahko obravnavano strukturo diskretiziramo [7], in za dane robne pogoje poiščemo lastne frekvence in oblike sistema s pomočjo lastnega problema:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

kjer \mathbf{K} predstavlja togostno matriko, \mathbf{M} masno matriko, ω lastno frekvenco in \mathbf{x} lastni vektor. Ker je cela struktura le iz enega materiala, lahko v nadaljevanju iz togostne matrike izpostavimo elastični modul E , iz masne matrike pa izpostavimo gostoto ρ :

$$\mathbf{K} = E \mathbf{K}_0 \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{M}_0 \quad (3)$$

\mathbf{M}_0 predstavlja masno matriko neodvisno od gostote materiala, \mathbf{K}_0 pa togostno matriko neodvisno od elastičnega modula. \mathbf{K}_0 ni povsem materialno neodvisna matrika, saj je še vedno odvisna od Poissonovega količnika ν [7]. V nadaljevanju bomo predpostavili, da v obravnavi najnižjih

lastnih frekvenc strukture zaradi skrbno zasnovane strukture, Poissonov količnik nima bistvenega vpliva. Posledično lahko predpostavimo, da sta matriki \mathbf{K}_0 in \mathbf{M}_0 materialno neodvisni. Lastni problem preuredimo in vpeljemo novo spremenljivko λ :

$$\begin{aligned} (E \mathbf{K}_0 - \omega^2 \rho \mathbf{M}_0) \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}_0 - \underbrace{\omega^2 \frac{\rho}{E}}_{\lambda} \mathbf{I}) \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Izpeljali smo materialno neodvisni lastni problem, S pomočjo katerega lahko izračunamo lastne vrednosti λ_i . λ_i lahko povežemo z i -to lastno frekvenco sistema kot:

$$\lambda_i = \frac{\rho}{E} \omega_{0,i}^2 = 4\pi^2 \frac{\rho}{E} f_{0,i}^2 \quad (5)$$

kjer je $\omega_{0,i}$ i -ta lastna krožna frekvenca, $f_{0,i}$ pa predstavlja i -to sekundno frekvenco. V nadaljevanju bomo pri določevanju elastičnega modula E poznali gostoto ρ , pomerjeno 1. lastno frekvenco $f_{0,1}$ ter numerično izračunane lastne vrednosti λ_1 , zato enačbo (5) preoblikujemo in zapišemo:

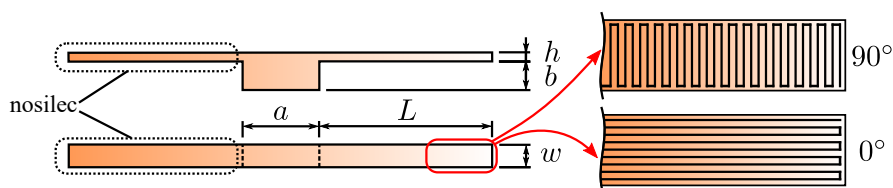
$$E = 4\pi^2 \frac{\rho f_{0,1}^2}{\lambda_1} \quad (6)$$

Glavna prednost predstavljene metode je, da lahko z enačbo (6) na enostaven način izračunamo elastični modul različnih materialov, ob predpostavki, da je geometrija obravnavane strukture enaka.

3 Metode dela

3.1 Geometrija vzorca

Elastični modul E in gostoto ρ bomo določevali na vzorcu, ki je prikazan na sliki 1. Oblika strukture je podobna dvema simetrično konzolno vpetima nosilcema. Vitka nosilca omogočata, da je vpliv Poissonovega količnika na prvo lastno frekvenco strukture zanemarljiv, kar je tudi ena izmed predpostavk pri določevanju elastičnega modula E pri predstavljeni metodi. Dimenzije a , b in w so konstantne in znašajo $a = 10$ mm, $b = 4$ mm in $w = 8.35$ mm, dimenziji L in h pa se spreminjata. Vsi vzorci so natisnjeni s FFF (Fused Filament Fabrication) tehniko na 3D tiskalniku Toolchanger proizvajalca E3D. Uporabljena višina sloja je enaka 0.2 mm, smer tiska polnitve pa je v vseh slojih enaka. V nadaljevanju je smer tiska v nekaterih vzorcih vzporedna dolžini nosilcev L , v nekaterih primerih pa pravokotna. Možni smeri tiska sta v nadaljevanju poimenovani kot smeri 0° in 90° (slika 1).



Slika 1: Geometrija in dimenzije vzorca uporabljenega za določevanje elastičnega modula.

3.2 Določevanje prve lastne vrednosti

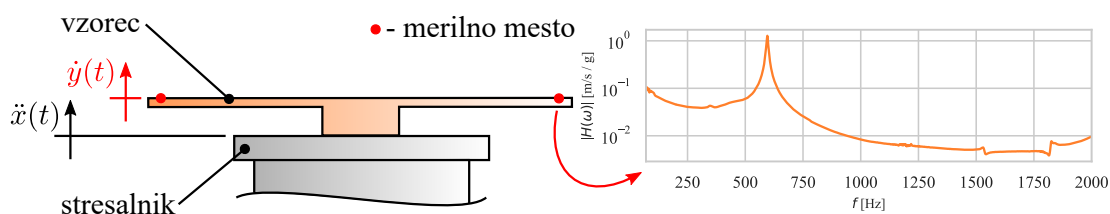
Za določevanje elastičnega modula E potrebujemo odvisnost prve lastne vrednosti λ_1 od debeline h ter dolžine L . V ta namen s pomočjo programskega paketa ANSYS parametrično pomrežimo geometrijo vzorcev s 20 vozliščnimi heksagonalnimi 3D končnimi elementi, ter za izbrane vrednosti dimenzij h in L tvorimo materialno neodvisno masno in togostno matriko \mathbf{M}_0 in \mathbf{K}_0 . Pri tvorjenju matrik predpostavimo, da je vrednost Poissonovega količnika enaka $\nu = 0.33$ [8]. Na podlagi \mathbf{M}_0 in \mathbf{K}_0 lahko rešimo lastni problem nedušenega nihanja strukture, ki je opisan z enačbo (4) in izračunamo 1. lastno vrednost λ_1 . Postopek ponovimo za vse izbrane kombinacije vrednosti dimenzij h in L .

3.3 Merjenje 1. lastne frekvence in gostote

Teoretični del v poglavju 2 temelji na lastnem nihanju sistema, v okviru eksperimentalnega dela pa smo 1. lastno frekvenco $f_{0,1}$ pomerili preko vsiljenega nihanja. Slednje lahko storimo, če vemo, da $f_{0,1}$ lastnega odziva pri vsiljenem nihanju sovpada s frekvenco, pri kateri je amplituda odziva največja.

Vzorci so prilepljeni na stresalnik LDS V555 s sekundnim lepilom in vzbujani z belim šumom. Hitrostni odziv vzorcev je na obeh prostih koncih nosilcev merjen z laserskim vibrometrom PDV-100 proizvajalca Polytec. Na podlagi merjenega vzbujanja in odziva tvorimo frekvenčno prenosno funkcijo (FRF), iz katere odčitamo 1. lastno frekvenco vzorca $f_{0,1}$. Ker imamo za vsak vzorec dve merilni mesti, $f_{0,1}$ izračunamo dvakrat in jo povprečimo. Shema eksperimentalnega sistema in primer FRF sta vidna na sliki 2.

Gostoto ρ natisnjenim vzorcem določimo preko mase in volumna vzorca. Maso merimo s tehnicco EMB 200-3 proizvajalca KERN (natančnost 0.001 g), dimenzije vzorca pa privzamemo iz CAD modela. Izjemoma vzorcem pomerimo debelino nosilcev h s kljunastim merilom.



Slika 2: Shema eksperimentalnega sistema.

3.4 Izračun elastičnega modula

3.4.1 Različna geometrija in enak material

Primernost uporabe metode pokažemo tako, da določimo elastični modul E strukture istega materiala na šestih geometrijah vzorcev različnih dimenzij, pri čemer spreminjamo debelino h in dolžino L nosilcev. Za vsako kombinacijo dimenzij natisnemo 3 vzorce. Za preizkus je uporabljena PLA plastika proizvajalca Prusa. Smer tiska polnitve je za vse vzorce enaka 0° (slika 1). Na podlagi pomejane gostote ρ , 1. lastne frekvence $f_{0,1}$ in izračunane 1. lastne vrednosti λ_1 , smo za vsak vzorec po enačbi (6) izračunali elastični modul.

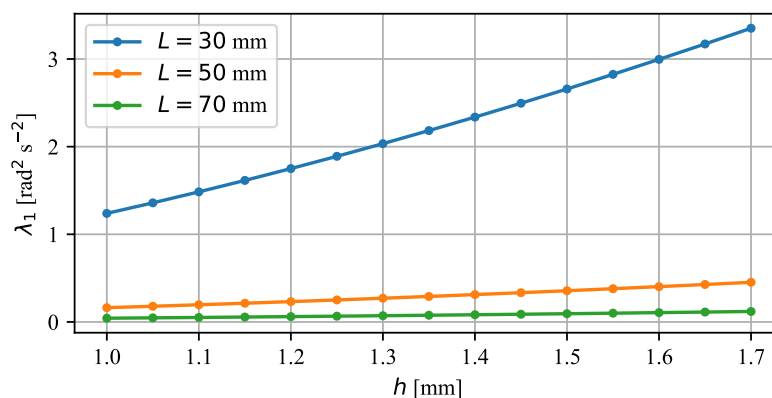
3.4.2 Enaka geometrija in različni materiali

Uporabnost predstavljene metode za določevanje mehanskih lastnosti tiskanih struktur predstavimo tako, da s pomočjo ene geometrije vzorca fiksnih dimenzij določimo elastični modul E naslednjim materialom: HTPRO PLA (Plastika Trček), Electrifi (Multi3D), PVDF (Nile Polymers) in TPU (Plastika Trček). Za vsak material je natisnjenih 6 vzorcev, pri čemer imajo 3 vzorci smer tiska polnitve enak 0° , 3 vzorci pa 90° . Nominalni dimenziji h in L sta enaki $h = 1.2\text{ mm}$ in $L = 30\text{ mm}$, ostale dimenzije so enake kot je navedeno v poglavju 3.1. Dimenzijo h naknadno pomerimo še za vsako skupino vzorcev, ki so na tiskalniku tiskani naenkrat.

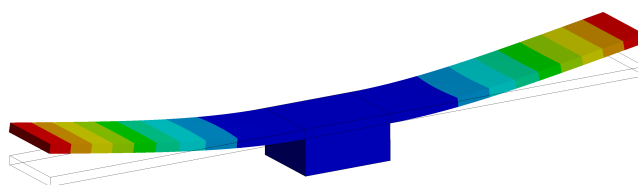
4 Rezultati

4.1 Določevanje prve lastne vrednosti

Odvisnost 1. lastne vrednosti λ_1 od dimenzij h in L lahko vidimo na sliki (3), 1. lastno nihajno obliko pa na sliki 4. Opazimo, da se λ_1 povečuje s povečevanjem dimenzije h in z zniževanjem dimenzije L . 1. lastna nihajna oblika vzorca je zelo podobna 1. lastni nihajni obliki dveh konzolno vpetih nosilcev.



Slika 3: Odvisnost 1. lastne vrednosti od dimenzij h in L .



Slika 4: 1. lastna nihajna oblika.

4.2 Izračun elastičnega modula

4.2.1 Različna geometrija in enak material

V tabeli 1 so zbrane vrednosti dimenzije vzorcev h , pomerjena gostota ρ , 1. lastna frekvenca $f_{0,1}$, izračunana 1. lastna vrednost λ_1 , ter elastični modul E skupaj z 95% intervalom zaupanja. Opazimo lahko, da je relativni raztros pomerjenih 1. lastnih frekvenc $f_{0,1}$, v primeru dimenzije h blizu 1.2 mm, približno dvakrat večji v primerjavi z debelinami nosilcev, ki so blizu 1.6 mm. Pomerjena gostota ρ 3D tiskanih vzorcev se med posameznimi vzorci enakih dimenzij ne razlikuje za več kot 0.5%, med vsemi vzorci pa se ne razlikuje za več kot 1.4%. Relativna negotovost elastičnega modula E med vzorci enakih dimenzij ne presega 5.6%, med vsemi tiskanimi vzorci pa relativna negotovost znaša 9.2%. Podobno kot pri pomerjenih 1. lastnih frekvencah $f_{0,1}$, tudi pri elastičnem modulu E opazimo večji raztros pri vzorcih z manjšo debelino nosilcev h kot je to razvidno na sliki 5. Če povprečimo gostoto ρ in elastični modul E čez vse natiskane vzorce iz PLA plastike, ta znašata $1150 \pm 15 \text{ kg/m}^3$ in $3290 \pm 301 \text{ MPa}$.

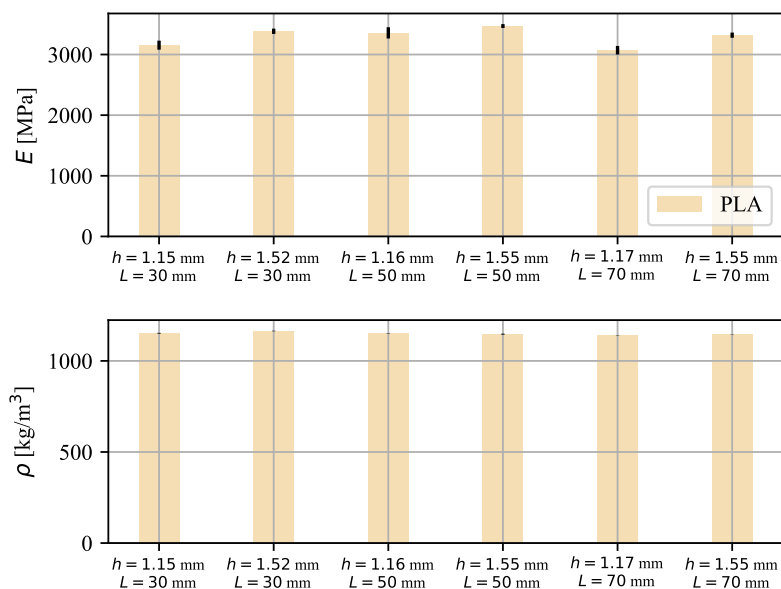
Slika 5: Elastični modul E in gostota ρ pri različnih dimenzijah vzorca.

Tabela 1: Rezultati merjenja mehanskih lastnostih za en material in različne oblike vzorcev.

Material	Smer tiska [°]	h [mm]	L [mm]	λ_1 [rad ² m ⁻²]	$f_{0,1}$ [Hz]	ρ [kg/m ³]	E [MPa]
PLA	0	1.15	30	1.614	335 ± 8	1152 ± 4	3154 ± 148
PLA	0	1.52	30	2.724	448 ± 6	1164 ± 2	3383 ± 87
PLA	0	1.16	50	0.217	127 ± 3	1150 ± 2	3357 ± 185
PLA	0	1.55	50	0.379	170 ± 2	1147 ± 5	3470 ± 64
PLA	0	1.17	70	0.058	63 ± 2	1138 ± 2	3070 ± 141
PLA	0	1.55	70	0.100	86 ± 1	1147 ± 2	3319 ± 86
Skupaj						1150 ± 15	3290 ± 301

4.2.2 Enaka geometrija in različni materiali

V tabeli 2 so zbrane vrednosti dimenzije vzorcev h , pomerjena gostota ρ , 1. lastna frekvenca $f_{0,1}$, izračunana 1. lastna vrednost λ_1 , ter elastični modul E skupaj z 95% intervalom zaupanja. Opazimo lahko, da smer tiska močno vpliva na togost plastik HTPRO PLA in Electrifi (slika 6). V obeh primerih so vzorci s smerjo tiska 0° bolj togi v primerjavi s smerjo tiska 90°. V primeru plastik PVDF in TPU je razlika v smereh tiska znotraj raztrosa. Za vsak material tudi opazimo, da izmerjene gostote tiskanih struktur niso enake za smeri tiska 0° in 90°. V primeru HTPRO PLA, Electrifi in TPU so gostote za smer tiska 90° večje, v primeru PVDF pa je nekoliko višja izmerjena gostota za smer tiska 0°.

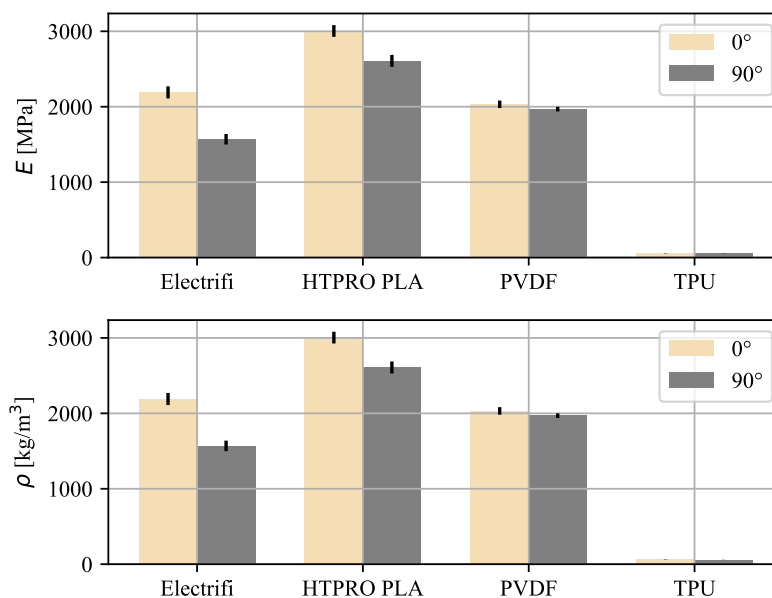
**Slika 6:** Elastični modul E in gostota ρ različnih materialov.

Tabela 2: Rezultati merjenja mehanskih lastnostih za enako vzorce istih dimenzij in različnih materialov.

Material	Smer tiska [°]	h [mm]	L [mm]	λ_1 [rad ² m ⁻²]	$f_{0,1}$ [Hz]	ρ [kg/m ³]	E [MPa]
HTPRO PLA	0	1.20	30	1.750	330 ± 7	1220 ± 6	3004.32 ± 99
HTPRO PLA	90	1.16	30	1.641	290 ± 5	1287 ± 16	2608 ± 160
Electrifi	0	1.18	30	1.696	205 ± 9	2264 ± 70	2190 ± 160
Electrifi	90	1.18	30	1.696	169 ± 7	2373 ± 16	1569 ± 138
PVDF	0	1.20	30	1.750	238 ± 6	1595 ± 26	2032 ± 98
PVDF	90	1.30	30	2.034	255 ± 4	1564 ± 5	1968 ± 62
TPU	0	1.14	30	1.589	46.8 ± 1.5	1082 ± 6	58.7 ± 4.8
TPU	90	1.14	30	1.589	45.1 ± 1.4	1120 ± 1	56.6 ± 3.6

5 Diskusija

Negotovost izračunanega elastičnega modula E pripišemo predvsem raztrosu pomerjenih 1. lastnih frekvenc in posredno negotovosti debeline nosilcev h , negotovost h pa pripisujemo negotovosti debeline 1. tiskanega sloja. Debelina 1. tiskanega sloja se namreč lahko razlikuje, zaradi neravnin na mizi 3D tiskalnika, ter zaradi relativno slabe natančnosti nuliranja z osi tiskalnika. Manjše debeline nosilcev vsebujejo manj slojev tiska, kar poveča relativno negotovost debeline nosilcev h po celotni dolžini nosilca L . Posledično se poveča negotovost togosti nosilca, kar se odraža v večjem raztrosu pri pomerjeni 1. lastni frekvenci. Negotovost dimenzije h še dodatno poveča negotovost elastičnega modula E preko izračunane 1. lastne vrednosti λ_1 . Ta se glede na grafu na sliki 3 z debelino h spreminja.

Ugotovljena razlika pomerjenega elastičnega modula E glede na smer tiska 0° in 90° se ujema z ugotovitvami v [9], kjer je bilo med drugim ugotovljeno, da je efektivna togost 3D tiskanih vzorcev prečno na smer tiska manjša kot pa efektivna togost v smeri tiska. Relativna negotovost s 95% intervalom zaupanja povprečnega elastičnega modula E različnih geometrij enakega materiala znaša 9.2%. Relativno velik odstop je pričakovan, saj 3D tiskane strukture lahko vsebujejo različni delež poroznosti, ki vpliva na efektivni elastični modul E [1]. Na drugi strani pomerjena relativna negotovost gostote ρ s 95% intervalom zaupanja znaša 1.3%. Oba odstopa sta za potrebe strukturne dinamike zadovoljiva.

Razliko v pomerjeni gostoti med posameznimi smermi tiska za en material pripisujemo predvsem načinu tiskanja vzorcev. Pri smeri tiska 90° opravimo več hitrih 180° gibov, ob katerih naneseemo nekoliko več plastike kot pri ustaljeni hitrosti tiskanja. Posledično so tiskani vzorci s smerjo 90° težji v primerjavi s smerjo tiska 0°. Slednje se odraža tudi v pomerjeni nižji 1. lastni frekvenci $f_{0,1}$, ki je za smer tiska 90° nižja od smeri tiska 0°. Omenjen trend velja za vse plastike z izjemo PVDF. V tem primeru je zaradi hipne spremembe smeri tiska večji delež nanosa plastike tolikšen, da se povprečna debelina nosilcev h poveča za 0.1 mm od nominalne vrednosti. Neraven zgornji sloj efektivno poveča delež praznin v predpostavljenem pravokotnem preseku nosilcev vzorca. Posledično je izračunana gostota s smerjo tiska 90° nekoliko manjša v primerjavi s smerjo tiska 0°.

Glavna prednost predstavljene metode določevanja mehanskih lastnosti 3D tiskanih struktur je, da lahko ob majhnem številu numeričnih izračunov λ_1 , na podlagi meritev gostote ρ in 1. lastne frekvence $f_{0,1}$ posredno izračunamo elastični modul E za poljubno strukturo. Metoda je enostavna in omogoča dinamične meritve elastičnega modula E .

6 Zaključki

Predstavljena je bila metoda določevanja mehanskih lastnosti 3D tiskanih struktur. Za izbrano geometrijo vzorca, se numerično izračuna 1. lastno vrednost brez materialnega lastnega problema nedušenega nihanja strukture vzorca. Na podlagi izračunane 1. lastne vrednosti, pomerjene gostote, ter pomerjene 1. lastne frekvence vzorca se nato izračuna efektivni elastični modul.

Predstavljena metoda je bila uporabljena na dveh primerih. V prvem primeru smo metodo preverili na vzorcih enakega materiala in različnih dimenzij. Relativna merilna negotovost z 95% intervalom zaupanja elastičnega modula je znašala 9.2%, gostote pa 1.3%. V drugem primeru smo metodo uporabili na vzorcih enake geometrije različnih materialov in različnih smeri tiska. Vsi rezultati materialnih lastnosti so zbrani v tabeli 2. Ugotovljeno je bilo, da smer tiska lahko bistveno vpliva na efektivno togost ter na gostoto 3D tiskanih vzorcev.

Literatura

- [1] Lichen Fang, Yishu Yan, Ojaswi Agarwal, Jonathan E. Seppala, Kalman D. Migler, Thao D. Nguyen, and Sung Hoon Kang. Estimations of the effective young's modulus of specimens prepared by fused filament fabrication. *Additive Manufacturing*, 42:101983, 2021.
- [2] Enrique Cuan-Urquizo, Eduardo Barocio, Viridiana Tejada-Ortigoza, R. Byron Pipes, Ciro A. Rodriguez, and Armando Roman-Flores. Characterization of the mechanical properties of fff structures and materials: A review on the experimental, computational and theoretical approaches. *Materials*, 12(6), 2019.
- [3] Anoop Kumar Sood, R.K. Ohdar, and S.S. Mahapatra. Parametric appraisal of mechanical property of fused deposition modelling processed parts. *Materials & Design*, 31(1):287–295, 2010.
- [4] Cesar Omar Balderrama-Armendariz, Eric MacDonald, David Espalin, David Cortes-Saenz, Ryan Wicker, and Aide Maldonado-Macias. Torsion analysis of the anisotropic behavior of fdm technology. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 96(1):307–317, Apr 2018.
- [5] Miquel Domingo-Espin, Salvador Borros, Nuria Agullo, Andres-Amador Garcia-Granada, and Guillermo Reyes. Influence of building parameters on the dynamic mechanical properties of polycarbonate fused deposition modeling parts. *3D Printing and Additive Manufacturing*, 1(2):70–77, 2014.
- [6] R. Pintelon, P. Guillaume, K. De Belder, and Y. Rolain. Measurement of young's modulus via modal analysis experiments: a system identification approach. *IFAC Proceedings*

Volumes, 36(16):375–380, 2003. 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2003), Rotterdam, The Netherlands, 27-29 August, 2003.

- [7] Thomas J. R. Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [8] Rafael Ferreira, Igor Amatte, Thiago Assis Dutra, and Daniel Bürger. Experimental characterization and micrography of 3d printed pla and pla reinforced with short carbon fibers. *Composites Part B: Engineering*, 124, 05 2017.
- [9] M. Somireddy, C. V. Singh, and A. Czekanski. Analysis of the material behavior of 3d printed laminates via fff. *Experimental Mechanics*, 59(6):871–881, Jul 2019.



Določitev temperaturno odvisne poti dodajanja materiala

Dejan Kovšca¹, Bojan Starman¹ in Nikolaj Mole¹

Temperature-Based Path Identification for Additive Manufacturing

Povzetek. Predstavljen je algoritem za določitev najprimernejše temperaturno odvisne poti dodajanja materiala, oz. t. i. »3D tiska«, na podlagi metode končnih elementov (MKE). Izračunana pot, v primerjavi s konvencionalnim enosmernim ali dvosmernim tiskom, rezultira v enakomernjšem temperaturnem polju po območju izdelka, nižjih temperaturnih gradientih in posledično manjših deformacijah ter zaostalih napetostih v končnem izdelku.

Abstract. An algorithm for identification of temperature-based path for additive manufacturing (AM) is presented. The algorithm is based on the finite element method (FEM). The resulting welding path, compared to conventional path, results in a more homogenized temperature distribution, lower temperature gradients and consequently lower distortions and residual stresses in the final product.

1 Uvod

Med aditivne tehnologije uvrščamo obdelovalne postopke, za katere je značilno dodajanje materiala po plasteh. Predvsem se uveljavljajo na področju izdelave kompleksnih geometrij, ki jih s konvencionalnimi postopki ne moremo izdelati. V splošnem premičen izvor toplote pretaljuje dodajan material, kar rezultira v nehomogenem temperaturnem polju z velikimi temperaturnimi gradienti. Dodani material se takoj po pretalitvi hitro ohlaja, kar vodi v skrčke in fazne spremembe v mikrostrukturi materiala. V nastali strukturi pa se posledično ustvarjajo velike zaostale napetosti, deformacije in celo termične razpoke. Aditivne tehnologije, kot so npr. direktna laserska depozicija prahu (DLD), selektivno lasersko taljenje (SLM) ali obločno navarjanje žice (WAAM), omogočajo tiskanje nepovezanih segmentov. Posledično lahko eksperimentalno (z merjenjem temperature ob dodajanju materiala) ali numerično (z MKE) določimo tak vrstni red dodajanja materiala, da se izognemo lokalnemu pregrevanju in povečamo homogenost temperaturnega polja po nastali strukturi.

¹ Laboratorij za numerično modeliranje in simulacije, Fakulteta za strojništvo - Univerza v Ljubljani

2 Numerično modeliranje dodajanja materiala

V primeru modeliranja dodajanja materiala gre za nestacionarni pojav. V splošnem lahko izvedemo toplotni in mehanski del preračuna zaporedno (angl. *sequential coupled*). Mehanski odziv je namreč posledica toplotne obremenitve na strukturo in večinoma nima neposrednega vpliva na generacijo toplote. V nadaljevanju bo opisano zgolj modeliranje toplotnega dela. Za izračun je bilo uporabljeno programsko okolje SIMULIA Abaqus. Podrobneje je numerično modeliranje dodajanja materiala opisano v [1].

Dodajanje materiala po MKE modeliramo z aktivacijo končnih elementov (KE) na mestih, kjer se je dodal material. Neaktivirani KE imajo predpisano temperaturo tališča materiala in se takoj po aktivaciji pričnejo ohlajati. Za aktivacijo KE tekom preračuna obstajata dva načina. Po prvi metodi neaktiviranim KE predpišemo take materialne lastnosti, da ti ne vplivajo na že aktivirano strukturo. Število KE in neznank se z uporabo te metode tekom izračuna ne spreminja. Z drugo metodo pa aktivacijo izvedemo s sprotnim dodajanjem KE v sistem enačb. Pri tem se število KE in neznank tekom izračuna povečuje. Čeprav s slednjo metodo izboljšamo učinkovitost preračuna (manjše število neznank), se mora za vsak dodani KE sistem enačb ponovno generirati, kar predstavlja časovno relativno zamudno nalogo. Za vsako spremembo numeričnega modela je potrebno ustvariti tudi nov računski korak (angl. *step*). Iz zgoraj opisanega sledi, da je najučinkovitejša metoda za numerično modeliranje dodajanja materiala t. i. hibridna metoda. V numerični model dodajamo KE v večjih sklopih (npr. pri prehodu na novo plast), samo aktivacijo pa izvedemo s spremembo materialnih lastnosti.

Gljuč za vklop posameznega KE je čas aktivacije, ki je določen z lastno Python/Fortran programsko kodo. Ta bazira na programu napisanem v gkodi, ki se uporablja za numerično krmiljenje naprav za dodajanje materiala in je potrebna za izvedbo tiskanja željenega izdelka. Na materialne lastnosti lahko tekom izračuna v Abaqus/Standard vplivamo s podprogramom (angl. *subroutine*) USDFLD. Ta nam omogoča, da so materialne lastnosti vezane na uporabniško določeno spremenljivko. V primeru aktiviranih KE je ta enaka temperaturi, pri kateri dobimo realne materialne lastnosti. V nasprotnem primeru pa zaseda neko poljubno veliko vrednost, ki odgovarja materialnim lastnostim neaktiviranih KE.

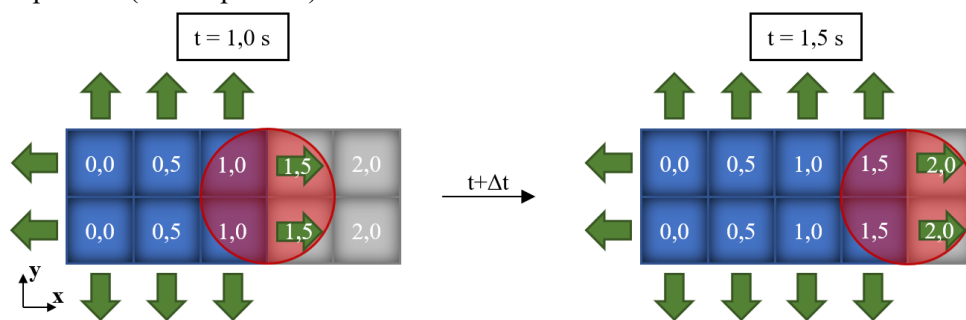
Hkrati z aktivacijo KE moramo poskrbeti tudi za aktivacijo ustreznih robnih pogojev. V primeru toplotnega izračuna kot robni pogoj nastopa zgolj odvod toplote skozi proste površine aktiviranih KE. Ker pa se proste površine tekom izračuna spreminjajo, moramo poznati tudi stanje sosednjih KE. V primeru, da je sosednji KE neaktiviran, na skupni ploskvi dveh KE obstaja odvod toplote v obliki naravne konvekcije in radiacije. Prav tako pa tudi v primeru, če je ploskev KE del zunanje površine. V kolikor pa je sosednji KE aktiven, med njima poteka prevod toplote. Tega ni potrebno dodatno predpisovati, saj je modeliran s samo formulacijo enačbe KE. Znotraj Abaqus/Standard lahko na odvod toplote s površin posameznega KE vplivamo s podprogramom FILM.

Kljub temu, da KE aktiviramo s temperaturo taljenja, je vnos energije manjši od realnega. Toplotni izvor namreč dovaja toploto tudi v spodnjo plast že dodanega materiala. Posledično moramo v numerični model dodajanja materiala vključiti tudi premikajoči se izvor toplote. Njegov vpliv omejimo le na spodnje plasti, da preprečimo pregretje trenutno dodanega materiala. Abaqus/Standard nam omogoča modeliranje izvora toplote s podprogramom DFLUX. Ta pa mora slediti fronti vklapljanja KE. Pogosto se za ta namen uporabi Goldakov dvojni elipsoidni model, ki temelji na Gaussovi porazdelitvi in je matematično zapisan z

enačbo (1). V tej enačbi koordinate x, y, z predstavljajo relativno oddaljenost točke v kartezijskih koordinatah od centra izvora toplote, v kateri se izračuna volumska generacija toplotnega toka q_h [W/m³]. Parametri a_h , b_h in c_h predstavljajo obliko oz. polmere (dolžina, širina, višina) talilnega bazena (angl. *weld pool*). Toplotno moč izvora Q [W] izračunamo iz električne napetosti U [V], toka I [A] in izkoristka η [/] po enačbi $Q = \eta U I$. Goldak [2], sicer preko deleža f_h , predvideva uporabo dveh ločenih enačb (1), s spremenjenimi parametri oblike, za modeliranje različne generacije toplote pred in za lokacijo centra izvora v smeri pomika. Zaradi relativno počasnega gibanja izvora, smo uporabili poenostavljen model, ki zajema zgolj eno enačbo in rezultira v centralno simetrični obliki izvora.

$$q_h(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}f_h Q}{\pi\sqrt{\pi}a_h b_h c_h} \exp\left[-3\left(\frac{x^2}{c_h^2} + \frac{y^2}{a_h^2} + \frac{z^2}{b_h^2}\right)\right] \quad (1)$$

Predstavljena metoda omogoča numerično modeliranje 3D tiska širokega nabora materialov, tako kovinskih kot polimernih. Delovanje zgoraj opisanih podprogramov je poenostavljeno prikazano na sliki 1. Pri času $t = 1,0$ s so na levi strani aktivirani (obarvani modro) zgolj KE s pripisanim aktivacijskim časom manjšim ali enakim $1,0$ s. V naslednjem inkrementu pri času $t = 1,5$ s se aktivira naslednji sklop KE. Sočasno se s fronto dodajanja premika tudi izvor toplote označen z rdečo površino. Hkrati pa se spremenijo tudi robni pogoji odvoda toplote iz prostih površin (zeleno puščice).



Slika 1: Grafični prikaz dodajanja materiala z MKE.

V realnosti dodajanje materiala poteka zvezno. MKE pa nam omogoča zgolj nezvezno aktivacijo posameznih KE. Posledično so izračunani temperaturni gradienti večji od realnih. Temperaturne gradientne smo nekoliko zmanjšali z zamikom izvora toplote. Ta potuje pred fronto dodajanja (glej sliko 1) in predgreva spodnjo plast že aktiviranih KE. Manjši temperaturni gradienti povečajo konvergenco izračuna in posledično omogočajo računanje z večjimi časovnimi inkrementi. Dodatno smo izvedli glajenje temperature z naknadnim toplotnim izračunom v Abaqus/Standard programskem okolju. V prvotnem izračunu so časovni inkrementi, s strani algoritma, samodejno prilagojeni za potrebe konvergence. S pomočjo drugega izračuna pa v konstantnih časovnih inkrementih preberemo temperaturo iz prvotnih rezultatov (en časovni inkrement pred in po aktivaciji posameznega KE). Ta se zato v času aktivacije, ko temperature nismo prebrali povpreči iz omenjenih temperatur. Kljub vsemu, pa morajo biti temperaturni inkrementi dovolj majhni, da omogočajo modeliranje faznih sprememb materiala. Dobljeni zglajeni rezultati toplotnega dela so podlaga za preračun mehanskega odziva strukture.

3 Temperaturno odvisna pot dodajanja materiala

V prejšnjem poglavju je, kot ključ za aktivacijo posameznega KE, uporabljen čas aktivacije določen na podlagi ustrezne gkode za dodajanje materiala. Ta je generirana s pomočjo namenskih komercialnih programov in predstavlja vhod v izračun. V primeru algoritma za iskanje najprimernejše temperaturno odvisne poti pa moramo ubrati drugačno strategijo, saj pot tiska vnaprej ni določena.

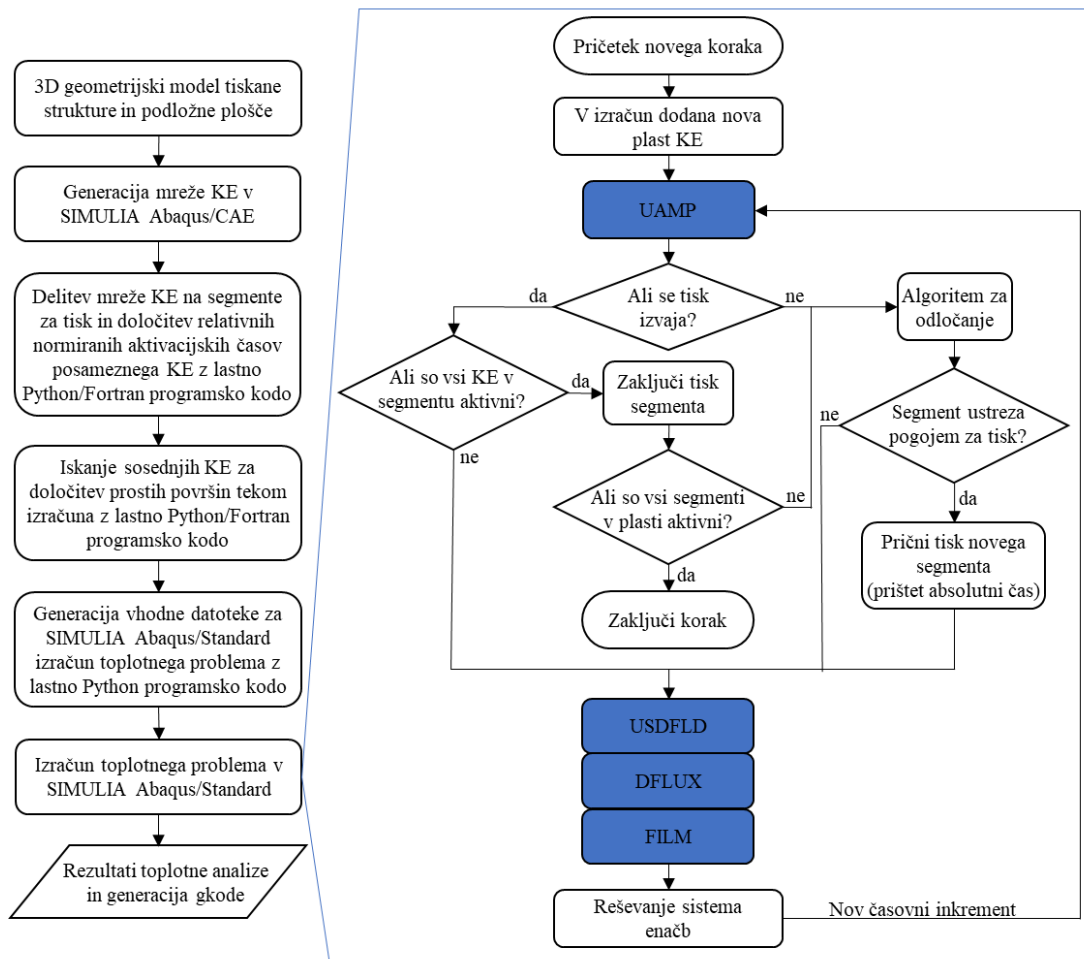
Mrežo KE, z lastno Python/Fortran programsko kodo, navidezno razdelimo na več posameznih segmentov. V splošnem lahko imajo ti segmenti poljubno obliko. Za potrebe tega algoritma izberemo segmente velikosti (širina in višina), ki ustrezajo izbranim varilnim parametrom enojnega navarka. Ker izbrana oblika in velikost segmenta omogoča tisk po le eni poti, lahko določimo relativne čase aktivacije (pričetek s časom 0,0 s) za vsak segment posebej. Dodatno so aktivacijski časi normirani na hitrost navarjanja (predpostavimo tisk s hitrostjo 1 mm/s). Ti pa so, tekom izračuna v Abaqus/Standard podprogramu, skalirani z izbrano hitrostjo tiska. Normirani relativni časi aktivacije predstavljajo vhodne podatke v izračun za določitev temperaturno odvisne poti.

Za modeliranje dodajanja materiala smo uporabili podobne podprograme (USDFLD, FILM in DFLUX), kot v prejšnjem poglavju, z nekaj manjšimi modifikacijami. Glavno spremembo numeričnega modela predstavlja uporaba podprograma UAMP. Ta je sicer namenjen uporabniškemu določanju amplitud obremenitev tekom izračuna. Za razliko od ostalih treh zgoraj omenjenih podprogramov, ki se izvedejo za vsak KE posebej v vsakem časovnem inkrementu, se UAMP izvede zgolj enkrat na začetku posameznega inkrementa. Zaradi te lastnosti ga bomo v našem primeru uporabili kot algoritem za odločanje.

Podprogram UAMP tako določa pričetek, potek in zaključek tiska posameznega segmenta. Dodajanje materiala se prične na lokaciji, ki jo algoritmu posredujemo kot začetni pogoj. Ko tiskanje znotraj simulacije poteka, podprogram pregleduje ali so izpolnjeni kriteriji za zaključek tiska (vsi KE v segmentu so aktivni).

V kolikor se tisk zaključi, algoritem izbira naslednji najprimernejši segment za tisk, na podlagi najnižje povprečne temperature površine, na katero bomo dodajali nov segment. Pri tem pa lahko določimo še najmanjši čas premora med tiskom posameznega segmenta in največjo še dovoljeno temperaturo površine pred navarjanjem. Segment, ki izpolnjuje vse zgoraj opisane pogoje in nalega na površino z najnižjo povprečno temperaturo gre v tisk. Pred tem se določi še najprimernejšo smer navarjanja glede na temperaturo (tisk se prične na hladnejši strani površine). V nadaljevanju se normirane relativne čase skalira z izbrano hitrostjo tiska in prišteje trenutni absolutni čas inkrementa. V primeru, da je smer tiska negativna oz. obratna od predpostavljene, se na aktivacijskih časih naredi inverz. Opisan algoritem, kot kriterij, sicer upošteva zgolj temperaturo. Smiselno pa bi bilo upoštevati tudi kriterij temperaturnih gradientov in zaostalih napetosti.

Vsako posamezno plast KE dodamo v izračun v ločenem računskemu koraku, pri čemer čas trajanja koraka predhodno določimo (angl. *step time period*). Očitno je, da ob upoštevanju kriterija najvišje dovoljene temperature na površini, trajanje tiska posamezne plasti ne moremo napovedati. V tem primeru postopamo tako, da vsakemu računskemu koraku določimo dovolj dolg čas trajanja, ki pa ne bo dosežen. V kolikor je tisk trenutne plasti zaključen (vsi KE v plasti so aktivni), uporabimo funkcijo *IFlagsDefine(iConcludeStep)* znotraj UAMP podprograma, ki omogoča zaključek trenutnega računskega koraka simulacije in prehod na naslednji korak, kjer se v sistem enačb doda nova plast KE.



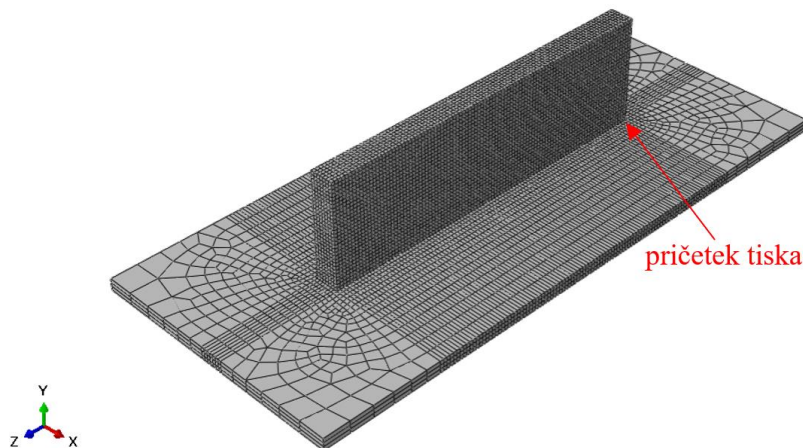
Slika 2: Diagram poteka celotnega postopka (levo) in algoritma izračuna (desno).

Diagram poteka algoritma je prikazan na sliki 2. Poudariti je potrebno, da opisana metoda ni optimizacijski algoritem, kjer bi izvedli več iteracij preračuna, da bi prišli do optimalne poti dodajanja materiala. V tem primeru gre za algoritem, ki inkrementalno tekom izračuna določa najprimernejši segment za tisk.

Primerjava našega algoritma z objavljenim v znanstvenem prispevku Sefidi [3] razkrije številne prednosti. V tem prispevku so posamezni segmenti ločena geometrijska območja, kar zahteva povezovanje mreže (angl. *tie*), ki lahko vodi v številne numerične težave in daljše računske čase. V našem algoritmu so segmenti zgolj navidezni, posledično celotno geometrijo za tisk sestavlja enotna mreža KE. Naš model omogoča tudi sprotno računanje časov premora med tiskom posameznega segmenta. Dodatna prednost je, da se algoritem za odločanje izvaja tekom izračuna, medtem ko se v zgoraj omenjenem prispevku po tisku posameznega segmenta izračun prekine. Algoritem za odločanje pa se izvede v ločenem MATLAB programu.

4 Numerični primer

V nadaljevanju bomo do sedaj opisan algoritem uporabili na enostavnem primeru segmentnega navarjanja stene 60 mm x 18 mm x 4 mm na podložni plošči velikosti 100 mm x 44 mm x 2 mm. Mrežo KE stene, prikazano na sliki 3, sestavlja 21.000 8-vozljučnih heksaedričnih KE s karakteristično velikostjo 0,6 mm oz. 25.048 vozljuč. Skupno s ploščo mreža KE zajema 34.233 KE oz. 42.412 vozljuč. Celotno geometrijo stene smo razdelili na 10 plasti, kjer je višina posamezne tiskane plasti 1,8 mm. Za potrebe segmentnega navarjanja smo posamezno plast po dolžini razdelili na 5 linearnih segmentov dolžine 12 mm. Tako je posamezni segment sestavljen iz 420 KE (20 KE x 7 KE x 3 KE).



Slika 3: Geometrijski model in pripadajoča mreža KE za obravnavani problem.

Za tiskano strukturo in podložno ploščo smo uporabili enoten material SAE1006. Temperatura navarjanja oz. aktivacije KE je 1500 °C. Začetna temperatura podložne plošče in temperatura okolice (zraka in mize) znaša 25 °C. Uporabljen koeficient toplotne prevodnosti na varilno mizo pod podložno ploščo je 50 W/(m²K), koeficient prestopnosti iz jekla na zrak pa 20 W/(m²K). Privzeti faktor emisivnosti tiskanih površin je 1,0.

Tiskanje poteka z varilnim izvorom moči 975 W (65 A, 15 V) s hitrostjo 6 mm/s. Dolžina in širina toplotnega izvora znaša 4,0 mm, globina pa 1,8 mm. S tiskom prve plasti pričnemo na skrajno desnem robu stene (glej sliko 3). Časovni premor med tiskom posameznega segmenta je, zaradi primerjave z zveznim enosmernim in dvosmernim navarjanjem, enak 0 s. Prav tako je tudi trajanje časovnega premora pri prehodu na novo plast enako 0 s. Z izbranimi parametri tisk posamezne plasti traja 10 s. Za izračun je bil uporabljen konstanten časovni korak 0,5 s.

5 Rezultati

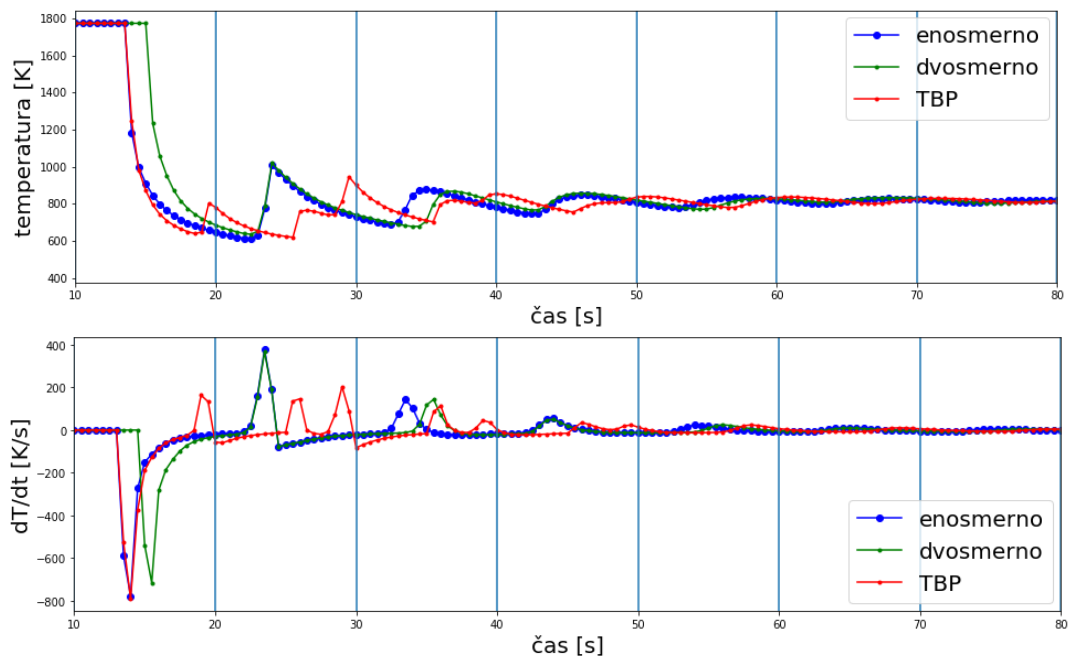
Na sliki 4 je, z zaporedno številko in barvo po posamezni plasti (od temnejše k svetlejši), prikazano zaporedje vklopa posameznih segmentov. S puščico je prikazana smer dodajanja materiala. Opazimo lahko, da se od šeste dodane plasti naprej temperaturno polje ustali. Pojavljati se začne vzorec dodajanja materiala izrazito podoben enosmernemu navarjanju. Poudariti je potrebno, da morebitna sprememba parametrov navarjanja (lokacija pričetka, hitrost in premor med tiskom posameznega segmenta) močno vpliva na zaporedje tiska.

Na sliki 4 sta označeni tudi točki P1 in P2, v katerih bomo v nadaljevanju primerjali temperaturo in temperaturni gradient med posameznim načinom tiska (zvezno enosmerno, zvezno dvosmerno in segmentno navarjanje). Omenjeni točki se nahajata na zgornji površini srednjega segmenta v drugi plasti. Lokacija teh točk je bila izbrana zato, ker se na tem mestu vsi trije načini tiskanja časovno najbolj ujemajo.



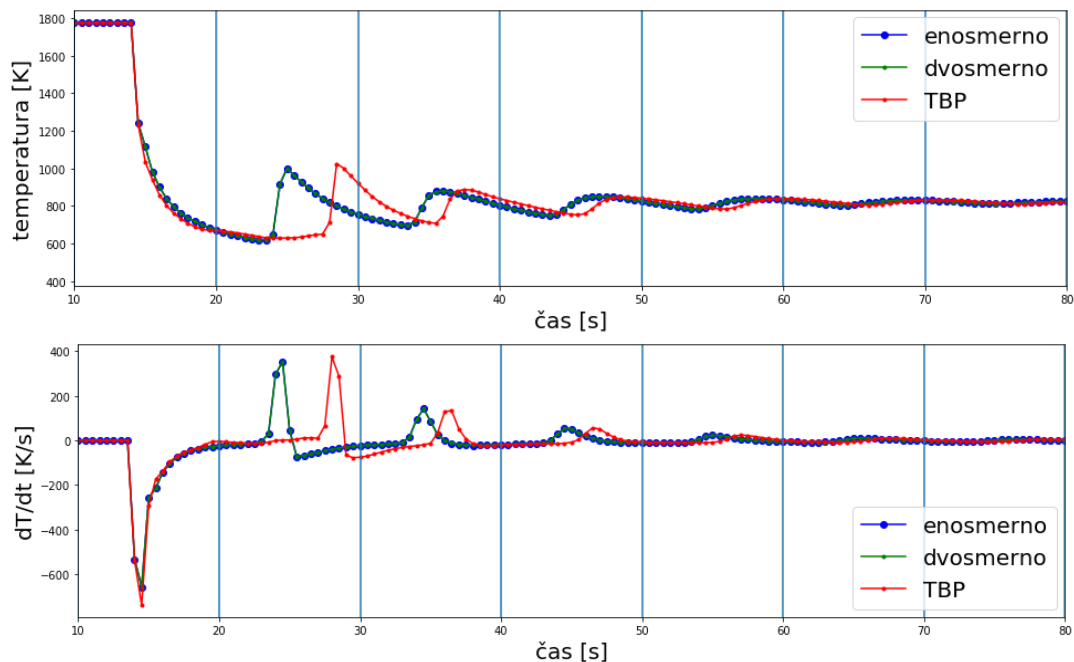
Slika 4: Zaporedje in smer vklopa posameznega segmenta.

Na sliki 5 je prikazana temperatura na robu in toplotni gradienti v točki P1. Pri navarjanju zgornje tretje plasti (med 20 s in 30 s) smo v primeru segmentnega navarjanja (TBP) uspeli temperaturo znižati za 70 K oz. 8%, temperaturni gradient pa celo za 170 K/s oz. več kot 80%, pri čemer je za referenco vzeta temperatura pri enosmernem navarjanju.



Slika 5: Primerjava temperature in temperaturnega gradienta v točki P1.

Slika 6 prikazuje časovno odvisnost temperature in temperaturnega gradienta na sredini površine v točki P2. Bistvena razlika med posameznim načinom tiska ni opazna. Ugotovimo lahko da, proti sredini zgornje površine in v notranjost segmenta, vpliv poti navarjanja izginja.



Slika 6: Primerjava temperature in temperaturnega gradienta v točki P2.

6 Zaključek

S pomočjo implementacije algoritma za temperaturno odvisno določanje lokacije dodajanja segmenta smo uspeli lokalno znižati pregretnje in temperaturne gradiente v strukturi v primerjavi z enosmernim oz. dvosmernim navarjanjem. Kljub vsemu, so globalne razlike v temperaturi manjše od pričakovanih. Vsekakor bi za dokončno oceno učinkovitosti metode morali v nadaljevanju izvesti še mehanski del izračuna. Do večjih razlik med zveznim in segmentnim tiskanjem bi predvidoma prišli pri obravnavanju geometrijsko kompleksnejših struktur.

Literatura

- [1] D. Kovšca, B. Starman, A. Ščetinec, D. Klobčar, N. Mole, *Advanced computational modelling of metallic wire-arc additive manufacturing, ESAFORM 2021* [Online]. 2021 [ogled 27.4.2021]. Dostopno na: <https://popups.uliege.be/esaform21/index.php?id=2340>
- [2] J. Goldak, A. Chakravarti, M. Bibby, *A new finite element model for welding heat source, Metallurgical and Materials Transactions B*, 1984, 15, pp. 299-305.
- [3] M. P. Sefidi, et al., *Rule-Based Path Identification for Direct Energy Deposition, Procedia Manufacturing*, 47, 1134-1140, 2020.



Visokohitrostni preizkusi direktnega udarca (DIHB) z uporabo metode separacije napetostnih valov

Anja Mauko¹, Yunus Emre Yilmaz¹ in Zoran Ren¹

High-speed impact testing on DIHB with implementation of wave separation technique

Povzetek. Celični materiali so pogosto uporabljeni material v sodobnih aplikacijah na različnih področjih. Zaradi odličnih materialnih lastnosti, kot so visoka trdnost ob nizki gostoti materiala, ki omogoča velike deformacije pri stalni napetosti, predstavljajo bistveno prednost v primerjavi s klasičnimi materiali. Za pravilno dinamično karakterizacijo celičnih materialov je potrebno zadostno število celic v strukturi za ustrezno reprezentativnost materiala. Posledično so preizkušeni vzorci večjih dimenzij, kateri na klasičnem Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB) preizkuševališču dosegajo nižje stopnje deformacije. Za doseganje zadostne specifične deformacije celičnih materialov je bilo izvedeno preoblikovanje SHPB preizkuševališča v preizkus direktnega udarca (DIHB). Na DIHB preizkuševališču so bile izvedene dvotočkovne meritve deformacijskih impulzov. Zaradi potovanja in odboja napetostnih valov po oziroma na prostih koncih vstopne palice, je izmerjeni deformacijski impulz popačen. V ta namen je bila uporabljena metoda separacije valov, ki omogoča rekonstrukcijo prvotnega tlačnega deformacijskega impulza. Ustreznost metode je bila preverjena na vzorcih odprto-celičnega in zaprto-celičnega materiala.

