

Algebra bločnih diagramov

Urška Puncer

Povzetek

Modeliranje je postopek, s katerim realni proces pretvorimo na matematični model. Modeliranje se velikokrat uporablja na elektro področju pri vodenju sistemov. Za preučevani proces pretvorimo obstoječe enačbe v bločni diagram, potem pa ga s pravili algebre poenostavimo v čim bolj osnovno obliko. V prispevku je prikazana ura matematike, v kateri dijaki s pomočjo delovnega lista spoznajo osnovne pojme ter pravila algebre, ki veljajo za bločne diagrame. Pravila dokažemo z uporabo računskih zakonov ter ekvivalentnim preoblikovanjem enačb.

Ključne besede: bločni diagram, računski zakoni, ekvivalentno preoblikovanje enačb

Algebra of Block Diagrams

Abstract

Modelling is the process by which a real process is transformed into a mathematical model. Modelling is widely used in the field of electrical engineering in the management of systems. For the studied process, the existing equation is transformed into a block diagram and then simplified with algebraic rules in the most basic form. We can prove the rules using the commutative, associative and distributive laws and turning simple equations.

Key words: block diagram, commutative, associative and distributive laws

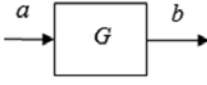
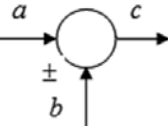
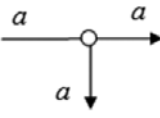
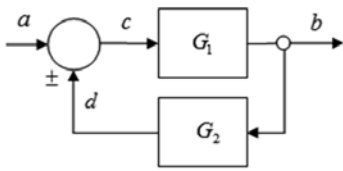
Uvod

Na vseh nivojih srednješolskega izobraževanja se pri matematiki obravnavajo številske množice. Od naravnih števil dalje se pri vsaki množici pojavljajo komutativnostni zakon za seštevanje in množenje, asociativnostni zakon za seštevanje in množenje ter distributivnostni zakon. Dijaki vedno sprašujejo, zakaj je zakone sploh treba obravnavati, saj so na ravni števil tako očitni. V algebri bločnih diagramov sem našla primer, da dijakom pokažem, da so ti zakoni pomembni tudi v praksi.

Ura je prilagojena za konec prvega letnika tehniške šole. Temo obravnavamo v skupinah s tremi ali štirimi dijaki. Po razporejanju sledi kratek uvod o modeliranju.

Modeliranje je postopek, s katerim realni proces pretvorimo na matematični model. Modeliranje se velikokrat uporablja na elektro področju pri vodenju sistemov. Za preučevani proces pretvorimo obstoječe enačbe v bločni diagram, potem pa ga s pravili algebre poenostavimo v čim bolj osnovno obliko. Prednost bločnih diagramov je njihova nazornost in preglednost.

Za obravnavanje teme sem pripravila delovni list (Priloga 1), na katerem so najprej zapisani in prikazani osnovni pojmi (Slika 1) ter enačbe (Slika 2–9), ki jih predstavljajo.

Ime	Simbol	Matematična enačba
Blok (Na levi strani je vhodni signal, na desni pa izhodni signal. Blok na sredini pove zvezo med vhomom in izhodom.)		$b = a \cdot G$
Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)		$c = a \pm b$
Razcepišče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)		
Povratna zanka		

Slika 1: Osnovni pojmi (prirejeno po Zupančič, 2018)

Potem sledi tabela, v kateri so osnovne povezave med bloki in pravila algebre bločnih diagramov. Vsa ta pravila najprej dokažemo z uporabo osnovnih računskih zakonov, ekvivalentnim preoblikovanjem enačb ter osnovnih sistemov enačb. Na koncu se pogovorimo, katera pravila smo uporabili. Nekaj primerov naredimo skupaj. Potem jih spodbudim k samostojnemu delu po skupinah, sama pa hodim med skupinami, jih spodbujam k razmišljanju in odgovorjam na vprašanja.

Za dokazovanje izpišemo enačbe iz zgornjega diagrama in jih preoblikujemo v enačbo, ki ustreza spodnjemu diagramu.

Ime	Ekvivalentna diagrama	Kaj smo uporabili?
1 Redukcija zaporedne vezave		

Slika 2

Za prvi diagram (Slika 2) velja $b = c \cdot G$ in $c = a \cdot G_1$.

Enačbi združimo in dobimo $b = c \cdot G_2 = (a \cdot G_1) \cdot G_2 = a \cdot (G_1 \cdot G_2)$.