Abstract. Nowadays cellular materials are widely used materials for advanced structural applications. Their excellent stiffness to weight ratio, giving large deformation at constant stress level makes them particularly exceptional for energy absorption applications. In order to perform the correct dynamic characterization of cellular materials, the structure must contain sufficient representative volume of elements. This leads to the necessity of testing with large sized samples and lower strain rates. Direct Impact Hopkinson Bar (DIHB) set-up is modified version of Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB) apparatus in which higher strain rates can be obtained. When dealing with larger samples and higher strain rates, reflected waves can interact with the incident wave. In this paper, two points strain-gauge measurements are used in DIHB set-up and the method of separating and recovering the initial wave is presented. Two different cellular material samples are used to demonstrate the wave separation process. The results have proven the adequacy of the wave separation technique which allows subsequent material characterization.

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

1 Uvod

Sodobni celični materiali z izboljšanimi materialnimi lastnostmi, kot so nizka gostota, visoka energijska absorpcija in spremenljivo Poissonovo število [1], so vedno pogosteje uporabljeni v sodobnih izdelkih na različnih področjih. Povečana uporaba naprednih celičnih materialov je pogojena z natančno karakterizacijo njihovih mehanskih in ostalih fizikalnih lastnosti. Prvotne raziskave njihovega mehanskega obnašanja so bile usmerjene predvsem v statično karakterizacijo celičnih materialov, katerih rezultati so pokazali visoko sposobnost absorpcije mehanske energije [2]. Izsledki raziskav so nakazali uporabnost celičnih materialov za učinkovito absorpcijo mehanske energije tudi pri visokih deformacijskih hitrostih. V preteklosti so bili izvedeni različni načini dinamičnega testiranja celičnih materialov, kot so uporaba enoosnih tlačnih strojev [3], preizkusa prostega padca [4], [5], eksplozijski preizkusi [6] in Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB) preizkuševališče [7], [8]. SHPB preizkuševališče je uveljavljena metoda za izvedbo dinamičnih preizkusov homogenih materialov pri visokih deformacijskih hitrostih. Prav tako je SHPB preizkuševališče omejeno s stopnjo specifične deformacije, ki je pogojena z razmerjem dimenzij vzorca in preizkuševalnih palic ter njihovim materialom. SHPB preizkuševališče ne omogoča dovolj natančnega visokohitrostnega testiranja celičnih materialov. Zaradi tega je bila razvita nadgradnja SHPB preizkuševališča v preizkus direktnega udarca (DIHB) [9], ki mogoča učinkovito dinamično karakterizacijo tudi celičnih materialov [10].

Pri preizkusu direktnega udarca, udarno telo z veliko hitrostjo udari neposredno v preizkušanelec, ki je pritrjen na vstopno palico, slika 1. Udarno telo ob udarcu v preizkušanelec povzroči deformacijski tlačni impulz. Del impulza se odbije od preizkušanca in potuje po udarnem telesu med obema koncema telesa, pri čemer pri vsakem odboju na prostih koncih spremeni svoj značaj (tlačno – natezno in obratno). Preostali del tlačnega impulza pa se deloma porabi za deformiranje preizkušanca. Neporabljeni del impulza se prenese na vstopno palico in po njej potuje do mesta meritve, pri čemer prav tako pri vsakem odboju na prostih koncih palice spremeni svoj značaj (tlačno – natezno in obratno). Za dinamično karakterizacijo preizkušanih materialov je potrebno natančno izmeriti prvi napetostni val v deformacijskem impulzu. V večini primerov visokohitrostnih preizkusov sta hitrost potovanja in dolžina napetostnega vala previsoki, da bi lahko na merilnem mestu izmerilo izključno prvi val še preden drugi val spremeni njegovo prvotno vrednost. Metoda separacije napetostnih valov [11] omogoča ločitev prvotnega napetostnega vala od kasneje nastalih valov, ki popačijo prvoten merilni signal.

V raziskavi so meritve deformacijskih impulzov oz. napetostnih valov potekale s pomočjo merilnih lističev na vstopni palici, vezanih v Wheatstonov mostič. Z metodo separacije napetostnih valov so bile teoretično predvidene dolžine valov, časi odboja in prekrivanja valov. Teoretične napovedi so popolnoma sovpadale z eksperimentalnimi rezultati, kar dokazuje ustreznost metode separacije napetostnih valov. Za natančno določitev hitrosti udarnega telesa in velikosti deformacijskega impulza ter poteka deformiranja preizkušanca je bila uporabljena metoda digitalne korelacije slik (DIC), zajetih z ultra-hitro digitalno kamero Photron FASTCAM-SA-Z.



Slika 1: Shema sestave DIHB preizkuševališča.

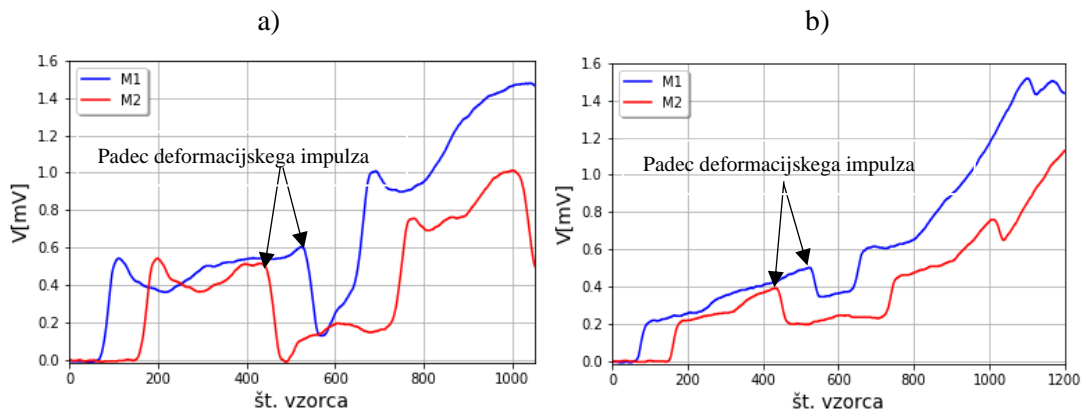
2 Visokohitrostni preizkusi na DIHB

SHPB preizkuševališče je pogosto uporabljena metoda visokohitrostne karakterizacije materialnih lastnosti različnih homogenih materialov. Celični materiali imajo zaradi nizke gostote nizko mehansko impedanco v primerjavi s homogenimi materiali, zato njihovo preizkušanje na SHPB preizkuševališču ni ustrezno. Prav tako je SHPB preizkuševališče omejeno s stopnjo dosežene specifične deformacije, ki je pogojena z dimenzijami in materialom palic ter dimenzijami, materialom in hitrostjo udarnega telesa. Za dinamično karakterizacijo celičnih materialov je ključnega pomena zadostna stopnja specifične deformacije za doseganje zgostitve celične strukture. Pretekle raziskavo so pokazale, da stopnja dosežene specifične deformacije celičnih materialov na SHPB ni zadostna. Avtorji del [9], [11] so predlagali preoblikovanje SHPB preizkuševališča v DIHB preizkuševališče, na katerem pa je možno doseči zgostitev celičnih materialov.

DIHB preizkuševališče je sestavljeno iz udarnega telesa in vstopne palice. Preizkušani material je pritrjen na vstopno palico, slika 1. Udarno telo je s pomočjo pospeševalnega sistema pospešeno na hitrost preizkusnega udarca. Ob trku udarnega telesa v preizkušane nastane deformacijski impulz, ki deloma deformira preizkušane, deloma pa se prenese na vstopno palico in po njej potuje kot deformacijski (napetostni) val.

Uporabljeno DIHB preizkuševališče ima vstopno palico dolžine $l = 1500$ mm, dolžina uporabljenega udarnega telesa pa je $l_s = 350$ mm. Vstopna palica in udarno telo sta enakega premera $d = 20$ mm in izdelani iz jekla 1.2379 z modulom elastičnosti $E = 210$ GPa. Vstopna palica je na dveh merilnih mestih M1 in M2 opremljena z merilnimi lističi za zajem deformacijskega impulza, slika 1. Merilno mesto M1 je oddaljeno od začetka vstopne palice $l_1 = 350$ mm, merilno mesto M2 pa $l_2 = 500$ mm. Merilni lističi na vsakem merilnem mestu so povezani v polovični Wheatstonov mostič. Vsi izvedeni preizkusi so bili posneti z ultra-hitro digitalno kamero Photron FASTCAM-SA-Z pri hitrosti vzorčenja 70.000 slik na sekundo (fps) in resolucijo slik 640×280 slikovnih točk (px). Visokohitrostni posnetki so bili analizirani z uporabo DIC metode, s pomočjo katere so bile določene natančne hitrosti udarnega telesa tik pred trkom v preizkušane in posnet postopek deformiranja preizkušanca. Eksperimentalni podatki, izmerjeni s pomočjo merilnih lističev, so bili zajeti z visoko zmogljivim merilnim sistem DEWESoft SIRIUSi HS 8x STG+ s hitrostjo vzorčenja 1 MHz. Merilni sistem omogoča sinhronizacijo rezultatov merilnih lističev in vizualnih rezultatov iz digitalnih kamer, kar predstavlja bistveno prednost pri kasnejši obdelavi rezultatov.

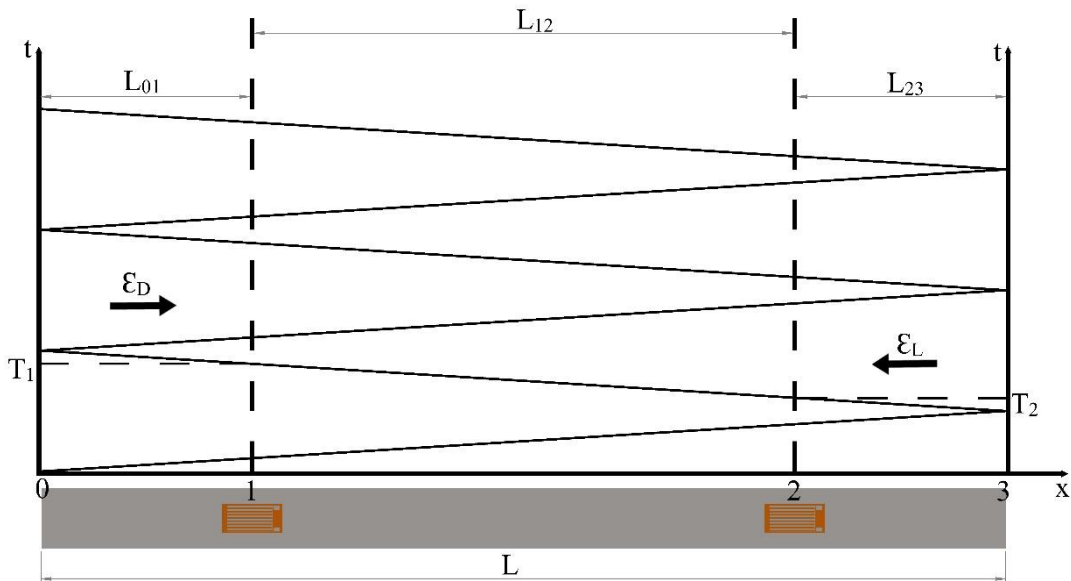
Izvedeni so bili dinamični DIHB preizkusi odprto-celičnega in zaprto-celičnega materiala. Preizkušanci so bila valjaste oblike velikosti $\text{Ø}20 \times 20$ mm. Preizkusi so bili izvedeni pri nazivni hitrosti udarnega telesa 21 m/s. Neobdelani rezultati preizkusov na sliki 2 prikazujejo spremembo električne napetosti na merilnih mestih M1 in M2 v odvisnosti od vzorčenja. Kot je razvidno, rezultati obeh merilnih mest sovpadajo, vendar so časovno zamaknjeni zaradi različnih pozicij merilnih mest vzdolž palice. Nenaden padec električne napetosti je rezultat prekrivanja potujočih napetostnih valov, saj se tlačni in povratni natezni valovi med seboj izničujejo. Pojav nenadnega padca oz. izničenja deformacijskega impulza je podrobneje razložen v poglavju 3.



Slika 2: Graf električne napetosti v odvisnosti od vzorčenja za a) odprto-celični material in b) zaprto-celični material.

3 Metoda separacije deformacijskih/napetostnih valov

Ob trku udarnega telesa nastane deformacijski impulz, ki se širi po vstopni palici. Da bi lahko karakterizirali preizkušani material, je potrebno izmeriti prvi tlačni val v deformacijskem impulzu. Ko tlačni val doseže prosti konec vstopne palice se odbije od proste površine, pri tem spremeni značaj (tlačni – napetostni in obratno) in potuje nazaj do začetka vstopne palice kot natezni val. Primarni in odbiti napetostni val se prekrivata, ko je primarni tlačni val daljši kot vstopna palica in se val posledično ne konča pred povratkom odbitega nateznega vala na merilno mesto. V tem primeru je potrebno uporabiti metodo separacije valov, ki omogoča ločitev primarnega in odbitega vala v deformacijskem impulzu [11].



Slika 3: Prikaz širjenja deformacijskih valov na vstopni palici.

Uporabljeno je bilo dvotočkovno merjenje s pomočjo merilnih lističev pritrjenih na merilnih mestih M1 in M2. Slika 3 prikazuje širjenje valov vzdolž vstopne palice in njihov medsebojni vpliv. Za lažje razumevanje bo v nadaljevanju tlačni val imenovan kot desno potujoči val ε_D in natezni val kot levo potujoči val ε_L . Desni val ε_D potuje od mesta 0 (začetek palice) proti mestu 3 (konec palice). Levi val ε_L se širi od mesta 3 proti 0 s časovnim zamikom, sorazmernim dolžini palice. Merilni mesti izmerita vsoto desnega in levega vala. Zaradi prostega konca palice 3, imajo levi valovi nasprotni predznak kot desni. Za merilni mesti M1 in M2 velja, da so izmerjeni signali:

$$\varepsilon_1(n) = \varepsilon_{D1}(n) + \varepsilon_{L1}(n) \quad (1)$$

$$\varepsilon_2(n) = \varepsilon_{D2}(n) + \varepsilon_{L2}(n) \quad (2)$$

kjer n predstavlja število vzorca. Ločljivost sistema je mogoče izračunati kot:

$$\Delta x = \frac{f_s}{C} \quad (3)$$

pri čemer je f_s frekvenca vzorčenja in C hitrost deformacijskega vala. Kot je razvidno iz slike 3, se čas prihodov desnega in levega vala do merilnih mest razlikuje. Desni val najprej doseže M1 in nato M2, med tem ko levi val najprej doseže M2 in nato M1. Časovna razlika med M1 in M2 je določena kot

$$T = \frac{L_{12}}{C} \quad (4)$$

kjer je L_{12} dolžina med merilnima mestoma M1 in M2. Ker je hitrost širjenja desnega in levega vala enaka, lahko levi val premaknemo po časovni osi, tako da sta začetka obeh valov usklajena:

$$\varepsilon_{D1}(n - T) = \varepsilon_{D2}(n) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{L1}(n) = \varepsilon_{L2}(n - T) \quad (6)$$

Ob združitvi enačb (1) in (6) in preureditvi dobimo:

$$\varepsilon_{D1}(n) = \varepsilon_1(n) - \varepsilon_{L2}(n - T) \quad (7)$$

Prav tako lahko združimo in preuredimo enačbi (2) in (6):

$$\varepsilon_{L2}(n) = \varepsilon_2(n) - \varepsilon_{D1}(n - T) \quad (8)$$

Izraz za določitev desnega vala tako dobimo s kombinacijo enačb (7) in (8) v obliki:

$$\varepsilon_{D1}(n) = \varepsilon_1(n) - \varepsilon_2(n - T) + \varepsilon_{D1}(n - 2T) \quad (9)$$

Enako storimo za levo potujoči val in dobimo:

$$\varepsilon_{L2}(n) = \varepsilon_2(n) - \varepsilon_1(n - T) + \varepsilon_{L2}(n - 2T) \quad (10)$$

Merilno mesto M1 meri izključno desni val do časa T_1 , medtem ko drugo merilno mesto M2 prične meriti seštevek desnega in levega vala ob času T_2 . Časa T_1 in T_2 lahko izračunamo kot

$$T_1 = (2L + L_{01})\Delta x \quad (11)$$

$$T_2 = (L + L_{23})\Delta x \quad (12)$$

Če združimo vse zgoraj navedene pogoje, je mogoče desni in levi val ločiti in določiti z enačbami:

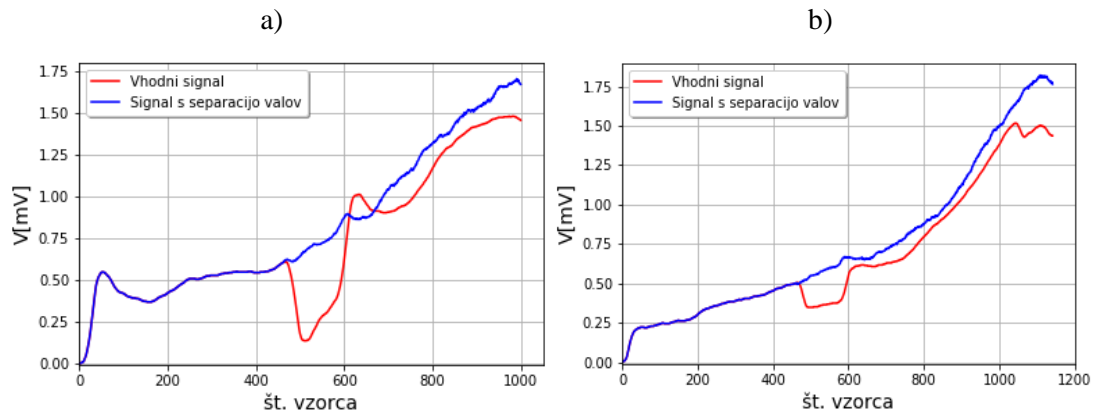
$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1}(n) &= \varepsilon_1(n) & n \leq T_1 \\ \varepsilon_{D1}(n) &= \varepsilon_1(n) - \varepsilon_2(n - T) + \varepsilon_{D1}(n - 2T) & n > T_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{L2}(n) &= 0 & n \leq T_2 \\ \varepsilon_{L2}(n) &= \varepsilon_2(n) - \varepsilon_1(n - T) + \varepsilon_{L2}(n - 2T) & n > T_2 \end{aligned} \quad (13)$$

4 Rezultati

Izvedena sta bila dva DIHB preizkusa pri nazivni hitrosti udarnega telesa 21 m/s. Zaradi napetostnega padca v izvornih izmerjenih eksperimentalnih rezultatih, je bila implementirana metoda separacije valov. Z enačbo (11) in (12) sta bila teoretično predvidena časa nenadnega napetostnega padca v eksperimentalnih rezultatih. Najprej pride do napetostnega padca na merilnem mestu M2 ob času T_2 pri 435 številu vzorca. Na merilnem mestu M1 je napetostni padec izmerjen ob 522 številu vzorca, kar predstavlja čas T_1 . Rezultati obeh eksperimentov, prikazani na sliki 2, potrjujejo teoretično določena časa napetostnega padca.

Na sliki 4 so prikazani neobdelani eksperimentalni rezultati oz. vhodni signal in rezultati, pridobljeni z metodo separacije valov. Eksperimentalni signal, pridobljen s separacijo valov, predstavlja izvorni deformacijski val, ki omogoča nadaljnjo karakterizacijo materialnih lastnosti preizkušancev.



Slika 4: Prikaz surovega signala in signala, dobljenega z metodo separacije valov. Grafa prikazujeta električno napetosti v odvisnosti od vzorčenja za a) odprto-celični material in b) zaprto-celični material.

V obeh primerih je bil izmerjen samo en napetostni padec v deformacijskem impulzu, saj sta bili dolžini udarnega telesa enaki. V primeru, da bi bila dolžina udarnega telesa različna, bi bilo mogoče pri daljšem udarnem telesu opaziti več napetostnih padcev, saj bi deformacijski signal trajal dlje časa.

5 Zaključek

Za namen dinamične karakterizacije materialnih lastnosti celičnih materialov je bilo SHPB preizkuševališče preoblikovani za izvedbo DIHB preizkusov. Preoblikovano preizkuševališče je bilo na vstopni palici opremljeno z dvema merilnima mestoma za meritve deformacijskih impulzov. Zaradi medsebojnega vpliva napetostnih valov v deformacijskem impulzu, se pojavi nenaden padec napetosti, ki povzroči popačenje prvotnega impulza. Za rekonstrukcijo prvotnega impulza je bila uporabljena metoda separacije valov. Dokazana je bila ustreznost uporabe metode separacije valov, ki omogoča obnovitev prvotnega vala za nadaljnjo karakterizacijo mehanskih lastnosti celičnih materialov pri dinamičnih obremenitvah.

Metodo separacije valov omogoča obnovitev prvotnega impulza pri različnih dolžinah udarnih teles. Pri tem je neodvisna od števila napetostnih padcev v deformacijskem impulzu. Napetostnim padcem se je mogoče izogniti z uporabo daljše vstopne palice ali krajšega udarnega telesa, vendar omenjene rešitve zaradi različnih omejitev pogosto ni mogoče implementirati. V tem primeru je metoda separacije valov bistvenega pomena za uspešno dinamično karakterizacijo materialov.

Zahvala

Avtorji se zahvaljujejo Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije za sofinanciranje raziskovalnega programa št. P2-0063 in programu za usposabljanje mladih raziskovalcev.

Literatura

- [1] L. J. Gibson and M. F. Ashby, *Cellular Solids: Structures and Properties*, 2nd ed.

- Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [2] N. Novak, M. Vesenjaj, and Z. Ren, "Auxetic cellular materials - A review," *Stroj. Vestnik/Journal Mech. Eng.*, vol. 62, no. 9, pp. 485–493, 2016, doi: 10.5545/sv-jme.2016.3656.
 - [3] M. Borovinšek, "Računalniško modeliranje celičnih gradiv neurejene strukture," *Fak. za strojništvo*, 2009.
 - [4] T. Doktor, P. Zlámal, J. Šleichrt, T. Fíla, and D. Kytýř, "Impact Testing of Ordnance Gelatine Under Moderate Strain Rate Conditions," *Acta Polytech. CTU Proc.*, vol. 18, p. 44, 2018, doi: 10.14311/APP.2018.18.0044.
 - [5] A. V. Sobolev and M. V. Radchenko, "Use of Johnson–Cook plasticity model for numerical simulations of the SNF shipping cask drop tests," *Nucl. Energy Technol.*, vol. 2, no. 4, pp. 272–276, 2016.
 - [6] N. Novak, K. Hokamoto, M. Vesenjaj, and Z. Ren, "Mechanical behaviour of auxetic cellular structures built from inverted tetrapods at high strain rates," *Int. J. Impact Eng.*, vol. 122, no. March, pp. 83–90, 2018, doi: 10.1016/j.ijimpeng.2018.08.001.
 - [7] A. Mauko *et al.*, "Dynamic Deformation Behaviour of Chiral Auxetic Lattices at Low and High Strain-Rates," *Metals (Basel)*, vol. 11, no. 1, p. 52, Dec. 2020, doi: 10.3390/met11010052.
 - [8] T. Fíla *et al.*, "Strain Dependency of Poisson's Ratio of SLS Printed Auxetic Lattices Subjected to Quasi-Static and Dynamic Compressive Loading," *Adv. Eng. Mater.*, vol. 21, no. 8, p. 1900204, Aug. 2019, doi: 10.1002/adem.201900204.
 - [9] H. Couque, "The use of the direct impact Hopkinson pressure bar technique to describe thermally activated and viscous regimes of metallic materials," *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 372, no. 2023, p. 20130218, Aug. 2014, doi: 10.1098/rsta.2013.0218.
 - [10] A. Mauko, M. Vesenjaj, M. Sarıkaya, M. Güden, and Z. Ren, "Visokohitrostno testiranje odprto-celične aluminijeve pene," *Kuhljevi dnevi 2020, Zb. del*, pp. 86–93, 2020.
 - [11] J. Liu, S. He, H. Zhao, G. Li, and M. Wang, "Experimental investigation on the dynamic behaviour of metal foam: From yield to densification," *Int. J. Impact Eng.*, vol. 114, pp. 69–77, Apr. 2018, doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.12.016.
 - [12] A. Mauko, "Inverzna numerična določitev parametrov Johnson-Cook konstitutivnega modela jekla z uporabo SHPB preizkuševališča," University of Maribor, 2018.
 - [13] M. Sarıkaya, A. Taşdemirci, and M. Güden, "Dynamic crushing behavior of a multilayer thin-walled aluminum corrugated core: The effect of velocity and imperfection," *Thin-Walled Struct.*, vol. 132, pp. 332–349, Nov. 2018, doi: 10.1016/j.tws.2018.06.029.
 - [14] S. R. Reid and C. Peng, "Dynamic uniaxial crushing of wood," *Int. J. Impact Eng.*, vol. 19, no. 5–6, pp. 531–570, May 1997, doi: 10.1016/S0734-743X(97)00016-X.



Teoretična konstrukcija efektivno izotropičnega kompozita

George Mejak¹

Theoretical Construction of an Effective Isotropic Composite

Povzetek. Predstavljena je teoretična konstrukcija elastično efektivno izotropičnega kompozitnega materiala s periodično mikrostrukturo. Osnovna celica obravnavane strukture je tankostenska kocka z dodano oktaedrično ploščo. Z uporabo metode ekvivalentne homogene lastne deformacije je izračunana debelina plošče, pri kateri je kompozit s to osnovno celico efektivno izotropičen. Teoretični izračun debeline plošče je potrjen z numeričnim izračunom efektivnih modulov.

Abstract. Theoretical construction of an elastic periodic composite with isotropic effective properties with the thin walled unit is presented. The unit cell is a thin walled cube with the added octahedral plane. Using the equivalent eigenstrain method the thickness of the plane is determined in such a way that the composite with this unit cell is effectively isotropic. Theoretical evaluation of the thicknesses is confirmed by numerical computations of the moduli.

1 Uvod

Znano je, da simetrijo efektivnega elastičnega tenzorja kompozita s periodično mikrostrukturo določata materialni in geometrijski simetriji osnovne celice. V primeru, ko so materialne faze izotropične in ima osnovna celica kubično geometrijsko simetrijo ima efektivni elastični tenzor kompozita kubično simetrijo [2]. Kubični simetriji pripadata dva strižna modula. V posebnem primeru, ko se strižna modula ujemata, se kubična simetrija reducira v izotropijo. Znani primer efektivne izotropije je mikrostruktura s kubično + oktetno osnovno celico [1], [4]. V prispevku je predstavljena nova osnovna celica, ki porodi efektivno izotropijo.

2 Metodologija

Privzemimo, da sta izotropični materialni fazi dvo faznega kompozita s periodično mikrostrukturo dobro urejeni. To pomeni da velja $\kappa_1 \leq \kappa_2$ in $\mu_1 \leq \mu_2$, kjer sta κ_i in μ_i , $i = 1, 2$ elastična modula i -te faze Y_i . Potem, kot je dokazano v [5], za efektivna strižna modula $\mu_c^1 =$

¹ Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

$\frac{1}{2}(C_{1111}^e - C_{1122}^e)$ in $\mu_e^2 = C_{1212}^e$, veljata posplošeni Hashin-Shtrikmanovi oceni

$$\mu_L^k \leq \mu_e^k \leq \mu_U^k, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \mu_L^k &= \mu_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(1-f_2)(\kappa_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3\kappa_1 + 4\mu_1)} + G_1^k}, \\ \mu_U^k &= \mu_2 + \frac{f_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6(1-f_1)(\kappa_2 + 2\mu_2)}{5\mu_2(3\kappa_2 + 4\mu_2)} + G_2^k} \end{aligned} \quad (2)$$

in

$$\begin{aligned} G_i^1 &= -\frac{2(3\kappa_i + \mu_i) \left(1 - f_{i+} - \frac{5\beta(Y_i)}{f_{i+}}\right)}{5\mu_i(3\kappa_i + 4\mu_i)}, \\ G_i^2 &= -\frac{2}{3}G_i^1. \end{aligned} \quad (3)$$

V (2) je $f_i \in [0, 1]$ koncentracija i -te materialne faze, v (2) pa oznaka $i+$, $i = 1, 2$ pomeni $1+ = 2$ in $2+ = 1$. Za koncentraciji velja $f_1 + f_2 = 1$. V (2) nastopa še strukturna funkcija $\beta(Y_i)$

$$\beta(Y_i) = \sum_{\underline{m} \neq 0} \frac{m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2}{|\underline{m}|^4} |c_i(\underline{m})|^2. \quad (4)$$

Tu je $\underline{m} \in \mathbb{Z}^3$, $c_i(\underline{m})$ pa je \underline{m} -ti Fourierov koeficient karakteristične funkcije faze Y_i .

Direktni račun pokaže, da velja $\mu_L^1 = \mu_L^2$ in $\mu_U^1 = \mu_U^2$ natanko tedaj, ko je

$$\beta(Y_1) = \beta(Y_2) = \frac{1}{5}f_1(1 - f_1) = \frac{1}{5}f_2(1 - f_2). \quad (5)$$

Omenimo, da pri (5) velja enakost mej za strižna modula tudi v primeru, ko materialni fazi nista dobro urejeni [6].

Pri pogoju (5) se spodnji meji in prav tako zgornji meji za efektivna strižna modula sovpadata. To seveda še ne pomeni, da je kompozit efektivno izotropičen, da velja $\mu_e^1 = \mu_e^2$. Pomeni zgolj, da imata oba strižna modula enaki meji. Po drugi strani pa se posplošene Hashin-Shtrikmanove ocene ujemajo z efektivnimi moduli aproksimiranimi z metodo ekvivalentne lastne deformacije, primerjaj [5] in [4]. Po [3] je znano, da aproksimacija po metodi ekvivalentne lastne deformacije pri $f_i \rightarrow 0$ vsaj linearno konvergira k pravi vrednosti in da se razlika med zgornjo in spodnjo oceno v limiti manjša in to toliko hitreje, kot je manjša razlika med materialnimi fazami kompozita. Nadalje je iz primera s kubično + oktetno strukturo znano [4], da je struktura efektivno izotropična neodvisno od izbora materialnih faz.

Pri predpostavki, da ta neodvisnost velja za širši nabor efektivno izotropičnih struktur, sklepamo na osnovi zgoraj zapisanega, da je za konstrukcijo efektivno izotropičnega kompozita dovolj poiskati tako strukturo, da bo veljala enakost (5). Iščemo torej območje Y_1 ali Y_2 tako, da bo za pripadajoče Fourierove koeficiente $c_i(\underline{m})$ v funkciji $\beta(Y_i)$ veljala enakost (5).

3 Konstrukcija osnovne celice

Osnovna celica kubično + oktetne strukture je kombinacija kubične in oktetne strukture. Kubična struktura ni efektivno izotropična. Šele s kombinacijo z oktetno strukturo kompozit postane efektivno izotropičen. Ideja naše konstrukcije je kombinacija kubične strukture z oktaedričnimi ploščami, to je s ploščami z normalami v smereh $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. V primerjavi s kubično + oktetno strukturo je naša osnovna celica enostavnejša. Našo novo strukturo bomo v nadaljevanju imenovali *oktaedrična* struktura.

Osnovna celica oktaedrične mikrostrukture je oktaedrična celica, glej sliko 1. Ker bomo v nadaljevanju uporabili Fourierov razvoj, bomo za osnovno celico uporabili kocko Y z dolžino stranice 2π . Izhodišče kartezičnega koordinatnega sistema (x, y, z) postavimo v središče kocke, osi pa usmerimo v smereh stranic kocke. Po definiciji ima oktaedrična celica kubično simetrijo, zato jo je dovolj definirati na prvem oktantu O_1 , v preostalih pa je definirana z rotacijami oktahedralne grupe prvega oktanta.

Oktaedrično celico lahko definiramo na dva načina. Po prvem za dani $\delta \in (0, 1)$ definiramo skeletne ploskve, ki so dane s preseki ravnin

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma : x + y + z = (2 + \delta)\pi$$

s prvim oktantom O_1 . Ravnina Σ gre skozi točke s koordinatami $\pi(1, 1, \delta)$, $\pi(1, \delta, 1)$ in $\pi(\delta, 1, 1)$. Nato na koordinatne ploskve nanese prvo materialno debelino $\delta\pi$ na ravnino Σ pa enako na obe strani isti materialne debeline $\alpha\delta\pi$. Skupna debelina na Σ je tako $2\alpha\delta\pi$. Koeficient α je omejen z $0 \leq \alpha \leq (1 - \delta)/\delta\sqrt{3}$. Potem ko nanese prvo materialno fazo Y_1 , nato kocko Y zapolnimo z drugim materialom. Duga materialna faza je tako $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Če kocke ne zapolnimo, v kocki ostanejo votline. Velja omeniti, da dano konstrukcijo lahko posplošimo na primer, ko je oktaedrična ravnina

$$x + y + z = d\sqrt{3} \tag{6}$$

v oddaljenosti d od $\pi\delta\sqrt{3}$ do $\pi\sqrt{3}$ od koordinatnega središča. Izkaže pa se, da je za konstrukcijo mikrostrukture z izotropičnim efektivnim lastnostmi najprimernejša ravnina z razdaljo $(2 + \delta)\pi/\sqrt{3}$.

Po drugem načinu je prva materialna faza oktaedrične celice v prvem oktantu kompliment prvega oktanta in simpleksov

$$S_1 = \pi S((1, 1, \delta(1 + \alpha\sqrt{3})), (1, \delta(1 + \alpha\sqrt{3}), 1), (\delta(1 + \alpha\sqrt{3}), 1, 1)),$$

$$S_2 = \pi S((1, 1 - \alpha\delta\sqrt{3}), \delta), (1 - \alpha\delta\sqrt{3}, \delta, 1), (\delta, 1, 1 - \alpha\delta\sqrt{3}))$$

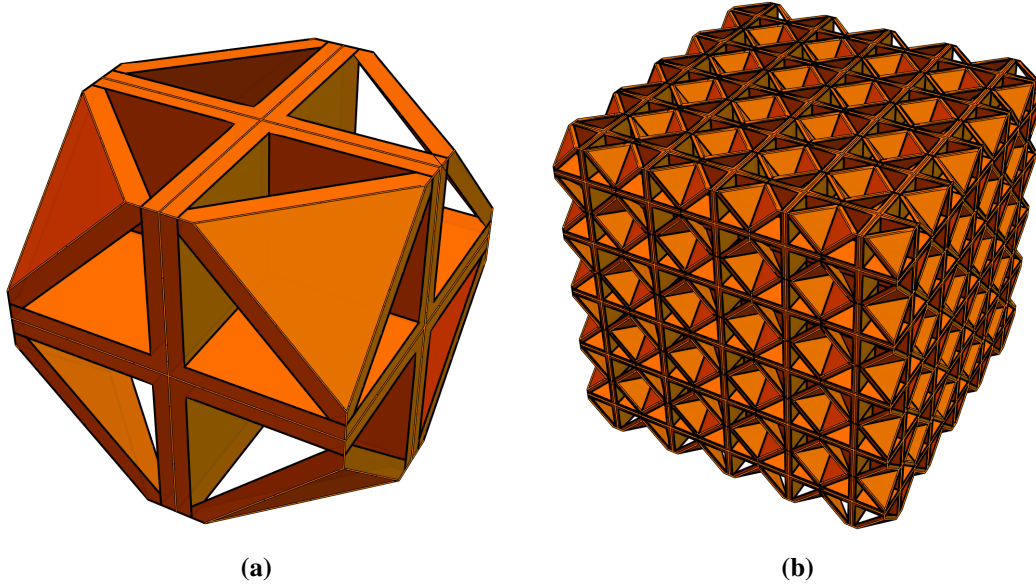
kjer je $S(P_1, P_2, P_3, P_4)$ simpleks z oglišči P_i , $i = 1, \dots, 4$. Simpleksa S_1 in S_2 sta iz druge materialne faze. Velja torej $Y_2 \cap O_1 = S_1 \cup S_2$. Pri maksimalni vrednosti $\alpha = (1 - \delta)/\delta\sqrt{3}$ se simpleks S_1 degenerira v točko.

Celotno osnovno celico dobimo kot unijo $\Omega = \cup_{k=1}^8 Q_k Y$, kjer so Q_k rotacije

$$Q_1 = \underline{i}, \quad Q_2 = Q_z, \quad Q_3 = Q_z^2, \quad Q_4 = Q_z^3,$$

$$Q_5 = Q_i, \quad Q_6 = Q_z Q_i, \quad Q_7 = Q_z^2 Q_i, \quad Q_8 = Q_z^3 Q_i. \tag{7}$$

Tu smo z Q_z zapisali rotacijo okrog osi z za kot $\pi/2$, z Q_i rotacijo okrog x za kot $-\pi/2$ z \underline{i} pa identiteto. V splošnem primeru (6), ko $d \neq (2 + \delta)\pi/\sqrt{3}$ druga materialna faza ni unija dveh simpleksov.



Slika 1: Osnovna celica (a) in izrez mikrostrukture (b)

Volumen posameznega simleksa brez težav izračunamo. Volumenski delež druge faze enak je tako enak

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}\alpha^3 \delta^3 - 2\sqrt{3}\alpha\delta(\delta - 1)^2 + 2(1 - \delta)^3 \right) \quad (8)$$

Pri $\delta = 0$ je seveda $f_2 = 1$, pri $\alpha = 1$ pa je $f_2 = (1 - \delta)^3$. Pri dani vrednosti α je koncentracija f_2 funkcija δ . Pri maksimalni dopustni vrednosti $\delta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}\alpha + 1}$ dobimo minimalno vrednost koncentracije

$$f_{\min} = \frac{\sqrt{3}\alpha^3}{2(\sqrt{3}\alpha + 1)^3}. \quad (9)$$

V nadaljevanju bomo zapis poenostavili in pisali f namesto f_2 .

Naša celica ima dva parametra α in δ . Kot bomo videli v nadaljevanju, efektivno izotropijo dobimo samo pri določeni vrednosti α , to je pri določenem razmerju debelin koordinatnih in oktahedričnih plošč. Kako jo določimo, bomo spoznali v sledečem podrazdelku.

3.1 Izračun Fourierovih koeficientov

V principu Fourierove koeficiente oktahedrične celice izračunamo brez težav. Ker velja $-c_1(\underline{m}) = c_2(\underline{m}) =: c(\underline{m})$ za $\underline{m} \neq \underline{0}$, je dovolj izračunati Fourierove koeficiente simpleksov S_1 in S_2 . Pri

izračunu moramo ločiti možnosti ali so indeksi m_1 , m_2 in m_3 med seboj različni in neenaki nič. Koeficienti so:

$$\begin{aligned}
 c(m_1, m_2, m_3) = & \frac{1}{8\pi^3} \left[\frac{4(-1)^{m_1+m_3} \sin(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_1))}{(m_1-m_2)(m_1^2-m_3^2)} + \frac{4(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(m_3-\sqrt{3}\alpha m_1))}{(m_1^2-m_2^2)(m_1-m_3)} \right. \\
 & - \frac{4(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(m_3-\sqrt{3}\alpha m_2))}{(m_1^2-m_2^2)(m_2-m_3)} + \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1-m_2-m_3))}{m_1 m_2 m_3} - \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1+m_2-m_3))}{m_1 m_2 m_3} - \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1-m_2+m_3))}{m_1 m_2 m_3} \\
 & - \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1-m_2+m_3))}{m_1 m_2 m_3} + \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1+m_2+m_3))}{m_1 m_2 m_3} - \frac{4(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_3))}{(m_1^2-m_2^2)(m_1+m_3)} \\
 & + \frac{4(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_3))}{(m_1^2-m_2^2)(m_2+m_3)} - \frac{4(-1)^{m_1+m_3} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_2))}{(m_1+m_2)(m_1^2-m_3^2)} + \frac{8(-1)^{m_2+m_3} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_1)) m_1}{(m_1^2-m_2^2)(m_1^2-m_3^2)} \\
 & + \frac{4(-1)^{m_1+m_3} \sin(\pi\delta(m_2+\sqrt{3}\alpha m_3))}{(m_2+m_3)(m_1^2-m_3^2)} + \frac{4(-1)^{m_2+m_3} \sin(\pi\delta(m_1-\sqrt{3}\alpha m_2))}{(m_2-m_1)(m_2^2-m_3^2)} - \frac{4(-1)^{m_2+m_3} \sin(\pi\delta(m_1+\sqrt{3}\alpha m_2))}{(m_1+m_2)(m_2^2-m_3^2)} \\
 & + \frac{8(-1)^{m_1+m_3} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_2)) m_2}{(m_2^2-m_1^2)(m_2^2-m_3^2)} + \frac{4(-1)^{m_2+m_3} \sin(\pi\delta(m_1+\sqrt{3}\alpha m_3))}{(m_1+m_3)(m_2^2-m_3^2)} - \frac{4(-1)^{m_1+m_3} \sin(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_3))}{(m_2-m_3)(m_3^2-m_1^2)} \\
 & \left. - \frac{4(-1)^{m_2+m_3} \sin(\pi\delta(m_1-\sqrt{3}\alpha m_3))}{(m_1-m_3)(m_3^2-m_2^2)} + \frac{8(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_3+m_3)) m_3}{(m_3^2-m_1^2)(m_3^2-m_2^2)} \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(m_1, m_2, m_2) = & \frac{1}{8\pi^3} \left[-\frac{2 \sin(\pi\delta(m_1-\sqrt{3}\alpha m_2))}{(m_1-m_2)^2 m_2} + \frac{8(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_1))}{(m_1-m_2)^2 (m_1+m_2)} \right. \\
 & - \frac{8(-1)^{m_1+m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_2))}{(m_1-m_2)(m_1+m_2)^2} + \frac{2 \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_1))}{m_2 (m_1+m_2)^2} \\
 & + \frac{8 m_1 \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_1))}{(m_1^2-m_2^2)^2} - \frac{8(-1)^{m_1+m_2} m_2 \sin(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_2))}{(m_1^2-m_2^2)^2} \\
 & - \frac{8(-1)^{m_1+m_2} m_2 \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_2))}{(m_1^2-m_2^2)^2} + \frac{2\sqrt{3}\pi\alpha\delta \cos(\pi\delta(m_1-\sqrt{3}\alpha m_2))}{m_1 m_2 - m_2^2} \\
 & + \frac{4\pi(-1)^{m_1+m_2} (\sqrt{3}\alpha\delta + \delta - 1) \cos(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_2))}{m_1^2 - m_2^2} - \frac{4\pi(-1)^{m_1+m_2} ((\sqrt{3}\alpha + 1)\delta - 1) \cos(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_2))}{m_1^2 - m_2^2} \\
 & \left. - \frac{2\sqrt{3}\pi\alpha\delta \cos(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_1))}{m_2^2 + m_1 m_2} - \frac{4 \sin(\pi\delta m_1)}{m_1 m_2^2} + \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1-2m_2))}{m_1 m_2^2} + \frac{2 \sin(\pi\delta(m_1+2m_2))}{m_1 m_2^2} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

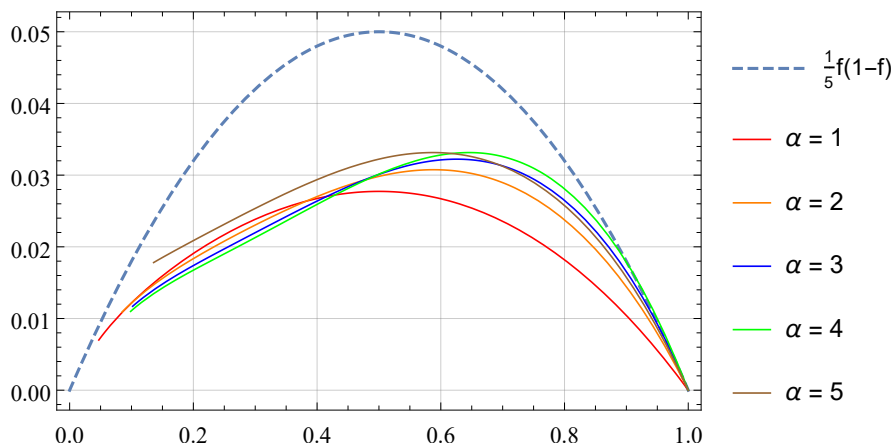
$$\begin{aligned}
 c(m_1, m_2, 0) = & \frac{1}{8\pi^3} \left[\frac{4(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta(m_2-\sqrt{3}\alpha m_1))}{m_1^2 (m_1-m_2)} + \frac{4(-1)^{m_2} \sin(\pi\delta(m_1-\sqrt{3}\alpha m_2))}{m_2^2 (m_2-m_1)} \right. \\
 & - \frac{4(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_2))}{m_1^2 (m_1+m_2)} - \frac{4(-1)^{m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_1))}{m_2^2 (m_1+m_2)} - \frac{8(-1)^{m_1+m_2} \sin(\sqrt{3}\pi\alpha\delta m_1)}{m_1^3 - m_1 m_2^2} \\
 & + \frac{8(-1)^{m_2} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1+m_1))}{m_1^3 - m_1 m_2^2} - \frac{8(-1)^{m_1+m_2} \sin(\sqrt{3}\pi\alpha\delta m_2)}{m_2^3 - m_1^2 m_2} + \frac{8(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_2+m_2))}{m_2^3 - m_1^2 m_2} \\
 & \left. + \frac{8(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta m_2)}{m_1^2 m_2} + \frac{8(-1)^{m_2} \sin(\pi\delta m_1)}{m_1 m_2^2} - \frac{4\pi(\delta-1) \cos(\pi\delta(m_1-m_2))}{m_1 m_2} + \frac{4\pi(\delta-1) \cos(\pi\delta(m_1+m_2))}{m_1 m_2} \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(m_1, m_1, m_1) = & \frac{1}{8\pi^3} \left[\frac{\pi(-2\sqrt{3}\alpha\delta + \delta - 1) \cos(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1 + m_1))}{m_1^2} - \frac{6 \sin(\pi\delta m_1)}{m_1^3} + \frac{2 \sin(3\pi\delta m_1)}{m_1^3} \right. \\
 & + \frac{(1 - 2\pi^2 m_1^2 ((\sqrt{3}\alpha + 1)\delta - 1)^2) \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1 + m_1))}{2m_1^3} + \frac{\pi((\sqrt{3}\alpha - 1)\delta + 1) \cos(\pi\delta(m_1 - \sqrt{3}\alpha m_1))}{m_1^2} \\
 & \left. + \left(\frac{\pi^2((-6\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha + 1)\delta^2 + 2(\sqrt{3}\alpha - 1)\delta + 1)}{m_1} - \frac{1}{2m_1^3} \right) \sin(\pi\delta(m_1 - \sqrt{3}\alpha m_1)) \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(m_1, m_1, 0) = & \frac{1}{8\pi^3} \left[\frac{4 \sin(\sqrt{3}\pi\alpha\delta m_1)}{m_1^3} - \frac{8(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta(m_1 - \sqrt{3}\alpha m_1))}{m_1^3} - \frac{8(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1 + m_1))}{m_1^3} \right. \\
 & - \frac{4\sqrt{3}\pi\alpha\delta \cos(\sqrt{3}\pi\alpha\delta m_1)}{m_1^2} - \frac{4\pi(-1)^{m_1}(\sqrt{3}\alpha\delta + \delta - 1) \cos(\pi\delta(m_1 - \sqrt{3}\alpha m_1))}{m_1^2} - \frac{4\pi(\delta - 1)}{m_1^2} \\
 & \left. + \frac{4\pi(-1)^{m_1}(\sqrt{3}\alpha\delta + \delta - 1) \cos(\pi\delta(\sqrt{3}\alpha m_1 + m_1))}{m_1^2} + \frac{16(-1)^{m_1} \sin(\pi\delta m_1)}{m_1^3} + \frac{4\pi(\delta - 1) \cos(2\pi\delta m_1)}{m_1^2} \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

Pri zapisu smo upoštevali, da je zaradi simetrije dovolj zapisati samo koeficiente za $(m_1 \neq m_2 \neq m_3)$, $(m_1 \neq m_2 = m_3)$, $(m_1 \neq m_2, m_3 = 0)$, $(m_1 = m_2 = m_3)$ in $(m_1 = m_2, m_3 = 0)$, kjer je $m_i \neq 0$, razen če ni tako zapisano. Koeficienta $c(m_1, 0, 0)$ ni potrebno izračunati, saj je pri $m_2 = m_3$ vodilni člen v (4) enak nič.

3.2 Določitev koeficienta α



Slika 2: Grafi funkcije $\beta(f)$ za različne vrednosti α .

Iz (4) in (10 - 14) vidimo, da je vrsta za $\beta(Y_i)$ absolutno in enakomerno konvergentna za $\delta \in [0, 1]$. Vrste ne znamo izračunati v zaprti obliki, zato je aproksimiramo s končno vrsto z $|\underline{m}| \leq N$ in numerično izračunamo za dane vrednosti α in δ . Po grobi oceni je natančnost treh značilnih

mest dosežena pri $N = 1000$. Ker je vsota trojna, to pomeni, da je potrebno sešteti $8 \cdot 10^9$ členov. Grafi funkcije $\beta(f)$ so prikazani na sliki 2.

Iz slike 2 je razvidno, da se v okolici $0.9 < f \leq 1$, to je za približno $\delta < 0.012$, graf funkcije $\beta(f)$ pri pravilno izbrani vrednosti α približa funkciji $\frac{1}{5}f(1-f)$. Pri tej vrednosti je kompozit v okviru aproksimacije s homogeno lastno deformacijo učinkovito izotropičen. Dejansko lahko za vsak $f > 0.9$ poiščemo pripadajoči α , da je pri teh vrednostih $\beta(f) = \frac{1}{5}f(1-f)$. Omenimo, da se za $\alpha = 3.5$ funkcija β dobro sovпада z $\frac{1}{5}f(1-f)$ na celotnem intervalu $f \in [0.9, 1]$, za $\alpha \in [3, 4]$ pa imamo dobro ujemanje za $f > 0.95$.

V primeru tankostenske strukture nas zanima asimptotično obnašanje $\beta(f)$ v okolici $f = 1$. V ta namen izračunamo

$$\left. \frac{d\beta}{df} \right|_{f=1} = \left. \frac{d\beta}{d\delta} \right|_{\delta=0} \left(\left. \frac{df}{d\delta} \right|_{\delta=0} \right)^{-1} = -\frac{1}{3 + \alpha\sqrt{3}} \left. \frac{d\beta}{d\delta} \right|_{\delta=0}. \quad (15)$$

Zadnji člen v (15) znamo izračunati. Podobno kot v [4], podrobnosti zaradi pomanjkanja prostora ne bomo navedli, dobimo

$$\left. \frac{d\beta}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \frac{\alpha}{8\sqrt{3}}. \quad (16)$$

Potem iz pogoja

$$\left. \frac{d\beta}{df} \right|_{f=1} = -\frac{1}{5} \quad (17)$$

sledi $\alpha = \frac{1}{2}3\sqrt{3}$. Pri tej vrednosti je tankostenski kompozit asimptotično izotropičen.

4 Numerični izračuni

Sedaj, ko smo našli strukturo in pripadajoče parametre, za katere velja enakost (5), moramo še preveriti, ali je ta struktura učinkovito izotropična ne samo v okviru aproksimacije s homogeno lastno deformacijo ampak tudi dejansko. Učinkovini lastnosti analitično ni možno izračunati, lahko pa jih z veliko natančnostjo izračunamo numerično. Izračunali smo jih z uporabo metode končnih elementov. Podrobnosti uporabljene numerične metode so opisane v [2].

Rezultati izračuna učinkovinih modulov za primer $\alpha = 3$ so zbrani v tabeli 1. Tu je $\Delta\mu_e$ razlika strižnih modulov $\mu_e^2 - \mu_e^1$. Izračun je narejen za primer, ko ima material na stenah (prva materialna faza) Youngov modul $E_1 = 70\text{GPa}$ in Poissonov količnik $\nu_1 = 0.2$, votlina (druga materialna faza) pa $E_2 = 3\text{GPa}$, $\nu_2 = 0.35$. Naš primer je tako kompozit s trdostensko osnovno celico. Z manjšanjem debeline δ se seveda manjšajo učinkovini moduli in v limiti dosežejo vrednosti $\mu_2/\mu_1 = 0.03810$ in $\kappa_2/\kappa_1 = 0.08571$ za strižni in kompresijski modul. Najmanjša izračunana debelina je $\delta = 0.004$. Pri tej debelini ima diskretizacija 100764 elementov s kvadratnimi baznimi funkcijami. Zaradi omejenih računalniških zmogljivosti izračunov za še manjši δ nismo naredili. Iz tabele vidimo, da se pri $\delta \rightarrow 0$ v skladu s teoretičnim predvidevanjem $\Delta\mu_e/\mu_e^2$ manjša in gre proti nič. Naša tankostenska struktura je tako resnično učinkovito izotropična.

Podobne rezultate dobimo za α pri katerem se $\beta(f)$ v bližini maksimalne koncentracije dobro ujema z $\frac{1}{5}f(1-f)$. Omenimo še, da pri fiksnem f lahko minimiziramo $\Delta\mu_e$ kot funkcijo spremenljivke α , vendar vrednosti pri kateri je $\Delta\mu_e = 0$ nismo našli.

Tabela 1: Efektivni moduli.

δ	f	μ_e^2/μ_1	$\Delta\mu_e/\mu_1$	κ_e/κ_1
0.004	0.96743	0.050228	0.002796	0.099108
0.005	0.95936	0.052740	0.004236	0.102191
0.075	0.93929	0.058716	0.008527	0.109828
0.01	0.91939	0.064487	0.013504	0.117451
0.015	0.88013	0.075854	0.024930	0.132836
0.02	0.84147	0.087370	0.037969	0.148546
0.025	0.80373	0.099221	0.052222	0.164611
0.03	0.76663	0.111514	0.067512	0.181093

5 Zaključne opombe

Enakost (5) velja za $f = f_2$ v bližini maksimalne koncentracije. Naša osnovna celica je tako osnovna celica efektivno izotropičnega tankostenskega kompozita. Kubične Hashin-Shtrikmanove ocene (2) ne veljajo v primeru votline, torej pri $\kappa_2 = \mu_2 = 0$. Ker je konstrukcija celice neodvisna od materialnih parametrov, pa veljajo naši rezultati tudi v tem primeru. Z uporabo pogoja (16) lahko aproksimiramo efektivne elastične module tankostenskega kompozita v zaprti obliki.

Literatura

- [1] J. B. Berger, H. N. G. Wadley, R. M., and McMeeking. Mechanical metamaterials at the theoretical limit of isotropic elastic stiffness. *Nature*, 543:533–537, 2017.
- [2] G. Mejak. Izračun efektivnih elastičnih lastnosti kubične strukture. In M. Hriberšek and J. Ravnik, editors, *Kuhljevi dnevi 2015*, pages 105–112. SDM, 2015.
- [3] G. Mejak. Efektivne elastične lastnosti periodičnega materiala s tetragonalno simetrijo. In T. Hozjan and D. Zupan, editors, *Kuhljevi dnevi 2018*, pages 73–80. SDM, 2018.
- [4] G. Mejak. Closed form approximation of effective elastic moduli of composites with cubic, octet and cubic + octet periodic microstructures. *Eur. J. Mech. A Solids*, 77:103772, 2019.
- [5] G. Mejak. Hashin shtrikman bounds of periodic linear elastic media with cubic symmetry. *Math. Mech. Solids*, 25:1182–1198, 2020.
- [6] G. Mejak. Hashin-shtrikmanove meje kubičnih modulov dvofaznih periodičnih kompozitov z neurejenima materialnima fazama. In M. Česnik and J. Slavič, editors, *Kuhljevi dnevi 2020*, pages 94–101. SDM, 2020.



Vpliv termokromnega dodatka v PLA polimeru na reološke lastnosti in termokromni odziv kompozita

Mohor Mihelčič¹, Marko Bek¹ in Lidija Slemenik Perše¹

The influence of thermochromic additive in PLA polymer matrix on rheological properties and thermochromic response of the composite

Povzetek. V predstavljeni raziskavi smo ekstrudirali filemente polimlečne kisline (PLA) z dodatkom modrega termokromnega (TC) polimera s spremembo barve pri 31°C v različnih koncentracijah. Tako pripravljene termokromne filamente smo uporabili za določitev reoloških, termičnih ter optičnih lastnosti. S pomočjo filamentov smo s 3D tiskalnikom pripravili vzorce, ki smo jih za 110 dni izpostavili različnim zunanjim dejavnikom. Rezultati so pokazali, da ima dodajanje TC polimera velik vpliv na tokovno obnašanje in viskoelastične lastnosti kompozita. Rezultati DSC so potrdili, da so po 110 dneh izpostavljenosti zunanjim pogojem vzorci s 3% koncentracijo TC postali termokromno ireverzibilni, medtem ko je pri 20% dodatku TC intenzivnost barve (b^*) padla skoraj za 50%.

Abstract. In the presented research, the blue thermochromic (TC) polymer with colour change at 31°C was homogeneously incorporated into polylactic acid (PLA) polymer matrix at various concentrations by using extrusion technology. The prepared thermochromic filaments were characterized by rheological, thermal, and optical characterisation in order to define the material properties of the prepared filaments. The filaments were used for the preparation of 3D printed samples, which were exposed to various outdoor conditions for 110 days. The results showed that the addition of TC polymer significantly influenced the flow behaviour and viscoelastic properties of the composite. The results, obtained from DSC, confirmed that after 110 days of outdoor exposure the samples with 3% of TC became thermochromically irreversible, while the colour intensity (b^*) for the samples with 20% of TC dropped by almost 50%.

1 Uvod

Pametni materiali »*smart materials*« so materiali, ki zagotavljajo izboljšane konvencionalne lastnosti in imajo sposobnost prilagajanja na različne dražljaje in spremembe v okolju. Mednje spadajo tudi kromogeni materiali, ki lahko spreminjajo svoje fizikalno-kemijske lastnosti kot odziv na zunanje dražljaje (temperatura, vlažnost, električno polje, tlak,...) [1]. Taki materiali

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva ulica 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

lahko reverzibilno ali ireverzibilno spreminjajo svoje optične lastnosti, kot so sprememba odboja, absorpcija ali sipanje svetlobe. V podskupino kromogenih materialov sodijo tudi termokromni materiali, pri katerih sprememba barve povzroči sprememba toplote kot zunanji dejavnik. Termokromni materiali se uporabljajo v različnih aplikacijah, kot so pametna okna [2], tekstilna vlakna [3], temperaturni senzori [4], kot varnostna zaščita pred pregrevanjem v gradbeništvu [5], itd.

Polimeri, ki izkazujejo termokromne lastnosti, večinoma vsebujejo mikrokapsuliran organski termokromni kompozit, ki temelji na trofaznem sistemu levko barvila, razvijalca in topila. Mikrokapsulacija zaščiti organski termokromni kompozit pred zunanjimi dejavniki, a je zaradi tanke stene ovojnice $\sim 0,1 - 0,5 \mu\text{m}$ občutljiva na izpostavljenost previsokim temperaturam ali strižnim obremenitvam, ki povzročijo razpad mikrokapsule in posledično ireverzibilno razbarvanje. Po drugi strani pa se pri samem levko barvilu pri segrevanju barva spremeni iz osnovne barve v brezbarvno levko obliko in obratno. Tak prehod je reverzibilen.

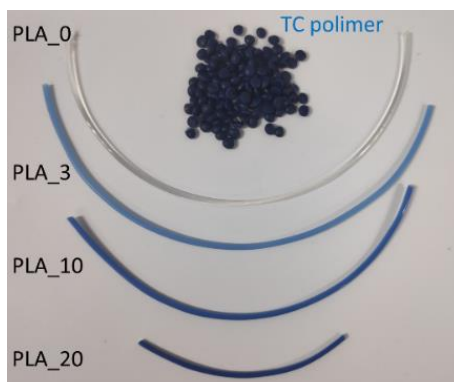
Tehnologija 3D tiskanja je ena najbolj perspektivnih tehnologij izdelave različnih kompozitnih polimernih izdelkov. Kot material za 3D tiskanje se najbolj uporabljena prav polimlečna kislina (v nadaljevanju PLA), saj je okolju prijazen biopolimer z dobrimi mehanskimi lastnostmi, narejen iz obnovljivih virov. V predstavljeni raziskavi smo se osredotočili na izdelavo ekstrudiranih termokromnih filamentov, ki bazirajo na PLA polimeru. Njegova uporaba omogoča 3D tiskanje pri dovolj nizki temperaturi, ki ne povzroči degradacije termokromnih mikrokapsul v polimeru.

1.1 Materiali

Za pripravo termokromnih filamentov smo za osnovo izbrali prozoren PLA (Ingeo Biopolymer 2003D, NatureWorks, ZDA). Polimer smo pred začetkom ekstrudiranja sušili 2 uri pri 90°C z namenom odstranitve vlage iz materiala. Kot termokromni dodatek modre barve s temperaturo barvnega prehoda pri 31°C (v nadaljevanju TC polimer), smo uporabili CHAMELEON Masterbatch, LCR Hallcrest. Slednji je polimerni koncentrat mešanice linearnega polietilena nizke gostote (LLPE) in ~ 20 masnih % termokromnih mikrokapsul velikosti $\sim 6 \mu\text{m}$. Pripravili smo TC/PLA mešanice z različnimi koncentracijami TC dodatka v PLA polimeru; t.j. 0 (PLA_0), 3 (PLA_3), 10 (PLA_10) in 20 (PLA_20) masnih %.

1.2 Priprava vzorcev

TC/PLA polimerne mešanice smo ekstrudirali v Haake Polylab PTW16/40 OS ekstruderju z avtomatskim dozirnim sistemom. Hitrost ekstrudiranja materiala je bila 70 min^{-1} , najvišja temperatura predelave pa 175°C . Po ekstrudiranju smo filament preko tekočega traku ohladili in nato preko navijalne enote (Filabot Spooler) navili na kolut. Premer filamenta je bil $1,75 \pm 0,05 \text{ mm}$, da smo ga lahko uporabili za nadaljnje 3D tiskanje. Slika 1 prikazuje izdelane filamente, ki so vsebovali različno vsebnost TC modrega dodatka.



Slika 1: Ekstrudirani PLA filamenti z različnimi koncentracijami TC polimera.

Za 3D tiskanje TC filamentov smo uporabili 3D tiskalnik (Sharebot NG Desktop), ki deluje na podlagi tehnologije odlaganja in spajanja posameznih polimernih plasti (*Fused Filament Fabrication* – FFF). Pri temperaturi 200°C smo natisnili ploščice dimenzij 20 x 10 x 2 mm. Hitrost tiskanja je bila nastavljena na 40 mm/s, premer šobe pa 1,75 mm.

1.3 Karakterizacijske metode

Za izvedbo reoloških meritev smo ekstrudirani filament najprej granulirali na velikost 1 mm, s čimer smo zagotovili enakomernjšo porazdelitev materiala v merilnem sistemu. Reološke meritve smo izvedli na modularnem rotacijskem reometru MCR 302 (Anton Paar) z uporabo senzorskega sistema plošča-plošča s premerom 25 mm (PP25) pri konstantni medploščni razdalji 1 mm. Izvedli smo 3 sete testov: rotacijski, oscilacijski amplitudni in oscilacijski frekvenčni. Vsi testi so bili izvedeni pri konstantni temperaturi $T=200^{\circ}\text{C}$ v inertni dušikovi atmosferi.

Rotacijske teste, tj. tokovne reološke lastnosti smo določili pri destruktivnih strižnih pogojih, pri čemer je bila talina obremenjena s strižno hitrostjo ($\dot{\gamma}$) po trikotni metodi $0,01\text{ s}^{-1}$ - 20 s^{-1} - $0,01\text{ s}^{-1}$ v časovnem intervalu 360 s.

Oscilacijski amplitudni test je bil izveden z namenom določitve območja linearnega viskoelastičnega odziva (LVO) materiala. Teste smo izvedli z razponom deformacije γ od 0,01 do 250% pri konstantni frekvenci ($f = 1\text{ Hz}$) oscilacije. Nato smo izvedli frekvenčne teste v nedestruktivnem LVO območju pri konstantni deformaciji $\gamma = 2\%$ z namenom določitve časovno odvisnega odziva materiala. Pri frekvenčnem testu smo spremljali odvisnost dinamičnih modulov G' in G'' v odvisnosti od frekvence oscilacije, ki se je spreminjala od 0,01 do 100 Hz. Termične lastnosti so bile določene z uporabo diferenčne dinamične kalorimetrije (DSC) na TA Q2500 z avtomatskim podajalnikom vzorcev. Masa zatehtanih vzorcev za DSC meritve je bila $\sim 7 \pm 1\text{ mg}$. Pretok dušika kot inertnega plina je bil 50 ml/min. Meritve so bile izvedene v temperaturnem območju od -30 do 220°C , s hitrostjo segrevanja in ohlajanja $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$. Vzorec smo najprej ohladili na -30°C ter ga pri tej temperaturi zadrževali 5 minut, nato pa smo ga segreti na 220°C , kjer smo ponovno vzdrževali konstantno temperaturo 5 minut in nato z enako hitrostjo ohladili na -30°C . Drugi cikel segrevanja do 200°C smo ponovili za določitev termičnih prehodov materialov. Stopnjo kristaliničnosti (X_c) za PLA in/ali LLPE polimer smo določili po enačbi 1:

$$X_c(\%) = \frac{\Delta H_m - \Delta H_{cc}}{\Delta H_m^0} \times \frac{100}{\varphi}, \quad (1)$$

kjer je ΔH_m entalpija transformacije, ΔH_{cc} entalpija hladne kristalizacije PLA, φ utežni delež PLA ali LLPE v matriki. Teoretična entalpija transformacije pri taljenju 100% kristaliničnega materiala (ΔH_m^0) za 100% kristalinični PLA in LLPE znašata 93,7 J/g [7] in 293 J/g [8].

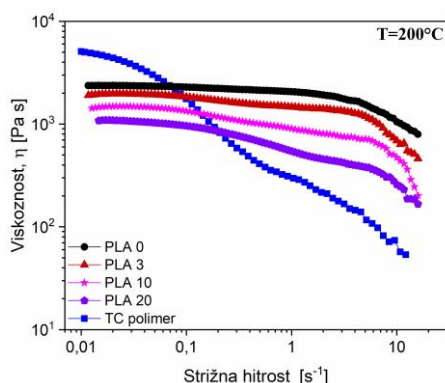
Spremembo termokromnega odziva TC materialov smo izvajali na temperaturno kontrolirani plošči HGP-01 (Kambič), spremembo barve pa smo določali z i1 Pro spektrofotometrom (X-Rite, USA). Barvne koordinate CIELab so bile izračunane s programsko opremo KeyWizzard47 pri svetlobnem viru D50 in kotu opazovalca 2°. Za analizo smo izbrali center ploščice, ki smo jo segrevali od 23°C do 37°C in nato ohladili nazaj do 18°C s hitrostjo segrevanja in ohlajanja 2 °C/min. Meritve termokromnega odziva 3D tiskanih vzorcev smo opravili pred in po 110 dnevni izpostavi v temi (R-PLA) oziroma zunanjim dejavnikom (Z-PLA).

2 Rezultati in diskusija

2.1 Reološke lastnosti

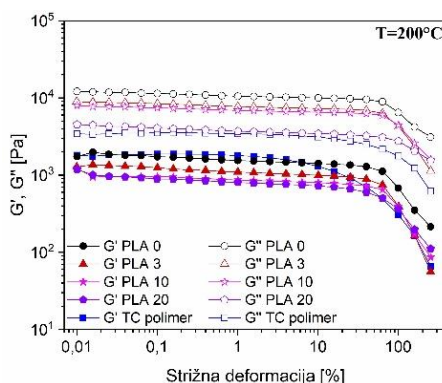
Da bi ugotovili vpliv deleža TC dodatka v PLA polimeru in njihovo reološko vedenje, smo najprej izvedli tokovne teste, pri katerih smo opazovali spremembo viskoznosti v odvisnosti od strižne hitrosti ($\dot{\gamma}$). Reološka karakterizacija taline je zelo pomemben parameter pri predelavi in 3D tiskanju filamentov, saj ima strižno upadanje (*shear-thinning*) velik vpliv na kvaliteto tiska, posledično pa tudi na mehanske lastnosti natisnjene predmeta [9]. V našem delu smo reološke meritve izvajali pri 200°C, ki je bila tudi temperatura tiskanja. S predhodnimi testi smo ugotovili, da je TC polimer temperaturno neobstoje pri daljši izpostavi na tej temperaturi. TC mikrokapsule dokončno razpadejo že po 30-40 minutah, kar vodi do ireverzibilnega obarvanja polimera ter spremembo reoloških lastnosti taline.

Slika 2 prikazuje viskoznosti (η) termokromnih TC/PLA polimernih mešanic v odvisnosti od strižne hitrosti ($\dot{\gamma}$). Vse polimerne taline so izkazovale Newtonski plato pri nizkih $\dot{\gamma}$, medtem ko je pri višjih $\dot{\gamma}$ opaziti strižno odvisno upadanje viskoznosti. Modra krivulja, ki predstavlja TC polimer, ima sicer najvišjo začetno viskoznost $\eta_0 = 5,08 \cdot 10^3$ Pa·s, nato pa lahko opazimo dva platoja znižanja viskoznosti. Prvo znižanje viskoznosti ($\dot{\gamma} = 10^{-2}$ - 1 s⁻¹) nastane zaradi urejanja mikrokapsul v talini, drugo ($\dot{\gamma} = 1$ - 20 s⁻¹) pa zaradi razpletanja in usmerjanja linearnih polimernih molekul LLPE, ki je kot nosilni polimer prisoten v TC dodatku. V vsakem območju med obema platojema se je viskoznost znižala približno za eno dekada. Začetna viskoznost TC polimera z je bila najvišja, a je že pri nizkih strižnih hitrostih $\dot{\gamma} = 10^{-2}$ s⁻¹ začela močno padati, medtem ko je bila začetna viskoznost PLA polimera nižja ($\eta_0 = 2,34 \cdot 10^3$ Pa·s), a bolj stabilna, saj je izkazovala konstantno vrednost vse do strižne hitrosti $\dot{\gamma} 4$ s⁻¹. Z dodajanjem TC polimera je bilo zaznано znižanje začetne viskoznosti, pri višjih koncentracijah pa je bil opazen tudi pojav dveh platojev.



Slika 2: Strižno odvisna viskoznost TC/PLA polimernih mešanic.

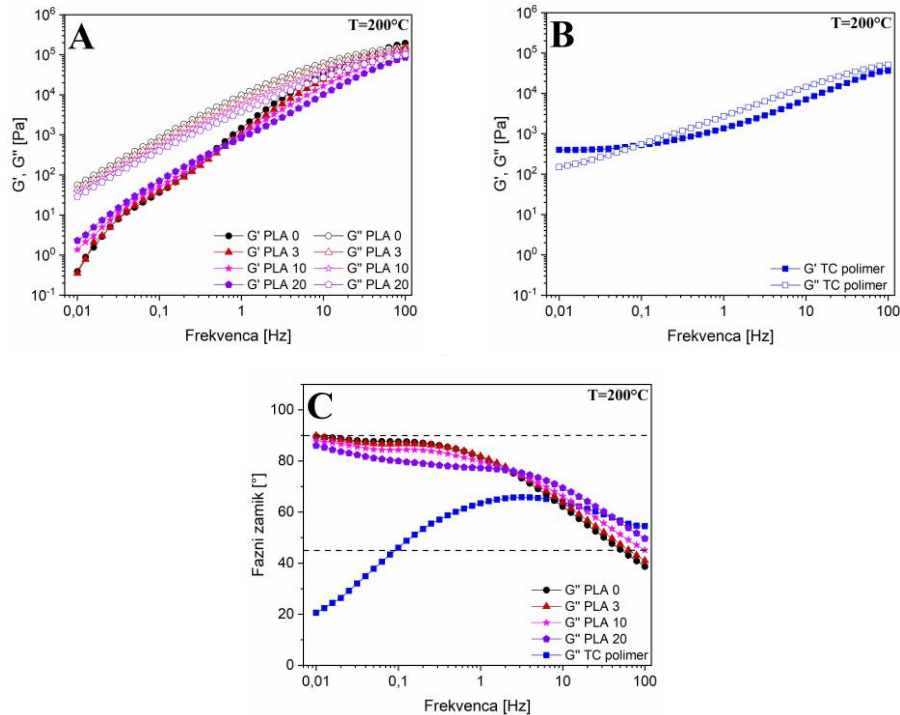
Amplitudne oscilacijske teste TC/PLA polimernih mešanic smo izvedli z namenom določitve linearnega viskoelastičnega odziva (LVO), kjer so izmerjeni moduli neodvisni od uporabljene strižne napetosti (γ). Slika 3 predstavlja odvisnost dinamičnih modulov G' in G'' od deformacije pri konstantni frekvenci oscilacije ($f = 1$ Hz) za TC/PLA polimerne mešanice. Meritve so pokazale, da vrednosti dinamičnih modulov polimera ostanejo konstantne do 10% deformacije za TC/PLA mešanice, medtem ko se je meja pri samem TC dodatku znižala na 3%. Posledično smo za dinamične frekvenčne meritve izbrali konstantno amplitudo obremenjevanja $\gamma = 2\%$, ki je za vse vzorce zagotavljala izvedbo meritev v LVO.



Slika 3: Določanje viskoelastičnih lastnosti v odvisnost od strižne deformacije za TC/PLA polimerne mešanice.

Viskoelastične lastnosti TC/PLA polimernih mešanic smo pri konstantni strižni deformaciji 2% določili v frekvenčnem območju $f = 100 - 0,01$ Hz. Rezultati kažejo, da pri teh pogojih za vse TC/PLA mešanice viskozni modul (G'') prevladuje nad elastičnim modulom (G'). Vrednosti elastičnega modula G' se po celotnem frekvenčnem območju enakomerno znižujejo z večanjem vsebnosti TC dodatka v PLA polimeru (Slika 4A). Viskozni modul (G'') je pri vseh vzorcih pri ~ 1 Hz izkazoval prevojno točko, pri kateri se je frekvenčna odvisnost modula nekoliko spremenila. Pri nizkih frekvencah je frekvenčna odvisnost modula pri višji vsebnosti dodatka postajala vedno manj odvisna od frekvence, oblika krivulje pa se je približevala krivulji samega TC polimera, ki je prikazana na sliki 4B. Iz slike 4C je razvidno, da fazni zamik za TC polimer od 100 - 4 Hz najprej narašča, nato pa se z nadaljnjim zmanjševanjem

frekvence ponovno začne zmanjševati. Dodatek TC polimera tako pri nizkih frekvencah premakne fazni zamik nižje, v bolj trdno (*»solid-like«*) vedenje (čeprav je odziv materiala še vedno zelo viskozen), pri visokih frekvencah pa povzroči zvišanje faznega zamika, ki se povečuje s koncentracijo dodatka.



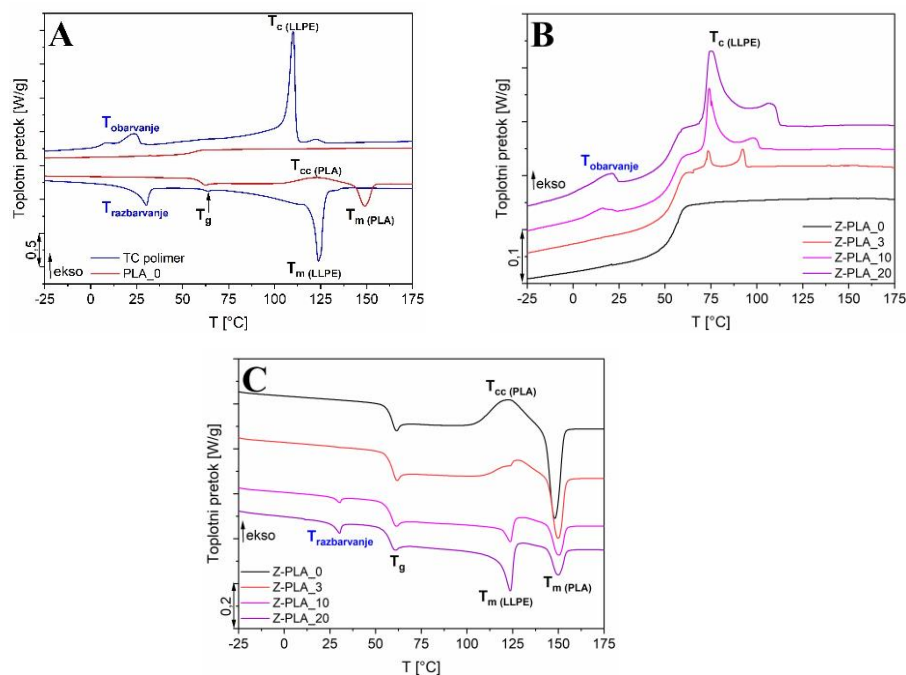
Slika 4: Frekvenčna odvisnost dinamičnih modulov (G' in G'') za A) TC/PLA mešanice, B) TC polimer ter C) frekvenčna odvisnost faznega zamika.

2.2 Termične lastnosti

Rezultati termičnih meritev (Slika 5A in Tabela 1) kažejo, da je ekstrudirani PLA_0 skoraj povsem amorfen, saj je stopnja kristalizacije manj kot 1%. Opazimo lahko, da pride pri segrevanju do hladne kristalizacije z vrhom pri $T_{CC}(\text{PLA}) = 123,59^{\circ}\text{C}$. Ta vrh pa se pokriva s temperaturo taljenja $T_m(\text{LLPE})$, ki je znašala $123,89^{\circ}\text{C}$, zaradi tega je razločitev med vrhovoma in določitev X_c zelo otežena. Za natančno razdelitev vrhov hladne kristalizacije, bi bile potrebne nadaljnje raziskave z uporabo temperaturno modulirane DSC analize. To je pomembno, saj se pri kompozitnih materialih oba procesa (t.j. hladna kristalizacija PLA materiala in taljenje LLPE materiala) dogajata istočasno (PLA_3, Slika 5C). Pri višjih koncentracijah prisotnost TC do neke mere zavre proces hladne kristalizacije, saj lahko na termogramu vidimo, da je taljenje LLPE materiala dominantnejše (Slika 5C). Delež kristaliničnosti (X_c) za TC/PLA mešanice z koncentracijo rastejo do $X_{c, \text{PLA}_20} = 2,54$. Prav tako raste tudi $X_{c, \text{LLPE}}$ iz 2,09% (PLA_3) na 23,24% za PLA_20. Iz tega lahko sklepamo, da prisotnost TC dodatka do koncentracije 10% spodbuja kristalizacijo (prisotnost mikrokapsul in kratkih linearnih molekul).

Za določitev termokromnega odziva je pomembno področje med 0 in 40°C , saj v tem temperaturnem območju poteka barvna sprememba v odvisnosti od temperature. Na Sliki 5B,

kjer so bili vzorci 110 dni izpostavljeni zunanji dejavniki, vidimo, da ima vzorec z najvišjo koncentracijo TC polimera (Z-PLA_20) dva ločena vrhova ($T_{\text{obarvanje}}$). Vzorec z najnižjo koncentracijo Z-PLA_3 v tem območju nima prisotnih vrhov, prav tako pa ne izkazuje termokromnega odziva in ostane razbarvan. Endotermni vrh pri temperaturi razbarvanja ($T_{\text{razbarvanje}}$) (Slika 5C) je veliko ožji in ga prav tako zaznamo samo v vzorcih z višjo koncentracijo TC polimera.



Slika 5: Termogrami DSC meritve osnovnih materialov A), ter TC/PLA mešanic pri ohlajanju B) in 2. segrevanju C) vzorcev po 110 dneh zunanje izpostave.

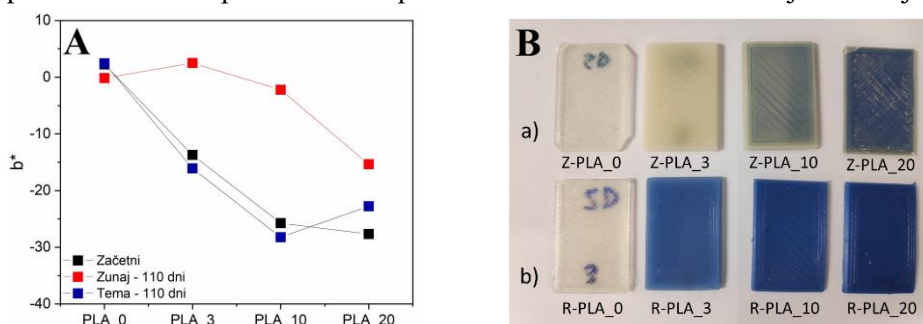
Tabela 1: Rezultati DSC meritev TC polimera ter ekstrudiranih filamentov PLA/TC polimer mešanic pred in po 110 dnevni zunanji izpostavi.

	T_g (°C)	T_m LLPE (°C)	T_{cc} PLA (°C)	T_m PLA (°C)	X_c LLPE (%)	X_c PLA (%)
TC polimer	61,20	123,82	/	/	26,27	/
PLA_0	59,05	/	123,59	148,94	/	0,79
PLA_3	58,96	124,35	128,13	150,07	2,09	0,98
PLA_10	58,30	123,96	130,46	150,21	14,39	2,48
PLA_20	57,78	123,80	129,97	149,59	23,24	2,54
Z-PLA_0	57,93	/	123,24	148,00	/	1,10
Z-PLA_3	58,19	123,96	128,19	149,88	1,06	1,22
Z-PLA_10	57,80	123,53	131,35	150,28	22,87	3,56
Z-PLA_20	57,17	149,95	130,90	149,95	22,47	3,39

2.3 Termokromne lastnosti

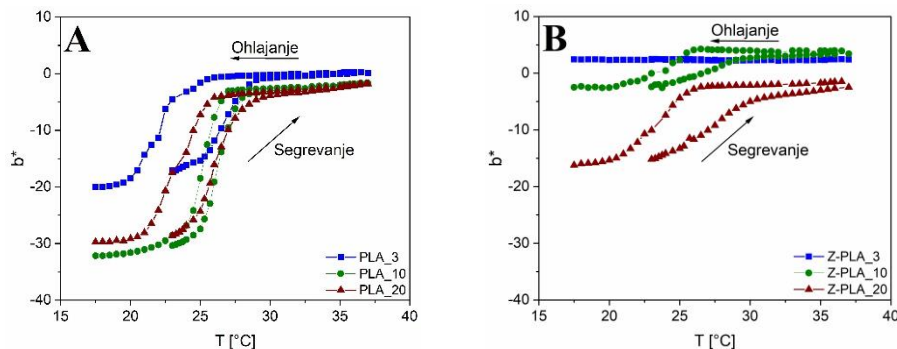
Barvno spremembo TC/PLA termokromnih polimernih mešanic smo opredelili s CIELab barvnim modelom, kjer barvo predstavimo s koordinatami L^* (svetlost), a^* in b^* . Koordinata a^* opisuje barvni prostor med rdečo ($a^* > 0$) in zeleno ($a^* < 0$). V našem primeru smo rezultate prikazovali za koordinato b^* , saj le-ta prikazuje barvni prostor med rumeno ($b^* > 0$) in modro ($b^* < 0$) [10].

Slika 6A prikazuje vpliv TC polimera na TC/PLA kompozite, kjer se b^* s koncentracijo TC zmanjšuje, kar pomeni, da polimer postaja vedno bolj temno moder. 20% TC dodatka v PLA polimeru pa je bila tudi najvišja koncentracija, ki je omogočala najtemnejše obarvanje. Po 110 dneh izpostave v temi so se te vrednosti le malo spremenile, do večjih sprememb je prihajalo pri zunanji izpostavi, kjer je UV sevanje povzročilo degradacijo termokromnega pigmenta in s tem ireverzibilno barvno spremembo pri segrevanju vzorca. Tako se vzorec s 3% TC dodatka popolnoma razbarva, pri 20% pa se b^* zmanjša skoraj za polovico. Na sliki 6B je prikazana primerjava 3D tiskanih ploščic TC/PLA mešanic po 110 dneh izpostave. Pri tem je potrebno še omeniti, da je bila izpostava vzorcev opravljena v zimskem času, ko je sončnih dni malo, ob izpostavi vzorcev v poletnem času pa bi bilo ireverzibilno razbarvanje še hitrejše.



Slika 6: A) Sprememba b^* koordinate 3D tiskanih ploščic v odvisnosti od koncentracije TC polimera in B) vizualna primerjava TC/PLA mešanic po 110 dneh izpostave a) zunanjim pogojem in b) temi.

Termokromni dodatki v mikrokapsulah [11][12] s spreminjanjem temperature pri segrevanju in ohlajanju tvorijo histerezno zanko, kar pomeni, da se sprememba temperature ne zgodi točno pri določeni temperaturi, ampak v določenem temperaturnem območju. Komercialno dostopen TC polimer ima določeno temperaturo barvnega prehoda pri 31°C , a kot kaže slika 7, le-ta začne potekati že pri $\sim 20^\circ\text{C}$, dokončno obarvanje pa je doseženo pri $31\text{--}32^\circ\text{C}$. Sprememba barve (razbarvanje) med segrevanjem poteka pri nekoliko višji temperaturi kot obarvanje med ohlajanjem. Temperatura, pri kateri pride do barvne spremembe, je aktivacijska temperatura, ki pa je odvisna od sestave organskih komponent [1]. Podatki kažejo, da se TC/PLA polimerne mešanice po 110 dneh izpostave tako v temi kot zunaj pri najvišji koncentraciji ne razbarvajo do najvišje vrednosti pri 30°C , ampak šele pri 32°C . Iz slike 7B je razvidno, da je pri izpostavi zunanjim vplivom prišlo do degradacije, saj Z-PLA_3 ne kaže več TC odziva, njegova barva je postala rumenkasta ($b^* > 0$). Najmanjša degradacija je bila opazna pri Z-PLA_20 pri katerem je bilo še vedno opaženo obarvanje in razbarvanje, vendar z nižjo intenziteto.



Slika 7: Sprememba termokromnega odziva b^* koordinate A) TC/PLA polimernih mešanic pred izpostavitvijo in B) po 110 dnevni zunanji izpostavi.

3 Zaključek

V opravljeni raziskavi smo uspešno pripravili ekstrudirane termokromne filamente TC/PLA mešanic različnih koncentracij (3 - 20%). Reološke analize kažejo, da TC polimer, ki vsebuje termokromne mikrokapsule izkazuje dva platoja znižanja viskoznosti. Prvo znižanje lahko pripišemo urejanju mikrokapsul v talini, drugo pa razpletanju in usmerjanju polimernih molekul. Znižanje točke tečenja ter viskoznosti TC/PLA mešanice pomeni, da bi lahko pri višjih koncentracijah zaradi prenizke viskoznosti polimera prišlo do napak pri 3D tisku.

S pomočjo DSC termične analize za ekstrudirane filamentov PLA/TC polimernih mešanic pred in po 110 dnevni izpostavi opazimo, da ima v območju termokromnega odziva med 0 in 40°C ($T_{\text{obarvanje}}$) vzorec Z-PLA_20 dva ločena vrhova. Vzorec z najnižjo koncentracijo Z-PLA_3 tega vrha ni izkazoval, prav tako v termogramu za drugo segrevanje ni bilo vidnega vrha za razbarvanje ($T_{\text{razbarvanje}}$). To smo nato potrdili tudi z nadaljnjimi meritvami termokromnega odziva, kjer smo opazili, da je bil ta material po 110 dneh zunanje izpostave termokromno neaktiven. Vzorec z najvišjo koncentracijo (Z-PLA_20) je po izpostavitvi še izkazoval histerezno zanko in reverzibilno obarvanje, a se je barvna intenziteta zmanjšala skoraj za polovico.

Zahvala

To delo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru programa št. P2-0264.

Literatura

- [1] P. Bamfield. *Chromic Phenomena*: Cambridge. UK: The Royal Society of Chemistry. 2010.
- [2] M. Aburas, V. Soebarto, T. Williamson, R. Liang, H. Ebendorff-Heidepriem, and Y. Wu. Thermochromic smart window technologies for building application: A review. *Appl. Energy*, 255, 113522, 2019.
- [3] D. Sun, K. Vadodaria, and G. K. Stylios. The Development of a Polymer Composite Filament for Thermo-sensitive Applications. *Polym. Polym. Compos.*, 20, 823–828, 2012.
- [4] Y. He, W. Li, N. Han, J. Wang, and X. Zhang. Facile flexible reversible thermochromic

- membranes based on micro/nanoencapsulated phase change materials for wearable temperature sensor. *Appl. Energy*, 247, 615–629, 2019.
- [5] S. Garshasbi and M. Santamouris. Using advanced thermochromic technologies in the built environment: Recent development and potential to decrease the energy consumption and fight urban overheating. *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*, 191, 21–32, 2018.
- [6] W. Ogrodnik. Use of color-changing pigment to detect wire and cable hazards. *Wire Journal International*. 41(4), 150-155, 2008.
- [7] D. Garlotta. A Literature Review of Poly(Lactic Acid). *J. Polym. Environ.*, 9, 63–84, 2001.
- [8] Y. Wang *et al.* Crystallization, Structures, and Properties of Different Polyolefins with Similar Grafting Degree of Maleic Anhydride. *Polymers*. 12, 675, 2020.
- [9] C. Benwood *et al.* Improving the Impact Strength and Heat Resistance of 3D Printed Models: Structure, Property, and Processing Correlations during Fused Deposition Modeling (FDM) of Poly(Lactic Acid). *ACS Omega*, 3, 4400–4411, 2018.
- [10] J. Schanda, *Colorimetry : understanding the CIE system*, Hoboken, John Wiley & Sons, Inc. 2007.
- [11] K. Bašnec *et al.* Relation between colour- and phase changes of a leuco dye-based thermochromic composite. *Sci. Rep.*, 8, 5511, 2018.
- [12] A. Seeboth, D. Löttsch, E. Potechius, and R. Vetter, Thermochromic effects of leuco dyes studied in polypropylene, *Chinese J. Polym. Sci.*, 24, 363–368, 2006.



Karakterizacija aktivnega vzbujanja podstruktur in prenosnost obratovalnih sil

Domen Ocepek¹, Gregor Čepon¹ in Miha Boltežar¹

Source characterization and transferability of the operational forces

Povzetek. Za določitev kritičnih poti prenosa hrupa in vibracij na sestavih z aktivnimi viri vzbujanj so pogosto uporabljene metode analize prenosnosti poti (ang. Transfer Path Analysis, TPA). Vzbujevalnim silam, sicer nemerljivim v praksi, metode TPA priredijo ekvivalenten set sil, ki replicira obratovalne pomike sistema. Z znano vzbujevalno silo nadalje lahko analiziramo, kako se vibracije prenašajo med posameznimi komponentami sklopa, kako obremenjene so posamezne prenosne poti in celo napovemo odziv strukture ob morebitnih modifikacijah sistema. V prispevku je prikazana aplikacija metode in-situ TPA na realni kompleksni strukturi.

Abstract. For the determination of critical paths for sound and vibration transmission in assembly products, transfer path analysis (TPA) is a reliable and effective tool. Source excitations are often unmeasurable in practice, therefore TPA represents a source with a set of forces which replicate operational responses. Once operational excitation is known, TPA offers the ability to analyse vibration transfer between individual components of the assembly, distinguish partial transfer path contribution and predict receiver response. In this work application of in-situ TPA on real complex structure is presented.

1 Uvod

Metode analize prenosnosti poti so zanesljivo in učinkovito diagnostično orodje za karakterizacijo aktivno vibrirajočih komponent ter propagiranja hrupa in vibracij na povezane pasivne podstrukture. Z metodami TPA lahko razčlenimo prispevke vibracij glede na posamezno prenosno pot in napovemo odziv pasivnih podstruktur tudi na kompleksnih sestavih, kjer sicer merjenje obratovalnih sil iz praktičnih razlogov ni mogoče.

Aktivno vzbujanje sistema v okviru TPA metod karakterizira nabor sil v kontaktu med podstrukturami, ki na povezanih pasivnih komponentah povzroča enake odzive kot obratovalno

¹ LADISK, Fakulteta za strojništvo - Univerza v Ljubljani

vzbujanje. Za določitev vzbujevalnih sil lahko uporabimo metode iz dveh vej TPA: klasične metode ali metode ekvivalentnih sil [1]. Klasične metode TPA vzbujanje popišejo s povezovalnimi silami. Glavna pomanjkljivost slednjih je njihova veljavnost zgolj na analizirani strukturi. Za neodvisno karakterizacijo vira zato uporabimo set ekvivalentnih sil, ki na strukturi izniči obratovalne sile in prepreči pomike na pasivni podstrukturi. Te ekvivalentne ali blokirske sile so veljavne za sestav s poljubno pasivno komponento [1].

Obratovalne obremenitve med podstrukturama je mogoče meriti neposredno ali posredno. Direktno merjenje sile, s silomeri nameščenimi v kontaktu med podstrukturama, je praktično težko izvedljivo [2]. Bolj pogosta izbira za identifikacijo sil v kontaktu v več prostostnih stopnjah (PS) so zato inverzne metode. Za poljubne robne pogoje aktivne komponente so izpeljane različne inverzne metode TPA, ki temeljijo na merjenju odziva [1]. Pri metodi in-situ TPA [1] celo ni potrebe po demontaži katerega koli dela strukture. Združevanje konceptov TPA in dinamičnega podstrukturiranja izpopolni karakterizacijo aktivnega vzbujanja, saj vir popišemo s silami in momenti v virtualni točki (VT) [3]. Virtualna točka, ki se običajno uporablja v aplikacijah podstrukturiranja v frekvenčni domeni (FBS), v kontaktu rekonstruira tudi obratovalne momente [4], ki sicer niso merljivi s konvencionalno merilno opremo.

V tem delu je prikazano aktualno stanje na področju TPA metod. Naslednje poglavje predstavi teoretične osnove metod in-situ TPA in transformacije virtualne točke. V poglavju 3 je prikazana implementacija VT v TPA, prenosnost ekvivalentnih sil na modificirano pasivno podstrukturo in identifikacija najbolj dominantne prenosne poti.

2 Teoretične osnove

2.1 In-situ TPA

Obravnavamo sklop dveh podstruktur A in B, ki sta prikazani na sliki 1a. Podstruktura A je aktivna komponenta, na kateri med meritvijo deluje obratovalna obremenitev \mathbf{f}_1 v vozlišču 1. Na pasivni podstrukturi B obremenitev ni. Odzivi na B \mathbf{u}_3 in \mathbf{u}_4 , pa tudi v kontaktu med podstrukturama \mathbf{u}_2 , so tako posledica zgolj sile \mathbf{f}_1 . In-situ TPA predvidi set ekvivalentnih sil \mathbf{f}_2^{eq} , ki, aplicirane v kontaktu med A in B, povzročijo enak odziv pasivne podstrukture kot \mathbf{f}_1 . To pomeni, da če ob \mathbf{f}_1 v kontakt dodamo reakcijo ekvivalentnih sil, te izničijo vse pomike na pasivni podstrukturi (slika 1b). Za izračun \mathbf{f}_2^{eq} uporabimo odziv, izmerjen v bližini kontakta²:

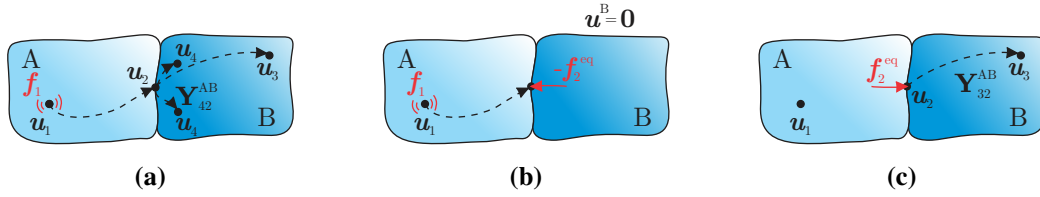
$$\mathbf{0} = \underbrace{\mathbf{Y}_{21}^{\text{AB}} \mathbf{f}_1}_{\mathbf{u}_2} + \mathbf{Y}_{22}^{\text{AB}} (-\mathbf{f}_2^{\text{eq}}) = \underbrace{\mathbf{Y}_{41}^{\text{AB}} \mathbf{f}_1}_{\mathbf{u}_4} + \mathbf{Y}_{42}^{\text{AB}} (-\mathbf{f}_2^{\text{eq}}). \quad (1)$$

Iz odziva \mathbf{u}_4 izrazimo \mathbf{f}_2^{eq} in dobimo:

$$\mathbf{f}_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{42}^{\text{AB}})^+ \mathbf{u}_4, \quad (2)$$

kjer nadpis + označuje psevdo-inverz. Če vektor \mathbf{f}_2^{eq} izrazimo iz admitanc obeh podstruktur A in B z uporabo FBS [2] opazimo, da so te sile lastnost zgolj aktivne podstrukture A. Invariantnost \mathbf{f}_2^{eq} od pasivne komponente pomeni, da jih lahko apliciramo na sklop s poljubno podstrukturama B.

² Za potrebe preglednosti zapisa je v nadaljevanju izpuščena odvisnost od spremenljivke krožne frekvence.



Slika 1: In-situ TPA; a) sklop struktur A in B, b) f_2^{eq} prepreči pomike pasivne podstrukture, c) f_2^{eq} na pasivni strukturi povzročijo enak odziv kot f_1 .

Odzivi u_3 v postopku identifikacije ekvivalentnih sil niso uporabljeni, zato so od njih neodvisni. Kot take jih lahko uporabimo za objektivno validacijo, ki nam pove, kako popolno izračunane ekvivalentne sile posnemajo obratovalno vzbujanje. Napovedan odziv, ki ga povzročijo f_2^{eq} , mora biti namreč enak odzivu zaradi f_1 (slika 1c). Napovedan odziv določimo z enačbo:

$$\tilde{u}_3 = Y_{32}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}}. \quad (3)$$

Preko primerjave napovedanega odziva \tilde{u}_3 z dejanskim izmerjenim u_3 lahko objektivno ocenimo, če so ekvivalentne prenosne poti popolne. Ta pristop je običajno uporabljen v sklopni validaciji, kjer popolnost preverjamo na originalnem sklopu AB, in križni validaciji, kjer f_2^{eq} validiramo na sklopu z modificirano pasivno komponento, $\tilde{\text{A}\tilde{\text{B}}}$.

2.2 Transformacija virtualne točke

Virtualna točka je navidezna točka v okolici kontakta komponente s sosednjo podstrukturno, v kateri ne poznamo admitance. Z meritvijo večjega nabora odzivov (n_u) in vzbujanj (n_f) v okolici VT lahko rekonstruiramo popolno in recipročno admitančno matriko VT. Izmerjeno admitanco $Y_{uf} \in \mathbb{C}^{n_u \times n_f}$ transformiramo v VT:

$$Y_{qm} = T_u Y_{uf} T_f^T, \quad (4)$$

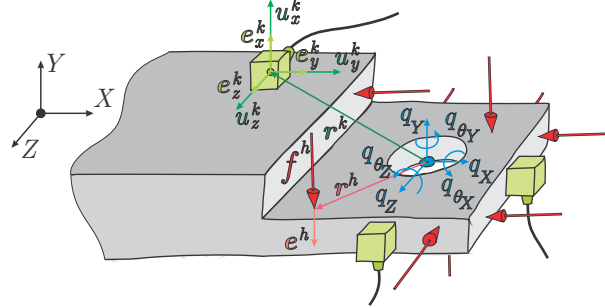
kjer so T_u transformacijska matrika pomikov, T_f transformacijska matrika sil in $Y_{qm} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ admitančna matrika VT. Transformacijski matriki sestavimo iz kontaktnih deformacijskih oblik (ang. Interface Deformation Modes, IDM). Če predpostavimo, da se lokalna okolica kontakta obnaša kot togo telo (kar je ustrezna predpostavka za točkovne kontakte), ima VT $m = 6$ PS in Y_{qm} rekonstruiramo na osnovi m togih IDM ($n_u, n_f > m$). Vektor pomikov VT q sestavljajo tri translacijske ($q_t = [q_x, q_y, q_z]^T$) in tri rotacijske PS ($q_\theta = [q_{\theta_x}, q_{\theta_y}, q_{\theta_z}]^T$). Zvezo med n_u izmerjenimi odzivi u in m odzivi VT q zapišemo kot:

$$u = R_u q. \quad (5)$$

IDM so zapisani v matriki $R_u \in \mathbb{R}^{n_u \times m}$, ki je sestavljena iz relativnih lokacij in orientacij merilnih zaznaval odziva glede na VT³ (slika 2). Če enačbo (5) rešimo za q v smislu najmanjšega kvadratnega odstopanja, dobimo:

$$q = (R_u^T R_u)^{-1} R_u^T u = T_u u \Rightarrow T_u = (R_u^T R_u)^{-1} R_u^T. \quad (6)$$

³ Več informacij o strukturi matrike R_u je zbranih v [3].



Slika 2: Transformacija odzivov k -tega triosnega pospeškometra in h -tega vzbujanja v VT⁴.

Enak pristop uporabimo za rekonstrukcijo sil in momentov v VT \mathbf{m} iz izmerjenih vzbujanj \mathbf{f} v okolici VT. Ob predpostavki o togosti kontakta vektor \mathbf{m} tvorijo tri sile in trije momenti ($\mathbf{m} = [m_X, m_Y, m_Z, m_{\theta_X}, m_{\theta_Y}, m_{\theta_Z}]^T$). \mathbf{m} izrazimo kot prispevek vseh izmerjenih vzbujanj:

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}_f^T \mathbf{f}. \quad (7)$$

Matrika IDM $\mathbf{R}_f^T \in \mathbb{R}^{m \times n_f}$ je sestavljena iz relativnih lokacij in orientacij impulznih vzbujanj glede na VT⁵ (slika 2). Inverzno relacijo enačbe (7) zapišemo kot:

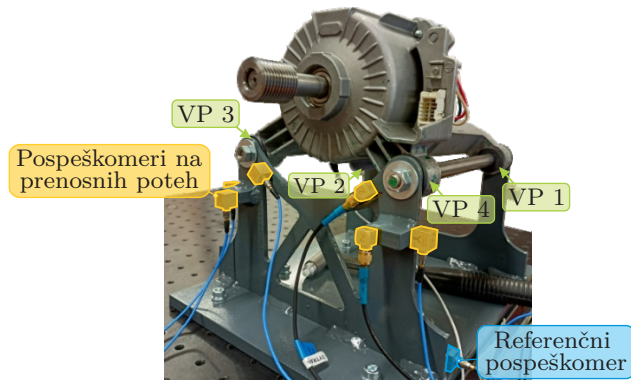
$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_f \left(\mathbf{R}_f^T \mathbf{R}_f \right)^{-1} \mathbf{m} = \mathbf{T}_f^T \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_f^T = \mathbf{R}_f \left(\mathbf{R}_f^T \mathbf{R}_f \right)^{-1}. \quad (8)$$

3 Eksperiment

Eksperimentalna demonstracija in-situ TPA metode je v nadaljevanju prikazana na primeru sklopa brezkrtačnega električnega (ang. Brushless Permanent Magnet, BPM) motorja in namenske laboratorijske testne strukture za vpetje motorjev. Sklop je prikazan na sliki 3. BPM motor v našem primeru predstavlja aktivno podstrukturo, ki je preko štirih gumijastih vložkov povezana s testno mizo (pasivno podstrukturo). Strukturi v kontaktu sta pritrjeni z M8 navojnima palicama, privijačenima z momentom 5 Nm. V obravnavanem frekvenčnem razponu, ki sega od 0 Hz do 1200 Hz, preučujemo štiri prenosne poti med podstrukturama. Med obratovanjem BPM motorja so v odzivu sklopa dominantni zgolj harmoniki frekvence vrtenja. Prvi eksperimentalni primer zato namesto aktivnega vzbujanja strukture z vrtenjem elektro-motorja uporablja dodatno impulzno vzbujanje na njegovem ohišju. Tak tip vzbujanja nam omogoča vrednotenje celovitosti prenosnih poti v celotnem opazovanem frekvenčnem območju. V drugem eksperimentalnem primeru prenosne poti vrednotimo med obratovanjem elektro-motorja.

⁴ Krajevni vektor iz VT do središča pospeškometra je označen z \mathbf{r}^k . Enotski vektor posamezne osi pospeškometra je \mathbf{e}_i^k in odziv v osi u_i^k ($i \in (x, y, z)$). Krajevni vektor iz VT do prijemališča sile je \mathbf{r}^h , smer delovanja sile je \mathbf{e}^h in velikost sile je f^h .

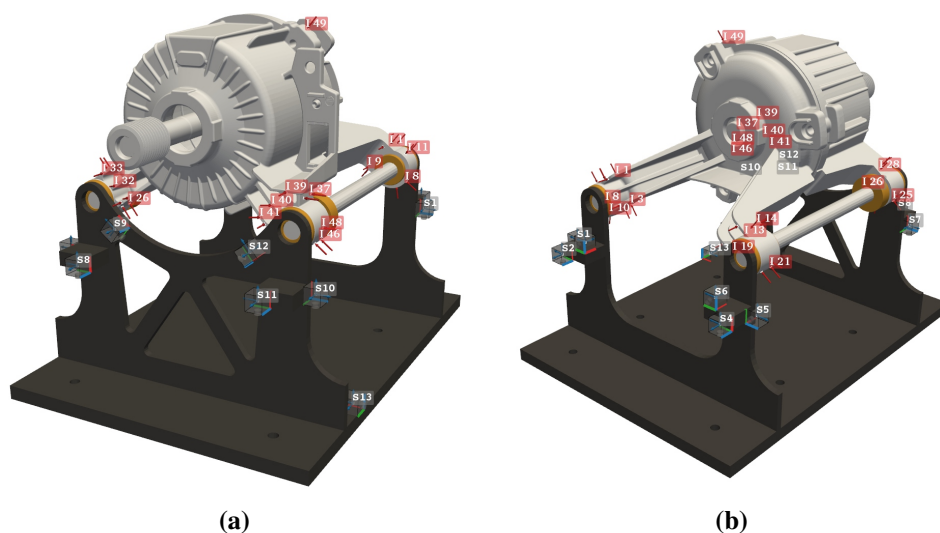
⁵ Več informacij o strukturi matrike \mathbf{R}_f je zbranih v [3].



Slika 3: Prikaz sklopa elektro-motorja in testne mize.

3.1 Identifikacija ekvivalentnih sil

Testno mizo smo opremlili s 13 triosnimi pospeškometri PCB 356A32. 12 pospeškometerov (po tri na posamezno prenosno pot) je bilo namenjenih meritvi odziva u_4 , ki je potreben za posredno določitev ekvivalentnih sil, medtem ko je bil zadnji pospeškometer namenjen merjenju odziva u_3 za validacijo popolnosti prenosnih poti. Admitance prenosnih poti smo merili na neobratovalnem sistemu, pri čemer smo za vzbujanje uporabili modalno kladivo PCB 086C03 s plastično konico. V okolici posamezne prenosne poti smo izbrali 12 točk vzbujanja sistema. Ker smo sistem vzbujali na elektro-motorju, so gumijasti vložki smatrani kot del pasivne podstrukture. Za pomoč pri postavitvi eksperimenta smo uporabili python paket *pyFBS* [5] (slika 4).



Slika 4: Postavitev eksperimenta z lokacijami pospeškometerov in vzbujanj; a) levi pogled, b) desni pogled.

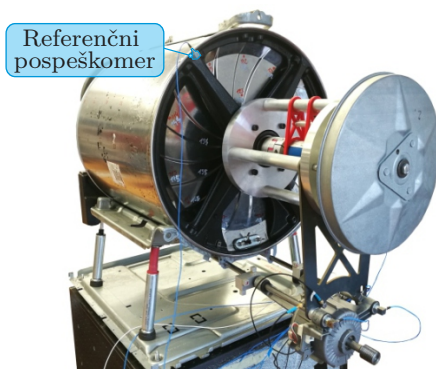
Uporaba točkovnih povezav med elektro-motorjem in testno mizo upraviči predpostavko o togosti kontakta. Izmerjene sile smo zato transformirali v VT s sledečo enačbo:

$$\mathbf{Y}_{um} = \mathbf{Y}_{uf} \mathbf{T}_f^T. \quad (9)$$

Na ta način smo dobili admitančni matriki \mathbf{Y}_{42}^{AB} in \mathbf{Y}_{32}^{AB} . Obratovalne pomike \mathbf{u}_4 in \mathbf{u}_3 smo izmerili med vzburjanjem sistema z modalnim kladivom na ohišju elektro-motorja. Z znano admitanco \mathbf{Y}_{42}^{AB} in odzivom \mathbf{u}_4 smo set ekvivalentnih sil izračunali z enačbo (2).

3.2 Prenosnost ekvivalentnih sil

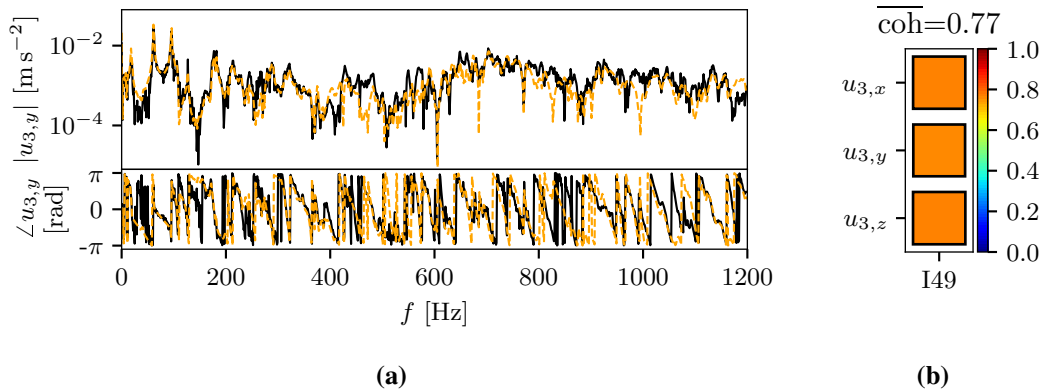
Celovitosti ekvivalentnih sil nismo vrednotili na sklopu BPM motorja in testne mize, pač pa smo motor prestavili na pralno grupo. Nov sklop \tilde{AB} je prikazan na sliki 5. S tem smo izkoristili lastnost ekvivalentnih sil, ki so prenosljive na sklop s poljubno pasivno podstrukturo. Na pralno grupo smo za potrebe validacije ekvivalentnih sil namestili tudi referenčni pospeškometer.



Slika 5: Prikaz sklopa elektro-motorja in pralne grupe.

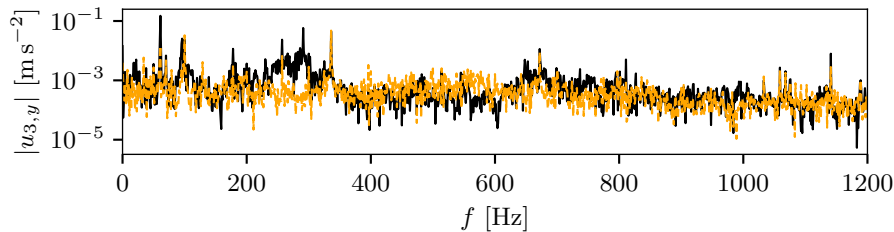
Na novem sklopu smo izmerili admitanco $\mathbf{Y}_{32}^{\tilde{AB}}$. Lokacije udarcev smo ohranili enake kot na testni mizi. Ponovno transformiramo sile v VT in tako zagotovimo soležnost kontaktnih PS sklopa AB in \tilde{AB} . Z ekvivalentnimi silami \mathbf{f}_2^{eq} iz sklopa AB in admitanco $\mathbf{Y}_{32}^{\tilde{AB}}$ napovemo odziv pralne grupe po enačbi (3). Napovedan odziv primerjamo z izmerjenim, kot je prikazano na sliki 6.

Na sliki 6a opazimo dobro ujemanje tako amplitude kot tudi faze napovedanega odziva z izmerjenim v celotnem opazovanem frekvenčnem območju. Objektivno primerjavo obeh odzivov lahko izvedemo z uporabo koherentnega kriterija [4]. Kriterij primerja posamezni napovedani odziv z referenco (izmerjenim odzivom) v celotnem frekvenčnem intervalu in je prikazan na sliki 6b. Če povprečimo vrednosti kriterija za vse tri referenčne smeri opazimo, da pravilen odziv napovemo z natančnostjo 77%. Odstopanja med odzivoma so zanemarljiva in so posledica eksperimentalnih napak, spremembe robnih pogojev pri modifikaciji pasivne podstrukture, predpostavke o lokalni togosti kontakta in lokalnih nelinearnosti v kontaktu.