Uporabili smo asociativnostni zakon za množenje.

2 Redukcija vzporedne vezave		
------------------------------	--	--

Slika 3

Za prvi diagram (Slika 3) velja $b = a \cdot G_1 + a \cdot G_2$. Izpostavimo a in dobimo $b = a \cdot (G_1 + G_2)$.

Uporabili smo izpostavljanje skupnega faktorja.

3 Redukcija zanke		
-------------------	--	--

Slika 4

Za prvi diagram (Slika 4) veljata enačbi $b = c \cdot G_1$ in $c = a + b \cdot G_2$. Če enačbi združimo, dobimo $b = c \cdot G_1 = (a + b \cdot G_2) \cdot G_1 = a \cdot G_1 + b \cdot G_2 \cdot G_1$. Iz enačbe izrazimo b in dobimo

$$b - b \cdot G_2 \cdot G_1 = a \cdot G_1$$

$$b \cdot (1 - G_2 \cdot G_1) = a \cdot G_1$$

$$b = \frac{G_1}{1 - G_2 \cdot G_1} \cdot a; \quad G_1 \cdot G_2 \neq 1.$$

Za $G_1 \cdot G_2 = 1$ velja $b \cdot 0 = a \cdot G_1$, torej $a = 0$.

Uporabili smo sistem enačb, distributivnostni zakon, izpostavljanje skupnega faktorja in obravnavanje linearne enačbe s parametrom.

4 Zamenjava vrstnega reda zaporednih blokov		
---	--	--

Slika 5

Iz prve točke sledi, da lahko enačbi prvega diagrama (Slika 5) združimo in zapišemo kot $b = a \cdot G_1 \cdot G_2$.

$b = a \cdot G_1 \cdot G_2 = a \cdot G_2 \cdot G_1 = d \cdot G_1$, kjer je $d = a \cdot G_2$. To pa sta enačbi drugega diagrama.

Uporabili smo komutativnostni zakon za množenje.

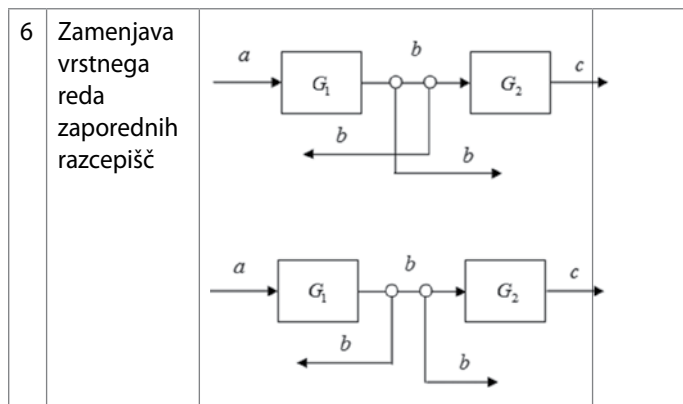
5 Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk		
---	--	--

Slika 6

Prvemu diagramu (Slika 6) pripada enačba $d = (a \pm b) \pm c$. Nato jo preoblikujemo in dobimo $d = (a \pm b) \pm c = a + (\pm b \pm c) = a + (\pm c \pm b) = (a \pm c) \pm b$, kar je enačba drugega diagrama.

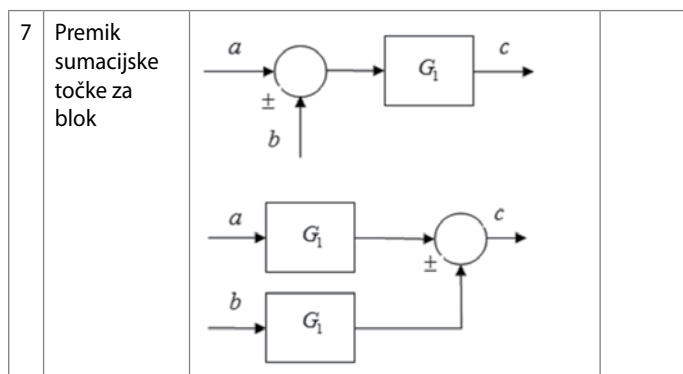
Uporabili smo asociativnostni in komutativnostni zakon za seštevanje.

Pri tej točki dijake opozorim na izpostavljanje znaka za seštevanje pred oklepajem.