Slika 6: Križna validacija ekvivalentnih sil; a) napovedani $u_{3,y}^{\text{TPA}}$ in izmerjeni pomik $u_{3,y}^{\text{obr}}$, b) koherenčni kriterij za vse pomike v \mathbf{u}_3 . (—) – napovedan odziv, (---) – izmerjen odziv

Postopek identifikacije in validacije ekvivalentnih sil smo ponovili še za primer vzbujanja strukture z vrtenjem BPM motorja. Frekvenca vrtenja elektro-motorja je znašala 336 Hz. Križna validacija celovitosti identificiranih ekvivalentnih sil je prikazana na sliki 7. Opazimo, da je v večjem delu obravnavanega frekvenčnega območja prisoten šum, zato je celovita primerjava odzivov preko koherenčnega kriterija nesmiselna. Namesto tega se osredotočimo zgolj na frekvence, kjer je odziv sklopa A \bar{B} dominanten nad šumom. To so harmoniki frekvence vrtenja motorja, frekvence motenj električnega omrežja in okolice resonančnih območij sklopa. Odziv v danih frekvenčnih področjih napovemo pravilno.

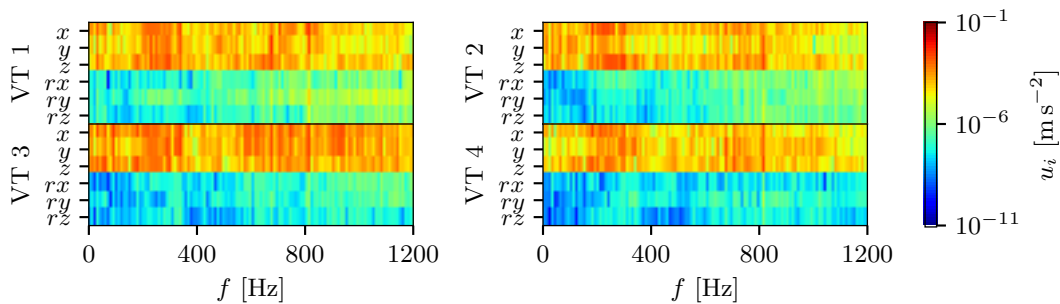


Slika 7: Pomiki pralne grupe. (—) – napovedan odziv, (---) – izmerjen odziv

Z znanimi ekvivalentnimi silami lahko ločimo tudi prispevke odziva na pasivni strukturi kot posledico posamezne prenosne poti in tako določimo najbolj kritične prenosne poti v izdelku. Delne odzive kot posledico posamezne prenosne poti napovemo z enačbo:

$$u_i = \sum_j Y_{ij}^{AB} f_j^{\text{eq}} \quad \begin{cases} u_i \in \mathbf{u}_3 \\ f_j^{\text{eq}} \in \mathbf{f}_2^{\text{eq}} \end{cases} \quad (10)$$

Delni odzivi so prikazani na sliki 8. Najbolj kritična prenosna pot poteka preko VT 3. Odziv se na pasivno podstrukturo v večini prenaša preko translatorskih PS (x , y in z), a kljub temu ekvivalentni momenti (in posledično rotacijske PS rx , ry in rz) v kontaktu niso zanemarljivi.



Slika 8: Delni odzivi referenčne meritve $u_{3,y}$ kot prispevek posamezne ekvivalentne sile.

4 Zaključki

V prispevku je prikazana aplikacija metode in-situ TPA na realni kompleksni strukturi za popis vzbujevalne sile in prenosnih poti med virom vzbujanja in pasivno podstrukturo. Za potrebe rekonstrukcije obratovalnih momentov v karakterizaciji aktivnega vzbujanja strukture je uporabljena transformacija virtualne točke. Prenosne poti med aktivno in pasivno strukturo so tako bolj popolne. Pravilnost ekvivalentnih sil je demonstrirana s križno validacijo, ko sile, identificirane na testni mizi, prenesemo na pralno grupo in pravilno napovemo njene pomike pri obratovalnem vzbujanju. Z izračunanimi ekvivalentnimi silami je identificirana najbolj kritična prenosna pot vibracij iz elektro-motorja na pralno grupo.

Literatura

- [1] MV van der Seijs, D de Klerk, and DJ Rixen. General framework for transfer path analysis: History, theory and classification of techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 68:217–244, 2016.
- [2] MV van der Seijs. *Experimental dynamic substructuring: Analysis and design strategies for vehicle development*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2016.
- [3] MV van der Seijs, DD van den Bosch, DJ Rixen, and D de Klerk. An improved methodology for the virtual point transformation of measured frequency response functions in dynamic substructuring. In *4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, number 4, 2013.
- [4] M Haeussler, T Mueller, EA Pasma, J Freund, O Westphal, T Voehringer, and ZF Friedrichshafen AG. Component TPA: benefit of including rotational degrees of freedom and over-determination. In *ISMA 2020-International Conference on Noise and Vibration Engineering*, pages 1135–1148, 2020.
- [5] T Bregar, A El Mahmoudi, M Kodrič, G Čepon, M Boltežar, and DJ Rixen. Introducing pyFBS: An open-source python package for frequency based substructuring and transfer path analysis. In *IMAC*, 2021.



Mehanizmi nastanka omrežja iz ogljikovih nano-cevk v polimernih nano-kompozitih

Alen Oseli¹ in Lidija Slemenik Perše¹

Mechanisms of carbon nanotube network formation in polymer nanocomposites

Povzetek. V tej raziskavi poročamo o osnovnih mehanizmi nastanka omrežja z uporabo enostenskih ogljikovih nanocevk (SWCNT) v polietilenu z nizko in visoko gostoto. Mehanizmi so bili teoretično ovrednoteni z Doi-Edwardsovo teorijo in eksperimentalno potrjeni s plazemskim jedkanjem in elektronsko mikroskopijo ter reološko analizo. Rezultati so pokazali, da je vzpostavljeno omrežje zgrajeno iz SWCNT snopov, ki se geometrijsko zapletejo pri kritičnem volumskem deležu $\Phi_{v,crit}$ (število palic: $\beta \approx 30$). Pod $\Phi_{v,crit}$ se snopi obnašajo kot posamezne enote in se lahko poravnajo v smeri toka. Nad $\Phi_{v,crit}$ vrtenje snopov omejujejo sosednje enote, kar vodi do naključne konfiguracije omrežja. Poleg nastanka omrežja Doi-Edwards teorija uspešno razloži vedenje snopov kot Brownovih enot, ki jih vodi termo- in hidro-dinamično gnana difuzija.

Abstract. Within this study, we report on the underlying mechanisms of network formation utilizing single-walled carbon nanotubes (SWCNT) in low- and high-density polyethylene matrices. Mechanisms were theoretically evaluated through Doi-Edwards theory and experimentally confirmed through plasma etching coupled with electron microscopy as well as rheological analysis. Results showed that the established network is constructed from SWCNT bundles, which geometrically entangle at critical volume fraction $\Phi_{v,crit}$ (number of rods: $\beta \approx 30$). Below $\Phi_{v,crit}$, bundles behave as individual units and may align in flow direction. Above $\Phi_{v,crit}$, rotation of bundles is constrained by neighboring units, leading to random network configuration. Besides network formation, the theory successfully explains SWCNT bundle behavior as Brownian entity through thermo- and hydro-dynamically driven diffusion.

1 Uvod

Paličasta oblika, izjemna trdnost, učinkoviti prenos elektronov, itd., so tiste lastnosti, ki ogljikove nano-cevke (*ang. carbon nanotubes*-CNT) postavljajo med superiorna funkcionalna polnila v tako imenovanih nano-kompozitih [1]. Zaradi svoje paličaste oblike lahko vzpostavijo naključno povezano omrežje v matričnem materialu pri bistveno nižjih koncentracijah (< 1 % volumskega deleža). Vzpostavitev omrežja je odvisna tako od

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva ulica 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

geometrije CNTjev, kot tudi od volumskega deleža nano-polnila ter različnih mehanizmov, medsebojnih povezav pa v primeru CNT nano-kompozitov še ne razumemo prav dobro [2].

Za idealne, paličaste delce, v nadaljevanju palice (delci z visokim geometrijskim razmerjem med dolžino in premerom), suspendirane v mediju, je vzpostavitev omrežja običajno povezana z geometrijskim prepletom takšnih delcev, ki ga tehnično imenujemo tudi perkolacijskih prag. Nastanek perkolacijskega praga lahko opazujemo z reološkimi (geometrijski prag) ali do določene mere tudi z električnimi (električni prag) meritvami [3]. Pri nizki vsebnosti delcev (pod perkolacijskim pragom), v *razredčenem režimu*, se takšni anizotropni delci svobodno vrtijo okoli svojega težišča in ločeno delujejo na okoliški medij. S povečanjem vsebnosti delcev (nad perkolacijskim pragom), v *pol-razredčenem režimu*, pa delci vzpostavijo naključno povezano omrežje. V tem območju je gibanje delcev močno omejeno s sosednjimi delci. Vzpostavljena mreža kaže interakcije delcev dolgega dosega, kar bistveno spreminja vedenje materiala (izboljšanje njegovih mehanskih, električnih in drugih lastnosti). Predstavljena klasifikacija režimov je bila v preteklosti oblikovana s strani L. Onsagerja, ki jo je nadgradil P.J. Flory, kasneje pa tudi M. Doi in S.F. Edwards [4]. Sedaj, poimenovana Doi-Edwards teorija (teorija reptacije togih paličastih molekul) predlaga nastanek omrežja kot posledico geometrijske prepletenosti delcev, ki je odvisna od geometrije in volumskega deleža delcev. Po drugi strani pa konfiguracijo omrežja ureja difuzija (natančneje rotacijska difuzija, ki jo pospešujejo Brownove (termične) sile, upočasnjuje pa hidro-dinamski upor. Primarno je bila teorija eksperimentalno potrjena za paličaste molekule v nizko viskoznih raztopinah ($\eta < 10$ Pa s). Teoretična prizadevanja so bila kasneje uspešno razširjena na druge paličaste nizko-viskozne sisteme (vlakna, žice, itd.) [5], kar je odprlo možnosti razširitve aplikabilnosti in uporabnosti te teorije pri interpretaciji mehanizmov nastanka omrežja tudi za visoko-viskozne CNT nano-kompozite ($\eta > 1000$ Pa s).

V okviru raziskave smo teoretično in eksperimentalno ovrednotili mehanizme vzpostavitve CNT omrežja v polimerni talini, pri čemer je Doi-Edwards teorija (teorija reptacije paličastih sistemov) služila kot teoretična platforma pri razlagi mehanizmov, medtem ko smo s pomočjo plazemskega jedkanja in elektronske mikroskopije analizirali morfologijo omrežja ter geometrijo glavnih gradnikov, z reološko analizo pa smo eksperimentalno ovrednotili nastanek omrežja.

2 Eksperimentalni del

2.1 Materiali in polnila

V sklopu raziskave smo za pripravo nano-kompozitov uporabili dva komercialno dostopna delno-kristalinična termoplasta. To sta bila polietilen nizke gostote (*ang. low-density polyethylene* - LDPE), 780E NATURAL, Dow Chemicals, ZDA z gostoto $\rho_{LDPE} = 0,923$ g/cm³, ter polietilen visoke gostote (*ang. high-density polyethylene* - HDPE), HDI2061 NATURAL, Braskem Idesa, Mehika z gostoto $\rho_{HDPE} = 0,955$ g/cm³. Kot nano-polnilo smo uporabili eno-stenske ogljikove nano-cevke (*ang. single-walled carbon nanotubes* - SWCNT) v obliki zmesi Tuball matrix 801, OCSiAl, Luksemburg, ki je vsebovala 10 % masnega deleža SWCNTjev z gostoto $\rho_{SWCNT} = 1,3$ g/cm³ in 90 % masnega deleža polietilena nizke molekulske mase - PENMM z gostoto $\rho_{PENMM} = 0,941$ g/cm³.

2.2 Priprava nano-kompozitov

Nano-kompoziti so bili pripravljani v dveh fazah. V prvi fazi smo uporabili dvo-vijačni ekstruder Haake MiniLab za pripravo mešanice polimera in cevok, medtem ko smo v drugi fazi uporabili napravo za injekcijsko brizganje Haake MiniJet, ki je služila za pripravo vzorcev za karakterizacijske teste.

Tekom prve faze (t.j. mešanje taline) smo $m_{\text{cel}} = 6$ g mešanice LDPE ali HDPE/Tuball 801, ki je vsebovala od $\Phi_m = 0,00$ % do $\Phi_m = 5,00$ % ($\Phi_v = 3,69$ %) SWCNTjev, mešali 10 min v ekstruderju pri temperaturi $T_{\text{meš}} = 220$ °C. Pri doziranju, ki je trajalo $t_{1,\text{meš}} = 1$ min, smo vrtljaje polža nastavili na $n_{1,\text{meš}} = 100$ o/m, kasneje, pri mešanju, ki je trajalo $t_{2,\text{meš}} = 9$ min, pa smo vrtljaje povišali na $n_{2,\text{meš}} = 200$ o/m. Glede na navodila proizvajalca smo pri mešanju uporabili visoko temperaturo, $T_{\text{meš}}$, ki je zagotavljala boljšo disperzijo nano-polnila v matričnem materialu. Uporabljena hitrost mešanja, $n_{2,\text{meš}}$, glede na literaturo zagotavlja manjše število ne-razbitih oz. erodiranih primarnih aglomeratov, ki ostanejo v nano-kompozitu. Izkazuje se, da se pri izbrani hitrosti število primarnih aglomeratov izravna tako, da jih v končni mešanici ostane ~ 2 % [6].

V drugi fazi, t.j. injekcijsko brizganje, smo talino mešanice polimera in CNT transportirali v napravo za injekcijsko brizganje, katere temperaturo smo nastavili na $T_{\text{inj}} = 180$ °C. Talino smo nato brizgali v orodje, katerega temperatura je bila nastavljena na $T_{\text{orod}} = 45$ °C. Tlak brizganja je bil za $t_{\text{inj}} = 10$ s nastavljen na $p_{\text{inj}} = 50$ MPa, naknadni tlak pa je dodatnih $t_{\text{nak}} = 10$ s znašal $p_{\text{nak}} = 15$ MPa. Glede na navedeno smo temperaturo pri brizganju znižali iz $T_{\text{meš}}$ na T_{inj} ter s tem onemogočili re-agregacijo nano delcev med cikli brizganja [6]. Za študij mehanizmov nastanka omrežja je bila geometrija vzorcev odvisna od eksperimentalne metode, pri kateri smo uporabili senzorski sistem dveh vzporednih plošč. V ta namen smo pripravili vzorce v obliki diskov premera $d = 25$ mm in debeline $h = 1,5$ mm. Vzorci so bili označeni kot LDPE- Φ_m ali HDPE- Φ_m , kjer je Φ_m predstavljal masni delež (v %) SWCNTjev v matričnem materialu.

2.3 Karakterizacijske metode

Morfologijo oblikovanega omrežja v pripravljenih nano-kompozitih smo posneli z vrstičnim elektronskim mikroskopom - SEM Jeol JSM 7600F. Formirano omrežje smo izpostavili ne-destruktivni metodi plazemskega jedkanja, pri čemer je bila ustvarjena radio frekvenčna (RF) plazma pri $P_{\text{plazma}} = 150$ W v kisikovi atmosferi in vakumu $p_{\text{plazma}} = 35$ Pa. Omrežje je bilo na vzorcih razkrito po 20 ciklih plazemskega jedkanja, pri čemer je bil vsak cikel izpostavljen $t_{\text{p. pulz}} = 30$ s plazemskemu pulzu z $t_{\text{p. premor}} = 10$ s premorom. Pri izbranem deležu nano-polnila smo pripravili 3 sklope (pri različnih povečavah) SEM mikrografov, ki so bili uporabljeni v nadaljnji analizi. Napaka v analizah je predstavljala maksimalno odstopanje od povprečne vrednosti.

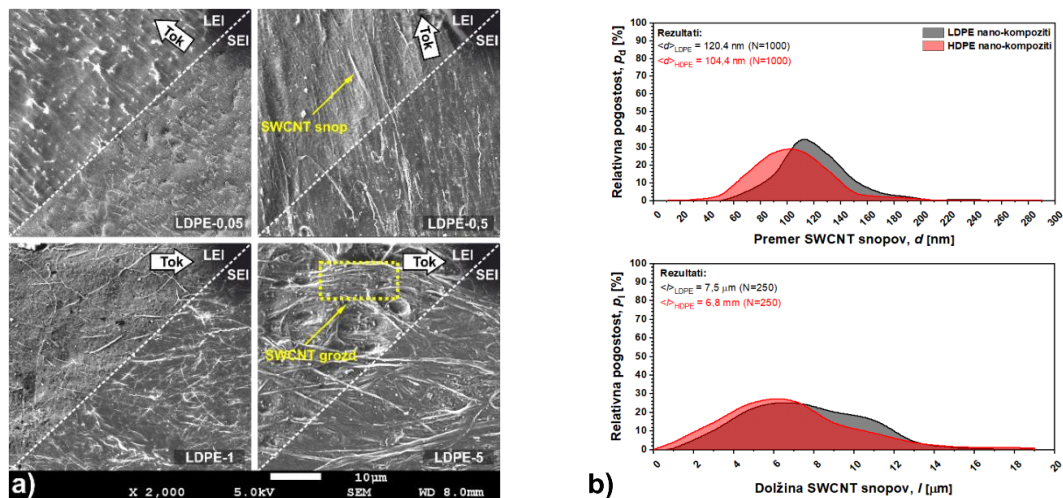
Reološke lastnosti smo določili s tokovnimi testi na rotacijskem reometru Anton Paar MCR 302 z uporabo senzorskega sistema plošča-plošča s premerom $d = 25$ mm in režo $h = 1,5$ mm (PP25/1). Vsi testi so bili izvedeni pri konstantni temperaturi $T_{\text{reo}} = 150$ °C, pri čemer je bila talina obremenjena s strižno napetostjo po trikotni metodi v območju strižne napetosti od $\tau_{\text{min}} = 1$ Pa do $\tau_{\text{max}} = 10^4$ Pa v času $t_{\text{tok}} = 300$ s. Za reološko karakterizacijo smo uporabili občutno nižjo temperaturo (nižjo od procesne temperature $T_{\text{meš}} > T_{\text{inj}} > T_{\text{reo}}$) ter s tem zmanjšali učinek ponovne agregacije cevok/snopov [6]. Rezultati reoloških meritev

predstavljajo povprečje 3 meritev, medtem ko napaka predstavlja maksimalno odstopanje od povprečne vrednosti.

3 Rezultati in diskusija

3.1 Morfologija in geometrija gradniko SWCNT omrežja

Na plazemsko jedkanih LDPE in HDPE nano-kompozitih smo izdelali SEM mikrofote, ki so razkrili nastajajoče SWCNT omrežje ter njegove lastnosti (na sliki 1a so kot primer prikazani SEM mikrofoti LDPE nano-kompozitov). Iz mikrofotov je razvidno, da je bilo omrežje po večini sestavljeno iz tako-imenovanih SWCNT snopov in ne posameznih entitet, t.j. ločenih ogljikovih nano-cevk. Očitno je, da nam snopov, zaradi močne fizične prepletenosti in van der Waalsovih privlakov, ni uspelo popolnoma pretrgati ali erodirati s konvencionalnimi postopki predelave (v našem primeru ekstrudiranje in injekcijsko brizganje), ne da bi pri tem uničili glavne komponente (razgradnja matričnega materiala, poškodbe površine SWCNTjev, itd.). Poleg tega pa SEM mikrofoti razkrivajo še eno večjo, sicer veliko manj številčno obliko sekundarnih aglomeratov, to so SWCNT grozdi, ki so opazni pri višjih deležih nano-polnila (LDPE-5 na sliki 1a). Te strukture pa niso le rezultat večjega deleža nano-polnila, temveč tudi termo-dinamskih (Brownovo gibanje snopa) in hidro-dinamskih (migracija snopa po toku taline) “pick-up” mehanizmov tekom predelave [6]. Iz SEM mikrofotov je razvidna tudi sprememba poravnave SWCNT snopov (iz visoko poravnanih v naključno usmerjene), ki je posledica nastanka SWCNT omrežja (LDPE-0,5 v LDPE-1 na sliki 1a).



Slika 1: a) SEM mikrofoti nastanka omrežja v LDPE nanokompozitih, ter b) porazdelitev velikosti premera in dolžin SWCNT snopov v LDPE in HDPE nano-kompozitih [2].

SEM mikrofote na LDPE in HDPE nano-kompozitih smo uporabili za določitev velikosti premera in dolžine SWCNT snopov. Analize smo izvedli v programskem paketu ImageJ. Iz rezultatov smo opazili, da porazdelitvi velikosti premera in dolžine izkazujejo log-normalno porazdelitev (slika 1b). Pri LDPE nano-kompozitih smo določili srednji premer in dolžino snopov kot $\langle d \rangle_{LDPE} = 120,4 \text{ nm}$ in $\langle l \rangle_{LDPE} = 7,58 \text{ }\mu\text{m}$. Pri HDPE nano-kompozitih pa sta bila srednji premer in dolžina snopov določena kot $\langle d \rangle_{HDPE} = 104,4 \text{ nm}$ in $\langle l \rangle_{HDPE} =$

6,80 μm . Na podlagi dobljenih rezultatov je očitno, da so bili snopi v LDPE nano-kompozitih širši in daljši v primerjavi s tistimi, ki smo jih opazili v HDPE nano-kompozitih, kar smo pripisali nezadostnemu strižnemu polju tekom predelave.

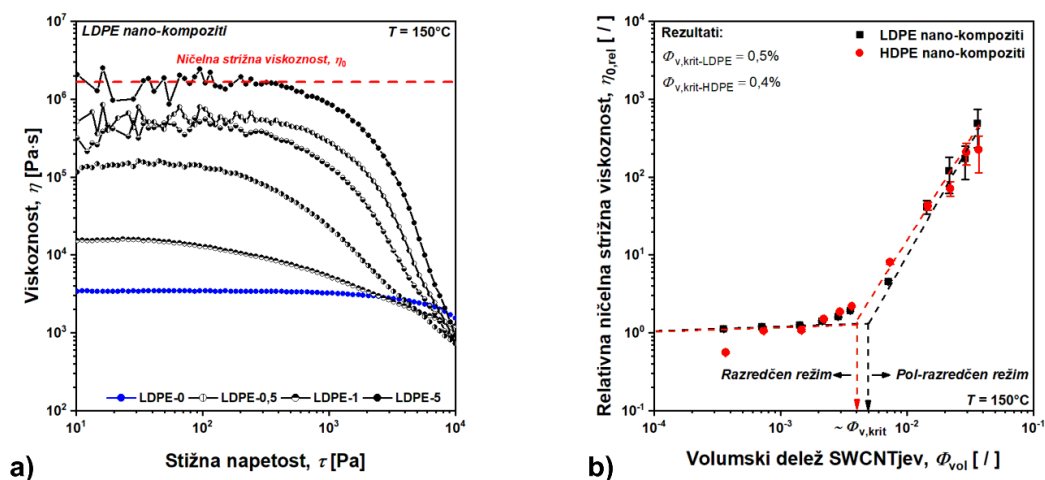
3.2 Nastanek SWCNT omrežja

3.2.1 Reološka analiza

Rezultat reološke tokovne analize predstavljajo tako-imenovane viskozne krivulje, t.j. viskoznost v odvisnosti strižne napetosti $\eta(\tau)$, ki smo jih določili na pripravljenih vzorcih LDPE in HDPE nano-kompozitov (na sliki 2a so kot primer prikazane viskozne krivulje LDPE nano-kompozitov). Na podlagi viskoznih krivulj lahko nastanek omrežja iz SWCNT snopov opazujemo z ničelno strižno viskoznostjo η_0 (označena z rdečo barvo na sliki 2a) oziroma z relativno ničelno strižno viskoznostjo $\eta_{0,\text{rel}}$, ki je opredeljena kot razmerje med ničelno strižno viskoznostjo nano-kompozita $\eta_{0,c}$ ter matričnega materiala $\eta_{0,m}$:

$$\eta_{0,\text{rel}} = \frac{\eta_{0,c}}{\eta_{0,m}} \quad (1)$$

$\eta_{0,\text{rel}}$, ki je bila določena za vse LDPE in HDPE nano-kompozite, je na sliki 2b prikazana v odvisnosti od volumskega deleža SWCNTjev Φ_v . Iz rezultatov sta opazna dva režima nastanka omrežja, to sta razredčen in pol-razredčen režim.



Slika 2: a) Viskozne krivulje LDPE nanokompozitov, ter b) analiza nastanka omrežja v LDPE in HDPE nano-kompozitih [2].

Režima nastanka omrežja ločimo s tako-imenovanim kritičnim volumskim deležem SWCNTjev $\Phi_{v,\text{krit}}$, ki opredeljuje geometrijski perkolacijski prag ter s tem nastanek SWCNT omrežja v matričnem materialu. Pod $\Phi_{v,\text{krit}}$ ni opaziti močnih interakcij med delci oziroma na povečanje $\eta_{0,\text{rel}}$ delujejo posamični stiki oziroma interakcije kratkega dosega. V tem režimu se snopi vedejo kot individualne, samostojne enote, ki bolj ali manj delujejo na matrični material. Nad $\Phi_{v,\text{krit}}$ pa se SWCNT snopi geometrijsko prepletajo in vzpostavijo naključno povezano omrežje. Ta "mezo-skopska superstruktura" izkazuje interakcije dolgega dosega, ki

močno spremenijo tokovno (reološko) vedenje materiala, kar se opazi s $700 \times$ povečanjem $\eta_{0,rel}$. Perkolacijski prag smo določili na sečišču dveh regresijskih krivulj (črtkana črta na sliki 2b). Na ta način je bil za LDPE nano-kompozite perkolacijski prag določen pri $\Phi_{v,krit-LDPE} = 0,5\%$ in za HDPE nano-kompozite pri $\Phi_{v,krit-HDPE} = 0,4\%$. Nekoliko nižji perkolacijski prag v HDPE nano-kompozitih je posledica višjega geometrijskega razmerja med dolžino in premerom snopa, ki geometrijsko preprečuje oziroma omejuje gibanje paličastih delcev ter s tem potencira nastanek omrežja [3], [5].

3.2.2 Vodilni mehanizmi nastanka SWCNT omrežja (Doi-Edwards teorija)

V osnovi teorija predlaga, da je prostorska konfiguracija paličastih delcev znotraj homogenega sistema vodena s strani rotacijske difuzije D_r , t.j. procesa ohranjanja oziroma vzdrževanja sistema delcev v ravnovesju [4],[5]. Na podlagi generalizirane Smoluchowski enačbe, ki obravnava hidrodinamiko problema in prikazuje vrtenje paličastih delcev okoli težišča, je D_r vodena s strani Brownovih sil ($\sim k_B T$) in hidro-dinamskega upora ali Stokesovega trenja ($\sim \zeta_r$), zapisano kot:

$$D_r = \frac{k_B T}{\zeta_r} = \frac{3k_B T (\ln(l/d) - \vartheta)}{\pi \eta_m l^3}, \quad (2)$$

kjer k_B predstavlja Boltzmanovo konstanto, T temperaturo, η_m ničelno strižno viskoznost medija, l dolžino in d premer palice podobnega delca ter ϑ popravek k ζ_r , če upoštevamo hidrodinamske interakcije med palicami. Analiza na osnovi aproksimacije točkovne sile na palico daje $\vartheta = 0,8$ [5], ki je bil uporabljen tudi pri nadaljnji analizi naše raziskave.

V *razredčenem režimu* lahko palice prosto rotirajo okoli težišča, ne da bi prišlo do interference s sosednjimi enotami. Tak režim lahko matematično formuliramo kot $\nu < 1/l^3$, kjer ν predstavlja število palic na enoto volumna l^3 . V tem režimu je torej rotacijska difuzija neodvisna od volumskega deleža polnila, torej $D_r \propto (\nu l^3)^0$, izražena kot:

$$D_r \equiv D_{r0}, \quad (3)$$

medtem ko je relativna ničelna strižna viskoznost $\eta_{0,rel}$ viskoznost pri šibkem gradientu hitrosti deformacije opredeljena kot:

$$\eta_0 = \eta_{m,0} + \frac{2\nu k_B T}{15 D_{r0}}, \quad (4)$$

ki se z volumskim deležem povečuje kot $\eta_{0,rel} - 1 \propto (\nu l^3)^1$.

V *pol-razredčenem režimu* je prosta rotacija palic onemogočena s sosednjimi delci. V tem režimu je rotacijska difuzivnost ovirana z interferencami sosednjih palic ter postane močno odvisna od njihovega volumskega deleža, torej $D_r \propto (\nu l^3)^{-2}$ in jo lahko izrazimo kot:

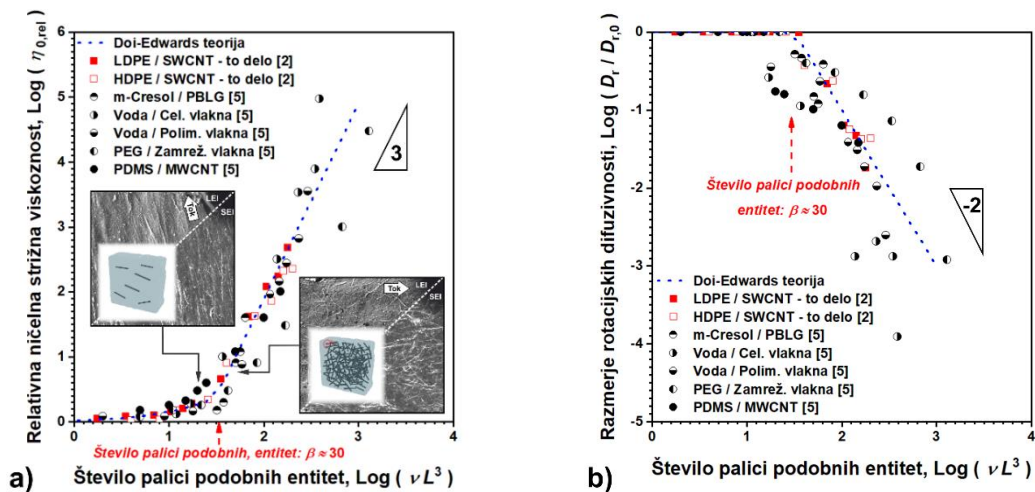
$$D_R = A D_{r0} (\nu l^3)^{-2}, \quad (5)$$

kjer A predstavlja brezdimenzijsko konstanto in opredeljuje sproščanje geometrijskih omejitev palic, ter je bila določena kot $A < 1000$ za toge palice in $A > 4000$ za fleksibilne, palicam podobne entitete (npr. fleksibilne makromolekule) [11], [43]. V tem primeru je $\eta_{0,rel}$ palicami zapolnjenega medija opredeljena kot:

$$\eta_{0,rel} = \frac{\nu k_B T}{10 \eta_m D_R}, \quad (6)$$

ki se z volumskim deležem povečuje kot $\eta_{0,rel} \propto (\nu l^3)^3$. Pokazano je bilo, da rotacijske interference postanejo signifikantne, ko dosežemo $\nu l^3 = \beta$, kjer β (oziroma $\Phi_{\nu,krit}$) predstavlja brezdimenzijsko konstanto oziroma število palic v volumnu l^3 , za katero je bilo numerično in eksperimentalno ugotovljeno, da zavzema vrednosti okoli $\beta \approx 30$ [11], [43].

Kot že omenjeno, CNTji med postopkom predelave oziroma izdelave nano-kompozitov običajno tvorijo/razpadejo na različne enote. V našem primeru so to SWCNT snopi, ki jih ne moremo nadalje porušiti oziroma erodirati, ne da bi pri tem uničili glavne komponente (razgradnja matričnega materiala, poškodbe površine SWCNTjev, itd.). Zato smo pri teoretičnem izračunu rotacijske difuzivnosti D_R ter relativne ničelne strižne viskoznosti $\eta_{0,rel}$ (v razredčen in pol-razredčen režim) uporabili srednji premer $\langle d \rangle$ in dolžino $\langle l \rangle$ SWCNT snopa, ki smo jih predhodno določili pri morfologiji SWCNT omrežja LDPE in HDPE nano-kompozitov. Glede na dobljene rezultate se teoretične napovedi lepo ujemajo z eksperimentalnimi podatki tokovne analize (slika 3), kot tudi SEM mikrografi, ki bolj slikovito prikažejo nastanek SWCNT omrežja.



Slika 3: Primerjava rezultatov a) ničelne relativne strižne viskoznosti in b) rotacijske difuzivnosti z drugimi raziskovalnimi deli v literaturi [2].

Očitno je, da so bili eksperimentalni rezultati skladni z Doi-Edwards teorijo (sledijo glavni krivulji, npr. $\beta \approx 30$, $\eta_{0,rel} - 1 \propto (\nu L^3)^1$, $\eta_{0,rel} \propto (\nu L^3)^3$, itd.) in tudi drugimi analitično-eksperimentalnimi študijami, predstavljenimi v literaturi [5]. Iz prikazanih rezultatov je torej razvidno, da se SWCNT snopi obnašajo kot toge, palicam podobne Brownove entitete tudi v visoko-viskozni sistemih, kakršen je bil obravnavan v tem delu. Poleg tega je smiselno sklepati, da je Brownovo gibanje tovrstnih delcev univerzalno in neodvisno od njihove narave in vrste, torej jih je možno aplicirati na ostale sorodne, palicam podobne, tako nizko- kot tudi visoko-viskozne sisteme, saj sledijo skupnim zakonom (glavni krivulji), ki so bili predstavljeni v Doi-Edwards teoriji.

4 Zaključki

Funkcionalne lastnosti CNT-polimernih nano-kompozitov so v glavnem odvisne od vzpostavljenega CNT omrežja ter njegove konfiguracije, kar je posledica osnovnih mehanizmov tekom njihove izdelave. Čeprav so bili mehanizmi tvorjenja mrež za različne vrste paličastih delcev teoretično in eksperimentalno potrjeni v sistemih z nizko viskoznostjo, je ostalo vprašanje, ali bi lahko enaka fizikalna načela, kot jih opredeljuje Doi-Edwards teorija veljala tudi za visoko viskozne CNT nanokompozite. V okviru raziskave smo tako teoretično in eksperimentalno ovrednotili mehanizme vzpostavitve CNT omrežja v polimerni talini, pri čemer je Doi-Edwards teorija (teorija reptacije paličastih sistemov) služila kot teoretična platforma pri razlagi mehanizmov, medtem ko smo s pomočjo plazemskega jedkanja in elektronske mikroskopije analizirali morfologijo omrežja ter geometrijo glavnih gradnikov. Z reološko analizo smo nastanek omrežja tudi eksperimentalno ovrednotili. Rezultati so pokazali, da je vzpostavljeno omrežje zgrajeno iz SWCNT snopov, ki se geometrijsko zapletejo pri kritičnem volumskem deležu $\Phi_{v,crit}$ (število palic: $\beta \approx 30$). Pod $\Phi_{v,crit}$ se snopi obnašajo kot posamezne enote in se lahko poravnajo v smeri toka. Nad $\Phi_{v,crit}$ vrtenje snopov omejujejo sosednje enote, kar vodi do naključne konfiguracije omrežja. Poleg nastanka omrežja teorija uspešno razloži vedenje snopov kot Brownovih enot, ki jih vodi termo- in hidro-dinamisko gnana difuzija. Zato je smiselno sklepati, da je Brownovo gibanje paličastih delcev univerzalno in neodvisno od njihove narave (sledijo skupnim zakonom, t.j. glavni krivulji), kar je bilo teoretično in eksperimentalno ovrednoteno v predstavljenem delu.

Zahvala

Avtorja se zahvalujeta dr. Alenki Vesel iz Inštituta Jožef Stefan za opravljene meritve elektronske mikroskopije. Raziskavo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru programa št. P2-0264.

Literatura

- [1] A. Oseli, A. Vesel, M. Mozetič, E. Žagar, M. Huskić, L. Slemenik Perše, *Nano-mesh superstructure in single-walled carbon nanotube/polyethylene nanocomposites, and its impact on rheological, thermal and mechanical properties*, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing 136, 105972, 2020.
- [2] A. Oseli, A. Vesel, E. Žagar, L. Slemenik Perše, *Mechanisms of Single-Walled Carbon Nanotube Network Formation and Its Configuration in Polymer-Based Nanocomposites*, Macromolecules, 54, 3334–3346, 2021.
- [3] T. Chatterjee, R. Krishnamoorti, *Rheology of polymer carbon nanotubes composites*, Soft Matter 9, 9515–9529, 2013.
- [4] M. Doi, S.F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, Oxford University Press, 1991.
- [5] P. Cassagnau, *Inverse Rheological Methods for the Determination of Polymer Structures, Diffusion of Small Molecules and Nanofiber Lengths*, International Polymer Processing, 35, 448–457, 2020.
- [6] I. Alig, P. Pötschke, D. Lellinger, T. Skipa, S. Pegel, G. R. Kasaliwal, T. Villmow, *Establishment, morphology and properties of carbon nanotube networks in polymer melts*, Polymer 53, 4–28, 2012.



O numerični MRE rešitvi za ustaljen prevod toplote z izključno konvektivnimi robnimi pogoji

Matjaž Ramšak¹ in Matjaž Hriberšek¹

On numerical BEM solution for steady state heat transfer using convective boundary conditions only

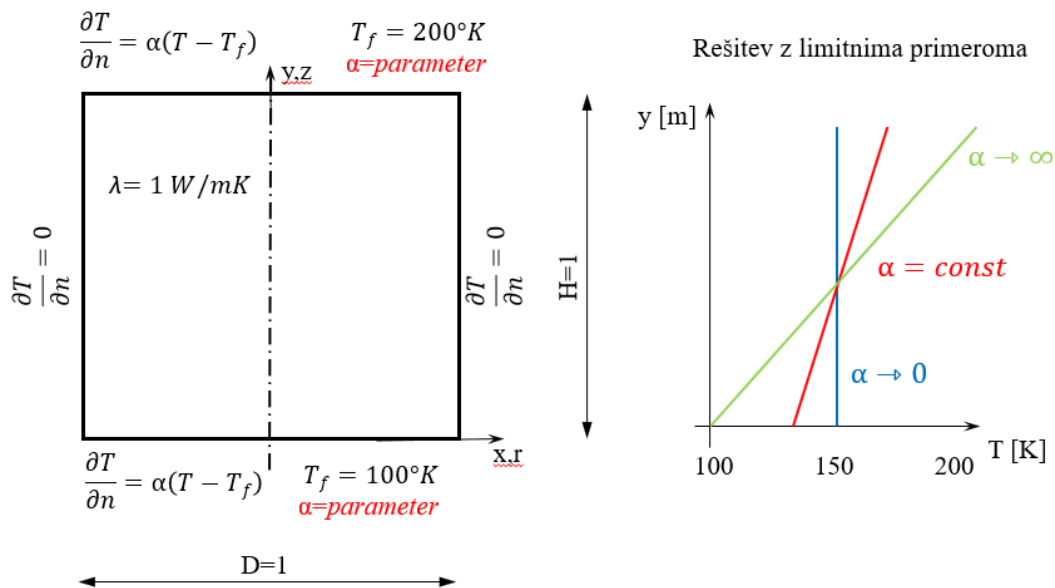
Povzetek. V prispevku predstavljamo enostaven numerični primer ustaljenega prevoda toplote s konvektivnimi robnimi pogoji. V primeru zelo male vrednosti koeficienta prenosa toplote (α) se približujemo neskončnemu številu rešitev konstantne temperature, ki ustrezajo adiabatnim robnim pogojem po celotnem robu računskega območja. Predstavljamo analizo natančnosti, stabilnosti in učinkovitosti metode robnih elementov (MRE) v odvisnosti od α in sicer v dveh koordinatnih sistemih v ravnini: kartezijskem in cilindričnem. V slednjem smo dobili presenetljivo velika odstopanja od analitičnih vrednosti za ne tako male vrednosti α . Analiziramo tudi vpliv predpogojevanja sistemske matrike, ki sicer ne izboljša natančnosti rešitve, močno pa pospeši konvergenco iterativnega reševanja rezultirajočega sistema enačb.

Abstract. A simple steady state heat transfer numerical problem with convective boundary conditions only is presented. In the case of a very small heat transfer coefficient (α) the mixed boundary conditions turn into adiabatic with the case becoming undetermined with infinite constant temperature solutions. The aim of the paper is to investigate the accuracy, stability and economy of the Boundary Element Method (BEM) as a function of the α value using two coordinate systems in planar geometry: cartesian and cylindrical. In the last one the obtained errors are surprisingly high using moderately small α values. The system matrix preconditioning is applied in order to improve the condition numbers. The accuracy is not improved, however with the applied preconditioning the convergency of the used iterative solver is significantly boosted.

1 Uvod

Splošno znano je, da ima nedoločeni integral neskončno rešitev. Pri računanju ustaljene rešitve prevoda toplote nastane identičen primer, če po celotnem robu računskega območja predpišemo izključno odvod temperature. Podobna situacija nastane v primeru predpisanih konvektivnih

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



Slika 1 : Geometrija in robni pogoji problema.

robni pogojev, če manjšamo vrednost koeficienta prenosa toplote $\alpha \rightarrow 0$, kot je prikazano na sliki 1. Rešitev je poljubna konstantna temperatura po celotnem območju rešitve. Opisan primer se lahko pojavi pri obravnavi inženirsko pomembnih problemov, kot je na primer sušenje farmacevtskih učinkovin v vijali. Namen prispevka je raziskati numerično rešitev primera z metodo robnih elementov (MRE) za dve formulaciji: ravninska (2D) in osnosimetrično (OS).

Pregled literature s ključnimi besedami MRE, mešani in Neumanovi robni pogoji je pokazal približno 20 člankov. Nobeden od njih ne ustreza popolnoma naši temi, omenimo le dva, ki imata podobno tematiko. S strogo matematičnega vidika je članek [1], ki obravnava Stokesovo enačbo v 2D in vrednost pogojenosti sistemske matrike. Predpisali so tudi Dirichletove robne pogoje. Članek [2] obravnava degenerativne skale, kjer se podobnost z našim prispevkom tudi konča.

Struktura prispevka je sledeča. Po uvodu sledi kratek opis MRE. Poudarek je na računskem primeru in analizi rezultatov z variacijo koeficienta prestopa toplote.

2 Vodilne enačbe in MRE

Rešujemo Laplaceovo enačbo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (1)$$

kjer je T temperatura oziroma poljubna skalarna funkcija. Robni pogoji so v splošnem lahko:

$$\begin{array}{lll} \text{Dirichletovi :} & T = \bar{T} & \text{na } \Gamma_1, \\ \text{Neumanovi :} & \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} & \text{na } \Gamma_2, \\ \text{Mešani oziroma konvektivni :} & -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_f) & \text{na } \Gamma_3, \end{array} \quad (2)$$

kjer smo z λ označili toplotno prevodnost, α koeficient prestopa toplote in T_f znano temperaturo obteka tekočine. Integralsko obliko dobimo z uporabo druge Greenove identitete

$$0 = -c(\xi)T(\xi) - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} u^* d\Gamma, \quad (3)$$

kjer je u^* 3D osnovna rešitev $u^* = \frac{1}{4\pi r}$ in Γ rob računskega območja. Osnosimetrična (OS) osnovna rešitev se izračuna z vpeljavo cilindričnega koordinatnega sistema in numerično integracijo 3D rešitve po kotu. Eliptična osnovna rešitev za 2D kartezijski sistem je $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{1}{r})$. Več podrobnosti je zapisano v našem članku [3], za potrebe tega zapišimo le končno diskretno obliko integralske enačbe

$$[H]\{T\} = [G]\left\{\frac{\partial T}{\partial n}\right\}, \quad (4)$$

kjer sta matriki H in G sestavljeni iz integralov osnovne rešitve in njenega odvoda. Uporabljen je mešana diskretizacija robnih elementov in tehnika podobmočij v limitni obliki, kjer integralsko enačbo zapišemo za vsako pravokotno ali trikotno podobmočje oziroma osnovno celico posebej, podobno kot pri metodi končnih elementov. Med njimi predpišemo kompatibilne robne pogoje, kar vodi v sistem z več enačbami kot je neznank. Na posameznih zunanjih robovih računskega območja upoštevamo robne pogoje

$$\begin{bmatrix} [-G]^{\Gamma_1} \\ [H]^{\Gamma_2} \\ [H + \frac{\alpha}{\lambda}G]^{\Gamma_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \left\{\frac{\partial T}{\partial n}\right\}^{\Gamma_1} \\ \{T\}^{\Gamma_2} \\ \{T\}^{\Gamma_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[H]\{\bar{T}\}^{\Gamma_1} \\ [G]\left\{\frac{\partial T}{\partial n}\right\}^{\Gamma_2} \\ \left[\frac{\alpha}{\lambda}G\right]\{T_f\}^{\Gamma_3} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

oziroma krajše

$$[A]\{x\} = \{b\}, \quad (6)$$

kjer je A pravokotna in zelo prazna sistemska matrika, x vektor neznank in b vektor znanih vrednosti. V pričujočem numeričnem primeru imamo samo mešane robne pogoje na Γ_3 , ostala dva sta zapisana zgolj zaradi nazornosti.

Če v matrični enačbi (5) za mešani robni pogoj izračunamo obe limitni vrednosti za α opazimo:

- če gre $\alpha \rightarrow 0$ dobimo Neumanov adiabatni robni pogoj $[H]\{T\} = \{0\}$ z rešitvijo $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ in/ali trivialno rešitev $\{T\} = \{0\}$,
- če gre $\alpha \rightarrow \infty$ dobimo Diricletov robni pogoj $\{T\} = \{T_f\}$ ki je hkrati tudi rešitev,

kar je povsem naravno in skladno s pričakovanji. V vsakem primeru, težave smemo pričakovati pri prvem primeru $\alpha \rightarrow 0$.

2.1 Predpogojevanje sistemske matrike

Sistemska matrika (6) ima v našem primeru več enačb kot neznank in je zelo prazna in blokovno strukturirana. Celoten sistem linearnih enačb rešimo z iterativnim reševanjem in uporabo metode najmanjših kvadratov. Metoda temelji na postopku bidiagonalizacije Golub in Kahan, [4]. Razvili smo tudi diagonalni predpogojevalec, [5], ki temelji na reševanju modificiranega sistema

$$[Q][A]\{x\} = [Q]\{b\}. \quad (7)$$

Bližje kot je matrika $[Q]$ inverzni matriki $[A]$ boljša je konvergenca uporabljenih iterativnih metod za reševanje sistema linearnih enačb, [5], [6].

Kasneje bomo prikazali oceno pogojenosti matrike $\kappa(A)$, ki je rezultat postopka rešitve [4]. Pogojenost matrike je definirana kot razmerje med relativno napako vektorja x v primerjavi z vektorjem b in je lastnost matrike A ,

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (8)$$

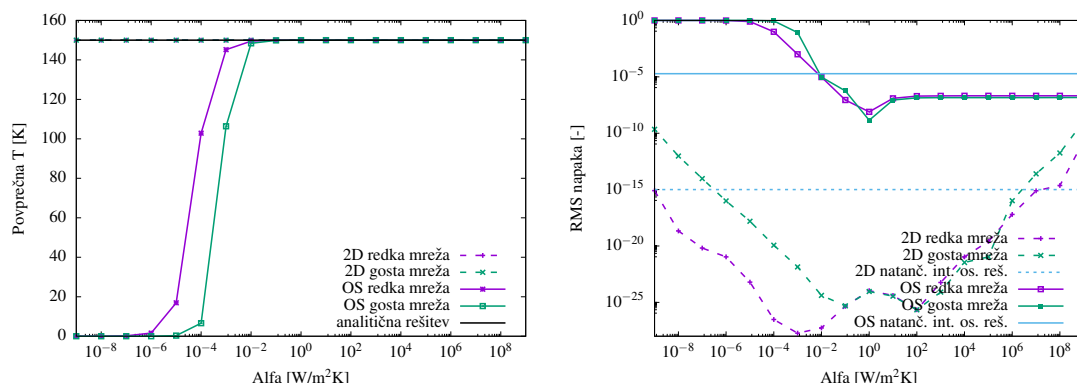
Če je pogojenost matrike velika številka, potem zelo mala sprememba b -ja povzroči velike spremembe rešitve x .

3 Rezultati in diskusija

Definicija numeričnega primera je v celoti podana na sliki 1. V vseh analizah spreminjamo koeficient prenosa toplote od 10^{-9} do $10^9 \text{ W/m}^2\text{K}$. Primerjamo rezultate 2D kartezične (2D) in osnosimetrične (OS) rešitve identičnega primera, pri čemer 2D geometrija predstavlja vzdolžni presek valja.

3.1 Natančnost rezultatov

Natančnost rezultatov izračunamo z RMS vsoto po vseh vozliščih kot razliko analitične in numerične vrednosti temperature, ki jo normiramo z vektorjem analitičnih vrednosti. Rezultati RMS so prikazani na desni strani slike 2. Ne levi strani smo prikazali tudi izračunane in analitične povprečne temperature. Za 2D formulacijo so očitno rezultati odlični, saj je koren povprečne kvadratne napake (RMS) napaka velikostnega razreda natančnosti integralov ravninske osnovne rešitve je 10^{-15} . Slednja vrednost je približno enaka dvojni natančnosti, v kateri računamo vse primere. Žal pri OS primeru ni tako, saj že pri $\alpha = 10^{-3} \text{ W/m}^2\text{K}$ prične povprečna temperatura odstopati od analitične vrednosti. Pri $\alpha = 10^{-4} \text{ W/m}^2\text{K}$ se izračunana povprečna temperatura zmanjša celo pod minimalno predpisano temperaturo $T_f = 100 \text{ K}$ in se kasneje približuje trivialni rešitvi $Ax = 0$, torej vrednosti 0. RMS napaka se temu ustrezno približuje vrednosti 1. Velja omeniti, da je za $\alpha > 1 \text{ W/m}^2\text{K}$ RMS napaka podobna natančnosti OS integralov vrednosti 10^{-5} analogno 2D rešitvi. Vzrok slabše natančnosti OS integralov se skriva v dvakratni numerični integraciji osnovne rešitve; najprej po kotu 2π nato pa še po ostalih dveh cilindričnih koordinatah r in z . Morda presenetljiva je tudi primerjava redke ($10 \cdot 10$) in goste ($100 \cdot 100$) mreže pravokotnih podobmočij, saj je pri obeh formulacijah natančnost malenkost večja pri redki mreži. Slednje je morda posledica večje pogojenosti matrike pri gostejši mreži, kar je tema naslednjega poglavja.



Slika 2 : Natančnost povprečne temperature in RMS napaka v odvisnosti od koeficienta prestopa toplote.

3.2 Norme

Na sliki 3 smo prikazali norme vseh primerov za sistem $Ax = b$ v odvisnosti od α . Norma b ima v obeh formulacijah enak potek in podobno velikost, kar je enostavno razumljivo, saj je b neposredno premo sorazmeren α za Γ_3 v enačbi (5). Prav tako je razumljivo, da se norma A ustali za $\alpha < 1$, saj postaja z zmanjševanjem α prispevek člena α zanemarljiv v primerjavi s členi H v enačbi (5). In to je skupno za obe formulaciji. Ni pa skupna norma x , saj so OS rešitve narobe za male vrednosti α , kot smo omenili v prejšnjem poglavju.

3.3 Pogojenost systemske matrike

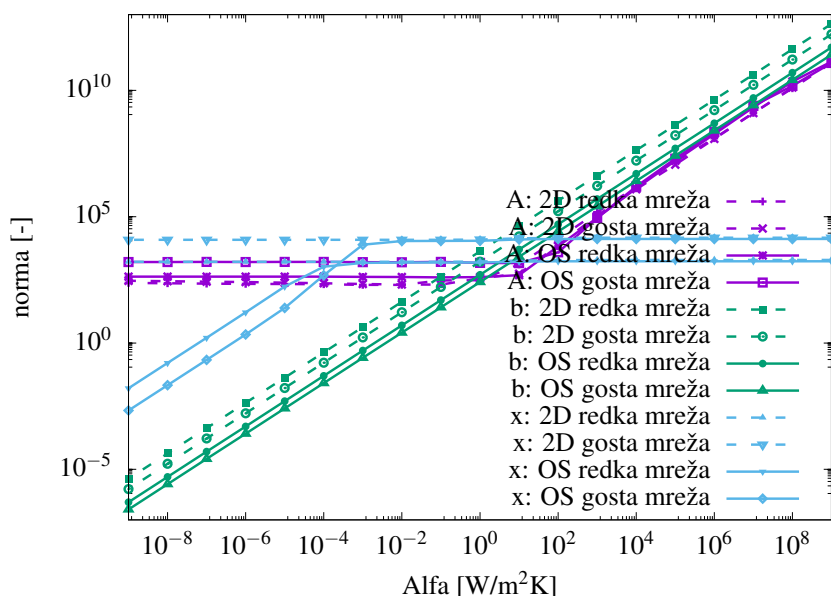
Pogojenost systemske matrike A v odvisnosti od α in brez uporabe prepogojenja smo prikazali z vijolično barvo na sliki 4. Za velike vrednosti α je tudi pogojenost matrike velika, praktično premosorazmerna z vrednostjo α . Primerjava obeh formulacij daje večjo pogojenost OS za približno 2 dekadi.

Z manjšanjem vrednosti $\alpha < 1$ dobimo različno pogojenost med formulacijama. Za 2D se pogojenost zopet večja, popolnoma simetrično na velike vrednosti $\alpha > 1$. Pri OS se tudi večja dokler se ne ustali pri vrednosti približno 10⁸ pri $\alpha = 10^{-5}$, kar ustreza natančnosti integralov OS osnovne rešitve.

Primerjava goste in redke mreže, polna in črtkana črta na sliki 4, kaže večjo vrednost pogojenosti za gostejšo mrežo in sicer za 2 dekadi, kar se pri reševanju sistema enačb odraža v dejstvu, da je večje sisteme enačb težje rešiti oz. potrebuje iterativno reševanje večje število iteracij za doseganje željene natančnosti rešitve.

3.4 Število potrebnih iteracij postopka reševanja matrike

Slednje normaliziramo z številom neznank in prikažemo na desni strani slike 4 z vijolično barvo. V obeh formulacijah ugotovimo, da je število iteracij na eno neznanko približno konstantno znotraj ene dekade. Za 2D so te vrednosti 1 za redko mrežo in 0.1 za gsto mrežo. Izjema je OS pri velikih $\alpha > 100$, kjer se število iteracij poveča vse do 100 na neznanko.

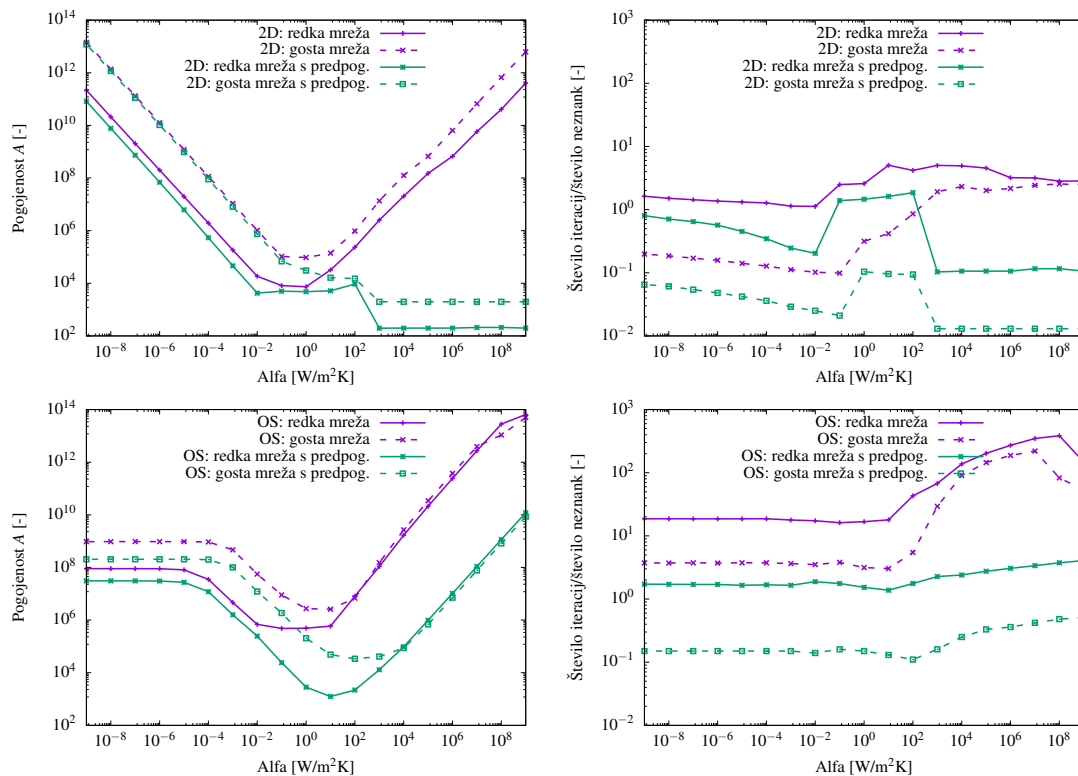


Slika 3 : Norma sistemske matrike A in vektorja na desni strani b ter rešitve x .

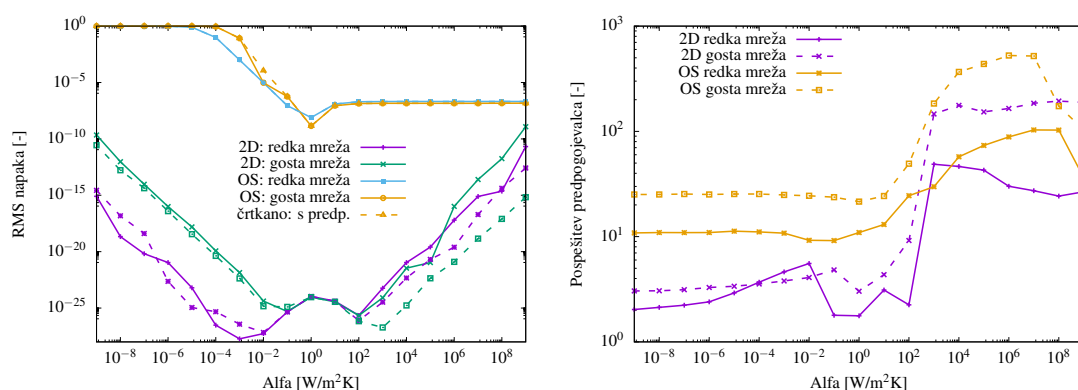
3.5 Predpogojevanje sistemske matrike

Vpliv predpogojevanja smo prikazali na slikah 4 in 5. Očitno predpogojevanje matrike ne vpliva bistveno na natančnost rešitve ampak le na ekonomičnost, kar se kaže v bistveno manjšem številu potrebnih iteracij. Ekonomičnost oz. pospešitev izračunamo kot razmerje potrebnega števila iteracij brez in s predpogojevanjem. Kot ime samo pove, predpogojevanje bistveno zmanjša pogojenost matrike A , v povprečju za 2 dekadi v naših primerih. Najbolj uspešno je v 2D primeru za velike α , kjer se pogojenost zmanjša iz 10^{12} na 10^3 . Žal se ta sprememba odraža le v 10 krat manjšem številu iteracij za redko in 100 kratnem za gosto mrežo. Tudi v OS formulaciji je predpogojevanje bolj učinkovito za $\alpha > 1$ a žal ne tako kot 2D, saj se pogojenost zmanjša iz 10^{14} na 10^{10} . Na srečo pa ostaja 10 oz. 100 kratna pospešitev približno enaka 2D. Razumljivo je, da je pospešitev bistveno večja za gosto mrežo, slika 5, kjer v najboljšem primeru dosežemo več stokratno pospešitev.

Žal ostaja prisoten delni problem neučinkovitosti predpogojevanja, ki se odraža v nenadnem povečanju števila potrebnih iteracij v območju $10^{-2} < \alpha < 10^2$ v primeru 2D formulacije, slika 4 desno zgoraj. Slednje je skupno redki in gosti mreži. Predvidevamo, da se vzrok skriva v očitno nezveznemu poteku pogojenosti A prikazani na sosednji sliki levo. Za območje $10^{-2} < \alpha < 10^2$ je sicer značilno, da se v tem območju najbolj spreminja razmerje med velikostjo členov v sistemske matriki, in sicer med prispevki matrike $[\frac{\alpha}{\lambda}G]$.



Slika 4 : Pogojenost sistemske matrike in normalizirano število potrebnih iteracij postopka reševanja s številom neznank za 2D primer zgoraj, spodaj primer OS.



Slika 5 : Natančnost rešitve in pospešitev reševanja z (prekinjena črta) in brez predpogojevalca (polna črta). Pospešitev izračunamo kot razmerje števila potrebnih iteracij postopka reševanja sistema enačb brez in s predpogojevanjem.

4 Zaključki

V prispevku smo prikazali analizo MRE numerične sheme za primer ustaljenega prevoda toplote z izključno konvektivnimi robnimi pogoji. Natančnost ravninske formulacije je boljša od 10^{-10} in v mejah natančnosti integralov osnovne rešitve v celotnem testiranem območju $10^{-9} < \alpha < 10^9$. V cilindričnih koordinatah je natančnost bistveno manjša in znaša reda velikosti 10^{-5} , kar je tudi v mejah natančnosti integralov ustrezne osnovne rešitve za velike vrednosti α . Problem predstavljajo majhne vrednosti za $\alpha < 10^{-3}$, kjer uporaba predpogojevanja sicer izboljša konvergenco iterativnega postopka iskanja rešitve, medtem ko se kvaliteta rešitve tudi v tem primeru bistveno ne spremeni.

Literatura

- [1] W. Dijkstra, R. Mattheij, Condition number of the bem matrix arising from the stokes equations in 2d, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32 (9) (2008) 736–746.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095579970700183X>
- [2] A. Corfdir, G. Bonnet, Degenerate scale for 2d laplace equation with mixed boundary condition and comparison with other conditions on the boundary, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 88 (2018) 14–25.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799717304411>
- [3] M. Ramšak, J. Ravnik, M. Zadavec, M. Hriberšek, J. Iljaž, Freeze-drying modeling of vial using bem, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 77 (2017) 145–156.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799716304301>
- [4] C. Paige, Saunders, Lsq: Sparse linear equations and least-squares problems, *ACM Transactions on Mathematical Software* 8 (1982) 195–209.
- [5] M. Ramšak, L. Škerget, M. Hriberšek, Z. Žunič, A multidomain boundary element method for unsteady laminar flow using stream function vorticity equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29 (1) (2005) 1 – 14.
- [6] M. Hriberšek, L. Škerget, Fast boundary-domain integral algorithm for the computation of incompressible fluid flow problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 31 (1999) 891–907.



Hitrostno-tlačna formulacija metode temeljnih rešitev za Stokesov tok

Zlatko Rek¹ in Božidar Šarler¹

Method of fundamental solutions for Stokes flow by the velocity-pressure formulation

Povzetek. Za reševanje enačb Stokesovega toka je bila izpeljana hitrostno-tlačna formulacija metode temeljnih rešitev. Metoda je enostavna in zelo natančna. Uspešnost tega pristopa je prikazana na primeru 2D Poiseuillovega toka in primeru toka v 2D kanalu s T-razcepom. Primerjava rezultatov izračuna s predstavljeno formulacijo in analitično rešitvijo v prvem zgledu, oz. referenčno numerično rešitvijo v drugem zgledu, pokaže uspešnost metode za reševanje problemov Stokesovega toka, ko je znan tlak na robu računskega območja.

Abstract. The velocity-pressure formulation of the method of fundamental solutions was derived to solve the Stokes flow equations. The method is simple and very accurate. The success of this approach is shown in the case of 2D Poiseuille flow and the case of flow in 2D channel with T-junction. Comparison of the calculation results with the presented formulation and analytical solution in the first example or reference numerical solution in the second example, shows the success of the method for solving Stokes flow problems when the pressure at the boundary of the computational domain is known.

1 Uvod

Stokesov tok predstavlja ustaljeni tok tekočine, kjer ni volumske sile, vztrajnostna sila pa je zanemarljiva v primerjavi z viskozno silo [1]. To se zgodi v primeru: a) zelo počasnega toka ("creeping flow"), b) ko je karakteristična dolžina zelo majhna (mikrofluidni tok) in c) ko je koeficient dinamične viskoznosti zelo velik (npr. med). Enačbe, ki opišejo takšen tok, predstavljajo difuzijski del stacionarnih Navier-Stokesovih enačb. Te enačbe lahko rešujemo z različnimi numeričnimi tehnikami, kot so: domenske diskretizacijske metode (metoda končnih razlik [2], metoda končnih elementov [3], metoda kontrolnih volumnov [4]), robne diskretizacijske metode [5] in brez mrežne metode (metoda radialnih baznih funkcij [6], metoda temeljnih rešitev [7], metoda regulariziranih izvorov [8]).

¹Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani

V prispevku uporabljamo metodo temeljnih rešitev (MFS). Poglavitna prednost te metode je, da ne potrebujemo računske mreže in ni numerične integracije ali vrednotenja singularnih funkcij. Je resnično brez mrežna metoda. MFS se je izkazala kot zelo uspešna metoda, ko je poznana temeljna rešitev vodilne enačbe, kot pri enačbah: Laplacova, Helmholtzova, Poissonova, Stokesova in biharmonična. Preprost in zelo natančen direktni izračun odvodov spremenljivk je še ena od prednosti MFS.

Standardna MFS formulacija reševanja Stokesovih enačb je hitrostna, pri kateri znana hitrost na robu območja določa vrednosti koeficientov, s katerimi izračunamo hitrost in tlak v območju. Ker v sistemu enačb ni informacije o tlaku, je absolutna vrednost poljubna, pri kompleksni geometriji domene je tipično velikostnega reda 10^6 Pa in več, medtem ko je gradient tlaka pravilen. Obstajajo primeri [9], ko je znan tlak na delu roba, npr. izmerjene vrednosti pri eksperimentu. Za reševanje takšnih problemov lahko uporabimo tlačno-tokovno ("pressure-stream function") MFS formulacijo. V tem prispevku pa smo izpeljali hitrostno-tlačno formulacijo, ki je predstavljena v nadaljevanju.

2 Metoda temeljnih rešitev za Stokesov tok

Iščemo rešitev Stokesove enačbe v 2D območju Ω , ki je omejeno z robom $\Gamma = \Gamma^v \cup \Gamma^P$, pri čemer je na delu Γ^v predpisana hitrost $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ in na delu Γ^P tlak P .

Linearizirane Navier-Stokesove enačbe predstavljajo Stokesov tok:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

kjer je μ koeficient dinamične viskoznosti.

Za rešitev zgornjega sistema linearnih parcialnih diferencialnih enačb drugega reda potrebujemo robne pogoje. V našem primeru so ti Dirichletovega tipa:

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{p} \in \Gamma^v, \quad (3)$$

$$P(\mathbf{p}) = \bar{P}, v_t = 0, \mathbf{p} \in \Gamma^P, \quad (4)$$

kjer je $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ kolokacijska (robna) točka, $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_x, \bar{v}_y)$ znana hitrost, \bar{P} znani tlak in v_t tangentna komponenta hitrosti.

Po metodi temeljnih rešitev sistem (1)-(2) rešimo z nastavkom:

$$v_x(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^x V_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^y V_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j), \quad (5)$$

$$v_y(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^x V_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^y V_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j), \quad (6)$$

$$P(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^x P_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^y P_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}_j), \quad (7)$$

kjer je N število kolokacijskih točk, α^x in α^y sta vektorja neznanih koeficientov oz. intenzitete izvorov. Globalne aproksimacijske funkcije (temeljne rešitve 2D Stokesovih enačb), t. i. »Stokeslets« [10] so:

$$V_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(-2 \ln r(\mathbf{p}, \mathbf{s}) + \frac{2(p_x - s_x)^2}{r^2(\mathbf{p}, \mathbf{s})} - 3 \right), \quad (8)$$

$$V_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(-2 \ln r(\mathbf{p}, \mathbf{s}) + \frac{2(p_y - s_y)^2}{r^2(\mathbf{p}, \mathbf{s})} - 3 \right), \quad (9)$$

$$V_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = V_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{2(p_x - s_x)(p_y - s_y)}{r^2(\mathbf{p}, \mathbf{s})}, \quad (10)$$

$$P_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \frac{p_x - s_x}{r^2(\mathbf{p}, \mathbf{s})}, \quad (11)$$

$$P_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \frac{p_y - s_y}{r^2(\mathbf{p}, \mathbf{s})}, \quad (12)$$

kjer je $r = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$ razdalja med kolokacijsko točko \mathbf{p} in izvorno točko \mathbf{s} . Izvorne točke so od kolokacijskih točk oddaljene za razdaljo $d(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ v smeri normale na rob in predstavljajo t. i. umetni rob Γ' . Optimalna vrednost $d(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ je 6,5 kratnik razdalje med dvema sosednjima kolokacijskima točkama.

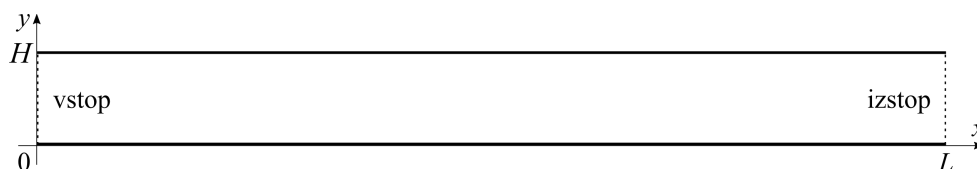
Enačbi (5) in (6) in zapišemo za vse točke na robu Γ^v . Za točke na robu Γ^p uporabimo enačbi (6) in (7), če je tok v x smeri, oz. enačbi (5) in (7), če je tok v y smeri. Ko upoštevamo še robne pogoje iz enačb (3) in (4), dobimo sistem linearnih enačb za neznane koeficiente α^x in α^y

$$\begin{bmatrix} V_{xx}^* & V_{xy}^* \\ V_{yx}^* & V_{yy}^* \\ P_x^* & P_y^* \\ V_{yx}^* & V_{yy}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^x \\ \alpha^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{P} \\ \bar{v}_y \end{Bmatrix} \quad \text{oz.} \quad \begin{bmatrix} V_{xx}^* & V_{xy}^* \\ V_{yx}^* & V_{yy}^* \\ P_x^* & P_y^* \\ V_{xx}^* & V_{xy}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^x \\ \alpha^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{P} \\ \bar{v}_x \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Ko sistem linearnih enačb (13) rešimo, lahko v poljubni točki \mathbf{p} območja Ω (vključno z robom Γ) eksplicitno iz enačb (5) in (6) izračunamo hitrost in iz enačbe (7) tlak. Prav tako lahko zelo enostavno izračunamo odvode hitrosti in tlaka z odvajanjem enačb (5)-(7), glej [11].

3 Primer 1 – Poiseuillov tok

Kot prvi zgled preverimo hitrostno-tlačno formulacijo MFS za primer popolnoma razvitega Stokesovega toka v ravnem 2D kanalu (slika 1), dolžine L , višine H in maksimalno hitrostjo U_0 .



Slika 1: Geometrija 2D kanala.

Za ta primer obstaja analitična rešitev sistema enačb (1)-(2)

$$v_x(y) = 4U_0 \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H}\right), 0 \leq y \leq H,$$

$$P(x) = \frac{8\mu U_0 L}{H^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right), 0 \leq x \leq L. \quad (14)$$

Podatki so: $L=4\text{ m}$, $H=0.4\text{ m}$, $\mu=1\text{ Pa}\cdot\text{s}$, $U_0=1.5\text{ m/s}$, $\mathbf{v}(x, 0)=0$, $\mathbf{v}(x, H)=0$, $v_y(0, y)=0$, $v_y(L, y)=0$, $P(0, y)=300\text{ Pa}$, $P(L, y)=0$. Po robu računkega območja smo z enakomernim razmikom Δ razporedili N kolokacijskih točk. Uporabili smo tri različne gostote robnih točk. Hitrost in tlak smo v vseh treh primerih izračunali v $K=1000$ notranjih točkah, ki so bile razporejene v mrežo 50×20 . Rezultate MFS izračuna smo primerjali z analitično rešitvijo. V tabeli 1 je prikazana napaka "Root Mean Square Error" [12]

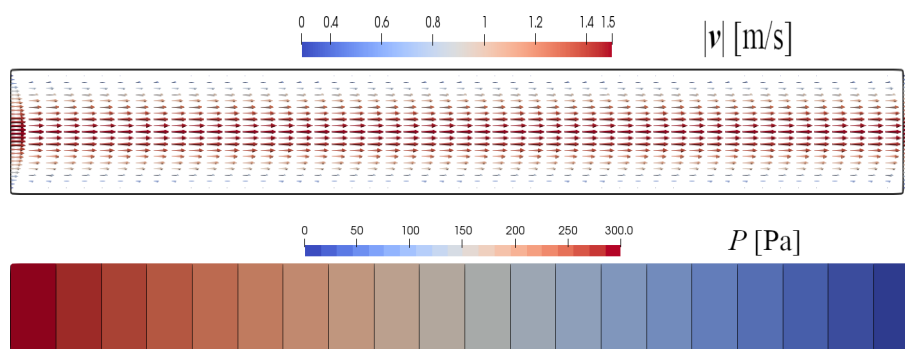
$$\text{RMSE}(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\varphi_i^{\text{an}} - \varphi_i^{\text{mfs}})^2}. \quad (15)$$

Navedena so tudi števila pogojenosti sistemske matrike [13]. Vidimo, da je tudi pri najmanjšem številu kolokacijskih točk napaka zelo majhna, četudi je število pogojenosti matrike veliko, kar je sicer značilnost metode.

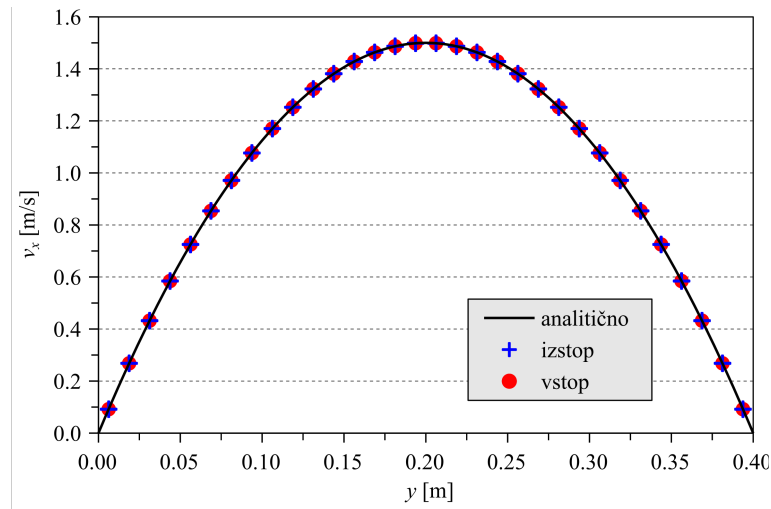
Tabela 1: Število pogojenosti in RMSE napaka.

N	Δ [m]	Cond	Cond _{eff}	RMSE(\mathbf{v})	RMSE(P)
352	0,025	$2,75 \times 10^{12}$	$1,84 \times 10^8$	$3,5 \times 10^{-6}$	$4,1 \times 10^{-4}$
704	0,0125	$1,38 \times 10^{13}$	$1,01 \times 10^9$	$8,1 \times 10^{-7}$	$6,2 \times 10^{-5}$
1408	0,00625	$4,46 \times 10^{13}$	$5,98 \times 10^9$	$1,1 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-5}$

Slika 2 kaže hitrostno in tlačno polje v kanalu. Na sliki 3 je prikazana primerjava izračunanih profilov hitrosti $v_x(y)$ na vstopu in izstopu z analitično rešitvijo. Vidimo, da je ujemanje odlično, saj točke ležijo na parabolični krivulji, podani z enačbo 14.



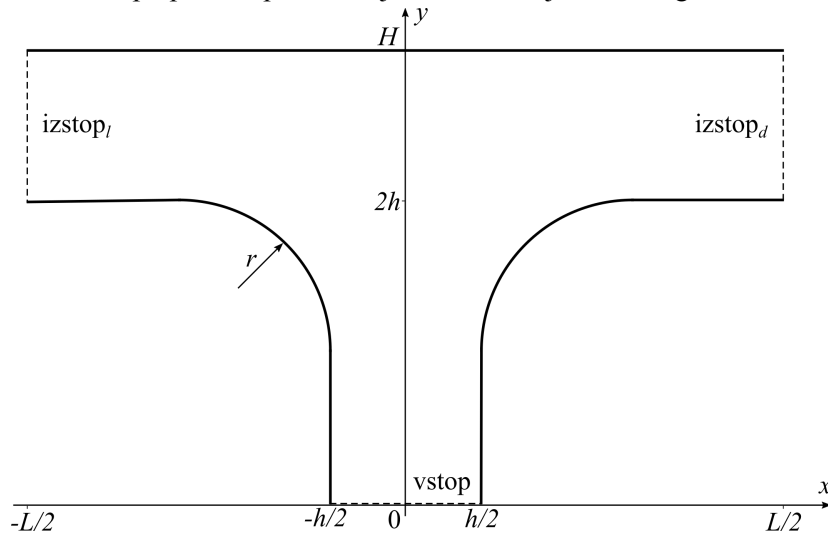
Slika 2: Hitrostno in tlačno polje v 2D kanalu.



Slika 3: Vstopni in izstopni hitrostni profil v 2D kanalu.

4 Primer 2 – T-razcep

Kot drugi zgled obravnavamo Stokesov tok v kanalu, ki se razcepi v obliki črke T. Ta primer ni analitično rešljiv, zato za preverjanje MFS izračuna uporabimo referenčno rešitev po metodi kontrolnih volumnov (Ansys Fluent) z velikostjo celic $\Delta_c=0,025$ m. Računsko območje predstavlja vertikalni 2D kanal širine h , ki se razcepi levo in desno v kanala višine h . Med vertikalnim in horizontalnima krakoma je zaokrožitev z radijem r . Dimenziji domene v x in y smeri sta L in H , slika 4. Na vstopu je predpisan popolnoma razvit hitrostni profil, na levem in desnem izstopu pa tlak, pri čemer je levi tlak višji od desnega.



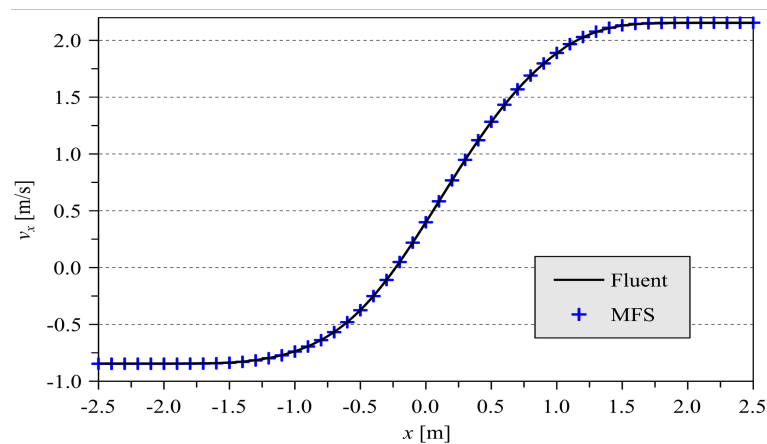
Slika 4: Geometrija T-razcepa.

Podatki so: $h=1$ m, $r=1$ m, $L=5$ m, $H=3$ m, $\mu=1$ Pa·s, $v_y(x, 0)=U_0(1-4x^2)$, $U_0=3$ m/s, $v_x(x, 0)=0$, $P(-L/2, y)=20$ Pa, $v_y(-L/2, y)=0$, $P(L/2, y)=0$, $v_y(L/2, y)=0$. Po robu računskega območja smo z enakomernim razmikom $\Delta=0,05$ m razporedili $N=304$

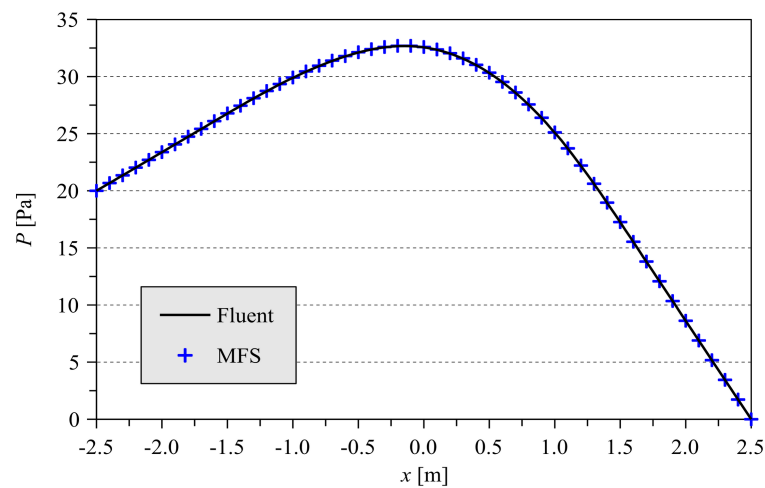
kolokacijskih točk. Pri predpisanih robnih pogojih je referenčna rešitev za povprečni tlak na vstopu $\bar{P}_{\text{vstop}}=72,38$ Pa in MFS rešitev $\bar{P}_{\text{vstop}}=72,96$ Pa. Razlika je 0,8 %.

Na slikah 5 in 6 je prikazana primerjava profilov hitrosti $v_x(x)$ in tlaka $P(x)$ z referenčno Fluent rešitvijo vzdolž horizontale na višini $y=2,5$ m. Ujemanje je zelo dobro.

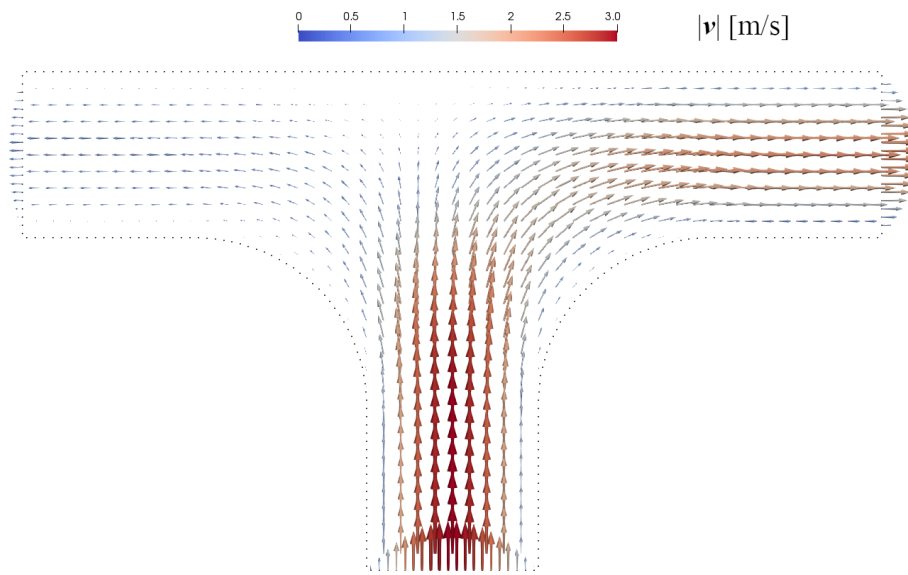
Sliki 7 in 8 kažeta hitrostno in tlačno polje. Zaradi razlike tlakov na izstopih hitrostno polje ni simetrično. Pretok na levi strani je manjši kot na desni. Zgled kaže, kako lahko z nastavitvijo izstopnih tlakov reguliramo pretok skozi posamezno vejo razcepa. Primer lahko enostavno razširimo na večje število razvejitev kanala.



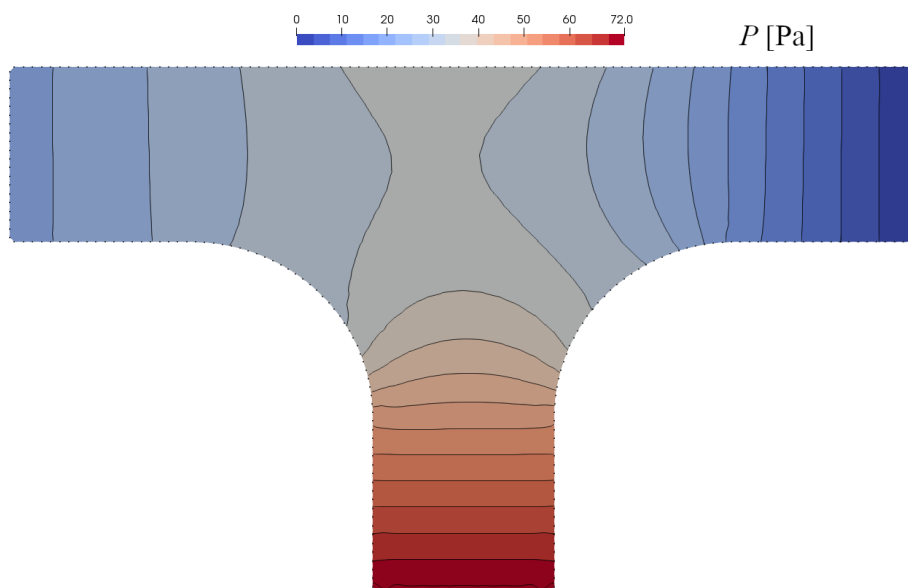
Slika 5: T-razcep – horizontalni profil hitrosti na višini $y = 2,5$ m.



Slika 6: T-razcep – horizontalni profil tlaka na višini $y = 2,5$ m.



Slika 7: T-razcep – hitrostno polje (· so kolokacijske točke).



Slika 8: T-razcep – tlačno polje (· so kolokacijske točke).

5 Zaključki

Za reševanje enačb Stokesovega toka smo uporabili hitrostno-tlačno formulacijo metode temeljnih rešitev. Kot zgled uporabe tega pristopa smo obravnavali Poiseuillov tok v 2D kanalu in tok v 2D kanalu s T-razcepom. Primerjava MFS izračuna z analitično oz. referenčno numerično rešitvijo pokaže, da je predstavljena formulacija uspešna pri reševanju problemov Stokesovega toka s tlačnimi robnimi pogoji.

Velja omeniti, da je predstavljena metoda enostavno razširljiva na 2D osnosimetrično in 3D geometrijo, le ustrezno temeljno rešitev je potrebno uporabiti. Tudi računsko je metoda zelo učinkovita. Za rešitev enačb za največjo gostoto kolokacijskih točk iz tabele 1 in izračun v notranjih točkah je bilo potrebnih le 1,25 s na osebem računalniku s šest jedrnim procesorjem Intel® Xeon® CPU E5-2620 v3 @ 2,40 GHz.

Zahvala: Avtorja se zahvaljujeva podpori DESY, Hamburg, Nemčija v okviru projekta “Innovative Methods for the Imaging with the use of X-ray Free Electron Laser (XFEL) and Synchrotron Sources” ter Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS) v okviru projekta J2-1718 Napredno brez mrežno modeliranje in simulacija večfaznih sistemov in programa P2-0162 Tranzientni dvofazni tokovi.

Literatura

- [1] W. Kaufmann, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [2] D.A. Anderson, J.C. Tannehill, R.H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
- [3] O. Zienkiewicz, R. Taylor, J.Z. Zhu, *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals: Seventh Edition*, Elsevier, 2013.
- [4] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [5] P.K. Banerjee, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill College, 1994.
- [6] B. Šarler, R. Vertnik, *Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems*, *Comput. Math. with Appl.* (2006).
- [7] C. Chen, A. Karageorghis, Y.-S. Smyrlis, *The method of fundamental solutions - a meshless method*, 2008.
- [8] E. Sincich, B. Šarler, *Non-singular method of fundamental solutions based on Laplace decomposition for 2D stokes flow problems*, *C. - Comput. Model. Eng. Sci.* 99 (2014) 393–415.
- [9] S. Bertoluzza, V. Chabannes, C. Prud'homme, M. Szopos, *Boundary conditions involving pressure for the Stokes problem and applications in computational hemodynamics*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 322 (2017) 58–80.
- [10] C.C. Tsai, D.L. Young, D.C. Lo, T.K. Wong, *Method of Fundamental Solutions for Three-Dimensional Stokes Flow in Exterior Field*, *J. Eng. Mech.* 132 (2006) 317–326.
- [11] Z. Rek, B. Šarler, *The method of fundamental solutions for the Stokes flow with the sub-domain technique*, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 128 (2021) 80–89.
- [12] M. Despotovic, V. Nedic, D. Despotovic, S. Cvetanovic, *Evaluation of empirical models for predicting monthly mean horizontal diffuse solar radiation*, *Renew. Sustain. Energy Rev.* 56 (2016) 246–260.
- [13] H.T. Huang, Z.C. Li, *Effective condition number and superconvergence of the Trefftz method coupled with high order FEM for singularity problems*, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 30 (2006) 270–283.



Numerična določitev karakteristike vzgona in upora superelipsoidnih delcev

Mitja Štrakl¹, Matjaž Hriberšek¹ in Jure Ravnik¹

Numerical prediction of drag and lift characteristics for superellipsoidal particles

Povzetek. Predstavljamo numerični model za napoved sile upora in vzgona na superelipsoidnih delcih v Stokesovem tokovnem režimu. Model, ki temelji na numeričnem paketu OpenFOAM, zajema tudi opis tokovnega polja na ravni velikosti delca. Pri napovedi sil toka je upoštevana dejanska geometrija delca (izražena s 4 neodvisnimi parametri), prav tako pa tudi orientacija delca. Prednost predlaganega modela je tudi v parametrični formulaciji geometrije delca, ki bo omogočala napoved sil toka za celotni nabor oblik delca, v okviru zmogljivosti superelipsoidne parametrizacije. Avtorji verjamemo, da bo predlagana rešitev bistveno poenostavila proces pridobivanja modelov upora in vzgona za širok nabor nesferičnih delcev.

Abstract. In this paper we are presenting a steady-state particle-resolved numerical model, based on OpenFOAM, for numerical drag and lift prediction of superellipsoidal particles in Stokesian flow regime. The idea behind particle-resolved model is to benefit from multi parameter prediction, which considers not only the flow regime and particle size, but also detailed geometric features (expressed by 4 independent parameters) and particle orientation. The proposed numerical model will also benefit from a parametric geometry formulation, which will allow to evaluate the forces for the entire range of particle shapes, offered by the superellipsoidal parametrisation. The authors believe that the proposed solution will significantly reduce the effort to obtain an accurate drag and lift model for a vast amount of non-spherical particle shapes.

1 Uvod

Raziskave večfaznih tokov z delci se v današnjem času izvajajo v širokem obsegu, nova spoznanja pa so zanimiva za različne industrijske ali akademske aplikacije. Od začetka raziskav, so se avtorji vrsto let zanašali na predpostavko sferične oblike delcev, za katero so izrazi za napoved sil toka dobro poznani, v celotnem razponu režimov toka. Za ta pristop še vedno obstaja

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

pomemben raziskovalni interes, saj je bilo v zadnjem času veliko aplikacij [1, 2] kjer je sfera dejansko najboljši približek dejanske geometrije delcev. Po drugi strani pa se pojavlja vedno več problemov, z izrazito ne-sferično obliko delcev, kjer modeli, ki temeljijo na izrazih za napoved sil na sferične delce, ne zmorejo natančno opisati njihove dinamike. Za obravnavo takšnih tokov je nekaj rešitev že znanih, vendar imajo svoje omejitve. Znani so npr. analitični izrazi za sile toka v viskozem režimu, za nekaj tipičnih oblik, kot so sferoidi ali elipsoidi [3]. Takšen pristop se v veliki meri uporablja za obravnave tokov z vlaknastimi [4] ali diskastimi delci [5], vendar je omejen na znane oblike delcev in viskozni tokovni režim. V obsegu določenih aplikacij so bile predstavljene tudi razširitve [6] nekaterih modelov, ki so omogočale obravnavo izven viskoznega tokovnega režima. Za obravnave izven obsega znanih oblik delcev pa so na voljo pristopi, ki temeljijo na posplošeni obliki delca, kot npr. modeli s faktorji sferičnosti. Večji pomanjkljivosti takšnih modelov sta izguba informacije o obliki in pomanjkanje opisa orientacije delca. Tako se pri večji asimetriji delca relativno hitro pokažejo pomanjkljivosti teh modelov, ki se izražajo predvsem v natančnosti napovedi. Kot so poudarili številni avtorji doslej [6] je točna napoved sil toka na delce, ključnega pomena za pravilno napoved njihovih trajektorij in drugih povezanih mehanizmov. Iz teh razlogov predstavljamo parametrični zapis geometrije delca, na podlagi superelipsoidne parametrizacije, ki omogoča izbiro širokega razpona oblik delcev. Dodatno predstavljamo tudi numerično okolje za obravnavo interakcije delca poljubne oblike s tokom, ki omogoča celovit opis sil toka na delec. Upoštevana je dejanska geometrija delca, zajete pa so tudi vse možne orientacije delca.

2 Numerični model

Tok nestisljive, Newtonske tekočine s konstantno viskoznostjo zapišemo z

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

kjer so p, ρ, \mathbf{u} tlak, gostota tekočine in hitrost toka, \mathbf{g} je gravitacijski pospešek in ν viskoznost tekočine. Diskretizacija enačb in numerični izračun se izvaja v odprtokodnem orodju *OpenFOAM*, z uporabo internega algoritma za nestisljiv, časovno odvisen tok *pisoFoam*, ki temelji na PISO algoritmu. V tem primeru je formulacija turbulentnih napetosti izključena v nastavitvah, saj nas zanimajo predvsem tokovi z nizkim relativnim Reynoldsovim številom delca, $Re_p = d_p |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}|/\nu$, kjer je \mathbf{u}_p hitrost delca in d_p premer volumsko ekvivalentne sfere. Geometrija delca je predstavljena z izrazom superelipsoidne parametrizacije ter definirana s petimi parametri, in sicer

$$P(x, y, z) = \left(\left| \frac{x}{a} \right|^{2/e_2} + \left| \frac{y}{b} \right|^{2/e_2} \right)^{e_2/e_1} + \left| \frac{z}{c} \right|^{2/e_1}, \quad (2)$$

kjer so a, b, c dolžine polosi superelipsoida, medtem ko sta e_1 in e_2 eksponentna parametra. Volumen superelipsoida je definiran s sledečim izrazom

$$V_p = 2abce_1e_2B\left(\frac{e_1}{2} + 1, e_1\right)B\left(\frac{e_2}{2}, \frac{e_2}{2}\right), \quad (3)$$

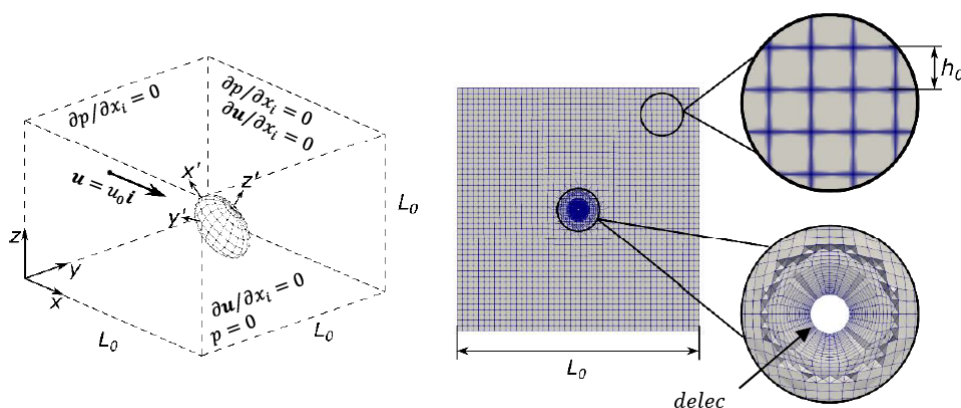
kjer je B beta funkcija, $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Sile toka na delec izrazimo z direktno integracijo tlačnih in strižnih napetosti, kar zapišemo z

$$\mathbf{F} = - \int_A p \cdot \mathbf{n} dA + \rho \nu \int_A [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4)$$

Vektor hitrosti toka je definiran kot $\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{i}}$, zato lahko silo toka razdelimo na komponento upora $F_D = |F_x \hat{\mathbf{i}}|$ in vzgona $F_L = |F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}|$, v smereh glavnih osi globalnega koordinatnega sistema. V tem primeru vzgon izrazimo kot vektorsko vsoto dveh komponent sile toka, ki sta pravokotni na vektor hitrosti toka. Takšen zapis sicer ne vsebuje informacije o točni orientaciji sile vzgona v $y-z$ ravnini, vendar je prikladen za vpeljavo brez-dimenzijskih koeficientov upora in vzgona, in sicer

$$Cd = \frac{8F_D}{\rho \pi d_p^2 |\mathbf{u}^2|}, \quad Cl = \frac{8F_L}{\rho \pi d_p^2 |\mathbf{u}^2|}. \quad (5)$$

2.1 Validacija numeričnega modela

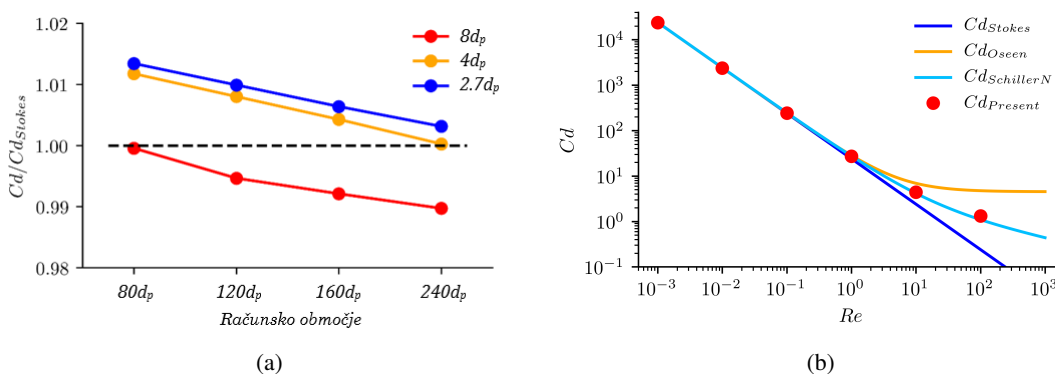


Slika 1 : Na levi strani je prikazano računsko območje z delcem v središču in s pripisanimi robnimi pogoji na pripadajočih stenah. Na desni je prikazan središčni prerez mreže (D3/M3), ter detajlni prikaz osnovnega elementa in detajlni prikaz mreže okrog delca.

Posebna pozornost je bila namenjena pravilnemu določanju velikosti območja, glede na to, da želimo omogočiti obravnavo v različnih tokovnih režimih. Nekateri avtorji so ugotovili, da so aplikacije z izjemno nizkim Re številom lahko posebej zahtevne, kar se tiče pravilne postavitve območja izračuna. To izhaja iz dejstva, da je pri takih tokovih glavni mehanizme prenosa gibalne količine difuzija, ki ima teoretično neskončen doseg (v limiti, ko $Re \rightarrow 0$). Skozi pregled del ostalih avtorjev smo opazili večja razhajanja pri postavitvi računskega območja, predvsem

glede velikosti in oblike. Chadil et. al. [7] so npr. uporabili pravokotno območje velikosti $16d_p \times 8d_p$, za njihov DNS model toka okoli sfere, podobno kot Zastawny et. al. [6], ki so uporabili območje velikosti $20d_p \times 20d_p \times 10d_p$ za njihov IBM model nesferičnih delcev. Andersson in Jiang [8] sta za merilo velikosti območja uporabila dolžino osnovnega roba kocke ekvivalentnega volumna. Raziskala sta dolžine osnovnega roba od $20d_p$ do $170d_p$, kjer sta ugotovila, da rezultat postane neodvisen od velikosti območja, od dolžine približno $135d_p$ naprej. Glede na ugotovljen smo izbrali računsko območje v obliki kocke (Slika 1), delec pa postavili v središče. Na vstopni površini je definirana konstantna hitrost toka $\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{i}}$, in nični gradient tlaka $\partial p / \partial x = 0$, medtem ko je na izstopni površini gradient hitrosti ničen $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$, tlak pa konstanten $p = 0$. Na steni delca je predpisan pogoj brez zdrsa, na ostalih površinah računskega območja pa nični gradient tlaka in hitrosti. V sklopu validacije smo pregledali štiri različne velikosti območja (dolžina osnovnega roba $L_0 = 80, 120, 160, 240d_p$) in tri gostote mreže (velikost osnovnega elementa $h_0 = 8, 4, 2.7d_p$) pri čemer je število elementov v mreži bilo med 10^4 in $87 \cdot 10^4$. Stopnja zgostitve mreže, od osnovnega elementa h_0 do najfinejših celic na steni delca je med mrežami konstantna in znaša približno 2^7 .

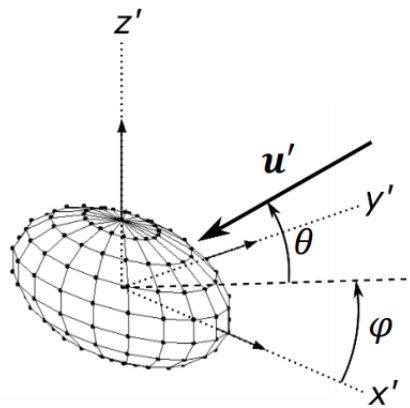
Numerična validacija je bila opravljena na primeru toka okoli sfere, pri $Re = 10^{-3}$, s primerjanjem numerično izračunanih koeficientov upora, s Stokesovim [9] uporom. Rezultati so prikazani na sliki 2 a), v obliki kvocienta Cd/Cd_{Stokes} . Ugotovljeno je bilo, da nezadostna velikost območja vodi do previsoke napovedi Cd , medtem ko nezadostna gostota mreže povzroči prenizko napoved. Sama odstopanja so relativno majhna pri vseh primerih, zato so v splošnem vsi rezultati bili prepoznani kot zadovoljivi. Za nadaljnje analize je bila izbrana konfiguracija $L_0 = 160d_p$, $h_0 = 8d_p$, ki je bila preizkušena še za razširjen tokovni režim, pri višjih Re , kot prikazuje slika 2 b). V primerjavi s Stokesovim uporom in empiričnimi korelacijami [10, 11] za razširjen tokovni režim, smo prepoznali povprečno napako manj kot 2%, medtem ko maksimalna napaka doseže nekje 10%, s približevanjem $Re = 100$.



Slika 2 : a) Prikazani so numerično izračunani koeficienti upora sfere pri $Re = 10^{-3}$ za različne velikosti območja in gostote računske mreže. b) Prikazani so numerično izračunani koeficienti upora sfere, pri različnih Re številih. Primerjalno so prikazane še vrednosti Stokesovega analitičnega upora in dveh empiričnih modelov (Schiller-Naumann [11], Oseen [10]).

2.2 Načrtovanje numeričnih eksperimentov

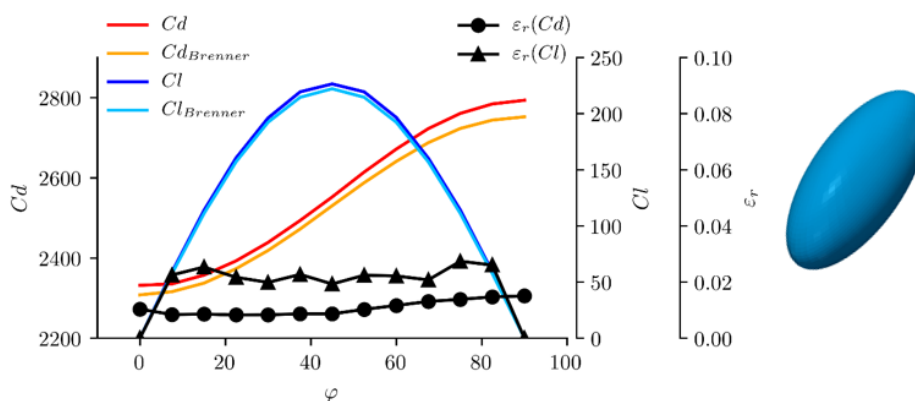
Osnovni namen predstavljenega orodja je celovit opis karakteristike upora in vzgona za delec specifične oblike, z upoštevanjem celotnega območja nesimetričnih orientacij. Z uporabo parametrične enačbe (2) je mogoče bistveno razširiti obseg oblik delcev, v primerjavi z elipsoidno formulacijo, in sicer z oblikami kot so valji, kuboidi, romboidi in tudi oktaedri. Za postavitev delca v celoten obseg nesimetričnih orientacij, vpeljemo definicijo usmeritve vektorja hitrosti, glede na delec, ki temelji na dveh vpadnih kotih (φ in θ), kot prikazuje slika 3. Z upoštevanjem enačbe (2) ugotovimo, da je oblika površina delca ortotropna, kar pomeni da ima tri simetrijske ravnine. Iz tega sledi, da je obseg nesimetričnih orientacij med 0° in 90° za oba vpadna kota.



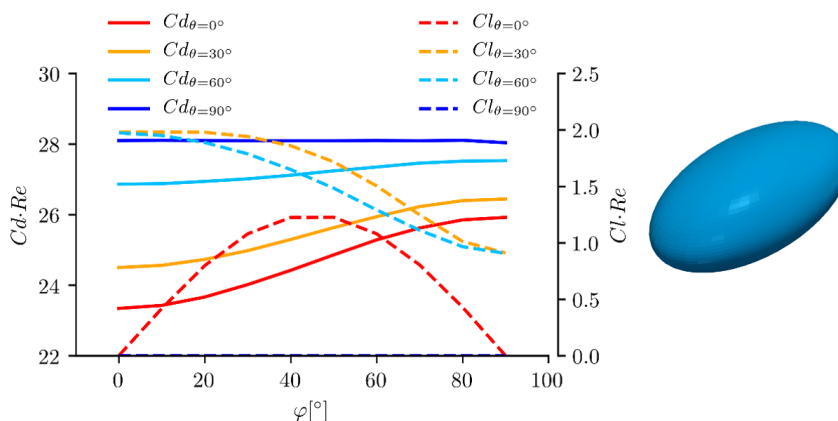
Slika 3 : Definicija vektorja hitrosti, relativno na lokalni koordinatni sistem delca, z dvema vpadnima kotoma φ in θ .

3 Rezultati

Z uporabo enačbe (2) je bil ustvarjen sferoidni delec, in sicer tako, da so vsi parametri enaki 1, razen parameter $a = 2.5$. Numerična simulacija je bila uporabljena v režimu Stokesovega toka pri $Re = 10^{-2}$, za celoten obseg nesimetričnih orientacij. Glede na to, da je sferoid osnosimetrično telo, se obseg nesimetričnih orientacij zmanjša na eno ravnino, z normalo pravokotno na krajšo polos delca. To pomeni, da lahko uporabimo poenostavljeno formulacijo orientacije s samo enim kotom (φ), v območju 0° do 90° . Sile toka so bile določene v skladu z enačbo (4), pripadajoči koeficienti upora in vzgona pa z enačbo (5). Ti so prikazani na sliki 4, v primerjavi z Brennerjevim [3] analitičnim modelom. Iz grafa lahko povzamemo nekaj osnovnih zaključkov, ki so v skladu s pričakovanji, in sicer da se minimalni in maksimalni upor pojavita pri kotih 0° in 90° , maksimalni vzgon pa pri kotu 45° . Pri kotih maksimalnega in minimalnega upora pa je vzgon nič.



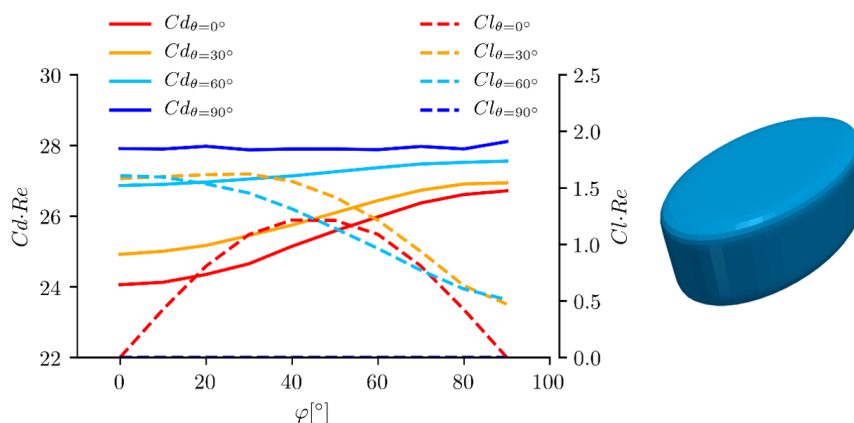
Slika 4 : Koeficienti upora in vzgona za sferoid v Stokesovem toku, pri $Re = 10^{-2}$, v območju $\varphi = 0^\circ - 90^\circ$. Na diagramu so predstavljene tri $y - osi$, kjer leva prikazuje Cd , notranja desna Cl , skrajno desna pa relativno napako ε_r , glede na Brennerjev model.



Slika 5 : Prikazani so produkti koeficientov upora in vzgona z Re številom za elipsoid s tremi različnimi dolžinami polosi, pri $Re = 10^{-2}$. Leva $y - os$ prikazuje $Cd \cdot Re$, desna pa $Cl \cdot Re$. Vpadni kot φ je prikazan na $x - osi$, medtem ko je kot θ prikazan z različnimi linijami na grafu.

Za demonstracijo delovanja predstavljenega numeričnega modela, sta bili opravljene še dve numerični simulaciji, in sicer za elipsoid, s tremi različnimi osmi ($a = 2.5, b = 1.5, c = 1, e_1 = 1, e_2 = 1$) in za superelipsoid ($a = 2.5, b = 1.5, c = 1, e_1 = 0.2, e_2 = 1$) ovalno-diskaste oblike, kot prikazujeta sliki 5 in 6. Za razliko od sferoida, je tukaj prikazan produkt koeficientov upora in vzgona z Re številom. Takšen zapis je prikladen za ponazoritev podatkov v Stokesovem tokovnem režimu, kjer je pričakovana linearna zveza med silo upora in Re številom. Tako lahko

izrazimo omenjene produkte $Cd \cdot Re$ in $Cl \cdot Re$, za celoten Stokesov tokovni režim s konstantnimi vrednostmi. Dejstvo, da delca nista osno-simetrična je razvidno na obeh grafih, kjer je jasno izražena karakteristika odvisnosti vzgona in upora od obeh vpadnih kotov. Minimalni upor se pri obeh delcih pojavi pri $\varphi = 0^\circ$ in $\theta = 0^\circ$, medtem ko je orientacija maksimalnega upora pri $\theta = 90^\circ$, ne glede na kot φ . Pri tem kotu θ je tudi vzgon ničen, za celotno območje kota φ . Orientacija maksimalnega vzgona je pri kotih $\varphi = 0^\circ$ in $\theta = 45^\circ$, kar je v skladu s pričakovanim, če upoštevamo razmerje osi obeh delcev ($a > b > c$).



Slika 6 : Prikazani so produkti koeficientov upora in vzgona z Re številom za ovalni disk, pri $Re = 10^{-2}$. Leva y – os prikazuje $Cd \cdot Re$, desna pa $Cl \cdot Re$. Vpadni kot φ je prikazan na x – osi, medtem ko je kot θ prikazan z različnimi linijami na grafu.

4 Zaključek

Predstavili smo numerični model za obravnavo obtekanja superelipsoidnih delcev, z namenom določitve sil toka na delec, v različnih orientacijah. Formulacija oblike delca je izvedena s pomočjo parametrične enačbe superelipsoida, določitev relativne orientacije vektorja hitrosti pa je vzpostavljena preko dveh vpadnih kotov φ in θ . Izvedena je bila analiza vpliva oblike in velikosti računskega območja in gostote računске mreže na rešitve. Numerični model smo validirali na primeru toka okoli sfere, v Stokesovem tokovnem režimu, in v razširjenem režimu do $Re = 100$. Delovanje modela je bilo preizkušeno na treh primerih ne-sferični delcev, in sicer na sferoidu, elipsoidu s tremi različnimi polosmi in na superelipsoidu v obliki ovalnega diska. Ugotovljeno je bilo, da je za osno nesimetrične delce pomembna definicija orientacije z dvema vpadnima kotoma, saj je rešitev odvisna od obeh. Za zaključek smo pokazali, da je s predstavljenim modelom mogoče pridobiti celovit opis sil toka na delec, za celoten nabor nesimetričnih orientacij, kar je bil tudi osnovni namen modela.

Literatura

- [1] J. Wedel, P. Steinmann, M. Štrakl, M. Hriberšek, and J. Ravnik, “Can CFD establish a connection to a milder COVID-19 disease in younger people? Aerosol deposition in lungs of different age groups based on Lagrangian particle tracking in turbulent flow,” *Computational Mechanics*, vol. 67, pp. 1497–1513, 3 2021.
- [2] P. Koullapis, S. C. Kassinos, J. Muela, C. Perez-Segarra, J. Rigola, O. Lehmkuhl, Y. Cui, M. Sommerfeld, J. Elcner, M. Jicha, I. Saveljic, N. Filipovic, F. Lizal, and L. Nicolaou, “Regional aerosol deposition in the human airways: The SimInhale benchmark case and a critical assessment of in silico methods,” *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, vol. 113, pp. 77–94, 2 2018.
- [3] H. Brenner, “The Stokes resistance of an arbitrary particle-II. An extension,” *Chemical Engineering Science*, vol. 19, no. 9, pp. 599–629, 1964.
- [4] J. Ravnik, C. Marchioli, M. Hriberšek, and A. Soldati, “On shear lift force modelling for non-spherical particles in turbulent flows,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1558, pp. 1107–1110, 2013.
- [5] W. Yuan, H. I. Andersson, L. Zhao, N. R. Challabotla, and J. Deng, “Dynamics of disk-like particles in turbulent vertical channel flow,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 96, pp. 86–100, 11 2017.
- [6] M. Zastawny, G. Malouppas, F. Zhao, and B. van Wachem, “Derivation of drag and lift force and torque coefficients for non-spherical particles in flows,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 39, pp. 227–239, 3 2012.
- [7] M. A. Chadil, S. Vincent, and J. L. Estivalèzes, “Accurate estimate of drag forces using particle-resolved direct numerical simulations,” *Acta Mechanica*, vol. 230, pp. 569–595, 2 2019.
- [8] H. I. Andersson and F. Jiang, “Forces and torques on a prolate spheroid: low-Reynolds-number and attack angle effects,” *Acta Mechanica*, vol. 230, pp. 431–447, 2 2019.
- [9] G. G. Stokes, “On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums,” *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 9, p. 8, 1851.
- [10] C. Oseen, “Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik,” *Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig*, 1927.
- [11] L. Schiller and A. Naumann, “Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung,” *Verein Deutscher Ingenieure*, vol. 77, no. 12, pp. 318–320, 1933.



Razvoj metode končnih razlik za simulacijo potencialnega toka preko profilov kril

Tilen Švarc¹, Andrej Špiler¹, Žiga Volavšek¹ in Jure Ravnik¹

Development of finite difference based method for potential flow simulation over aerofoils

Povzetek. V prispevku predstavljamo razvoj metode končnih razlik za simulacijo potencialnega toka tekočine. Razvita shema vključuje avtomatsko generacijo računske mreže za tok preko NACA profila krila in zapis rezultatov primeren za takojšnjo vizualizacijo. Rezultate simulacij primerjamo z numerično rešitvijo Navier-Stokesovih enačb pri visokih Reynoldsovih številih, ki smo jo pripravili s pomočjo komercialne programske opreme za računsko dinamiko tekočin in ugotavljamo dobro uje-manje. Izdelan numerični algoritem je v prvi vrsti namenjen izobraževanju in podpori predavanjem iz mehanike tekočin in numeričnih metod.

Abstract. This paper presents the development of a finite difference method for the simulation of potential flows. The developed scheme involves the automatic generation of computational meshes for the flow over the NACA airfoil and provides results suitable for immediate visualization. The results of the simulations are compared with the numerical solution of the Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers using a commercial computational fluid dynamics software, and good agreement is found. The developed numerical algorithm is primarily intended for educational purposes and will be used to support lectures on fluid mechanics and numerical methods.

1 Uvod

Zahteve sodobnega trga narekujejo vedno bolj učinkovite, funkcionalne in privlačne izdelke, ki od inženirja zahtevajo vedno večjo mero iznajdljivosti in znanja. To je še posebej očitno na področju snovanja avtomobilov, letal, turbin in ostalih izdelkov, kjer je dobro razumevanje toka okoli izdelka ključno za njegovo funkcionalnost. Ker analitični preračuni na tem področju ne nudijo zadostne uporabnosti, se poslužujemo metod računske dinamike tekočin (RDT).

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

Navkljub široki dostopnosti različnih vrst RDT orodij, kot sta na primer odprtokodni OpenFAOM [7] ali komercialni Ansys CFX, menimo, da ima orodje, ki poda rešitev hitro in popolnoma avtomatizirano, določeno prednost predvsem pri uporabi v pedagoške namene. Numerična shema, razvita v pričujočem članku, je dober učni pripomoček, saj vsebuje vse osnovne funkcionalnosti, ki so potrebne za hitro in avtomatizirano simulacijo potencialnega toka okoli izbrane oblike. Rezultat tako podaja vpogled v tokovno dogajanje, algoritem sam, pa tudi v delovanje numeričnih metod. Zaradi teh lastnosti se lahko učinkovito uporabi med pedagoškim procesom poučevanja tako mehanike tekočin kot numeričnih metod.

Pri obravnavi toka so posebej zanimivi profili v obliki kril. Enega bolj sistematičnih in uporabljenih načinov za določanje profilov predstavlja klasifikacija NACA (National Advisory Committee for Aeronautics). Razvoj se je začel po letu 1930, v osnovi pa poznamo opis s štirimi, petimi, šestimi ali sedmimi števki. Prednost takega načina podajanja oznake krila je predvsem v popolni določenosti oblike z enačbami, prav tako pa lahko opišemo skoraj poljubno obliko krila [3].

Za opisovanje dogajanja smo uporabili potencialni tok, za katerega je značilno brezvrtinčno tokovno polje. To je sicer idealizirana predpostavka, vendar dovolj natančno opiše tokovne razmere okoli izbranih oblik pri dovolj velikih Reynoldsovih številih, kjer pa še ne pride do odlepljanja tokovnic [2]. Če pride do odlepljanja tokovnic se tokovna slika okoli ovir popolnoma spremeni in je v tem primeru je za numerično analizo potrebno uporabiti CFD programe z vgrajenimi ustreznimi modeli turbulence. Enačbe potencialnega toka so razmeroma preproste za implementacijo, kar, posebej v dveh dimenzijah, omogoča jasn in jedrnat zapis algoritma, ki ga lahko v pedagoškem procesu učinkovito predstavimo.

2 Vodilne enačbe

Tok nestisljive tekočine, kjer so masne sile zanemarljive, opišejo Navier-Stokesova dinamična 1 in kontinuitetna 2 enačba

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

kjer je \mathbf{u} vektor hitrosti tekočine, p tlak, ρ gostota in ν kinematična viskoznost. Najprimernejša metoda za numerično reševanje Navier-Stokesovih enačb je metoda kočnih volumnov, na podlagi katere deluje večina RDT programske opreme.

V našem delu pa se bomo posvetili potencialnem toku. Potencialni tok temelji na približku, da je tekočina nestisljiva $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ in da tok ni vrtinčen, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Približek nevtinčnega toka je pri toku preko krila dober v območju izven mejne plasti [2]. Ker se debelina mejne plasti zmanjšuje z večanjem Reynoldsovega števila, je potencialni tok uporaben za analizo tokovnih razmer pri visokih Reynoldsovih številih, predno pride do odlepljanja tokovnic. Če hitrost toka zapišemo kot rotor tokovne funkcije ψ :

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \psi) \equiv 0, \quad (3)$$

vidimo, da takšno hitrostno polje avtomatično zadosti enačbi kontinuitete, saj je divergenca rotorja po definiciji enaka nič. Pogoju brezvrtničnosti zadostimo, če tokovna funkcija zadosti Laplaceovi enačbi

$$\nabla \times (\nabla \times \psi) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \psi)}_{\equiv 0} - \nabla^2 \psi = 0, \quad (4)$$

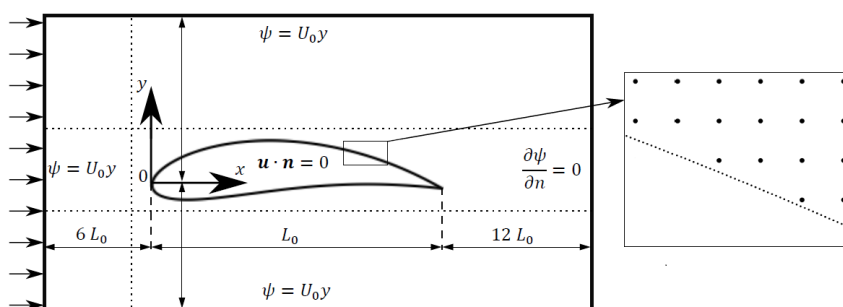
saj je tudi divergenca gradienta po definiciji enaka nič. V dveh dimenzijah ima vrtničnost samo eno izmed komponent različno od nič - tisto, ki kaže v smer pravokotno na ravnino toka. V tem primeru vpeljemo neničelno komponento kot skalarno tokovno funkcijo, za katero velja

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

če tekočina teče v ravnini (x, y) . V dveh dimenzijah ima hitrostno polje zgolj dve neničelni komponenti $\mathbf{u} = (u, v)$. Iz povezave med hitrostjo in tokovno funkcijo (3) lahko razberemo, da velja

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

Laplaceova enačba (5) je parcialna diferencialna enačba drugega reda, ki jo lahko rešimo ob upoštevanju robnih pogojev. Na sliki 1 prikazujemo skico območja, profila krila in robne pogoje. Na iztoku iz obravnavanega območja smo predpisali Neumann-ov robni pogoj - normalni odvod tokovne funkcije je enak nič. Ker tekočina teče vzdolž tokovnic, ki so definirane kot izolinije konstantne vrednosti tokovne funkcije, je nespreminjanje tokovne funkcije v smeri iztoka pogoj, ki ustreza tokovnicam, ki so pravokotne na iztok. Ker smo poskrbeli, da je iztok dovolj oddaljen od krila, je tak pogoj primeren. Na krilu zahtevamo, da ni toka v krilo. To pomeni, da morajo biti tokovnice vzporedne s površino krila, oziroma, da ima tokovna funkcija na površini krila konstantno vrednost. Uporabili smo Neumannov robni pogoj - tokovna funkcija se v smeri tangentno na krilo ne spreminja. Na ostale površine predpišemo Dirichlet-ov robni pogoj, znano vrednost tokovne funkcije, ki ustreza enakomernemu natoku prek vstopne površine.



Slika 1: Levo: prikaz obravnavanega območja z dimenzijami in robnimi pogoji. U_0 predstavlja hitrost natoka na krilo. Desno: detajl računske mreže v bližini površine krila.

Ko je tokovna funkcija znana, z njo preprosto prikažemo tokovnice z izrisom plastnic konstante vrednosti tokovne funkcije. Za izračun hitrostnega polja tokovno funkcijo odvajamo skladno z

enačbo (6). Tlak lahko izračunamo iz Bernoullijeve enačbe, kjer zanemarimo vpliv spreminjanja hidrostatičnega tlaka

$$p = \frac{\rho}{2}(U_0^2 - |\mathbf{u}|^2) + p_0. \quad (7)$$

Tu je p tlak, ρ gostota in U_0 hitrost, predpisana na vstopu.

3 Metoda končnih razlik za Laplaceovo enačbo

Za numerično reševanje Laplaceove enačbe smo uporabili metodo končnih razlik, saj je izredno enostavna za implementacijo, računski časi pa so razmeroma kratki, tudi pri gostih računskih mrežah. Hkrati je metoda del učnega načrta pri poglavju o numeričnih metodah. Izpeljava metode temelji na aproksimaciji posameznih členov v parcialnih diferencialnih enačbah s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto [5]. Taylorjeva vrsta povezuje dve bližnji vrednosti zvezno odvedljive funkcije z njenim odvodom.

V prvem koraku območje izračuna diskretiziramo z mrežo ekvidistantnih točk. Naj bo razdalja med točkami enaka $\Delta x = \Delta y$. Za aproksimacijo Laplaceove enačbe (5) uporabimo končno razliko drugega reda natančnosti

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{(\Delta y)^2}, \quad (8)$$

ki, ob upoštevanju ekvidistantne diskretizacije vodi do naslednje enačbe

$$\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j} = 0. \quad (9)$$

Z indeksoma i in j opisujemo položaj izbrane točke v računski mreži. Z enačbo (9) lahko opišemo celotno območje znotraj območja. Za predpis robnih pogojev moramo pripraviti seznam točk na posameznih delih robu območja.

Robne pogoje smo predpisali na naslednji način. Na zgornjem, spodnjem in vstopnem (levem) robu predpostavimo konstanten tok hitrosti U_0 v smeri x : $\mathbf{u} = (U_0, 0)$. Ker je tokovna funkcija enaka odvodu hitrosti velja, da vrednost tokovne funkcije linearno narašča v smeri y . Brez izgube splošnosti izberemo naslednji linearni izraz

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 \quad \Rightarrow \quad \psi = U_0 y \quad \Rightarrow \quad \psi_{i,j} = U_0 y_{i,j} \quad (10)$$

Na izstopnem (desnem) robu velja

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{i,j} = \psi_{i-1,j} \quad (11)$$

Skozi krilo ne dovolimo toka, zato so tokovnice vporedne s krilom in je vrednost tokovne funkcije na krilu konstantna. Same vrednosti ne poznamo, zato se naslonimo na dejstvo, da je hitrost na krilu vzporedna površini krila, kar ustreza pogoju, da se tokovna funkcija ne spreminja po površini krila:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \approx \frac{\psi_{sy} - \psi_{i,j}}{\Delta y} n_x - \frac{\psi_{sx} - \psi_{i,j}}{\Delta x} n_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{i,j}(n_y - n_x) + n_x \psi_{sy} - n_y \psi_{sx} = 0 \quad (12)$$

kjer sta ψ_{sx} in ψ_{sy} sosednji točki točke $\psi_{i,j}$ v smeri x in y . n_x in n_y pa sta komponenti normale v pripadajočih smereh.

Za pripravo računske mreže najprej izberemo razdaljo med vozlišči (Δx in Δy , ki sta vedno enaki), želeni profil krila, velikost območja pred, nad oziroma pod in za profilom ter kot postavitev profila. Nato naš algoritem diskretizira celotno območje, pri čemer zamreži tudi notranjost profila.

Sledi implementacija profila, ki poteka tako, da program prepozna izbrano obliko in jo umesti v izhodišče območja. Ker območje diskretiziramo z znanim korakom, je potrebno temu prirediti tudi diskretizacijo profila. Tukaj nam je bila v pomoč standardizacija, saj so NACA profili kril standardizirani in popolnoma opisanimi z matematičnimi enačbami [4]. Krivulja profila NACA se računa na način, podan v nadaljevanju. Izberemo korak za računanje profila krila. Ta faza je potrebna, ker je funkcija za obliko profila podana zvezno, mi pa potrebujemo posamezne točke. Korak smo nastavili tako, da je njegova vrednost 100-krat manjša od Δx . S tem se izognemo morebitnim prazninam v izračunu profila. Nato izračunamo potek srednje linije profila (angl. camber line), porazdelitev debeline profila (angl. thickness distribution) na zgornji in spodnji strani profila in absolutni kot pravokotnice na srednjo linijo profila. Na koncu s temi podatki izračunamo koordinate točk na profilu krila.

V naslednjem koraku točke računske mreže, ki so znotraj profila krila, odstranimo. Uporabimo naslednji postopek: najprej poiščemo točke v mreži, ki so najbližje površini krila. Nato označimo vse točke v mreži, ki so med tako najdeno spodnjo in zgornjo površino krila. Nazadnje vsako točko, ki ima vse štiri sosedje znotraj krila izbrisemo iz računske mreže. Postopek je prikazan na sliki 1, kjer lahko vidimo potek izračunanega profila (majhne točke) in mrežo (velike točke). Vnos profila v obliki kroga poteka tako, da ga direktno opišemo z enačbo kroga in iz območja izbrisemo vse točke, ki ležijo znotraj njega.

S tem je mreža računskih točk določena. Oštevilčimo jih in izdelamo sezname sosednjih točk. Ta seznam vsebuje podatek o zgornjem, spodnjem, levem in desnem sosedu vsake točke znotraj območja. Točke na robu so na posebnem seznamu, kjer je poleg identifikacije točke podan še robni pogoj v tej točki.

Nazadnje določimo še normale na profil. V vsaki točki krila smo iz koordinat sosednjih dveh točk izračunali razdalji ΔX in ΔY , kot je vidno na sliki 2, kjer so točke na površini krila rdeče barve. Tako dobimo tangento, ki jo s sukanjem zavrtimo v normalo:

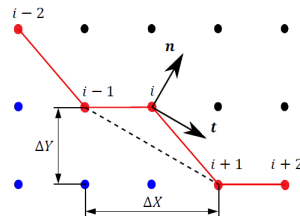
$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

S pomočjo seznama sosednjih točk, seznama točk, seznama normal ter ob upoštevanju enačb, sestavimo sistemsko matriko \mathbf{A} , s pomočjo seznama točk na robu pa vektor znanih vrednosti na desni strani \mathbf{b} . Sistem enačb rešimo v programu Matlab [6] z vgrajeno funkcijo: $\mathbf{x} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$.

4 Validacija

4.1 Vpliv gostote računske mreže in velikosti območja

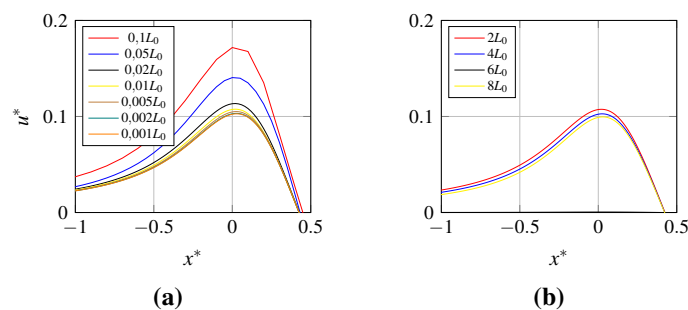
Na sliki 3 lahko vidimo vpliv velikosti krajevnega koraka in vpliv oddaljenosti roba od krila.



Slika 2: Slika prikazuje diskretizacijo v bližini površine mreže in način izračuna normal. Rdeče točke prikazujejo krilo, črne območje zunaj krila, modre pa navidezne točke mreže znotraj krila, ki so bile izbrisane.

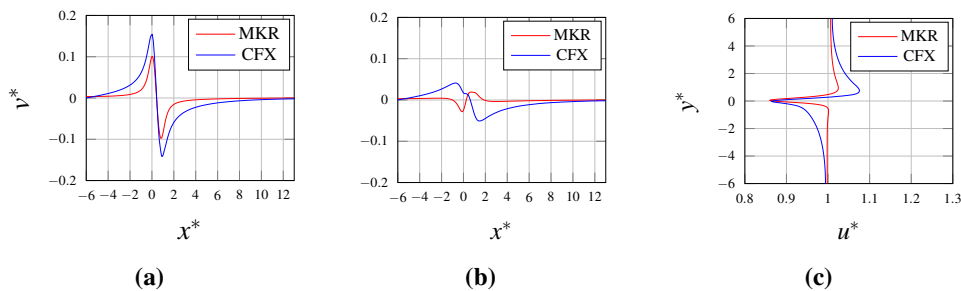
Prikazane so brezdimenzijske vrednosti, kjer sta bili hitrosti normirani na vrednost U_0 ($v^* = \frac{v}{U_0}$ in $u^* = \frac{u}{U_0}$), dolžinske vrednosti pa so bile normirane z L_0 ($x^* = \frac{x}{L_0}$).

Primerjava je bila izdelana na profilu NACA 9520. Iz slike 3a je razvidno, da je vpliv krajevnega koraka zanemarljiv, ko je ta manjši od $0.01L_0$. Vse nadaljnje simulacije so bile zato izvedene s tem korakom. Na sliki 3b pa lahko vidimo kako oddaljenost roba območja od krila vpliva na rezultate. Razdalja nad in pod krilom je bila enaka kot pred krilom, za krilom pa je bila razdalja dva krat večja kot pred krilom. Opazimo lahko, da je vpliv veliko manjši, kot je vpliv krajevnega koraka. Vidimo lahko le nekoliko večje odstopanje kadar je vstopni rob od krila oddaljen $2L_0$. Kadar pa je ta vrednost večja, pa se rezultati bistveno ne razlikujejo več. Nadaljnje simulacije zato izvajamo pri velikosti območja $6L_0$.



Slika 3: Vpliv mreže na rezultate na $y = 0,50 L_0$; a) primerjava različnih krajevnih korakov, b) primerjava različnih velikosti območja

Na sliki 4 prikazujemo primerjavo hitrostnih profilov med potencialnim tokom, izračunanim z MKR in rešitvijo Navier-Stokesovih enačb z Ansys CFX [1]. Graf 4a prikazuje potek hitrosti v smeri y nad krilom. Opazimo lahko podoben potek krivulj, vendar pa se rezultati, pridobljeni z Ansys CFX-om od tistih, pridobljenih z našo metodo, razlikujejo v tem, da dosežejo absolutno višje vrednosti v ekstremih. Hitrost v smeri y na lokaciji pod krilom je vidna na grafu 4b. Tukaj opazimo večjo neskladanje rezultatov. Na grafu 4c pa lahko vidimo potek hitrosti pred krilom. Opazimo lahko, da se hitrost toka v primeru uporabe Ansys CFX-a spreminja počasneje kot v

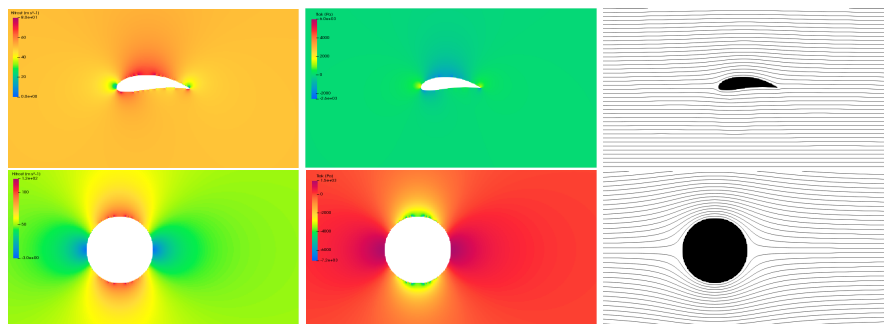


Slika 4: Primerjava hitrostnih profilov med potencialnim tokom izračunanim z MKR in rešitvijo Navier-Stokesovih enačb z Ansys CFX [1]; a) nad krilom ($y = 0, 50L_0$), b) pod krilom ($y = -0, 50L_0$), c) pred krilom ($x = -0, 20L_0$)

primeru uporabe naše metode. Glavni razlog je v tem, da CFX upošteva viskoznost, naš model pa je ne. Primerjava računskih časov pokaže, da je izračun s CFX več kot desetkrat počasnejši od MKR algoritma, pri čemer pri CFX ne upoštevamo časa mreženja, v primeru MKR metode upoštevamo tako mreženje kot tudi računski čas.

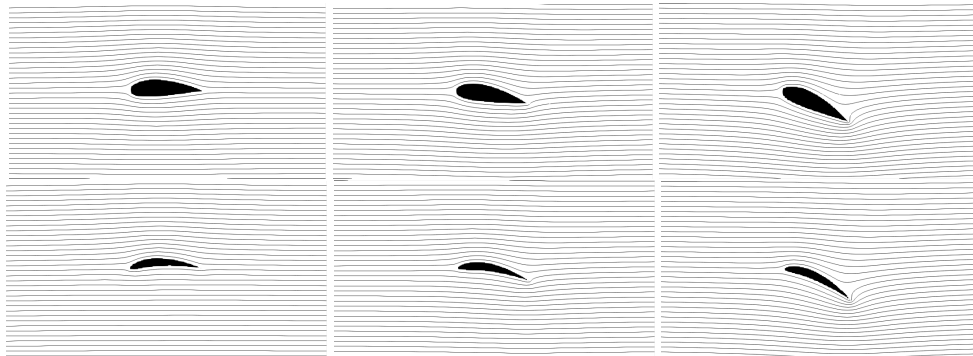
5 Rezultati

Za namen predstavitve delovanje modela smo izdelali več simulacij. Obravnavali smo tok preko valja in preko različnih NACA profilov. V vseh primerih je bila karakteristična dolžina $1 m$ (dolžina krila oziroma polmer preseka valja). Na sliki 5 so prikazana hitrostna in tlačna polja. Opazimo ostre prehode tik ob oviri. Ti se pojavijo zaradi izbrane numerične sheme. Glatke oblike se v metodi končnih razlik aproksimirajo s stopničasto mrežo računskih točk in tako nastane izrazita stopničasta oblika, ki povzroči nekaj težav pri izračunu. Kljub temu pa so rezultati na območjih, ki so nekoliko oddaljeni od ovir, dobri. Lepo so razvidna območja visoke in nizke hitrosti ter območja nizkega in visokega tlaka.



Slika 5: Hitrostno polje (levo), tlačno polje (sredina) in tokovnice (desno) prikazano za potencialni tok preko profila krila NACA 9520 (zgoraj) in preko valja (spodaj).

Na sliki 6 prikazujemo tokovnice za profila NACA 4424 in NACA 9412 pod različnimi vpadnimi koti. Tokovnice so predstavljene kot izolinije, kjer ima tokovna funkcija konstantno vrednost.



Slika 6: Prikaz tokovnic za profil NACA 4424 (zgoraj) in NACA 9412 (spodaj) - vpadni kot 0° (levo), 10° (sredina) in 25° (desno).

6 Zaključki

V prispevku smo predstavili razvoj numeričnega algoritma za simulacijo potencialnega toka na podlagi rešitve Laplaceove enačbe z metodo končnih razlik. Ugotovljamo, da je implementacija za reševanje Laplaceove enačbe v dveh dimenzijah preprosta. Pokazali smo, da s preprostim algoritmom lahko avtomatiziramo izdelavo računske mreže in sestavljanje sistema linearnih enačb. V primeru, ko uporabimo napredno orodje za numerično računanje, kot je Matlab, lahko tako pripravljen sistem linearnih enačb brez težav rešimo in rezultat tudi vizualiziramo. Razviti algoritem lahko uporabimo tudi za druge primere, ki jih opisuje Laplaceova enačba in so iz drugih področjih inženirstva - na primer za simulacijo prevoda toplote, toka podzemne vode ali izračun električnega potenciala.

Literatura

- [1] Ansys, Inc. *Ansys CFX, Release 2021 R1 Student version*, 2021.
- [2] B. V. Cornelis. *Computational Hydraulics. An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- [3] P. Garrison. Airfoils: A short history. *Flying*, September 25, 2009.
- [4] M. Hepperle. *JAVAFOIL User's Guide*, 05 2021.
- [5] M. Hriberšek and J. Ravnik. *Numerično modeliranje in računalniške simulacije Del 1, Gradniki numeričnega računanja*. Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, 2012.
- [6] MATLAB. *version R2021a*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2021.
- [7] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, 12(6):620–631, 1998.



Analiza dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema

G. Udovč¹, I. Planinc², T. Hozjan²

Analysis of two-layer spatial composite beams taking into account shear deformations and longitudinal inter-layer slip

Povzetek. V članku je prikazan nov numerični model za analizo dvoslojnih kompozitnih prostorskih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema. Novosti predstavljenega modela sta dve: (1) posledice singularnosti veznih enačb so v osnovnih enačbah modela konsistentno izločene, (2) modificirane posplošene ravnotežne enačbe modela so rešene z deformacijsko metodo končnih elementov. Učinkovitost prikazanega numeričnega modela je prikazana na primeru dvoslojnega lesenega prostorskega kompozitnega nosilca. Konvergenčne študije so pokazale veliko natančnost predstavljene družine deformacijskih končnih elementov, kar potrjuje primernost predstavljenega numeričnega modela za analizo dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev.

Abstract. The paper presents a new numerical model for the analysis of two-layer composite spatial beams taking into account shear deformations and longitudinal inter-layer slip. Novelty of the presented model are two: (1) singularities of the constraining equations are consistently eliminated in the basic equations of the model, (2) modified generalized equilibrium equations of the model are solved using the deformation based finite element method. The efficiency of the presented numerical model is shown on the example of a two-layer timber spatial composite beam. Convergence studies have shown a high accuracy of the presented family of deformation based finite elements, which confirms suitability of the numerical model for the analysis of two-layer spatial composite beams.

¹ Biro Udovč – Projektiranje, nadzor, svetovanje Stanislav Udovč s.p.

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

1 Uvod

Mehansko ali kemično povezani leseni elementi ter z mozniki povezan jeklen nosilec in armiranobetonska plošča sta le dva izmed mnogih primerov kompozitnih konstrukcij, s katerimi se srečamo v vsakodnevnem grajenem okolju. Posledično je razumevanje mehanskega obnašanja tovrstnih konstrukcij nujno potrebno za njihovo varno projektiranje. Dobro je znano, da je pravilna izbira veznih sredstev in s tem modeliranje zdrsa med sloji oziroma sestavnimi deli teh konstrukcij bistvenega pomena pri ugotavljanju njihove togosti, duktilnosti in nosilnosti. S problemi projektiranja kompozitnih konstrukcij so se ukvarjali številni raziskovalci, med temi omenimo le nekatere. Med prvimi je bil Newmark [1], ki je zasnoval preprost model, ki je temeljil na modelu nosilca z znano Bernoullijevo predpostavko o ravnih prečnih prerezih in linearno elastičnem obnašanju materiala. Za ta preprost model je predstavil tudi analitične rešitve. S pojavom računalnikov in s tem možnostjo numeričnega reševanja enačb modela so bili v znanstveni literaturi predstavljeni tudi zahtevnejši matematični in numerični modeli kompozitnih konstrukcij s podajno povezavo med sloji. Omenimo le raziskave o materialno in geometrijsko nelinearnih modelih dvoslojnih kompozitnih nosilcev ([2], [3]). Sprva so raziskovalci zaradi poenostavitve problema zanemarili vpliv strižnih deformacij na deformiranje kompozitnih konstrukcij, kar v nekaterih primerih ni ustrezno. Med te primere spadajo nosilci iz materialov z veliko strižno podajnostjo in nosilci, ki so kratki ter visoki. Zato nekoliko kasneje v znanstveni literaturi zasledimo tudi modele kompozitnih konstrukcij, ki so upoštevali tudi vpliv strižnih deformacij na deformiranje le teh. Omenimo le t.i. Timoshenkovo teorijo upogiba [4], pri kateri strižno deformiranje nosilca upoštevamo z dodatnim zasukom prečnega prereza. Kasneje je tak model strižnega deformiranja nosilcev uporabil Reissner za modeliranje geometrijsko nelinearnega obnašanja ravninskih nosilcev [5] oziroma Simo za modeliranje prostorskih nosilcev [6].

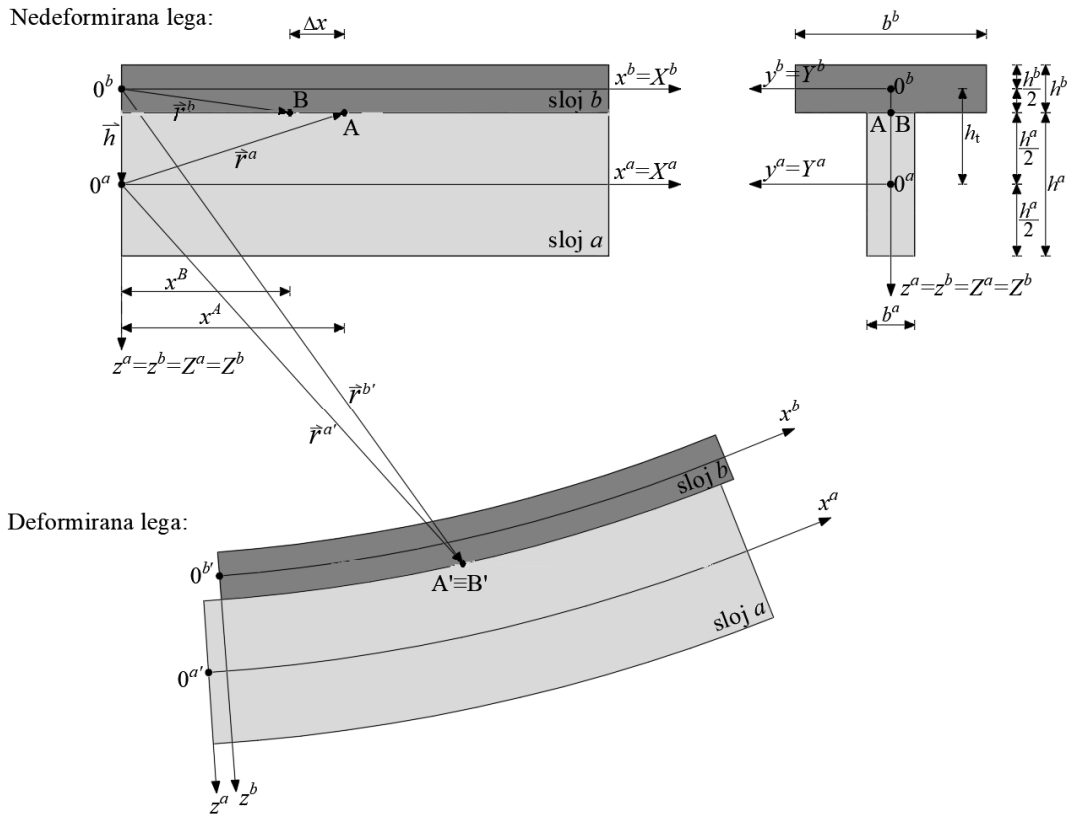
V tem članku bomo predstavili nov numerični model za analizo dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev s podajno povezavo med slojema. Pomembna novost predstavljenega modela je v tem, da upoštevamo tudi strižno deformiranje vsakega sloja kompozitnega nosilca in vzdolžne zamike med slojema. Zaenkrat se omejimo le na materialno in geometrijsko linearno obnašanje kompozitnega nosilca. Pri izpeljavi posplošenih ravnotežnih enačb konsistentno upoštevamo vezne enačbe. Na ta način se izognemo singularnostim v osnovnih enačbah modela, ki so posledica veznih enačb in s tem omogočimo stabilno reševanje le teh. Za reševanje posplošenih ravnotežnih enačb dvoslojnega prostorskega kompozitnega nosilca bomo izpeljali novo družino deformacijskih končnih elementov. S tem se bomo izognili vsem vrstam blokiranja, ki so značilne za končne elemente zasnovane na pomikih (Čas [7]).

Članek ima poleg uvoda še štiri kratka poglavja. V drugem poglavju predstavimo posplošene ravnotežne enačbe dvoslojnega prostorskega kompozitnega nosilca, kjer smo singularne vplive veznih enačb ustrezno izločili. Numerično reševanje osnovnih enačb modela z deformacijskimi končnimi elementi predstavimo v tretjem poglavju. Natančnost predstavljenega numeričnega modela za analizo dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev prikažemo v četrtem poglavju. Ugotovitve pa predstavimo v zaključkih.

2 Osnovne enačbe

Opazujemo prostorski dvoslojni kompozitni nosilec. Sestavljata ga dva sloja, sloj a in sloj b , ki ju z veznimi sredstvi povežemo v enovito celoto. Pri tem predpostavimo, da sta sloja v vzdolžni smeri med seboj podajna, v vseh ostalih smereh pa sta togo povezana. Deformiranje nosilca opazujemo v točkovnem Evklidskem prostoru. Lokalni koordinatni sistem sloja a kompozitnega nosilca označimo z (x^a, y^a, z^a) in poteka po težiščni osi sloja a . Podobno lokalni koordinatni sistem sloja b označimo z (x^b, y^b, z^b) . Legi delca v deformirani legi posameznega sloja v točkovnem Evklidskem prostoru določa krajevni vektor \vec{r}^i ($i=a, b$). Nedeformirano in deformirano lego dvoslojnega kompozitnega prostorskega nosilca prikazujemo na sliki 1. Na sliki 1 so delci sloja b , ki se v deformirani legi stikajo z delci sloja a , določeni z enačbo (1).

$$\vec{r}^{a'} \left(x^a, y, -\frac{h^a}{2} \right) = \vec{r}^{b'} \left(x^b, y, \frac{h^b}{2} \right) - \vec{h}. \quad (1)$$



Slika 1: Nedeformirana in deformirana lega dvoslojnega prostorskega kompozitnega nosilca.

Osnovne enačbe prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca ločeno sestavljajo, za vsak sloj posebej, konsistentno linearizirane enačbe t.i. Reissner-Simovega modela prostorskega nosilca [6]. Ko zapišemo enačbe za delce sloja a in za delca sloja b na stiku, ki sta v deformirani legi istoležna z $(x^a, y, -\frac{h^a}{2})$ za sloj a in $(x^b, y, \frac{h^b}{2})$ za sloj b , dobimo kinematične vezne enačbe obravnavanega kompozitnega nosilca prikazane v (2)-(7).

$$x^a + u^a = x^b + u^b + h_t \varphi_y, \quad (2)$$

$$v = v^a = v^b - h_t \varphi_x, \quad (3)$$

$$w^a = w^b = w, \quad (4)$$

$$\varphi_x^a = \varphi_x^b = \varphi_x, \quad (5)$$

$$\varphi_y^a = \varphi_y^b = \varphi_y, \quad (6)$$

$$\varphi_z^a = \varphi_z^b = \varphi_z. \quad (7)$$

V enačbah (2)-(7) smo kinematične količine, pomike in zasuke vsakega sloja kompozitnega nosilca označili z $u^a, u^b, v, w, \varphi_x, \varphi_y$ in φ_z . Pri tem smo predpostavili, da se na stiku sloja a in sloja b lahko pojavi le zdrs v vzdolžni smeri. Posledično se na stiku med slojema pojavi kontaktna linijska obtežba, katere vzdolžna komponenta je linearno odvisna od zamika med slojema Δx .

$$q_x = b_c K_{\text{stik},x} \Delta x, \quad (8)$$

$$\Delta x = x^a - x^b. \quad (9)$$

Kinematične vezne enačbe (2)-(7) in njihove variacije ter enačbi (8) in (9) konsistentno upoštevamo v ravnotežnih in konstitucijskih enačbah vsakega sloja nosilca, kjer smo ravnotežne enačbe zapisali v obliki izreka o virtualnem delu (10).

$$\delta W_n = \delta W_z. \quad (10)$$

S tako zapisanega izreka o virtualnem delu dobimo posplošene ravnotežne enačbe prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema, kjer smo posledice singularnosti veznih enačb v osnovnih ravnotežnih enačbah kompozitnega nosilca konsistentno izločili. Te enačbe so:

$$N_x^{a'} + p_x^a + b_c K_{\text{stik},x} \Delta x = 0, \quad (11)$$

$$N_x^{b'} + p_x^b - b_c K_{\text{stik},x} \Delta x = 0, \quad (12)$$

$$N_y' + p_y = 0, \quad (13)$$

$$N_z' + p_z = 0, \quad (14)$$

$$M_x' + m_x + h_t q_y = 0, \quad (15)$$

$$M_y' - N_z + m_y - h_t b_c K_{\text{stik},x} \Delta x = 0, \quad (16)$$

$$M_z' + N_y + m_z = 0, \quad (17)$$

$$\varepsilon_x^a = u^{a'}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_x^b = u^{b'}, \quad (19)$$

$$\gamma_y = v' - \varphi_z, \quad (20)$$

$$\gamma_z = w' + \varphi_y, \quad (21)$$

$$\chi_x = \varphi_x', \quad (22)$$

$$\chi_y = \varphi_y', \quad (23)$$

$$\chi_z = \varphi_z', \quad (24)$$

$$N_{x,c}^a = E_a A_a \varepsilon_x^a = N_x^a, \quad (25)$$

$$N_{x,c}^b = E_b A_b \varepsilon_x^b = N_x^b, \quad (26)$$

$$N_{y,c} = (G_a A_{s,y}^a + G_b A_{s,y}^b) \gamma_y + G_b A_{s,y}^b h_t \chi_x = N_y, \quad (27)$$

$$N_{z,c} = (G_a A_{s,z}^a + G_b A_{s,z}^b) \gamma_z = N_z, \quad (28)$$

$$M_{x,c} = (G_a I_{t,a} + G_b I_{t,b}) \chi_x = M_x, \quad (29)$$

$$M_{y,c} = (E_a I_{y,a} + E_b I_{y,b}) \chi_y = M_y, \quad (30)$$

$$M_{z,c} = (E_a I_{z,a} + E_b I_{z,b}) \chi_z = M_z, \quad (31)$$

$$q_y = -N_{y,c}^a - p_y^a = -G_a A_{s,y}^a \gamma_y' - p_y^a. \quad (32)$$

V enačbah (11)-(32) smo označili ravnotežne količine z N_x^a , N_x^b , N_y , N_z , M_x , M_y in M_z , konstitucijske količine z $N_{x,c}^a$, $N_{x,c}^b$, $N_{y,c}$, $N_{z,c}$, $M_{x,c}$, $M_{y,c}$ in $M_{z,c}$, deformacijske količine z ε_x^a , ε_x^b , γ_y , γ_z , χ_x , χ_y in χ_z , kinematične količine z u^a , u^b , v , w , φ_x , φ_y in φ_z , geometrijske karakteristike prečnih prerezov vsakega sloja kompozitnega nosilca z A_a , A_b , $A_{s,y}^a$, $A_{s,y}^b$, $A_{s,z}^a$, $A_{s,z}^b$, $I_{t,a}$, $I_{t,b}$, $I_{y,a}$, $I_{y,b}$, $I_{z,a}$ in $I_{z,b}$, materialne karakteristike pa z E_a , E_b , G_a in G_b . Dodatno v enačbah nastopa tudi komponenta kontaktne sile na stiku q_y , ki jo izračunamo s pomočjo izločene ravnotežne enačbe sloja a . Posplošeni sistem ravnotežnih enačb prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca sestavlja 29 diferencialnih algebrskih enačb za prav toliko neznanih funkcij. Pripadajoči robni pogoji pa so:

$$u^a(0) = u_0^a \text{ ali } N_x^a(0) - F_{x,0}^a = 0, \quad (33)$$

$$u^b(0) = u_0^b \text{ ali } N_x^b(0) - F_{x,0}^b = 0, \quad (34)$$

$$v(0) = v_0 \text{ ali } N_y(0) - F_{y,0} = 0, \quad (35)$$

$$w(0) = w_0 \text{ ali } N_z(0) - F_{z,0} = 0, \quad (36)$$

$$\varphi_x(0) = \varphi_{x,0} \text{ ali } M_x(0) - M_{x,0} = 0, \quad (37)$$

$$\varphi_y(0) = \varphi_{y,0} \text{ ali } M_y(0) - M_{y,0} = 0, \quad (38)$$

$$\varphi_z(0) = \varphi_{z,0} \text{ ali } M_z(0) - M_{z,0} = 0, \quad (39)$$

$$u^a(L) = u_L^a \text{ ali } N_x^a(L) + F_{x,L}^a = 0, \quad (40)$$

$$u^b(L) = u_L^b \text{ ali } N_x^b(L) + F_{x,L}^b = 0, \quad (41)$$

$$v(L) = v_L \text{ ali } N_y(L) + F_{y,L} = 0, \quad (42)$$

$$w(L) = w_L \text{ ali } N_z(L) + F_{z,L} = 0, \quad (43)$$

$$\varphi_x(L) = \varphi_{x,L} \text{ ali } M_x(L) + M_{x,L} = 0, \quad (44)$$

$$\varphi_y(L) = \varphi_{y,L} \text{ ali } M_y(L) + M_{y,L} = 0, \quad (45)$$

$$\varphi_z(L) = \varphi_{z,L} \text{ ali } M_z(L) + M_{z,L} = 0. \quad (46)$$

3 Deformacijska metoda končnih elementov

Predstavljene posplošene ravnotežne enačbe dvoslojnega prostorskega kompozitnega nosilca rešimo z metodo končnih elementov. S tem namenom razvijemo družino deformacijskih končnih elementov, kjer kot interpolacijske nastavke deformacijskih količin izberemo Lagrangeove polinome poljubne stopnje $n-1$, kjer so ($i=a, b$), ($m=y, z$) in ($p=x, y, z$). Zaradi lažjega zapisa v nadaljevanju upoštevamo $x^a \equiv x$ in dobimo:

$$\varepsilon_x^i(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \varepsilon_{x,k}^i, \quad \gamma_m(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \gamma_{m,k}, \quad \chi_p(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) \chi_{p,k}. \quad (47)$$

Znano je, da so tovrstni končni elementi neobčutiljivi za vse vrste blokiranja [7], ki so značilni za končne elemente zasnovane na pomikih. Ko nastavke (47) in variacije deformacijskih nastavkov $\delta \varepsilon_x^i(x)$, $\delta \gamma_m(x)$ in $\delta \chi_p(x)$ vstavimo v modificiran izrek o virtualnem delu, dobimo sistem $(7n + 21)$ enačb za $(7n + 21)$ neznanih količin, ki so ($j=1, 2, \dots, n$): $\varepsilon_{x,j}^a$, $\varepsilon_{x,j}^b$, $\gamma_{y,j}$, $\gamma_{z,j}$, $\chi_{x,j}$, $\chi_{y,j}$, $\chi_{z,j}$, $u^a(0)$, $u^b(0)$, $v(0)$, $w(0)$, $\varphi_x(0)$, $\varphi_y(0)$, $\varphi_z(0)$, $u^a(L)$, $u^b(L)$, $v(L)$, $w(L)$, $\varphi_x(L)$, $\varphi_y(L)$, $\varphi_z(L)$, $N_x^a(0)$, $N_x^b(0)$, $N_y(0)$, $N_z(0)$, $M_x(0)$, $M_y(0)$ in $M_z(0)$. Parameter n predstavlja število interpolacijskih točk končnega elementa. Diskretne posplošene ravnotežne enačbe prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca so ($j=1, 2, \dots, n$):

$$g_j = \int_0^L (N_{x,c}^a - N_x^a) P_j dx = 0, \quad (48)$$

$$g_{j+n} = \int_0^L (N_{x,c}^b - N_x^b) P_j dx = 0, \quad (49)$$

$$g_{j+2n} = \int_0^L (N_{y,c} - N_y) P_j dx = 0, \quad (50)$$

$$g_{j+3n} = \int_0^L (N_{z,c} - N_z) P_j dx = 0, \quad (51)$$

$$g_{j+4n} = \int_0^L (M_{x,c} - M_x) P_j dx = 0, \quad (52)$$

$$g_{j+5n} = \int_0^L (M_{y,c} - M_y) P_j dx = 0, \quad (53)$$

$$g_{j+6n} = \int_0^L (M_{z,c} - M_z) P_j dx = 0, \quad (54)$$

$$g_{7n+1} = u^a(L) - u^a(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \varepsilon_{x,i}^a dx = 0, \quad (55)$$

$$g_{7n+2} = u^b(L) - u^b(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \varepsilon_{x,i}^b dx = 0, \quad (56)$$

$$g_{7n+3} = v(L) - v(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \gamma_{y,i} dx - \varphi_z(0) L - \sum_{i=1}^n \int_0^L \int_0^x P_i \chi_{z,i} dx dx = 0, \quad (57)$$

$$g_{7n+4} = w(L) - w(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \gamma_{z,i} dx + \varphi_y(0) L + \sum_{i=1}^n \int_0^L \int_0^x P_i \chi_{y,i} dx dx = 0, \quad (58)$$

$$g_{7n+5} = \varphi_x(L) - \varphi_x(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \chi_{x,i} dx = 0, \quad (59)$$

$$g_{7n+6} = \varphi_y(L) - \varphi_y(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \chi_{y,i} dx = 0, \quad (60)$$

$$g_{7n+7} = \varphi_z(L) - \varphi_z(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^L P_i \chi_{z,i} dx = 0, \quad (61)$$

$$g_{7n+8} = S_1 + N_x^a(0) = 0, \quad (62)$$

$$g_{7n+9} = S_2 + N_x^b(0) = 0, \quad (63)$$

$$g_{7n+10} = S_3 + N_y(0) = 0, \quad (64)$$

$$g_{7n+11} = S_4 + N_z(0) = 0, \quad (65)$$

$$g_{7n+12} = S_5 + M_x(0) = 0, \quad (66)$$

$$g_{7n+13} = S_6 + M_y(0) = 0, \quad (67)$$

$$g_{7n+14} = S_7 + M_z(0) = 0, \quad (68)$$

$$g_{7n+15} = S_8 - N_x^a(0) + \int_0^L (p_x^a + b_c K_{stik,x} \Delta x) dx = 0, \quad (69)$$

$$g_{7n+16} = S_9 - N_x^b(0) + \int_0^L (p_x^b - b_c K_{stik,x} \Delta x) dx = 0, \quad (70)$$

$$g_{7n+17} = S_{10} - N_y(0) + \int_0^L p_y dx = 0, \quad (71)$$

$$g_{7n+18} = S_{11} - N_z(0) + \int_0^L p_z dx = 0, \quad (72)$$

$$g_{7n+19} = S_{12} - M_x(0) + \int_0^L (m_x + h_t q_y) dx = 0, \quad (73)$$

$$g_{7n+20} = S_{13} - M_y(0) - \int_0^L (N_z - m_y + h_t b_c K_{stik,x} \Delta x) dx = 0, \quad (74)$$

$$g_{7n+21} = S_{14} - M_z(0) + \int_0^L (N_y + m_z) dx = 0. \quad (75)$$

V enačbah (48)-(75) predstavljajo $N_{x,c}^a, N_{x,c}^b, N_{y,c}, N_{z,c}, M_{x,c}, M_{y,c}$ in $M_{z,c}$ konstitucijske sile, $u^a(0), u^b(0), v(0), w(0), \varphi_x(0), \varphi_y(0)$ in $\varphi_z(0)$ so pomiki in zasuki na začetku končnega elementa, $u^a(L), u^b(L), v(L), w(L), \varphi_x(L), \varphi_y(L)$ in $\varphi_z(L)$ pa na koncu elementa. Količine ($i=1,2,\dots,n$) $\varepsilon_{x,i}^a, \varepsilon_{x,i}^b, \gamma_{y,i}, \gamma_{z,i}, \chi_{x,i}, \chi_{y,i}$ in $\chi_{z,i}$ predstavljajo vrednosti upogibnih in strižnih deformacij ter ukrivljenosti v vsaki interpolacijski točki elementa. Količine $N_x^a(0), N_x^b(0), N_y(0), N_z(0), M_x(0), M_y(0)$ in $M_z(0)$ predstavljajo vrednosti ravnotežnih količin na začetku končnega elementa, s $p_x^a, p_x^b, p_y, p_z, m_x, m_y$ in m_z pa smo v enačbah (48)-(75) označili zunanje linijske obtežbe kompozitnega nosilca. V enačbah (48)-(54) nastopajo tudi ravnotežne količine $N_x^a(x), N_x^b(x), N_y(x), N_z(x), M_x(x), M_y(x)$ in $M_z(x)$, ki so definirane z enačbami:

$$N_x^a(x) = N_x^a(0) - \int_0^x (p_x^a + b_c K_{stik,x} \Delta x) dx, \quad (76)$$

$$N_x^b(x) = N_x^b(0) - \int_0^x (p_x^b - b_c K_{stik,x} \Delta x) dx, \quad (77)$$

$$N_y(x) = N_y(0) - \int_0^x p_y dx, \quad (78)$$

$$N_z(x) = N_z(0) - \int_0^x p_z dx, \quad (79)$$

$$M_x(x) = M_x(0) - \int_0^x (m_x + h_t q_y) dx, \quad (80)$$

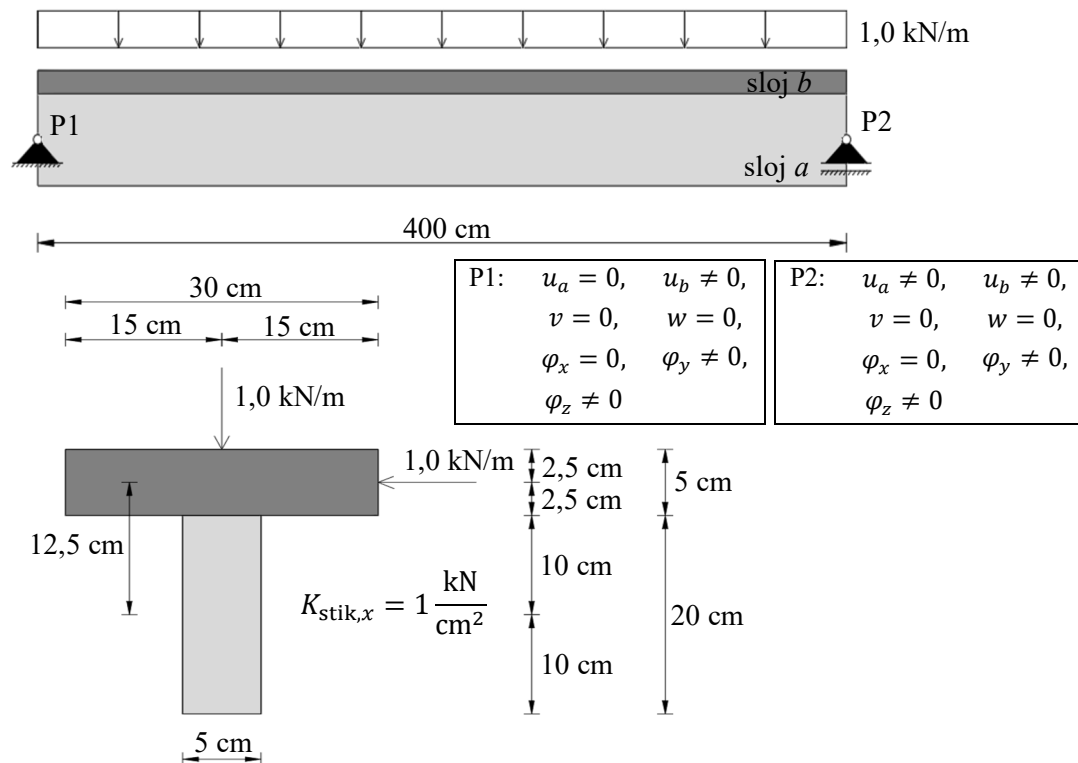
$$M_y(x) = M_y(0) + \int_0^x (N_z(x) - m_y + h_t b_c K_{stik,x} \Delta x) dx, \quad (81)$$

$$M_z(x) = M_z(0) - \int_0^x (N_y(x) + m_z) dx. \quad (82)$$

Sistem enačb (48)-(75) rešimo z Newton-Raphsonovo interpolacijsko shemo. V sklopu reševanja enačb modela moramo numerično rešiti veliko integralov, za kar v predstavljenem modelu uporabimo Gaussovo integracijsko shemo.

4 Prostorski dvoslojni leseni kompozitni nosilec

Natančnost obravnavanega numeričnega modela za analizo prostorskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev prikažemo na preprostem dvoslojnem lesenem nosilcu dolžine $L = 4$ m. Zgornji sloj nosilca je v svoji težiščni osi obtežen z navpično in vodoravno konstantno linijsko obtežbo vrednosti 1 kN/m (glej sliko 2). Na sliki 2 prikazujemo tudi geometrijske podatke o obravnavanem nosilcu ter kinematične robne pogoje in podatke o togosti stika med slojema.



Slika 2: Geometrijski podatki, podatki o obtežbi, robnih pogojih in lastnostih stika.

Geometrijske lastnosti prečnih prerezov sloja a in sloja b obravnavanega kompozitnega nosilca prikazujemo v tabeli 1, materialne karakteristike pa v tabeli 2.

Tabela 1: Geometrijske značilnosti prečnih prerezov sloja *a* in sloja *b*.

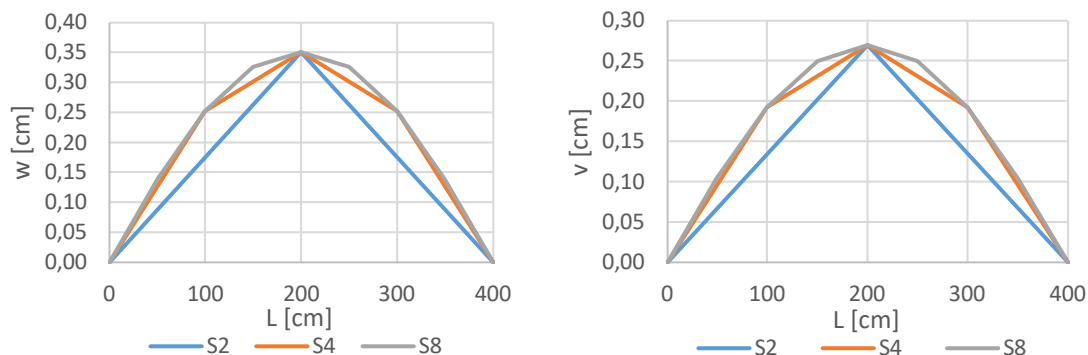
	A [cm ²]	$A_{s,y}$ [cm ²]	$A_{s,z}$ [cm ²]	I_y [cm ⁴]	I_z [cm ⁴]	I_t [cm ⁴]
sloj <i>a</i> :	100	100	100	3333,3	208,3	3541,6
sloj <i>b</i> :	150	150	150	312,5	11250	11562,5

Tabela 2: Elastični in strižni modul sloja *a* in sloja *b*.

	E [kN/cm ²]	G [kN/cm ²]
sloj <i>a</i> :	1100	100
sloj <i>b</i> :	1100	100

V nadaljevanju prikazujemo konvergenčno študijo natančnosti predstavljenih deformacijskih končnih elementov za analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Detajlnejšo študijo vpliva podajnosti stika med slojema in vpliva strižnih deformacij na deformabilnost nosilca bomo prikazali drugje. Pri konvergenčni analizi se omejimo le na končne elemente, kjer smo deformacijske količine interpolirali z Lagrangeovimi polinomi četrte stopnje, integrale v enačbah (48)-(75) pa smo integrirali s pet točkovno Gaussovo integracijsko shemo. Za lažjo interpretacijo rezultatov smo število uporabljenih končnih elementov označili s S_x , kjer x določa število končnih elementov.

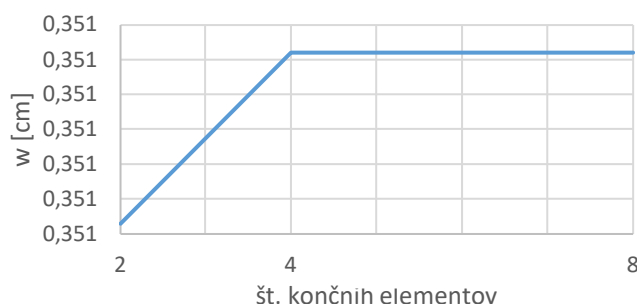
Natančnost navpičnih in prečnih pomikov prostorskega dvoslojnega kompozitnega lesenega nosilca v odvisnosti od števila deformacijskih končnih elementov prikazujemo na sliki 3.



Slika 3: Natančnost navpičnega pomika w in prečnega pomika v v odvisnosti od števila končnih elementov.

Iz slike 3 ugotovimo, da že z osmimi končnimi elementi dobimo zelo natančne vrednosti navpičnih in prečnih pomikov obravnavanega dvoslojnega prostorskega lesenega nosilca.

Na koncu na sliki 4 prikazujemo še konvergenčno analizo navpičnega pomika na sredini razpona obravnavanega kompozitnega nosilca. Opazimo, da že z dvema deformacijskima končnima elementoma dobimo zelo natančno vrednost pomika. To je pričakovano glede na relativno preprost matematični model nosilca, ki je geometrijsko in materialno linearen.



Slika 4: Konvergenčna analiza navpičnega pomika na sredini razpona obravnavanega prostorskega dvoslojnega kompozitnega nosilca.

5 Zaključek

V članku je predstavljen nov numerični model za analizo prostorskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema. Pri formulaciji modela smo v posplošenih ravnotežnih enačbah singularne vplive veznih enačb konsistentno izključili. Posplošene ravnotežne enačbe modela smo rešili z deformacijsko metodo končnih elementov.

Konvergenčne študije so pokazale veliko natančnost predstavljenega numeričnega modela za analizo prostorskih kompozitnih nosilcev. V nadaljnjih raziskavah bo smiselno model razširiti tudi za materialno in geometrijsko nelinearno analizo dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev kot tudi za analizo dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev v pogojih požara.

Zahvala

Zahvaljujemo se Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je s projektom P2-0260 finančno podprla delo I. Planinca in T. Hozjana.

Literatura

- [1] N. M. Newmark, C. P. Siest and C. P. Viest, "Test and analysis of composite beams with incomplete interaction," *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 1, pp. 75-92, 1951.
- [2] U. A. Girhammar and V. K. A. Gopu, "Composite beam-columns with inter-layer slip-exact analysis," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 199(4), pp. 1265-1282, 1993.
- [3] J. R. Goodman and E. P. Popov, "Layered wood systems with inter-layer slip," *Wood Science*, vol. 1(3), pp. 148-158, 1969.
- [4] S. P. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars," *Philosophical Magazine, Series 6*, vol. 41(245), pp. 744-746, 1921.
- [5] E. Reissner, "On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem," *Journal of Applied Mechanics and Physics (ZAMP)*, vol. 23, pp. 795-804, 1972.
- [6] J. C. Simo, "A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Izv. 49, pp. 55-70, 1985.
- [7] B. Čas, *Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji*, doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.



Uporaba utežene integralske formulacije za izboljšanje natančnosti kolokacijskih metod tipa Runge-Kutta

Janez Urevc¹, Primož Rus¹ in Miroslav Halilovič¹

The usage of weighted integral form for the improvement of accuracy of Runge-Kutta-type collocation methods

Povzetek. V tem delu je predstavljen nov razred metod tipa Runge-Kutta (RK) za numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb (NDE). V primerjavi s klasičnimi metodami RK izpeljava metod temelji na uteženi integralni obliki NDE. Pristop omogoča povečanje natančnosti uveljavljenih kolokacijskih metod tipa RK ob ohranjanju enakega števila stopenj metode (t.j. ob enakem številu koeficientov metode). Obnašanje metod je prikazano na analitičnem (testnem) in numeričnem primeru.

Abstract. In this work, a new class of Runge-Kutta (RK) type collocation methods for numerical integration of ordinary differential equations (ODE) is presented. Compared to classical RK methods, the derivation of methods is based on the weighted integral form of ODE. The approach makes it possible to increase the accuracy of established RK-type collocation methods while retaining the same number of method's stages (i.e., the number of method's coefficients). The behaviour of methods is demonstrated on an analytical (test) and numerical example.

1 Uvod

Posebna vrsta začetnih problemov, ki so predmet tega prispevka, so močno oscilirajoči in tako imenovani *togi* sistemi (angl. *stiff systems*). Takšne lastnosti na področju numeričnih analiz izkazujejo številni inženirski problemi [1–3]. Navadne diferencialne enačbe (NDE), ki opisujejo te sisteme, so v računskem smislu slabo pogojene in jih je zato težko rešiti [1]. Najpogosteje uporabljene metode za takšne sisteme so implicitne Runge-Kutta (RK) metode. Te so postale pomembne, ko je Butcher pokazal, da je implicitna Gaussova RK metoda s -te stopnje, z redom natančnosti $2s$, A-stabilna za vse s -je [4].

Podvrsta implicitnih RK metod so t.i. kolokacijske metode. Metode dajejo zvezen približek rešitve, kar jih dela primerne za probleme, kjer je potrebna globalno odvedljiva funkcija [5]. Kljub temu, da so metode znane že desetletja, so še vedno v nenehnem razvoju. Raziskave zajemajo uporabo metod pri novih vrstah problemov, izpeljavo novih strategij reševanja in

¹ Laboratorij za numerično modeliranje in simulacije, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani

razvoj novih postopkov za reševanje nelinearnih enačb [3]. Tri osnovne vrste implicitnih RK metod so Gauss-Legendreova, Gauss-Radau in Gauss-Lobattojeva kvadratura [6].

V tem delu predstavljamo nov razred kolokacijskih metod za numerično integracijo NDE. Pristop temelji na uteženi integralski obliki NDE in prikazuje možnost, kako je mogoče natančnost kolokacijskih metod tipa RK (natančneje metod Gauss-Legendre in Lobatto IIIA) izboljšati, hkrati pa ohraniti število koeficientov metode.

2 Izpeljava metode

Začetni problemi, obravnavani v tem delu, so zapisani v obliki:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (1)$$

kjer je $y(x_n) = y_0$ s spremenljivko problema $y \in \mathbb{R}^d$, za katero iščemo aproksimativno rešitev na interval $[x_n, x_n + h]$, h pa je časovni korak. V nasprotju s klasičnimi kolokacijskimi metodami novi razred metod izhaja iz utežene integralne oblike enačbe (1):

$$\int_{x_n}^{x_n+h} y'(x) v(x) dx = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) v(x) dx, \quad (2)$$

kjer je $v(x)$ testna (ali utežna) funkcija, ki je v splošnem lahko poljubna. Enačbo (2) najprej zapišimo z uvedbo brezdimenzijske spremenljivke τ v intervalu $[0, 1]$, kjer je $x = x_n + \tau h$:

$$\int_0^1 y'(x_n + \tau h) v(\tau) d\tau = \int_0^1 f(x_n + \tau h, y(x_n + \tau h)) v(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Za aproksimativno rešitev y' uporabimo kolokacijski polinom u' stopnje s :

$$y'(x_n + \tau h) \approx u'(x_n + \tau h) = \sum_{j=1}^s k_j l_j(\tau), \quad (4)$$

kjer so k_j diskretne vrednosti funkcije $u'(x_n + \tau h)$ v kolokacijskih točkah c_j , $k_j = u'(x_n + c_j h)$ in $l_j(\tau)$ so Lagrangeovi polinomi. Izbor kolokacijskih točk c_j , $j = 1, \dots, s$ je v splošnem poljuben. V tem delu se bomo omejili na uporabo Legendreovega polinoma stopnje s (in njegovih kombinacij), ki je na intervalu $[0, 1]$ definiran kot:

$$P_s^*(\tau) = \frac{d^s}{d\tau^s} (\tau^s (\tau - 1)^s). \quad (5)$$

Ničle $P_s^*(\tau)$ tako predstavljajo kolokacijske točke. Izpeljavo nadaljujmo za splošen primer, uporaba nekaterih primerov kolokacijskih točk pa bo prikazana v sledečem poglavju.

Z upoštevanjem enačbe (4) v (3) sledi:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^s k_j l_j(\tau) v(\tau) d\tau = \int_0^1 f(x_n + \tau h, y_0 + h \sum_{j=1}^s k_j \int_0^\tau l_j(\tau) d\tau) v(\tau) d\tau, \quad (6)$$

kjer smo upoštevali:

$$u(x_n + \tau h) = y_0 + h \sum_{j=1}^s k_j \int_0^\tau l_j(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Neznanke v (6) so k_j , $j = 1, \dots, s$, diskretne vrednosti aproksimativne funkcije u' . Enačbe, iz katerih lahko določimo neznane koeficiente, dobimo z upoštevanjem različnih testnih funkcij v enačbi (6). Za testne funkcije smo uporabili Lagrangeove polinome stopnje s :

$$v_i(\tau) = \prod_{l \neq i} \frac{\tau - \zeta_l}{\zeta_i - \zeta_l}, \quad i = 1, \dots, s \quad (8)$$

kjer s predstavlja število enačb, dobljenih iz (6). Točke ζ_i v enačbi (8) so zaradi lastnosti $\zeta_1 = 0, \zeta_s = 1$ izbrane kot ničle Lobattojovega polinoma $P_s^*(\tau) - P_{s-2}^*(\tau)$. Leva stran enačbe (6) je tako po vzoru standardne notacije kvadrature zapisana kot:

$$\sum_{j=1}^s k_j p_{ij} \quad \text{kjer je} \quad p_{ij} = \int_0^1 l_j(\tau) v_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, s \quad (9)$$

z $l_j(\tau)$ in $v_i(\tau)$ določena z enačbama (4) oz. (8).

Desno stran enačbe lahko aproksimiramo kot:

$$f(x_n + \tau h, u(x_n + \tau h)) \approx \sum_{j=1}^{\hat{s}} \hat{F}_j \hat{l}_j(\tau) \quad (10)$$

kjer so \hat{F}_j diskretne vrednosti funkcije $f(x_n + \tau h, u(x_n + \tau h))$ v kolokacijskih točkah \hat{c}_j , $\hat{F}_j = f(x_n + \hat{c}_j h, u(x_n + \hat{c}_j h))$. Funkcije $\hat{l}_j(\tau)$ so Lagrangeovi polinomi:

$$\hat{l}_j(\tau) = \prod_{l \neq j} \frac{\tau - \hat{c}_l}{\hat{c}_j - \hat{c}_l}, \quad j = 1, \dots, \hat{s} \quad (11)$$

in $\hat{c}_j, j = 1, \dots, \hat{s}$ kolokacijske točke. Enako kot pri kolokacijskih točkah c_j so vrednosti točk \hat{c}_j v splošnem lahko določene poljubno, predvsem pa ne velja omejitev $\hat{c}_j = c_j$. Kot bo predstavljeno v tem delu, bomo za določitev kolokacijskih točk uporabili ničle funkcije $P_{\hat{s}}^*(\tau)$ oz. njenih kombinacij.

Desno stran enačbe (6) lahko zapišemo kot:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\hat{s}} \hat{F}_j \hat{l}_j(\tau) v(\tau) d\tau = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\hat{s}} f(x_n + \hat{c}_j h, y_0 + h \sum_{m=1}^s k_m \int_0^{\hat{c}_j} l_m(\tau) d\tau) \hat{l}_j(\tau) v(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Z upoštevanjem enačbe (3) in (8) pa ta postane:

$$\sum_{j=1}^{\hat{s}} f(x_n + \hat{c}_j h, y_0 + h \sum_{m=1}^s k_m a_{jm}) q_{ij}, \quad i = 1, \dots, s \quad \text{kjer sta}$$

$$q_{ij} = \int_0^1 \hat{l}_j(\tau) v_i(\tau) d\tau, \quad a_{jm} = \int_0^{\hat{c}_j} l_m(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, \hat{s} \quad (13)$$

z $\hat{l}_j(\tau)$ in $v_i(\tau)$ določenima z enačbama (11) oz. (8).

Končna oblika enačbe (6) je tako:

$$\sum_{j=1}^s k_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{\hat{s}} f(x_n + \hat{c}_j h, y_0 + h \sum_{m=1}^s k_m a_{jm}) q_{ij}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (14)$$

s koeficienti, definiranimi z enačbami (9) in (13). Iz sistema enačb (14) se določi diskretne vrednosti aproksimativne funkcije $k_j, j = 1, \dots, s$, ki je v splošnem lahko linearen ali pa nelinearen. Končna točka intervala $y(x_n + h)$ je aproksimirana kot:

$$y(x_n + h) \approx u(x_n + h) = y_0 + h \sum_{j=1}^s k_j \int_0^1 l_j(\tau) d\tau = y_0 + h \sum_{j=1}^s k_j b_j \quad (15)$$

kjer so b_j koeficienti, definirani kot:

$$b_j = \int_0^1 l_j(\tau) d\tau, \quad j = 1, \dots, s. \quad (16)$$

Numerične vrednosti koeficientov metode ($p_{ij}, q_{ij}, a_{jm}, b_j$) so pogojene z znanimi vrednosti kolokacijskih točk $c_j, j = 1, \dots, s$, in $\hat{c}_j, j = 1, \dots, \hat{s}$.

3 Posamezne družine metod, njihova natančnost in stabilnost

V tem delu bomo za točke $c_j, j = 1, \dots, s$, in $\hat{c}_j, j = 1, \dots, \hat{s}$ analizirali dva primera in sicer uporabo Gauss-Legendre in Lobattojevih kolokacijskih točk. Posamezna metoda bo poimenovana po uporabljenih točkah, npr. metoda $G_s|G_{\hat{s}}$ upošteva s -to stopnjo Gaussovih točk za $c_j, j = 1, \dots, s$, in \hat{s} -to stopnjo Gaussovih točk za $\hat{c}_j, j = 1, \dots, \hat{s}$. Analizirane metode so zbrane v tabeli 1. Zapis koeficientov metod, enačba (14), je prikazan v [7] in je izveden v stilu razširitve t.i. Butcherjevih tabel, ki predstavljajo enega najbolj klasičnih prikazov koeficientov RK metod. Predstavljena metodologija tako glede na RK metode ne spreminja postopka reševanja v izvedbenem smislu, saj se sestavljanje sistema enačb (14) tudi v tem primeru izvede s pomočjo tabeliranih koeficientov, predhodno izračunanih po enačbah (9), (13) in (16).

Tabela 1: Analizirane družine metod.

Družine metod	Polinomi za določitev kolokacijskih točk:	
	$c_j, j = 1, \dots, s$	$\hat{c}_j, j = 1, \dots, \hat{s}$
$G_s G_s$	$P_s^*(\tau)$	$P_{\hat{s}}^*(\tau); \hat{s} = s$
$G_s G_{s+1}$	$P_s^*(\tau)$	$P_{\hat{s}}^*(\tau); \hat{s} = s + 1$
$L_s L_s$	$P_s^*(\tau) - P_{s-2}^*(\tau)$	$P_{\hat{s}}^*(\tau) - P_{\hat{s}-2}^*(\tau); \hat{s} = s$
$L_s L_{s+1}$	$P_s^*(\tau) - P_{s-2}^*(\tau)$	$P_{\hat{s}}^*(\tau) - P_{\hat{s}-2}^*(\tau); \hat{s} = s + 1$

3.1 Natančnost in linearna stabilnost

Natančnost metod bo preverjena na testnih enačbah:

$$\begin{aligned}
 \text{Testna enačba A} \quad & y'(x) = \lambda y(x), \quad y(x_n) = y_0 \\
 & y_e(x) = y_0 e^{x\lambda} \\
 \text{Testna enačba B} \quad & y'(x) = \lambda \cos(x\lambda) + x, \quad y(x_n) = y_0 \\
 & y_e(x) = y_0 + \sin(x\lambda) + x^2/2
 \end{aligned} \tag{17}$$

kjer $y_e(x)$ predstavlja ekzaktno rešitev. Enačba A je standardna testna enačba za določitev natančnosti in linearne stabilnosti metod. Enačba B pa je predlagana, da pokaže vpliv uporabe različnih kvadratur za integracijo desne strani NDE. Natančnosti metod so določene z upoštevanjem metod na testnih enačbah. Aproksimativna in ekzaktna rešitev sta razširjeni v Taylorjevo vrsto okoli točke x_n za korak h in sta med seboj odšteti, od koder sledi red napake aproksimativne rešitve. Analiza stabilnosti je izvedena po klasičnem postopku z uporabo testne enačbe A. Za primerjavo je isti postopek izveden za metodi Gauss-Legendre in Lobatto IIIC [8]. Metodi sta uporabljeni zaradi njune visoke natančnosti in splošne uporabnosti.

Tabela 2: Red natančnosti analiziranih metod.

Metoda		$L_s L_s$	$G_s G_s, L_s L_{s+1},$ Gauss-Legendre	$G_s G_{s+1}$	Lobatto IIIC
Število koeficientov metode		s	s	s	s
Red natančnosti	Testna enačba A	$2s - 2$	$2s$	$2s$	$2s - 2$
	Testna enačba B	$2s - 2$	$2s$	$2s + 2$	$2s - 2$

Vpliv uporabe višje integracije za desno stran NDE je razviden s primerjavo natančnosti metod $L_s|L_s$ v primerjavi z $L_s|L_{s+1}$ in $G_s|G_s$ v primerjavi z $G_s|G_{s+1}$, tabela 2. Natančnost metod se je povešala zgolj z povečanjem integracije desne strani NDE, hkrati pa je ohranilo število koeficientov metode. Kot je prikazano v tabeli 2 pa izboljšanje natančnosti ni splošno in je odvisno od obravnavanega sistema. Vse analizirane metode, razen Lobatto IIIC, so A-stabilne.

4 Numerični primer

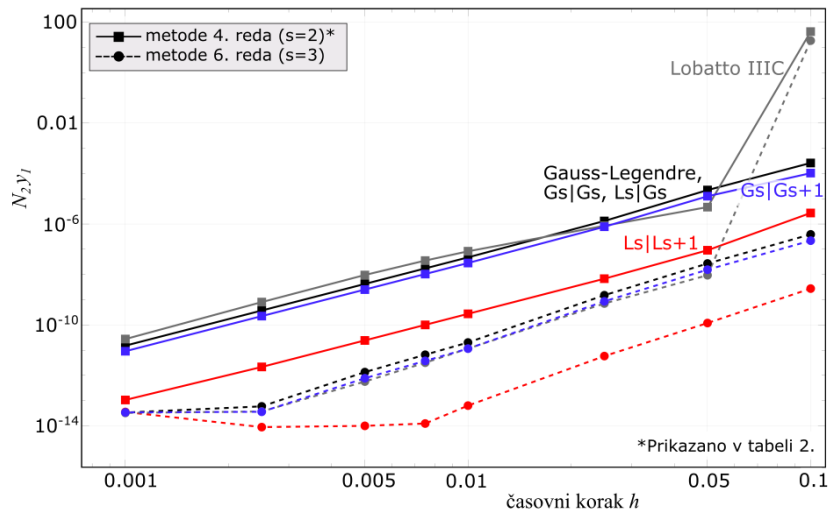
Metode smo analizirali na več testnih problemih, ki so vključevali izrazito toge sisteme, močno nelinearne in harmonične. Rezultati so pokazali, da imajo nove metode primerljivo oz. celo znatno izboljšano natančnost [7]. V tem delu bomo predstavili iz literature povzet primer, ki zaradi visoke nelinearnosti predstavlja enega bolj zahtevnih testnih sistemov. Analizirane metode so $L_s|L_{s+1}$, $G_s|G_s$ in $G_s|G_{s+1}$ za red natančnosti 4 in 6, t.j. za stopnji $s = 3, 4$. Za primerjavo sta analizirani še metodi Gauss-Legendre in Lobatto IIIC.

Analize so izvedene s konstantno velikostjo časovnega koraka h za različne velikosti korakov. Odstopanje med aproksimativno in ekzaktno rešitvijo je predstavljeno z izračunom diskretne L_2 norme. Izračuni so bili izvedeni v Wolfram Mathematica 11. Nelinearni sistemi enačb so bili rešeni z uporabo Newton-Raphsonove metode s toleranco relativne napake 10^{-15} .

Analiziran problem je bil predstavljen v delu Vigo-Aguiara s sodelavci [2]:

$$\begin{cases} y_1' = -10^3(y_1^3 y_2^6 - \cos^3(t) \sin^6(t)) - \sin(t), & y_1(0) = 1 \\ y_2' = -10^3(y_2^5 y_3^4 - \sin^9(t)) + \cos(t), & y_2(0) = 0 \\ y_3' = -10^3(y_1^2 y_3^3 - \cos^2(t) \sin^3(t)) + \cos(t), & y_3(0) = 0 \\ x \in [0, 5] \end{cases} \quad (18)$$

z ekzaktno rešitvijo $y_1(t) = \cos(t)$, $y_2(t) = y_3(t) = \sin(t)$. Napake posameznih metod za spremenljivko y_1 so prikazane na sliki 1, kjer se kvadrati nanašajo na metode 4-reda in krogi na metode 6-reda. Kot je prikazano na sliki, se je najbolje izkazala metoda $L_s|L_{s+1}$, kateri sledi metoda $G_s|G_{s+1}$, nato pa metoda $G_s|G_s$. Pri večjih korakih je metoda Lobatto IIIC nestabilna.



Slika 1: Napake različnih metod (predstavljene z L_2 normo) v primerjavi z velikostjo koraka za analiziran primer (log-log skala). Natančnosti metod so navedene v tabeli 2.

5 Diskusija in zaključek

V tem delu je bil prikazan nov razred metod za numerično integracijo NDE. V nasprotju s klasičnim načinom izpeljave kolokacijskih metod tipa RK je novi razred metod izpeljan iz utežene integralne oblike NDE. Takšen pristop omogoča ločeno integracijo leve in desne strani NDE, zaradi česar lahko za vsak del uporabimo različno kvadrature, kar ima za posledico množico različnih družin metod. V tem delu smo analizirali uporabo Gauss-Legendreovih in Lobattovih kolokacijskih točk. V [7] smo pokazali, da uporaba Gaussove kvadrature na obeh straneh NDE (t.j. metoda $G_s|G_s$) rezultira v Gauss-Legendrejevo metodo, kot je tudi razvidno iz rezultatov na sliki 1, prav tako pa uporaba Lobatove kvadrature na obeh straneh NDE (metoda $L_s|L_s$) vrne metodo Lobatto IIIA. To pa pomeni, da prikazan postopek omogoča izboljšanje natančnosti obstoječih metod Gauss-Legendre in Lobatto IIIA pri enakem številu stopnje metode s .

V tehničnih in naravoslovnih znanostih se implicitne metode tipa RK še vedno pogosto uporabljajo, zlasti za reševanje togih sistemov. Ker so raziskovalci seznanjeni z Butcherjevimi tabelami, je mogoče obstoječe programske kode izboljšati v skladu s predlaganim pristopom le z spreminjanjem nabora enačb, kar predstavlja le majhno spremembo za povišanje natančnosti oz. ohranitev števila neznank metode. Zaradi jasnosti smo v tem delu analizirali le uporabo Gauss-Legendre in Lobattovih kolokacijskih točk. Nadalje bi lahko analizirani še številne druge primere, ko so Radau I, Radau II ali pa tako imenovane Gauss-Lobatto Chebysheve točke.

Literatura

- [1] Y.N.I. Chan, I. Birnbaum, L. Lapidus, *Solution of Stiff Differential Equations and the Use of Imbedding Techniques*, Ind. Eng. Chem. Fund. 17, 133–148, 1978.
- [2] J. Vigo-Aguiar, J. Martín-Vaquero, H. Ramos, *Exponential Fitting BDF–Runge–Kutta Algorithms*, Computer Physics Communications, 178, 15–34, 2008.
- [3] J. Martín-Vaquero, *17th-Order Radau IIA Method for Package RADAU*, Applications in Mechanical Systems, Computers & Mathematics with Applications, 59, 2464–2472, 2010.
- [4] J.R. Cash, Review Paper: *Efficient Numerical Methods for the Solution of Stiff Initial-Value Problems and Differential Algebraic Equations*, Proc. R. Soc. Lond. A, 459, 797–815, 2003.
- [5] F. Costabile, A. Napoli, *A Class of Collocation Methods for Numerical Integration of Initial Value Problems*, Computers & Mathematics with Applications, 62, 3221–3235, 2011.
- [6] T.Y. Ying, N. Yaacob, *Implicit 7-Stage Tenth Order Runge-Kutta Methods Based on Gauss-Kronrod-Lobatto Quadrature Formula*, Malays. J. Ind. Appl. Math., 31, 17, 2015.
- [7] J. Urevc, M. Halilovič, *Enhancing Accuracy of Runge–Kutta-Type Collocation Methods for Solving ODEs*, Mathematics, 9, 174, 2021.
- [8] J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Wiley, Chichester, England, Hoboken, NJ, ISBN 978-0-470-72335-7, 2008.



Frekvenčne cenilke poškodovanosti

Aleš Zorman¹, Janko Slavič¹ in Miha Boltežar¹

Vibration fatigue and spectral methods

Povzetek. Tekom obratovalne dobe strukture je le-ta izpostavljena različnim obremenitvam, ki so deterministične in/ali naključne narave. Naključna obremenitev v povezavi s strukturno dinamiko zajema enega pomembnejših izzivov inženirske dejavnosti - oceno utrujenostne poškodbe, ki predstavlja velik izziv pri zasnovi izdelka, saj se lom slednjega zgodi nepričakovano in ni vezan na hipno preobremenitev. V zgodnjih fazah razvoja se pri optimizaciji izdelka daje prednost stohastičnemu pristopu ocene poškodovanosti v frekvenčnem prostoru, z neprimerljivo krajšim časom analize namram rainflow algoritmu. Prispevek se osredotoča na oceno dobe trajanja pri naključni obremenitvi in izpostavlja pomembne razlike v pristopu k oceni poškodovanosti v primeru širokopasovnega naključnega procesa; natančnost ocene dobe trajanja je pogojena z izbiro ustrezne frekvenčne cenilke poškodovanosti.

Abstract. During the service life of the structure, it is exposed to various loads that are deterministic and/or random. Random loading in conjunction with structural dynamics represents one of the most important challenges of engineering - the prediction of fatigue life, which is a great challenge in the design of the product, as the fracture of the latter occurs unexpectedly and is not dependent on instantaneous overload. In the early stages of development, a stochastic approach to the assessment of damage in frequency domain is preferred, with an incomparably shorter analysis time compared to the rainflow algorithm. This work focuses on estimating the vibration fatigue life and highlights important differences in approach to damage assessment of various spectral methods in the case of a broadband random process; the accuracy of the estimated fatigue life is conditioned by the choice of the appropriate spectral method.

1 Uvod

Pri vibracijskem utrujanju so strukture podvržene determinističnim in stohastičnim obremenitvam, katere obravnavamo kot naključne procese [1, 2]. Te obremenitve so lahko strukturi lastnega izvora, kot so notranje vibracije pogonskih sistemov, ali pa so posledica interakcij z

¹ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani

okoljem: vibracije prevoznih sredstev pri vožnji po neidealni podlagi, odziv stolpnice in mostov na aerodinamično vzbujanje, odziv naftnih ploščadi ter ladij zaradi valovanja in morskih tokov. Naključnost odziva zahteva statistično obravnavo, pri čemer naključni proces okarakteriziramo s porazdelitveno funkcijo verjetnosti in gostoto močnostnega spektra. Ob veljavnosti predpostavke stacionarnosti in normalne porazdelitve se analiza vibracijskega utrujanja močno poenostavi s prehodom v frekvenčni prostor.

Utrujenostna poškodba nastane kot posledica dinamične obremenitve izdelka tekom njegove dobe trajanja. Navadno se lom izdelka zgodi nenadoma, brez predhodnjega opozorila, in ni vezan na hipno preobremenitev. V primeru naključne obremenitve v povezavi s strukturno dinamiko je proces tvorjenja poškodbe izjemne kompleksnosti. Napoved poškodbe v frekvenčni domeni temelji na napetostnem pristopu določanja poškodbe, kjer je ob predpostavki linearne akumulacije poškodbe [3, 4] temeljna naloga inženirja ocena funkcije gostote verjetnosti amplitude obratovalnih ciklov.

Med najbolj uveljavljene cenilke poškodovanosti v časovni domeni vsekakor sodi rainflow algoritem, katerega sta leta 1968 predlagala Matshushi in Endo [5]. Kar štirinajst let pred slednjim je Miles podal frekvenčno cenilko poškodovanosti za primer ozkopasovnega naključnega procesa [6]. Očitno se je verjetnosti pristop določanja utrujenostne poškodbe izvorno zdel ustreznejši od determinističnega. Ocena poškodovanosti pri širokopasovnem naključnem procesu je osnovana na enem izmed naslednjih pristopov: uporaba cenilke za ozkopasovni naključni proces in korekcijskega faktorja (Wirching-Light [7], Ortiz-Chen [8], $\alpha_{0.75}$ [9], Tovo-Benasciutti [10, 11]), določanje poškodovanosti preko aproksimacije funkcije gostote verjetnosti amplitude ciklov (Dirlik [12], Zhao-Baker [13], Park [14]) ter delitvijo gostote močnostnega spektra (PSD, ang. *Power Spectral Density*) na posamezne ozkopasovne segmente (Jiao-Moan [15], Sakai-Okamura [16], Fu-Cebon [17], prilagojena Fu-Cebon [18], Low [19], Gao-Moan [20], single-moment [21], bands-method [22]). Poznavanje uporabnosti in predpostavk posameznih frekvenčnih cenilk omogoča ustrezno izbiro slednjih z ozirom na PSD v kritični točki strukture.

2 Naključni proces

Večina tehniških problemov je porazdeljena normalno, kar gre pripisati centralnem limitnem teoremu [1], glede na katerega je vsota naključnih spremenljivk poljubne porazdelitve normalno porazdeljena. Stacionaren, normalno porazdeljen naključni proces $x(t)$ zvezne naključne spremenljivke X je opredeljen s funkcijo gostote verjetnosti (PDF, ang. *Probability Density Function*) kot [23]:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}, \quad (1)$$

pri čemer porazdelitev popolnoma definirata povprečna vrednost μ_X in standardna deviacija σ_X procesa. Povezana funkcija verjetnosti je pri stacionarnih procesih odvisna le od relativne razlike τ med časoma t_1 in t_2 , kar opisuje avtokorelacijska funkcija $R_{XX}(\tau = t_2 - t_1)$. Ta je ob predpostavki ergodičnosti podana s povprečenjem naključnega procesa po času t [24]:

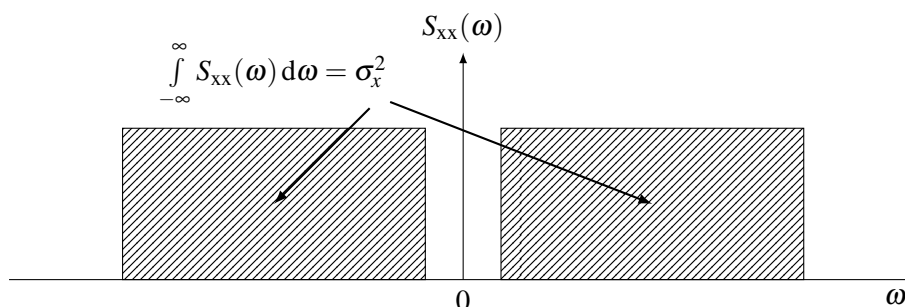
$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (2)$$

PSD predstavlja komplement funkcije gostote verjetnosti pri opisu normalno porazdeljenega naključnega procesa, saj podaja informacijo o porazdelitvi moči naključnega procesa, kot prikazuje slika 1. PSD je definiran z Wiener-Hinčinovim izrekom [24], ki podaja njegovo povezavo z avtokorelacijsko funkcijo $R_{XX}(\tau)$ (2) :

$$S_{XX}(\omega) = \mathcal{F} \{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$R_{XX}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_{XX}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

Obstoj Fourierove transformiranke avtokorelacijske funkcije $R_{XX}(\tau)$ (3) je pogojen z Dirichletovim pogojem [24, 23]. V navezi s PSD-jem je podan i -ti spektralni moment:



Slika 1: Gostota močnostnega spektra naključnega procesa $S_{xx}(\omega)$.

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^i S_{XX}(\omega) d\omega = (2\pi)^i \int_0^{\infty} f^i W_{XX}(f) df, \quad (5)$$

pri čemer predstavlja $W_{XX}(f)$ ekvivalentni enostranski PSD s frekvenčno osjo v Hz. Slednji se navadno uporablja v praksi, povezava z $S_{XX}(\omega)$ pa je podana na osnovi enakega prispevka povprečne moči v posameznem frekvenčnem segmentu $d\omega$:

$$W_{XX}\left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) = 4\pi S_{XX}(\omega). \quad (6)$$

3 Vibracijsko utrujanje

Pri vibracijskem utrujanju je doba trajanja izdelka ocenjena na osnovi napetosti, ki se pojavljajo tekom obratovanja. Pristop je primeren predvsem za visokociklično področje obratovanja, kjer je stopnja plastične deformacije relativno majhna; predpostavljena je linearna zveza med napetostmi in deformacijami [25]. Napetostni pristop določanja utrujenostne poškodbe temelji na Wöhlerjevi krivulji² [25]:

$$s_a^k N = C, \quad (7)$$

pri čemer je N število obremenitvenih ciklov na napetostnem nivoju s_a , eksponent k in koeficient C pa sta eksperimentalno določeni konstanti.

²Drugo ime za Wöhlerjevo krivuljo je S-N krivulja.

Osnovni pristop določanja utrujenostne poškodbe je linearni razvoj z linearno akumulacijo poškodbe, poznan kot Palmgren-Minerjevo pravilo [3, 4]. Linearna akumulacija poškodbe je izražena kot:

$$D = \sum_{i=1}^u D_i = \sum_{i=1}^u \frac{n_i(s_a)}{N_i(s_a)}, \quad (8)$$

pri čemer sta $N_i(s_a)$ število obremenitvenih ciklov do porušitve na napetostnem nivoju s_a in u število napetostnih intervalov $[s_a, s_a + \Delta s]$. Do porušitve izdelka pride pri vrednosti utrujenostne poškodbe $D \geq 1$. Velja poudariti, da Palmgren-Minerjevo pravilo ne upošteva zaporedja obremenitvenih ciklov, ki v splošnem vpliva na dobo trajanja [26]. V nasprotju z enačbo (8), ki podaja poškodbo na osnovi obremenitvenih ciklov poznane časovne zgodovine naključnega procesa, sloni ocena poškodbe z verjetnostnim pristopom na uporabi funkcije gostote verjetnosti amplitud $p_a(s)$ in povprečne frekvence vrhov v_p . Intenziteta poškodovanosti se izrazi na osnovi Palmgren-Minerjevega pravila in enačbe Wöhlerjeve krivulje:

$$d = C^{-1} v_p E \left[s_a^k \right] = C^{-1} v_p \int_0^{\infty} s^k p_a(s) ds. \quad (9)$$

Funkcija gostote verjetnosti amplitud $p_a(s)$ je neznan in predstavlja srž ocene dobe trajanja v frekvenčnem prostoru.

Ocena poškodovanosti v frekvenčnem prostoru temelji na gostoti močnostnega spektra $S_{xx}(\omega)$, na osnovi katerega se oceni statistične lastnosti naključnega procesa. V splošnem je napetostno stanje v materialu večosno in zahteva poznavanje celotnega napetostnega tenzorja. Primerjavo frekvenčnih metod transformacije večosnega v enoosno napetostno stanje je podal Mšrnik *et al.* [27]. S privzetim enoosnim napetostnim stanjem je časovna zgodovina ozkopasovnega in širokopasovnega signala, skupaj z lokalnimi maksimumi in prečenji ničlišča, prikazana na sliki 2. Razvidno je, da ima razporeditev moči signala vdolž frekvenčne osi izjemen vpliv na statistične lastnosti naključnega procesa, kot sta porazdelitvena funkcija verjetnosti in povprečna frekvenca obratovalnih ciklov. Kljub enaki gostoti porazdelitve trenutne vrednosti (1) imata procesa različni porazdelitveni funkciji vrhov $p_p(s)$, povprečni frekvenci procesa v_0^+ ter povprečni frekvenci vrhov v_p . Slednji sta izraženi v odvisnosti od spektralnega momenta (5):

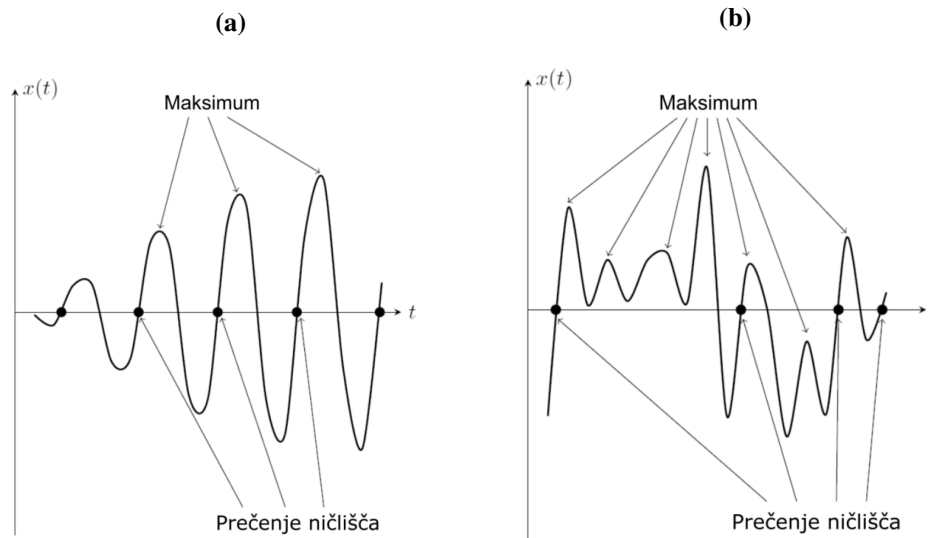
$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}, \quad (10)$$

$$v_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (11)$$

Razmerje med povprečno frekvenco procesa v_0^+ in povprečno frekvenco vrhov v_p predstavlja frekvenčno širino naključnega procesa in je definirano kot faktor iregularnosti α_2 [25]. Njegova posplošena oblika α_i je podana kot:

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\sqrt{m_0 m_{2i}}}, \quad (12)$$

pri čemer i zavzame poljubno pozitivno realno število. Ozkopasovni naključni proces ima vso moč zbrano znotraj ozkega frekvenčnega pasu, s faktorjem iregularnosti $\alpha_2 \approx 1$. Z večanjem



Slika 2: Prečenja ničlišča in lokalni maksimumi; a) Ozkopasovni naključni proces, b) Širokopasavni naključni proces.

širine frekvenčnega pasu se faktor iregularnosti približuje ničli. Alternativno se uporablja faktor spektralne širine [2]:

$$\varepsilon_i = \sqrt{1 - \alpha_i^2}, \quad (13)$$

pri čemer sta dokaj uveljavljena Vanmarcke-jev faktor ε_V ($i = 1$) [2] in Wirsching-Light-ov faktor spektralne širine ε ($i = 2$) [7]. Za oceno intenzitete poškodovanosti poznavanje funkcije gostote verjetnosti vrhov $p_p(s)$ ni zadostno; zahtevana je gostota verjetnosti amplitud $p_a(s)$. Ocena le-te je bistvo frekvenčnih cenilk poškodovanosti.

4 Frekvenčne cenilke poškodovanosti

Frekvenčne cenilke poškodovanosti temeljijo na oceni statističnih lastnosti naključnega procesa; za ozkopasovni naključni proces je funkcija gostote verjetnosti amplitude obratovalnih ciklov podana analitično, medtem ko je za širokopasovni naključni proces potrebna aproksimacija ocene poškodovanosti. Glede na izbrani pristop so cenilke kategorizirane na pristop s korekcijskim faktorjem, aproksimacijo gostote verjetnosti z ozirom na rainflow algoritem ter na segmentacijo močnostnega spektra.

4.1 Ozkopasovni proces - narrowband

Funkcija gostote verjetnosti amplitude napetosti $p_a(s)$ ozkopasovnega naključnega procesa je Rayleigh-jevo porazdeljena:

$$p_a(s) = \frac{s}{\sigma_X^2} e^{-\frac{s^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (14)$$

povprečna frekvenca vrhov v_p pa je enaka centralni frekvenci procesa v_0^+ . Ob upoštevanju slednjega je podan zaprtizančni izraz za intenziteto poškodovanosti [1, 6]:

$$d^{NB} = v_0^+ C^{-1} \left(\sqrt{2m_0} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right), \quad (15)$$

pri čemer predstavlja $\Gamma(\cdot)$ Eulerjevo gama funkcijo:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (16)$$

4.2 Širokopasovni proces - narrowband korekcija

Intenziteta poškodovanosti frekvenčnih cenilk poškodovanosti na osnovi korekcije cenilke ozkopasovnega procesa (15) je podana v obliki:

$$d^X = \rho_X d^{NB}, \quad (17)$$

pri čemer predstavlja ρ_X korekcijski faktor izbrane cenilke.

4.2.1 Wirsching-Light

Wirsching in Light sta leta 1980 prilagodila narrowband cenilko za aplikacijo širokopasovnega spektra z uporabo korekcijskega faktorja ρ_{WL} [7]:

$$d^{WL} = \rho_{WL} d^{NB}. \quad (18)$$

Korekcijski faktor ρ_{WL} je podan kot:

$$\rho_{WL} = a(k) + [1 - a(k)] (1 - \varepsilon)^{b(k)}, \quad (19)$$

pri čemer sta $a(k)$ in $b(k)$ določena z uporabo numeričnih simulacij za $k = 3, 4, 5$ in 6 [7]:

$$a(k) = 0.926 - 0.033k, \quad b(k) = 1.587k - 2.323. \quad (20)$$

V izrazu za korekcijski faktor ρ_{WL} predstavlja ε faktor spektralne širine, opredeljen z enačbo (13) ($i = 2$).

4.2.2 Ortiz-Chen

Ortiz in Chen sta leta 1987 predstavila metodo s korekcijskim faktorjem ρ_{OC} [8]:

$$d^{OC} = \rho_{OC} d^{NB}, \quad (21)$$

pri čemer je korekcijski faktor ρ_{OC} podan z uporabo posplošene spektralne širine:

$$\rho_{OC} = \frac{\beta^k}{\alpha_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{m_2 m_{2/k}}{m_0 m_{2/k+2}}}. \quad (22)$$

4.2.3 Tovo-Benasciutti

Metoda, katero sta predstavila Tovo in Benasciutti [10, 11], velja za eno najbolj pogosto uporabljenih cenilk ocene poškodovanosti. Metoda je osnovana na kombinaciji zgornje in spodnje meje intenzitete poškodovanosti, pri čemer je zgornja meja intenzitete poškodovanosti enaka intenziteti poškodovanosti ozkopasovnega procesa [28]. Aproksimacijo spodnje meje intenzitete poškodovanosti pa je podal Madsen *et al.* [29]:

$$d^{\text{RC}} = v_p C^{-1} \left(\sqrt{2m_0} \alpha_2 \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) = d^{\text{NB}} \alpha_2^{k-1}, \quad (23)$$

kar sovpada z metodo štetja razponov napetosti v časovni domeni. Avtorja sta upoštevala, da dejanska intenziteta poškodovanosti leži med obema mejnima vrednostima:

$$d^{\text{RC}} \leq d^{\text{RFC}} \leq d^{\text{NB}} \quad (24)$$

in predlagala linearno kombinacijo obeh metod z uporabo koeficienta b [10]:

$$d^{\text{TB}} = b d^{\text{NB}} + (1 - b) d^{\text{RC}} = \left[b + (1 - b) \alpha_2^{k-1} \right] d^{\text{NB}} = \rho_{\text{TB}} d^{\text{NB}}, \quad (25)$$

Koeficient b se določi po enem izmed načinov:

$$b^{\text{TB}_1} = \min \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1}, 1 \right\} [10], \quad (26)$$

$$b^{\text{TB}_2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) [1.112 (1 + \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) e^{2.11\alpha_2} + (\alpha_1 - \alpha_2)]}{(\alpha_2 - 1)^2} [11]. \quad (27)$$

Velja omeniti, da je ocenjena intenziteta poškodovanosti natančnejša in konsistentnejša z uporabo koeficienta b^{TB_2} (27).

4.3 Širokopasovni proces - aproksimacija PDF

Frekvenčne cenilke poškodovanosti obravnavanega sklopa podajo poškodovanost na osnovi aproksimacije funkcije gostote verjetnosti amplitude $p_a(s)$.

4.3.1 Dirlik

Dirlik je v doktorski disertaciji [12] leta 1985 predstavil metodo, ki je postala ena izmed najbolj pogosto uporabljenih metod ocene poškodovanosti v frekvenčni domeni. Čeprav prvotno namenjena za izračun poškodovanosti bimodalnega procesa, se metoda izkaže kot primerna za uporabo pri splošnem širokopasovnem procesu. Funkcija gostote amplitude ciklov je aproksimirana z eksponentno in dvema Rayleigh-jevema gostotima verjetnosti, katerih parametri so osnovani na obsežnih numeričnih simulacijah. PDF amplitude ciklov je podana z izrazom [12]:

$$p_{a,\text{Dirlik}}(s) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{G_1}{Q} e^{-\frac{s}{Q}} + \frac{G_2 Z}{R^2} e^{-\frac{s^2}{2R^2}} + G_3 Z e^{-\frac{s^2}{2}} \right), \quad (28)$$

pri čemer predstavlja $Z = s/\sigma_s$ normirano amplitudo napetosti, ostali parametri pa so definirani sledeče [30]:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{2(x_m - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2}, & G_2 &= \frac{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2}{1 - R}, \\ G_3 &= 1 - G_1 - G_2, & R &= \frac{\alpha_2 - x_m - G_1^2}{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2}, \\ Q &= \frac{1.25(\alpha_2 - G_3 - G_2 R)}{G_1}, & x_m &= \frac{m_1}{m_0} \left(\frac{m_2}{m_4} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

x_m in α_2 predstavljata srednjo frekvenco ter faktor iregularnosti (12). Z upoštevanjem (29) je intenziteta poškodovanosti podana z zaprtizančnim izrazom [30]:

$$\begin{aligned} d^{\text{Dirlik}} &= C^{-1} v_p m_0^{\frac{k}{2}} \left[G_1 Q^k \Gamma(1+k) \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{2})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (G_2 |R|^k + G_3) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

4.4 Širokopasovni proces - segmentacija gostote močnostnega spektra

Cenilke poškodovanosti temeljijo na segmentaciji gostote močnostnega spektra na N ozkopasovnih segmentov, ki posamično predstavljajo ozkopasovni naključni proces (15).

4.4.1 Sakai-Okamura

Sakai in Okamura sta leta 1995 predlagala metodo za oceno poškodovanosti bimodalnega procesa. Metoda temelji na razdelitvi gostote močnostnega spektra na dva segmenta, ki predstavljata ozkopasovna naključna procesa:

$$Y(t) = X_{\text{LF}}(t) + X_{\text{HF}}(t), \quad (31)$$

Intenziteta poškodovanosti d^{SO} je definirana kot vsota intenzitet poškodovanosti zaradi nizkofrekvenčne komponente $X_{\text{LF}}(t)$ in visokofrekvenčne komponente $X_{\text{HF}}(t)$ procesa $Y(t)$:

$$d^{\text{SO}} = d_{\text{HF}} + d_{\text{LF}} \quad (32)$$

in ne zajema interakcije med posameznima komponentama. $X_{\text{LF}}(t)$ in $X_{\text{HF}}(t)$ tvorita velike in majhne cikle s centralnima frekvencama $v_{0,\text{LF}}^+$ in $v_{0,\text{HF}}^+$, določenima z enačbo (10) na osnovi spektralnih momentov $m_{0,\text{LF}}$ in $m_{0,\text{HF}}$ (5). Intenziteta poškodovanosti je določena kot vsota obeh prispevkov [16]:

$$d^{\text{SO}} = \frac{2^{k/2}}{2\pi C} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \left[m_{0,\text{LF}}^{(k-1)/2} m_{2,\text{LF}}^{1/2} + m_{0,\text{HF}}^{(k-1)/2} m_{2,\text{HF}}^{1/2} \right]. \quad (33)$$

4.4.2 Bands-method

Leta 2015 je Braccesi *et al.* predstavil metodo, ki poda oceno poškodovanosti na osnovi ekvivalentnega momenta $m_{0,\text{ref}}$ [22]. Metoda temelji na diskretizaciji močnostnega spektra na N ozkopasovnih pasov, kateri so medsebojno nekorelirani (se ne prekrivajo).

Vpliv različnih si povprečnih frekvenc posameznih pasov na poškodovanost se upošteva z normiranjem variance i -tega pasu glede na enakost poškodovanosti pri i -ti povprečni frekvenci $v_{0,i}^+$ in referenčni povprečni frekvenci $v_{0,\text{ref}}^+$ [22]:

$$m_{0,\text{ref},i} = \left(\frac{v_{0,i}^+}{v_{0,\text{ref}}^+} \right)^{2/k} m_{0,i} \quad (34)$$

S tem se izrazi poškodba i -tega pasu:

$$d_i = \frac{v_{0,\text{ref}}^+ 2^{k/2}}{C} \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) m_{0,\text{ref},i}^{k/2} \quad (35)$$

Intenziteta poškodovanosti celotnega procesa je odvisna od pripadajoče variance m_0 :

$$m_0 = \sum_i^N m_{0,\text{ref},i} \quad (36)$$

in je podana z izrazom [22]:

$$d^{\text{BM}} = \frac{v_{0,\text{ref}}^+ 2^{k/2}}{C} \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) m_{0,\text{ref}}^{k/2} \quad (37)$$

5 Zaključki

Prispevek se osredotoča na oceno dobe trajanja z uporabo frekvenčnih cenilk poškodovanosti. Izpostavljene so predpostavke analize vibracijskega utrujanja: stacionarnost, ergodičnost in normalna porazdelitev obremenitve. Na osnovi gostote močnostnega spektra, ki predstavlja komplement funkciji porazdelitve verjetnosti pri opisu naključnega procesa, je opredeljena statistika ekstremnih vrednosti; izpostavljen je vpliv spektralne širine naključnega procesa na njegove statistične lastnosti. Prispevek se zaključuje s primerjavo pristopa posameznih frekvenčnih cenilk k oceni poškodovanosti v primeru širokopasovnega naključnega procesa.

Literatura

- [1] Julius S. Bendat and Allen G. Piersol. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Wiley India, 2013.
- [2] Janko Slavič, Matjaž Mršnik, Martin Česnik, Jaka Javh, and Miha Boltežar. *Vibration Fatigue by Spectral Methods*. Elsevier, 2020.
- [3] Arvid Palmgren. Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 68(14):339–341, 1924.

- [4] M. A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 67:A159–A164, 1945.
- [5] Masanori Matsuishi and Tatsuo Endo. Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 68:37–40, 1968.
- [6] John W. Miles. On structural fatigue under random loading. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 21(11):753–762, 1954.
- [7] Paul H. Wirsching and Mark C. Light. Fatigue under wide band random stresses. *Journal of the Structural Division*, 106(7):1593–1607, 1980.
- [8] K. Ortiz and N.K. Chen. Fatigue damage prediction for stationary wideband processes. In *Fifth international conference on applications of statistics and probability in soil and structural engineering*.
- [9] Denis Benasciutti and Robert Tovo. Rainflow cycle distribution and fatigue damage in Gaussian random loadings. Technical report, University of Ferrara, Department of Engineering, 2004.
- [10] Roberto Tovo. Cycle distribution and fatigue damage under broadband random loading. *International Journal of Fatigue*, 24(11):1137–1147, 2002.
- [11] Denis Benasciutti and Roberto Tovo. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes. *International Journal of Fatigue*, 24(11):1137–1147, 2002.
- [12] Turan Dirlik. *Application of Computers in Fatigue Analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [13] Wangwen Zhao and Michael J. Baker. On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes. *International Journal of Fatigue*, 14(2):121–135, 1992.
- [14] Joonmo Choung Jun-Bum Park and Kyung-Su Kim. A new fatigue prediction model for marine structures subject to wide band stress process. *Ocean Engineering*, 76:144–151, 2014.
- [15] Guoyang Jiao and Torgeir Moan. Probabilistic analysis of fatigue due to gaussian load processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(2):76–83, 1990.
- [16] Shinsuke Sakai and Hiroyuki Okamura. On the distribution of rainflow range for gaussian random processes with bimodal psd. *JSME International Journal, Series A*, 38(4):440–445, 1995.
- [17] Tsengti Fu and David Cebon. Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities. *International Journal of Fatigue*, 22(1):11–21, 2000.

- [18] Denis Benasciutti and Roberto Tovo. Comparison of spectral methods for fatigue damage assessment in bimodal random processes. In *9th International Conference on Structural Safety & Reliability (ICOSSAR)*.
- [19] Ying Min Low. A method for accurate estimation of the fatigue damage induced by bimodal processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(1):75–85, 2010.
- [20] Zhen Gao and Torgeir Moan. Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary gaussian processes using a trimodal spectral formulation. *International Journal of Fatigue*, 30(10-11):1944–1955, 2008.
- [21] Loren D. Lutes and Curtis E. Larsen. Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 116(4):1149–1164, 1990.
- [22] Filippo Cianetti Claudio Braccresi and Lorenzo Tomassini. A new frequency domain criterion for the damage evaluation of mechanical components. *International Journal of Fatigue*, 70:417–427, 2015.
- [23] David Edward Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*. Dover Publications, 2005.
- [24] Kihong Shin and Joseph K. Hammond. *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers*. John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [25] Yung-Li Lee, Jwo Pan, Richard Hathaway, and Mark Barkey. *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [26] Ján Košťút. History influence exponent in cumulative fatigue damage determined using two-step loading experiments. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 25(6):575–586, 2002.
- [27] Matjaž Mršnik, Janko Slavič, and Miha Boltežar. Multiaxial vibration fatigue – a theoretical and experimental comparison. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 76–77:409–423, 2016.
- [28] Igor Rychlik. On the ‘narrow-band’ approximation for expected fatigue damage. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8(1):1–4, 1993.
- [29] Henrik O. Madsen, Steen Krenk, and Niels C. Lind. *Methods of structural safety*. Dover Publications, 2006.
- [30] Denis Benasciutti and Roberto Tovo. Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(4):287–299, 2006.



Nelinearna dinamična analiza prostorskih okvirjev s časovno integracijo tretjega reda

E. Zupan^{1,2} in D. Zupan²

Third-order time integration scheme in non-linear dynamics of spatial frames

Povzetek. Predstavljamo časovno integracijo za dinamično analizo sistemov togih in deformabilnih teles, kjer upoštevamo rotacijske količine kot del neznank modela. Uporabimo implicitno metodo tretjega reda natančnosti. Željeni red natančnosti dosežemo z uporabo korekcijske funkcije, ki popravi vplive nekomutativne narave rotacij. Učinkovitost metode prikažemo z računskimi primeri.

Abstract. We present a time integration scheme for rigid and flexible body dynamics, where rotational degrees of freedom are incorporated into the model. The scheme is implicit and its accuracy is of the third order. To gain the desired order of the scheme for rotational degrees of freedom additional correction function is introduced that compensates the non-commutativity of rotations. The performance of the scheme is demonstrated by several examples.

1 Uvod

Nelinearna narava prostorskih zasukov povzroča številne probleme pri dinamični analizi konstrukcij, kar zahteva posebno obravnavo rotacijskih prostostnih stopenj. Dodatne težave z numerično stabilnostjo pa izhajajo iz togosti sistema enačb, kar je v literaturi bogato dokumentirano.

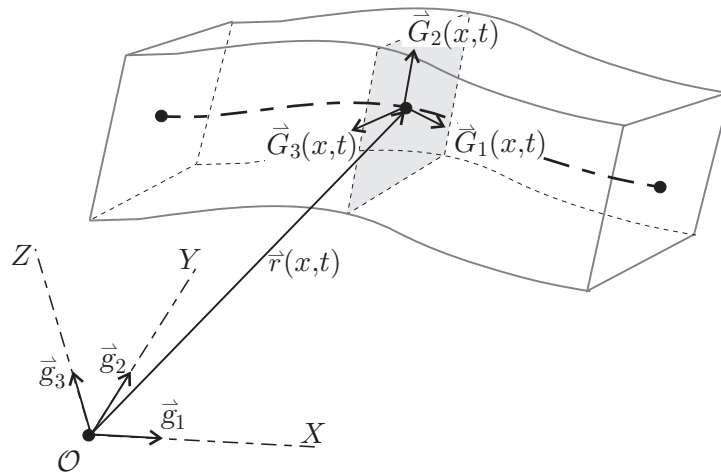
Tako ni presenetljivo, da so se v dinamiki konstrukcij uveljavile implicitne numerične metode drugega reda. Vendar pa uporaba aproksimacij višjega reda prinaša nekaj prednosti, kot sta večja lokalna natančnost in preprostejši nadzor prilagajanja časovnega koraka. V članku predstavimo prilagoditev znane metode TR-BDF2 [1] za reševanje diferencialnih enačb drugega reda ob upoštevanju posebnosti rotacijskih prostostnih stopenj.

¹ HSE

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

2 Model prostorskega nosilca

Izhajamo iz modela prostorskih nosilcev, ki ga pripisujemo bratoma Cosserat [2], v literaturi znanega tudi pod imenom kinematično točna teorija nosilcev. Geometrijo nosilca določa referenčna os in družina prečnih prereзов, ki niso nujno pravokotni na to os. Model ob neomejenih pomikih in zasukih dovoljuje osne, strižne, torzijske in upogibne deformacije brez poenostavitve kinematičnih enačb na nivoju osi nosilca. Za opis uporabimo dva koordinatna sistema: i) fiksnega z bazo $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ in ii) lokalnega z bazo $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3\}$, kjer drugi in tretji bazni vektor ležita v ravnini prereza. Zvezo med fiksnim in lokalnim koordinatnim sistemom opišemo z rotacijami. Za parametrizacijo rotacij uporabimo rotacijske kvaternione. Privzeli bomo še, da x označuje naravni parameter težiščne osi nosilca dolžine L v začetni legi.



Slika 1: Model prostorskega nosilca.

Za opis rotacij uporabimo algebro kvaternionov. V kvaternionem opisu lahko obe bazi povežemo s preprosto enačbo

$$\vec{G}_i(x, t) = \hat{q}(x, t) \circ \vec{g}_i \circ \hat{q}^*(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

kjer je \hat{q} rotacijski kvaternion, \hat{q}^* konjugiran kvaternion in krogec (\circ) označuje kvaternionski produkt. Množica kvaternionov \mathbf{H} je štirirazsežni Evklidski prostor, kjer elemente pogosto ponazorimo kot: $\hat{x} = s + \vec{v} = (s, \vec{v})$, $s \in \mathbf{R}$, $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$, glej [4]. Seštevanje in množenje s skalarjem sta definirana enako kot v \mathbf{R}^4 , zelo pomembna dodana operacija pa je kvaternionski produkt:

$$\hat{x} \circ \hat{y} = (sc - \vec{v} \cdot \vec{w}) + (c\vec{v} + s\vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}), \quad (2)$$

kjer je $\hat{y} = c + \vec{w} \in \mathbf{H}$ ter (\cdot) in (\times) označujeta običajni skalarni in vektorski produkt. Opozorimo še, da kvaternionski produkt ni komutativen.

Za praktično delo moramo nadomestiti abstraktne količine s komponentno obliko, pri čemer v mehaniki pogosto smiselno uporabljamo različne baze. Obe bazi (nepomično in lokalno) z

ničelnim skalarnim delom razširimo v kvaternion ter dodamo četrti bazni kvaternion $\widehat{1} = 1 + \vec{0}$ in tako zgradimo ortonormirani bazi štiridimezionalnega prostora, v katerih poljuben kvaternion zapišemo kot:

$$\widehat{x} = s\widehat{1} + v_1\vec{g}_1 + v_2\vec{g}_2 + v_3\vec{g}_3 = S\widehat{1} + V_1\vec{G}_1 + V_2\vec{G}_2 + V_3\vec{G}_3. \quad (3)$$

Komponente v računskih postopkih postavimo v stolpce, v nadaljevanju pa za komponentni zapis uporabimo krepke črke. Pri tem za količine, kjer je skalarna komponenta enaka nič (imenujemo jih čisti kvaternioni ali tudi vektorji) zaradi nazornosti opuščamo strešico nad simbolom.

V dinamiki moramo opisati spreminjanje količin s časom. Zato vpeljemo hitrost težiščne osi $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, ki je izražena v nepomični bazi. Z odvajanjem enačbe (1) po času pa vpeljemo kotno hitrost: $\mathbf{\Omega} = 2\widehat{\mathbf{q}}^* \circ \dot{\widehat{\mathbf{q}}}$, ki je izražena v lokalni bazi. Podobno določimo pospeške $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ in kotne pospeške $\mathbf{\alpha} = \dot{\mathbf{\Omega}}$.

Pomemben del računskih postopkov je rekonstrukcija zasukov iz znanih kotnih hitrosti. Rešiti moramo začetni problem

$$\dot{\widehat{\mathbf{q}}}(t) = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{q}}(t) \circ \mathbf{\Omega}, \quad \widehat{\mathbf{q}}(t_0) = \widehat{\mathbf{q}}_0, \quad (4)$$

kjer pa za primere, ko je kotna hitrost konstantna obstaja analitična rešitev oblike

$$\widehat{\mathbf{q}}(t) = \widehat{\mathbf{q}}_0 \circ \exp\left(\frac{t}{2}\mathbf{\Omega}\right), \quad (5)$$

kjer \exp označuje kvaternionski eksponent:

$$\exp(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{\mathbf{x}}^k}{k!} = \widehat{1} + \frac{\widehat{\mathbf{x}}}{1!} + \frac{1}{2!}\widehat{\mathbf{x}} \circ \widehat{\mathbf{x}} + \frac{1}{3!}\widehat{\mathbf{x}} \circ \widehat{\mathbf{x}} \circ \widehat{\mathbf{x}} + \dots \quad (6)$$

Ta rešitev kaže na pomen kvaternionskega eksponenta, ki pa je za nekonstantne kotne hitrosti le približek drugega reda. Za približne rešitve višjega reda potrebujemo korekcijske člene, ki kompenzirajo nekomutativnost rotacij [5].

3 Diskretizacija po času

Izmed številnih metod za reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb so v dinamiki konstrukcij uspešnejše implicitne metode, saj so tipični problemi togi do zelo togi. Zato smo prilagodili uveljavljeno metodo TR-BDF2 [1] za reševanje enačb dinamike nosilca z upoštevanjem nelinearnosti rotacij. TR-BDF2 je zanimiva kombinacija trapeznega pravila in sheme obratnih diferenc. Metodo sestavljajo tri faze. Prvi dve sta implicitni drugega reda, tretja pa je eksplicitna in tretjega reda natančnosti. Pripadajoča Butcherjeva shema [1] je oblike

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & \tau/2 & \tau/2 & 0 \\ 1 & w & w & \tau/2 \\ \hline & w & w & \tau/2 \\ \hline & (2-\tau)/6 & (3\tau+2)/6 & \tau/6 \end{array}, \quad (7)$$

kjer je $\tau = 2 - \sqrt{2}$ and $w = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Razlika med formulo drugega in tretjega reda pa omogoča učinkovito kontrolo lokalne napake brez potrebe po dodatnih izračunih.

Shemo prilagodimo enačbam in neznankam dinamike prostorskih nosilcev, pri čemer bodo povprečne hitrosti in povprečne kotne hitrosti med dvema izbranimi zaporednima točkama v času uporabljene za osnovne iterativne neznanke sheme. Ta pristop ima izrazite prednosti pri rotacijskih prostostnih stopnjah zaradi znane aditivnosti komponent vektorja kotne hitrosti, izraženega v lokalni bazi. Primerna komponentna oblika enačb tako omogoča lažjo linearizacijo in upoštevanje popravkov. V nadaljevanju predstavimo enačbe vsake faze. Pri tem z oznako $(\cdot)^{[m]}$ poudarimo, da je količina izražena pri diskretnem času t_m .

3.1 Prva faza

Privzemimo, da poznamo vse količine matematičnega modela konstrukcije pri času t_n . Časovni korak med trenutnim časom, t_n , in časom, ki sledi, t_{n+1} , označimo h . V prvi fazi Butcherjeve sheme (7) aproksimiramo količine pri vmesnem času $t_{n+\tau} = t_n + \tau h$ v skladu s trapeznim pravilom:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^{[n]} + \mathbf{v}^{[n+\tau]}}{2} = \frac{\mathbf{r}^{[n+1]} - \mathbf{r}^{[n]}}{\tau h}. \quad (8)$$

Za krajevne vektorje potem velja

$$\mathbf{r}^{[n+\tau]} = \mathbf{r}^{[n]} + \tau h \bar{\mathbf{v}},$$

za pospeške pa povsem analogno:

$$\frac{\mathbf{a}^{[n]} + \mathbf{a}^{[n+\tau]}}{2} = \frac{\mathbf{v}^{[n+\tau]} - \mathbf{v}^{[n]}}{\tau h}.$$

Vse količine pri času $t_{n+\tau}$ izrazimo z osnovno neznako $\bar{\mathbf{v}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{[n+\tau]} &= \mathbf{r}^{[n]} + \tau h \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v}^{[n+\tau]} &= -\mathbf{v}^{[n]} + 2\bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{a}^{[n+\tau]} &= -\mathbf{a}^{[n]} - \frac{4}{\tau h} \mathbf{v}^{[n]} + \frac{4}{\tau h} \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Tako dobimo sistem nelinearnih diferencialnih enačb za neznanu povprečno hitrost, ki ga rešujemo z iterativnimi postopki. Podobno shemo lahko uporabimo za rotacijske prostopne stopnje s pomembno razliko – zveza med rotacijskimi kvaternioni in kotno hitrostjo mora upoštevati multiplikativno naravo rotacij. Če uporabimo enačbo (5) dobimo približek drugega reda, ki ohranja osnovne lastnosti rotacij. Pripadajoča shema za rotacijske prostostne stopnje se tako glasi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}^{[n+\tau]} &= \hat{\mathbf{q}}^{[n]} \circ \exp\left(\frac{\tau h \bar{\boldsymbol{\Omega}}}{2}\right) \\ \boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} &= -\boldsymbol{\Omega}^{[n]} + 2\bar{\boldsymbol{\Omega}} \\ \boldsymbol{\alpha}^{[n+\tau]} &= -\boldsymbol{\alpha}^{[n]} - \frac{4}{\tau h} \boldsymbol{\Omega}^{[n]} + \frac{4}{\tau h} \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \end{aligned} \quad (10)$$

kjer je osnovna neznanka povprečna kotna hitrost $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\boldsymbol{\Omega}^{[n]} + \boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]})/2$.

3.2 Druga faza

Druga faza temelji na aproksimaciji količin pri času t_{n+1} v skladu s tretjo vrstico Butcherjeve sheme (7):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{[n+1]} &= \mathbf{r}^{[n]} + h \left(w\mathbf{v}^{[n]} + w\mathbf{v}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{2}\mathbf{v}^{[n+1]} \right) \\ \mathbf{v}^{[n+1]} &= \mathbf{v}^{[n]} + h \left(w\mathbf{a}^{[n]} + w\mathbf{a}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{2}\mathbf{a}^{[n+1]} \right).\end{aligned}$$

Ko vpeljemo oznako

$$\bar{\mathbf{v}} = w\mathbf{v}^{[n]} + w\mathbf{v}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{2}\mathbf{v}^{[n+1]} \quad (11)$$

za osnovno neznanke problema in izrazimo vse količine z $\bar{\mathbf{v}}$, dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{[n+1]} &= \mathbf{r}^{[n]} + h\bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v}^{[n+1]} &= -\frac{2w}{\tau} \left(\mathbf{v}^{[n]} + \mathbf{v}^{[n+\tau]} \right) + \frac{2}{\tau}\bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{a}^{[n+1]} &= -\frac{2w}{\tau} \left(\mathbf{a}^{[n]} + \mathbf{a}^{[n+\tau]} \right) - \frac{4}{\tau^2 h} \left(\left(w + \frac{\tau}{2} \right) \mathbf{v}^{[n]} + w\mathbf{v}^{[n+\tau]} \right) + \frac{4}{\tau^2 h}\bar{\mathbf{v}}.\end{aligned} \quad (12)$$

Podobno postopamo pri rotacijskih prostostnih stopnjah:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}^{[n+\tau]} &= \hat{\mathbf{q}}^{[n]} \circ \exp \left(\frac{h}{2}\bar{\boldsymbol{\Omega}} \right) \\ \boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} &= -\frac{2w}{\tau} \left(\boldsymbol{\Omega}^{[n]} + \boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} \right) + \frac{2}{\tau}\bar{\boldsymbol{\Omega}} \\ \boldsymbol{\alpha}^{[n+\tau]} &= -\frac{2w}{\tau} \left(\boldsymbol{\alpha}^{[n]} + \boldsymbol{\alpha}^{[n+\tau]} \right) - \frac{4}{\tau^2 h} \left(\left(w + \frac{\tau}{2} \right) \boldsymbol{\Omega}^{[n]} + w\boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} \right) + \frac{4}{\tau^2 h}\bar{\boldsymbol{\Omega}},\end{aligned} \quad (13)$$

kjer je

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = w\boldsymbol{\Omega}^{[n]} + w\boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{2}\boldsymbol{\Omega}^{[n+1]}. \quad (14)$$

3.3 Tretja faza

Dobljene rezultate v tretji fazi še izboljšamo z uporabo eksplicitne formule tretjega reda pri času t_{n+1} . Za krajevne vektorje uporabimo četrto vrstico Butcherjeve sheme (7):

$$\mathbf{r}^{[n+1]} = \mathbf{r}^{[n]} + h \left(\frac{1-w}{3}\mathbf{v}^{[n]} + \frac{3w+1}{3}\mathbf{v}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{6}\mathbf{v}^{[n+1]} \right). \quad (15)$$

Pri rotacijskih prostostnih stopnjah moramo biti bolj previdni. Seštevanje lahko nadomestimo s kvaternionskim produktom in kvaternionskim eksponentom, vendar bi bil takšen nastavek še vedno drugega reda natančnosti. Shemo zato zapišemo v obliki

$$\hat{\mathbf{q}}^{[n+1]} = \hat{\mathbf{q}}^{[n]} \circ \exp \left(\mathbf{K} + \frac{h}{2} \left(\frac{1-w}{3}\boldsymbol{\Omega}^{[n]} + \frac{3w+1}{3}\boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} + \frac{\tau}{6}\boldsymbol{\Omega}^{[n+1]} \right) \right), \quad (16)$$

kjer korektor \mathbf{K} določimo tako, da dosežemo ujemanje s točno rešitvijo do vsaj četrtega člana razvoja v Taylorjevo vrsto. Po daljši izpeljavi in primerjavi z analitično rešitvijo, glej [5], dobimo

$$\mathbf{K} = \frac{h^2}{48\tau(\tau-1)} \boldsymbol{\Omega}^{[n]} \times \left(\tau^2 \boldsymbol{\Omega}^{[n+1]} - \boldsymbol{\Omega}^{[n+\tau]} \right). \quad (17)$$

4 Računski primeri

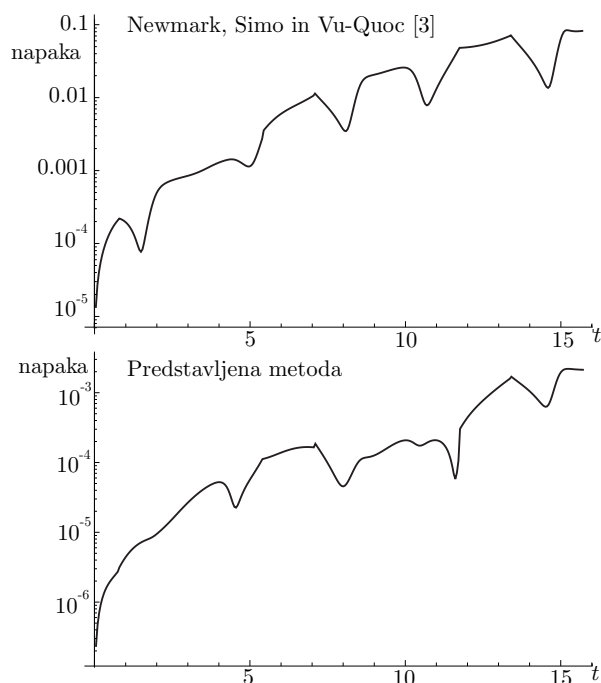
4.1 Dinamika togega telesa ob predpisanih momentih

Najprej predstavimo učinkovitost metode za reševanje Eulerjeve enačbe vrtenja togega telesa:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} = \hat{\mathbf{q}}^* \circ \mathbf{M} \circ \hat{\mathbf{q}}, \quad (18)$$

kjer je \mathbf{J} vztrajnostna matrika togega telesa. Če enačbo (18) zapišemo pri času t_{n+1} in uporabimo predstavljeno shemo, postane $\boldsymbol{\Omega}$ edina neznanka problema. Dobljena diskretna enačba je nelinearna. Rešimo jo iterativno po Newtonovi shemi.

Privzemimo, da so zasuki znana harmonična funkcija časa $\boldsymbol{\vartheta}(t) = [t + \sin(t), 0, \cos(t)]^T$. Za vztrajnostno matriko izberemo $\mathbf{J} = \text{diag}(5, 5, 1)$. Iz znanih zasukov določimo rotacijski kvaternion in kotno hitrost ter vstavimo rezultat v enačbo (18). Tako dobimo potek pripadajočih

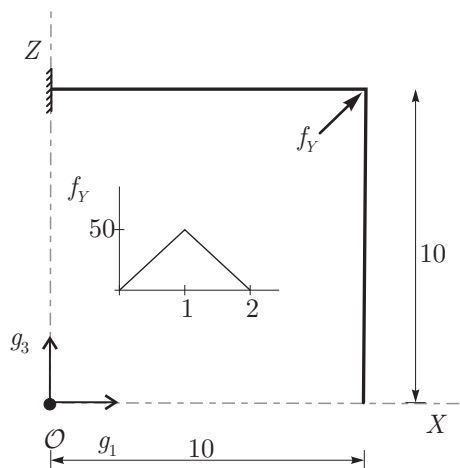


Slika 2: Absolutna napaka numerično določenega kota rotacije za $h = 0.05$.

momentov, ki jih uporabimo kot vhodni podatek numerične metode. Rešitev poiščemo z uporabo predstavljene metode in pogosto uporabljeno modifikacijo Newmarkovega algoritma za prostorske zasuke, kot sta ga predstavila Simo in Vu-Quoc [3]. Na grafih na sliki 2 prikazujemo in primerjamo absolutno napako kota rotacije, izraženega v radianih. Zaradi izrazito različnega reda natančnosti potek absolutne napake s časom prikazujemo na ločenih grafih. Zgornji graf je dobljen z metodo po viru [3], spodnji pa po predstavljeni metodi. Primerjava rezultatov kaže na precejšnjo prednost predstavljene metode.

4.2 Kolenasta konzola

Primerjamo še rezultate konzole s trikotnim impulzom sile, kot sta ga predstavila Simo in Vu-Quoc [3]. Shema konstrukcije je predstavljena na sliki 3, ostali podatki pa so navedeni v citirani literaturi.



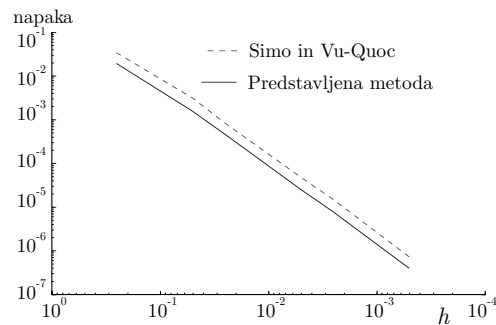
Slika 3: Kolenasta konzola.

Žal ta problem nima analitične rešitve, zato za referenčno rešitev uporabimo vrednosti, dobljene z zelo majhnim časovnim korakom $h = 0.00025$.

Za obe metodi lahko razberemo konvergenco rešitev z manjšanjem časovnega koraka in primerjamo na sliki 4. Predstavljena metoda je natančnejša od Newmarkove, vendar je prednost manj izrazita kot v primeru togega telesa.

5 Zaključki

Predstavili smo metodo časovne integracije za dinamiko konstrukcij, ki ustrezno prilagodi kombinacijo trapeznega pravila in sheme obratnih diferenc na konfiguracijski prostor prostorskih nosilcev, kjer upoštevamo multiplikativno naravo rotacij, nekomutativnost pa kompenziramo s korekcijsko funkcijo. Dodaten red natančnosti dosežemo z dvema implicitnima in eno eksplicitno fazo znotraj vsakega časovnega koraka. S tem pridobimo dodaten red natančnosti in oceno



Slika 4: Napaka zasukov v kolenu v logaritmskem merilu.

lokalne napake brez potrebe po dodatnih izračunih. Primeri kažejo, da je predstavljena metoda konkurenčna med implicitnimi metodami za analizo dinamike konstrukcij in sistemov teles.

- [1] M. E. Hosea and L. F. Shampine. Analysis and implementation of TR-BDF2. *Appl. Numer. Math.*, 20(1-2):21–37, 1996.
- [2] J. C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. Nonlinear dynamics of 3-dimensional rods - exact energy and momentum conserving algorithms. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38(9):1431–1473, 1995.
- [3] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 66(2):125–161, 1988.
- [4] J. P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.
- [5] E. Zupan and D. Zupan. On higher order integration of angular velocities using quaternions. *Mech. Res. Commun.*, 55:77–85, 2014.



RANS, LES in HRLES simulacije Taylor-Couette-Poiseuille tokov v koncentričnih režah pri višjih Taylorjevih številih

Anton Žnidarčič¹ in Tomaž Kutrašnik²

RANS, LES and HRLES simulations of Taylor-Couette-Poiseuille flow in annular gaps at high Taylor numbers

Povzetek. Višje gostote moči električnih motorjev vodijo k potrebam po izboljšanjem hlajenju. Pogoji v zračni reži med rotorjem in statorjem so pri tem pomembni zaradi vpliva na prenos toplote znotraj elektro motorja, še posebej ob prisotnosti aksialnega toka. Čeprav se gostota moči povečuje tudi z višanjem vrtilne hitrosti, je tok pri takšnih pogojih pomanjkljivo opisan. Ker so v njem prisotni pojavi na različnih velikostnih skalah, se pojavlja vprašanje ali so najpogosteje uporabljene RANS simulacije še ustrezne. Prispevek v ta namen predstavlja študijo in primerjavo simulacij tokov ob navedenih pogojih z uporabo RANS, LES in hibridnih (RANS-LES) HRLES modelov. Iz njih sledijo ugotovitve, kateri modelski pristop je naustrežnejši kot tudi opis same izgradnje simulacij. Prispevek zato predstavlja doprinos k izboljšanju virtualnih orodij za dizajn elektro motorjev.

Abstract. The demands for increased electric motor power densities lead to the need for improved cooling. The conditions in the air-gap between rotor and stator are important as they affect heat transfer across the electric motor, especially if axial flow is present. Although power densities are increasing also with the increase in rotating velocities, the flow in an air-gap is at such conditions still ill-researched. Since it includes phenomena on various scales, it has to be determined if most often applied RANS simulations are still suitable. The work thus provides a study and comparison of simulations at mentioned conditions with RANS, LES and hybrid (RANS-LES) HRLES models. Definition which are most suitable and how to build the simulations with them are given. Thus, the work presents a contribution to improving virtual design tools used in the area of electric motors.

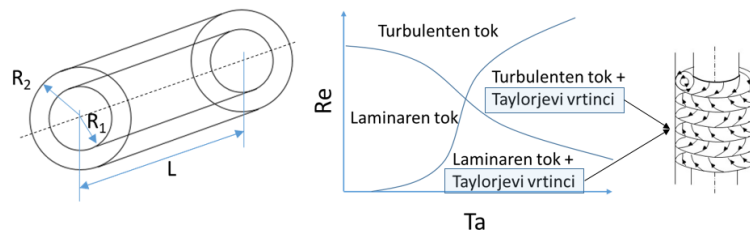
1 Uvod

S povečevanjem deleža e-vozil je izrazitejša tudi potreba po višji energetski učinkovitosti in nižjih stroških proizvodnje komponent pogonskega sklopa, kar se dosega tudi z višanjem gostot moči. To je posledica izboljšanja strukture in delovanja posameznih delov, kot so navitje [1] in magneti [2], kot tudi na račun nižanja mase ter višanja vrtilne frekvence. Zanesljivo delovanje takšnih elektro motorjev zahteva učinkovito hlajenje, pri čemer obstajajo različne rešitve neposrednega hlajenja posameznih delov, ki pa dvigujejo končno ceno izdelka.

¹ LICeM, Fakulteta za Strojništvo, Univerza v Ljubljani

Ker na sam prenos toplote v elektro motorju pomembno vpliva zračna reža med rotorjem in statorjem, se pojavlja potreba po izkoriščanju tokovnih pojavov znotraj nje, saj se tako lahko doseže učinkovitejši odvod toplote ob nižji ceni in kompleksnosti hladilnega sistema.

Tok v koncentrični reži je kompleksen in predmet številnih raziskav. Kljub temu je na voljo le malo preglednih del. Od pregleda, podanega v [3], do zbirke del v [4] ter širokega pregleda v [5] sta pretekli dve desetletji. Sledeč iz njih se tok razlikuje glede na odsotnost oziroma prisotnost aksialne hitrosti, iz česar sledi delitev na Taylor-Couette (TC) in Taylor-Couette-Poiseuillov (TCP) tok. Ob razvitem toku se nadalje v odvisnosti od geometrije in obratovalnih lastnosti pojavijo štiri različna stanja. Ta so skupaj z osnovnim prikazom dimenzij zračne reže podana na sliki 1. Stanja se pojavijo v določeni zračni reži pri njej lastnih, kritičnih vrednostih Reynoldsovega (Re) ter Taylorjevega (Ta) števila. Prvo zaznamuje razmerje vztrajnostne, drugo pa centrifugalne sile proti viskozni sili. Definiciji zanje podajata enačbi (1) in (2). V njiju v označuje kinematično viskoznost, ω kotno hitrost rotorja, U_{ax} pa aksialno hitrost toka.



Slika 1: Osnovne dimenzije zračne reže (levo) ter štiri različna tokovna stanja v reži glede na geometrijo in obratovalne lastnosti (desno).

$$Re = \frac{U_{ax} 2(R_2 - R_1)}{v} \quad (1)$$

$$Ta = \frac{\omega^2 R_1 (R_2 - R_1)^3}{v^2} \quad (2)$$

Poleg razlik v pojavu prikazanih štirih stanj je prisoten še pomemben vpliv področja nerazvitega toka. To obstaja tudi v primeru osnovnih TC tokov, kot sledi iz rezultatov v [6]. Ter dodatno vpliva na razlike v opisu prestopa toplote, ki so prikazane v [5] in tudi [7].

Omenjene razlike onemogočajo definicijo univerzalnih korelacij prestopa toplote, posledično se prestop toplote opisuje za vsako režo posebej. Ker je to eksperimentalno zamudno, sodoben razvoj pa poteka v virtualnem okolju, je bila v [8] razvita metodologija postavitve 3D CFD numeričnih simulacij v poljubni zračni reži. Ta temelji na RANS turbulentnih modelih in je uspešno validirana v vseh primerih razen v pogojih TCP toka pri višjih Ta številih. Ta izhaja iz [9], kjer je kot možen razlog odstopanj nakazana nezmožnost zajema vseh tokovnih struktur ob uporabi RANS turbulentnih modelov. Kot možna rešitev za doseganje boljšega opisa prestopa toplote je zato predlagana uporaba natančnejših, LES turbulentnih modelov.

Ker je TCP tok pri višjih Ta številih v režah sodobnih elektro motorjev vedno pogostejši zaradi višanja gostote moči in zagotavljanja boljšega odvoda toplote, je bila omenjena metodologija nadgrajena z uporabo LES in HRLES turbulentnih modelov. Slednji predstavljajo vmesni člen med natančnejšimi in računsko zahtevnimi LES modeli ter splošno uporabnimi RANS modeli. Z namenom določitve kakšno modeliranje je najustreznejše, je v tem prispevku predstavljena primerjava rezultatov, ki so pridobljeni z RANS, HRLES in LES modeli. S tem prispevek podaja prvo kritično analizo katero modeliranje TCP tokov pri višjih Ta številih je ustrezno za pridobitev natančnega opisa prestopa toplote, kar predstavlja visoko relevantno temo za

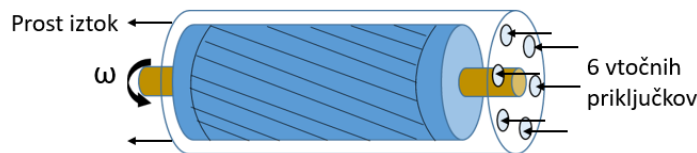
napredne hladilne rešitve sodobnih elektro motorjev. Prispevek z namenom jasne predstavitve tematike najprej podaja opis tokovnega problema, kateremu sledi definicija postavitve numeričnih simulacij, ki se dotika tudi potrebnih temeljev zanje. Po tej je predstavljena analiza in primerjava rezultatov, kjer so predstavljeni glavni vplivi na in doprinos različnih modelov k natančnosti opisa prestopa toplote.

2 Orodja in metodologija raziskave

Tako geometrija kot pogoji obravnavanih tokovnih primerov, ki sledijo iz [9], so posebej predstavljeni v sledečem podpoglavju. Temu sledi opis postavitve 3D CFD simulacij, ki izhaja iz metodologije, predstavljene v [8]. Ta je nadaljnje nadgrajena z HRLES in LES modeli.

2.1 Obravnavani tokovni primeri

V delu [9] je obravnavana dolga in ozka gladka reža, ki posnema geometrijo rež v elektro motorjih. Njen grafični prikaz podaja slika 2. Režo tvori rotor s polmerom $R_1 = 0,08\text{ m}$ ter stator s polmerom $R_2 = 0,09\text{ m}$. Dolžina reže znaša $L = 0,5\text{ m}$, pri čemer je samo srednji del v dolžini $0,4\text{ m}$ ogrevan. Na sliki 2 je prikazan s šrafirano površino.



Slika 2: Skica obravnavane geometrije zračne reže in okoliške domene v [9].

Meritve v [9] obsegajo definicijo hitrosti z uporabo PIV metode in prestopa toplote na dveh pozicijah, ki sta od začetka reže oddaljeni 160 in 330 mm . Za lažjo izvedbo meritev se kot delovni medij uporablja voda. Meritve obsegajo pogoje pri vrednosti $Re = 11\,200$, medtem ko Ta števila obsegajo vrednosti od $Ta = 0$ do $Ta = 7,9 \cdot 10^7$.

Toplotni pogoji v sistemu so definirani z ogrevano površino na rotorju, ki ima konstantno temperaturo 323 K . Ostale površine so adiabatne. Tokovne razmere so poleg Re in Ta števil definirane z obliko vstopa v domeno. Pri tem je potrebno poudariti, da za šest cevni vstopov v domeno in stranski volumen ob rotorju niso na voljo informacije o dimenzijah. To se v simulacijah izkaže kot izredno pomembno, zato je v njih obravnavan tudi vpliv oblike vstopa. Tlačni pogoji v obravnavanem sistemu niso relevantni, ker voda predstavlja nestisljiv fluid.

2.2 Metodologija postavitve 3D CFD simulacij

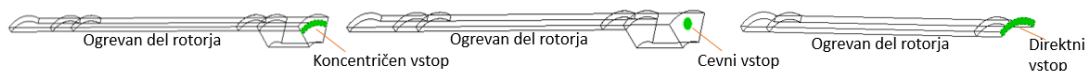
Metodologija celovito naslavlja tokovne pogoje v zračnih režah in omogoča identifikacijo tako prisotnih tokovnih pojavov kot definicijo ustreznih nastavitv simulacij za njihov opis. V ta namen vsebuje več korakov, ki so opisani v [8], v sledečih podpoglavjih pa kratko povzeti. Dodan pa jim je še korak nastavitv HRLES ter LES simulacij. Simulacije so opravljene v okolju Ansys Workbench, pri čemer se uporablja program Fluent, v20.1.

2.2.1 Definicija tokovnega primera

Metodologija se že v prvem koraku razlikuje od ostalih simulacij tokovnih pojavov v režah z zagotavljanjem celovitega opisa domene, robnih in obratovalnih pogojev, ki zajemajo tudi volumen izven zračne reže. V obravnavanem primeru zračne reže so robni in obratovalni

pogoji definirani z vrednostmi Re in Ta števil v poglavju 2.1, vodo kot delovnim medijem in toplotnimi razmerami. Pri slednjih je pomembno, da je vstopna temperatura enaka 293 K, medtem ko so vse površine, razen ogrevane, adiabatne. Vrednost Re števila podaja povprečno aksialno hitrost $u_{ax} = 0,5 \text{ m/s}$, Ta števila pa kotne hitrosti od 0 do 28 rad/s .

Zaradi omenjene pomanjkljive definicije vstopnih razmer v domeno so med seboj primerjani rezultati treh domen, ki se razlikujejo glede na obliko vstopa in so prikazane na Sliki 3. Prva domena predpostavlja koncentrični vstop v stranski volumen, druga realno obliko vstopa s cevnimi priključki, tretja pa tako kot LES simulacije v [9] direktno uvaja fluid v režo.



Slika 3: Prikaz treh računskih domen z različnimi vstopnimi pogoji.

2.2.2 Definicija osnovnega 3D CFD modela

Osnovni simulacijski model predstavlja izhodiščne nastavitve simulacij, ki so določene kot kombinacija splošno najustrežnejših modelov za simulacije tokov v zračnih režah. Te sledijo iz literature in preliminarne simulacij. Osnovni model za primer gladke reže predvideva simulacije ustaljenega stanja z uporabo $k-\omega$ SST turbulentnega modela. Predpostavlja se osna periodičnost s 60° izsekom reže, mreža pa mora zadoščati pogoju $y^+ \leq 1$ ob stenah reže.

2.2.3 Definicija ustreznega modela 3D CFD simulacij

Na podlagi simulacij z osnovnim modelom se nato določijo nastavitve, ki omogočajo zajem prisotnih tokovnih pojavov ter posledično natančen opis prestopa toplote. V ta namen se določi ustrezno gosta mreža, razpon kota periodičnega izseka in ustreznost uporabe ustaljenih ali tranzientnih simulacij. Za obravnavane tokovne primere je bilo s simulacijami s koncentričnim vtokom določeno, da osnovni simulacijski model omogoča ustrezno natančne RANS simulacije. Ustrezno gosta mreža obsega 12 milijonov celic, ki sledijo iz uporabe 50 celic v radialni smeri, s prvo plastjo debeline 0,016 mm. Natančnejši opis izbire je podan v [8].

2.2.4 Dodatna uvedba HRLES ali LES turbulentnih modelov

Kot omenjeno v [9], se ob višjih Ta številih pojavijo vrtnične strukture ob stenah ter različne turbulentne strukture v širokem razponu velikostnih skal. Te vplivajo na intenzivnost prenosa toplote preko mešanja fluida. Ker RANS modeli turbulentne strukture oziroma vrtince v celoti modelirajo preko turbulentne viskoznosti, v omenjenih pogojih vplivajo tudi na zajem vrtničnih struktur ob steni ter s tem vplivajo na razvoj toka in prestop toplote. V nasprotju z njimi LES modeli direktno izračunavajo vrtince v večjem delu energijskega spektra turbulence in s tem omogočajo izboljššan opis prestopa toplote v obravnavanih pogojih. HRLES modeli, ki predstavljajo zvezo LES in RANS modelov, pa področje ob steni, kjer dominirajo viskozne sile, opisujejo z RANS modeli, medtem ko se turbulentni pojavi v področju prostega toka obravnavajo z uporabo LES modelov.

Z namenom določitve, kateri modeli omogočajo ustrezen opis obravnavanih razmer v zračni reži, so bili tako LES kot HRLES modeli dodatno implementirani v postavljeno metodologijo. V naslednjih podpoglavjih so opisane glavne ugotovitve, ki omogočajo to implementacijo.

2.2.4.1 Ustrezni LES ter HRLES modeli

Kot ustrezen LES model je bil izbran WALE (Wall-Adaptive-Large-Eddy) model [10]. Model nudi samodejno prilagoditev turbulentne viskoznosti glede na intenzivnost turbulence, s čimer onemogoča dodatno turbulentno viskoznost v področjih laminarnega toka. Tako omogoča ustrežnejši izračun profila hitrosti ob stenah ozkih rež.

Kot ustrezen HRLES model je bil izbran SBES (Stress-Blended Eddy Simulation) model [11]. Ta omogoča kombinacijo poljubnega RANS modela za opis stanja v mejni plasti, s poljubnim LES modelom za opis razmer v prostem toku. Izbrana sta bila $k-\omega$ SST ter WALE model.

2.2.4.2 Ustrezna kvaliteta računske mreže ter dolžina časovnega koraka

Mreža LES in HRLES simulacij je enaka v področju prostega toka zaradi uporabe LES modelov. Ob stenah HRLES simulacije omogočajo uporabo mrež RANS simulacij, LES simulacije pa zahtevajo zgostitev. Sledeč iz priporočil [12] prva plast celic ob stenah zanje dosega vrednosti $y^+ \leq 0,5$. Tej sledi najmanj 20 plasti, katerih višina postopoma raste. Parameter y^+ določa tudi velikost celic v aksialni (dx^+) in tangencialni (dz^+) smeri, ki znaša $dx^+ = 40$ in $dz^+ = 20$ v LES in HRLES simulacijah. Rezultirajoče mreže LES ter HRLES simulacij za primer cevne vtoka obsegajo 58,8 in 16,4 milijonov celic.

LES in HRLES simulacije zahtevajo tranzientno obravnavo toka. Dolžina časovnega koraka je definirana s CFL (Courant-Friedrichs-Levy) številom, ki podaja razmerje med dolžino računskega koraka in časom, potrebnim da tok preči celico. Kot ustrezen časovni korak je bil izbran $\Delta t = 0,0003$ s, ki zagotavlja globalno povprečno CFL vrednost 0,5. Za statistično ustrezen vzorec je bilo opravljenih vsaj 4000 korakov, kar zadošča petim obratom rotorja.

Tako za določitev zgostitve mreže kot dolžino časovnega koraka so pomembni rezultati RANS simulacij. Preko njih se te nastavitve določi vnaprej in z visoko zanesljivostjo.

2.2.4.3 Nastavitve in inicializacija LES ter HRLES simulacij

Uporaba LES ter HRLES simulacij zahteva prilagoditev računskih shem, robnih pogojev in inicializacije simulacij. Tudi te nastavitve izvirajo iz RANS simulacij. Računske sheme LES in HRLES simulacij se od RANS razlikujejo v uporabi algoritma SIMPLEC namesto SIMPLE ter v diskretizaciji tranzientnih in konvektivnih členov z "omejeno" shemo drugega reda [12].

Inicializacija in robni pogoji zahtevajo v nasprotju z RANS simulacijami definicijo fluktuacij, ki so posledica turbulentne narave toka in nujne za razvoj turbulence v simulacijah. Za inicializacijo se uporablja rezultate RANS simulacij, katerim se s pomočjo vgrajene funkcije v programu Fluent [12] predpiše fluktuacije hitrosti v odvisnosti od izračunane turbulentne intenzivnosti v RANS simulacijah. Podobno se na vstopu v domeno sami hitrosti fluida doda fluktuacije na podlagi uporabe metode vrtincev [12].

Simulacije z RANS, LES ali HRLES modeli, ki so izgrajene na opisan način, se nato uporabijo za izračun tokovnih razmer ter končno analizo toka. V sledeči analizi rezultatov bo obravnavan predvsem prestop toplote, ki ga opisuje koeficient prestopa toplote α oziroma brezdimenzijsko Nusseltovo, Nu , število. Definicijo obeh podajata enačbi 3 in 4, kjer \dot{q} predstavlja gostoto toplotnega toka, T_1 in T_{fl} temperaturi rotorja in fluida, λ pa toplotno prevodnost fluida.

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{|T_1 - T_{fl}|} \quad (3)$$

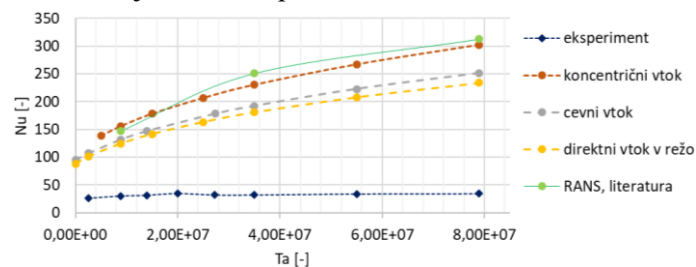
$$Nu = \frac{\alpha(R_2 - R_1)}{\lambda} \quad (4)$$

3 Rezultati in analiza

Za ustrežno predstavitev je poglavje razdeljeno na dva dela. V prvem so obravnavani vplivi vtočnih pogojev zaradi nepopolno definiranih vtočnih razmer v [9]. To zagotavlja ustrezen temelj za sledečo obravnavo simulacij z RANS, LES ter HRLES modeli v drugem delu.

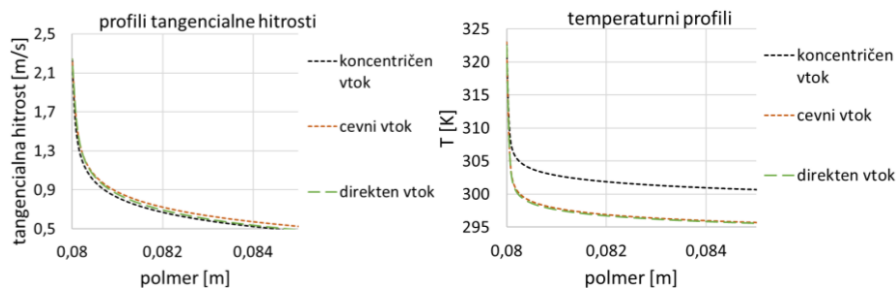
3.1 Vpliv vtočnih razmer

Vpliv vtočnih razmer v režo je obravnavan s tremi vtoki, prikazanimi na Sliki 3. Simulacije so bile opravljene s $k-\omega$ SST modelom. Rezultati so podani na sliki 4 z grafom Nu števil na poziciji, ki je 330 mm oddaljena od vstopa v zračno režo.



Slika 4: Vrednosti Nu števila v simulacijah z različnimi vtoki ter meritvah v [9].

Rezultati izrazito odstopajo od eksperimentalnih meritev, ne pa tudi od rezultatov RANS simulacij v [9]. Razvidno je, da nanje vpliva oblika vtoka. Tako se izmerjenim rezultatom najbolj približajo simulacije z direktnim vtokom v režo. Blizu so jim simulacije s cevnim vtokom. Sklepati je mogoče, da bi z ustreznim oblikovanjem vstopa v domeno dosegli rezultate, ki bi bili bližje eksperimentalnim. Vpliv oblike vtoka na prestop toplote je dodatno prikazan s primerjavo hitrostnih in temperaturnih profilov. Primerjava je podana za najvišje Ta število na sliki 5 s profili tangencialne hitrosti in temperature 330 mm od vstopa v režo, kjer se pričakuje razvit tok. Profili so izrisani od ogrevane površine do polovice višine reže.

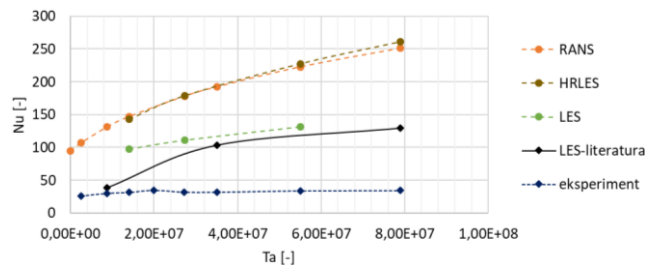


Slika 5: Profili tangencialne hitrosti (levo) in temperature (desno) v simulacijah z različnimi vtoki v domeno.

Rezultati na sliki 5 prikazujejo izrazito podobnost temperaturnih profilov pri direktnem ter cevni vstopu. Sklepati je mogoče, da cevni vstop, kljub izraziti heterogenosti, vseeno vodi do podobno razvitega tokovnega polja kot direktni vstop. Profili koncentričnega vtoka od njiju precej odstopajo, posebej izrazito temperaturni. Ta kaže na višjo povprečno vrednost temperature v reži in s tem tudi pojasnjuje višje vrednosti Nu števil. Obenem prikazani rezultati potrjujejo, da so vstopne razmere zelo pomembne tudi v primerih dolgih rež, saj vplivajo na razvoj toka in s tem temperaturnega profila globoko v reži. Za primerjavo RANS, HRLES in LES simulacij je bil na podlagi prikazanih rezultatov izbran cevni vtok.

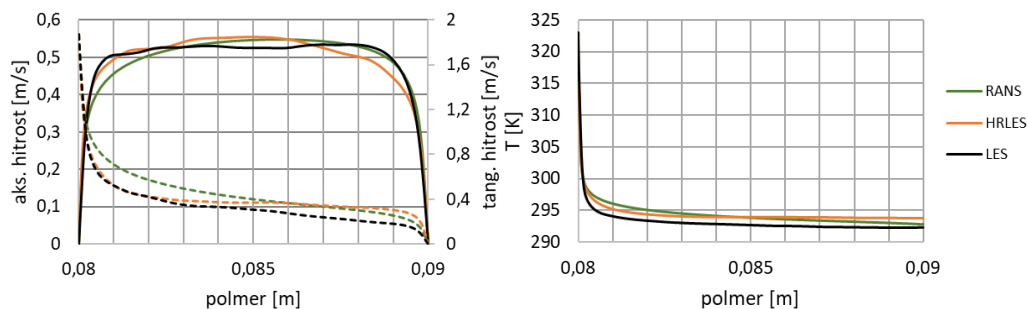
3.2 Primerjava rezultatov RANS, HRLES in LES simulacij

Primerjavo rezultatov podajajo vrednosti Nu števila na enaki poziciji kot prej za širok razpon Ta števil. Prikazuje jih graf na sliki 6, ki vsebuje tudi vrednosti Nu števil iz LES simulacij v literaturi [9], kjer je predpostavljen aksialno periodičen tok. Čeprav ne realne, so to edine LES simulacije, ki so blizu obravnavanim razmeram.



Slika 6: Primerjava Nu števil iz LES, HRLES ter RANS simulacij z vrednostmi iz [9].

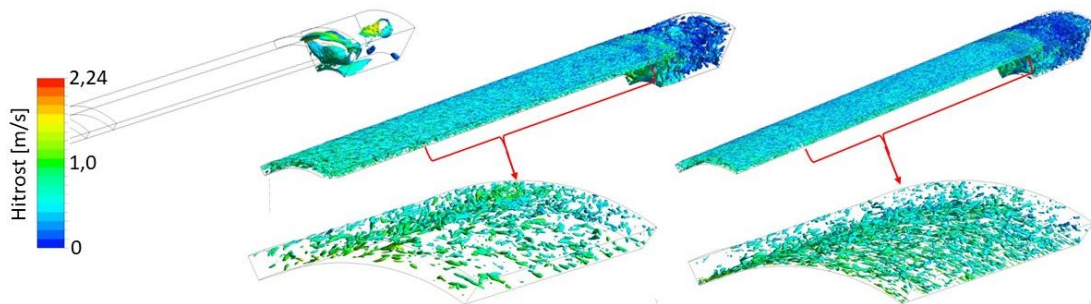
Rezultati še vedno kažejo odstopanje Nu števil. Pri tem se rezultati RANS in HRLES simulacij presenetljivo ujemajo. LES simulacije od njih odstopajo, se pri višjih Ta bolje ujemajo z literaturo ter približajo eksperimentu. Temu so bližje tudi glede na rast Nu s Ta. Zato je podana dodatna analiza, ki izhaja iz povprečnih profilov aksialne in tangencialne hitrosti ter temperature na poziciji 330 mm od vstopa pri vrednosti $Ta = 5,5 \cdot 10^7$. Prikazuje jih slika 7.



Slika 7: Profili povprečnih aksialnih (polne linije) in tangencialnih (črtkane linije) hitrosti (levo) ter temperatur (desno) v RANS, HRLES in LES simulacijah.

Razvidno je razlikovanje profilov LES simulacij od profilov RANS ter HRLES simulacij. Zanimivo je predvsem ujemanje temperaturnih profilov slednjih, kar odgovarja ujemanju njunih Nu števil. Vprašanje je, zakaj profil LES simulacij odstopa. Pri tem je pomembno, da se hitrostni profili razlikujejo v področju prostega toka, kjer so hitrosti v RANS in HRLES simulacijah višje. To kaže na vpliv turbulentne viskoznosti RANS modelov bližje stenam. Ta je prikazan z vrtinčnimi strukturami, ki jih ponazarjajo izopovršine z izbrano vrednostjo λ_2 kriterija, ki definira vrtične strukture na podlagi dekompozicije tenzorja hitrostnih gradientov. Izopovršine pri $Ta = 5,5 \cdot 10^7$ podaja slika 8. Medtem ko RANS simulacije zajamejo le nekaj struktur, jih HRLES in predvsem LES simulacije zajamejo veliko. Pomembno je, da HRLES simulacije zaradi višje turbulentne viskoznosti ob steni zajamejo manjše število večjih struktur kot LES simulacije. To je na sliki 8 prikazano z izrisom izopovršin v ogrevanem delu reže pri višji vrednosti λ_2 . Iz njih je razvidna prisotnost večjih posameznih vrtinčnih struktur ter njihovih skupin ob steni rotorja v LES simulacijah. V nasprotju z njimi se v HRLES simulacijah zajamejo predvsem vrtinčne strukture v prostem toku. Razlike v zajemu vrtinčnih

struktur tudi pojasnjujejo rast Nu števila v RANS in HRLES simulacijah s Ta številom, medtem ko LES simulacije bolje sledijo eksperimentu. Sklepati je namreč mogoče, da so ob višjih Ta številih te strukture vedno prisotne ob steni rotorja in omejujejo prestop toplote. Zato se Nu število (Sliki 4 in 6) v eksperimentih ne povečuje s Ta številom.



Slika 8: Izopovršine z vrednostjo $\lambda_2 = 1000 \text{ 1/s}^2$ v RANS (levo), HRLES (sredina) in LES (desno) simulacijah. Slednjima so dodane še izopovršine z vrednostjo $\lambda_2 = 20\,000 \text{ 1/s}^2$.

Iz podanih rezultatov sledi, da ustrezno modeliranje prestopa toplote ob višjih Ta številih zahteva ustrezno natančen opis vrtničnih struktur ob steni. Zanj je predpogoj ustrezno modeliranje turbulentne viskoznosti ob steni. Ta ne sme omejevati razvoja teh struktur, kar med tremi skupinami modelov omogočajo samo LES turbulentni modeli.

4 Zaključek

Prispevek predstavlja prvo obravnavo tokovnih razmer v zračni reži pri pogojih višjih Ta števil in TCP toka z uporabo treh glavnih skupin turbulentnih modelov. S tem naslavlja potrebo po določitvi ustreznega modeliranja takšnih razmer in odpira možnosti generacije natančnejših rezultatov, ki so visoko relevantni za sodobne elektro motorje.

Z namenom ustrezne uporabe vseh treh skupin turbulentnih modelov je najprej predstavljena postavitev simulacij, kjer predhodno postavljena metodologija z RANS modeli služi kot ustrezen temelj postavitve in izvajanja HRLES ter LES simulacij. Dodatno je zaradi vpliva robnih pogojev na razvoj toka in natančnost rešitev prikazan vpliv vtočnih razmer v domeno.

Analiza jasno izkazuje, da so v primeru višjih Ta števil potrebne LES simulacije, ki zajamejo prisotne vrtnične strukture na različnih skalah in predvsem ob stenah ter posledično nudijo natančnejši opis prestopa toplote. HRLES simulacije v primerjavi z RANS simulacijami ne vodijo k izboljššanemu opisu prestopa toplote, čeprav natančneje opišejo vrtnične strukture v prostem toku. Razlog je v uporabi RANS modelov za opis toka ob stenah, kar vodi k višji vrednosti turbulentne viskoznosti in njenemu vplivu na razvoj toka.

Slabost LES simulacij je računsko zahtevnost. Postavljena metodologija v ta namen izkorišča predhodne RANS simulacije za doseganje krajšega časa izdelave ustrezne mreže in pridobitve reprezentativnih rezultatov. Postavljena in z LES modeli nadgrajena metodologija tako celovito naslavlja izziv izboljšanja opisa prestopa toplote. S tem nudi orodje za natančnejšo določitev prenosa toplote v sodobnih elektro motorjih, kjer se zaradi višanja gostot moči in zahtev hlajenja v zračnih režah vse pogosteje pojavljajo do sedaj slabše opisane razmere aksialnega toka ob višjih Ta številih.

Literatura

- [1] Stöck M, Lohmeyer Q, Meboldt M. Increasing the power density of e-motors by innovative winding design. *Procedia CIRP* 2015;36:236–41. doi:10.1016/j.procir.2015.01.078.
- [2] Frosini L, Pastura M. Analysis and design of innovative magnetic wedges for high efficiency permanent magnet synchronous machines. *Energies* 2020;13. doi:10.3390/en13010255.
- [3] Maron DM, Cohen S. Hydrodynamics and Heat/Mass Transfer near Rotating Surfaces. *Adv Heat Transf* 1991;21:141–83. doi:10.1016/S0065-2717(08)70335-6.
- [4] Childs PRN. *Rotating Flow*. Elsevier Inc.; 2011. doi:10.1016/C2009-0-30534-6.
- [5] Fénot M, Bertin Y, Dorignac E, Lalizel G. A review of heat transfer between concentric rotating cylinders with or without axial flow. *Int J Therm Sci* 2011;50:1138–55. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2011.02.013.
- [6] Bouafia M, Bertin Y, Saulnier JB. EXPERIMENTAL ANALYSIS OF HEAT TRANSFER IN A NARROW AND GROOVED ANNULAR GAP WITH ROTATING INNER CYLINDER. *Int J Heat Mass Transf* 1998;41:1279–91.
- [7] Nouri-Borujerdi A, Nakhchi ME. Heat transfer enhancement in annular flow with outer grooved cylinder and rotating inner cylinder: Review and experiments. *Appl Therm Eng* 2017;120:257–68. doi:10.1016/j.applthermaleng.2017.03.095.
- [8] Žnidarčič A, Kutrašnik T. Analiza prestopa toplote v različnih tokovnih režimih znotraj zračnih rež elektro motorjev s 3D CFD simulacijami. *Kuhljevi dnevi 2020 Zb. del, Slovensko Društvo za Mehaniko*; 2020, p. 227–35.
- [9] Aubert A, Poncet S, Le Gal P, Viazzo S, Le Bars M. Velocity and temperature measurements in a turbulent water-filled Taylor-Couette-Poiseuille system. *Int J Therm Sci* 2015;90:238–47. doi:10.1016/j.ijthermalsci.2014.12.018.
- [10] Nicoud F, Ducros F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbul Combust* 1999;62:183–200. doi:10.1023/A:1009995426001.
- [11] Menter F. Stress-blended eddy simulation (SBES)—A new paradigm in hybrid RANS-LES modeling. *Notes Numer Fluid Mech Multidiscip Des* 2018;137:27–37. doi:10.1007/978-3-319-70031-1_3.
- [12] Menter FR. *Best Practice : Scale-Resolving Simulations in ANSYS CFD*. 2012.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=74786051

ISBN 978-961-93859-6-8 (PDF)