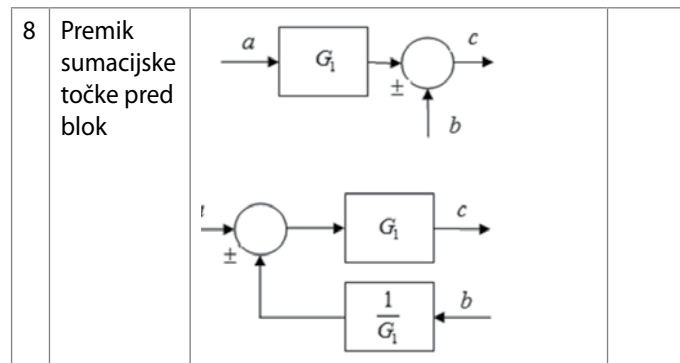
Slika 7

Razcepišče pomeni (Slika 7), da isti signal deluje na različnih mestih, zato lahko razcepišča med sabo menjamo.



Slika 8

Zapišemo enačbo (Slika 8), ki pripada prvemu diagramu, uporabimo distributivnosti zakon in dobimo enačbo, ki pripada drugemu diagramu. $c = (a \pm b) \cdot G_1 = a \cdot G_1 \pm b \cdot G_1$.



Slika 9

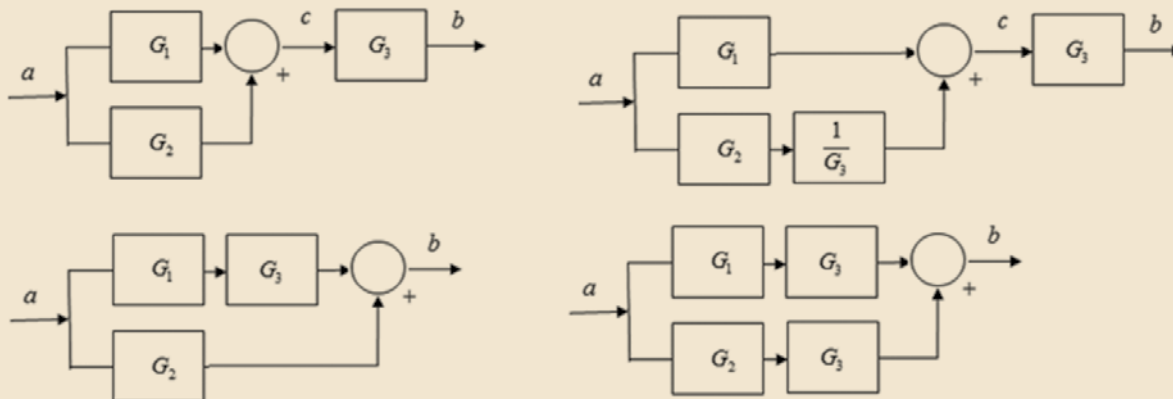
Ob uporabi izpostavljanja skupnega faktorja in obratne vrednosti pokažemo (Slika 9), da velja

$$c = a \cdot G_1 \pm b = a \cdot G_1 \pm b \cdot \frac{1}{G_1} \cdot G_1 = \left(a \pm b \cdot \frac{1}{G_1} \right) \cdot G_1.$$

Po pregledu tabele s pravili sledi naloga, v kateri ta pravila uporabimo.

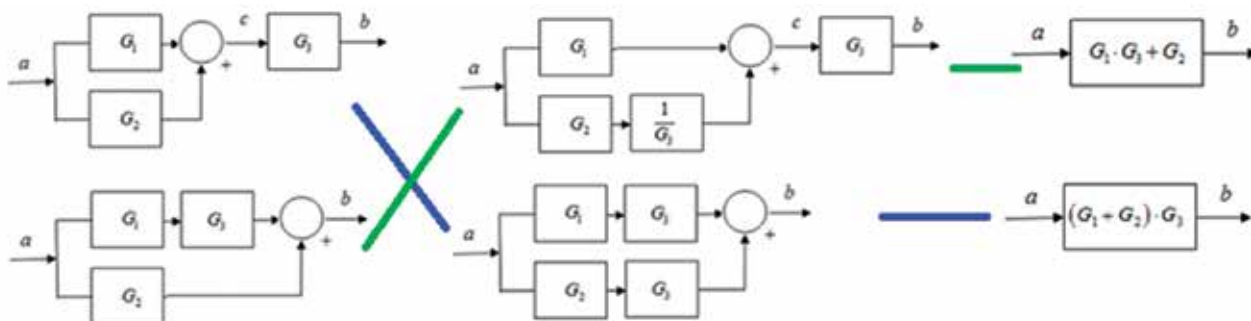
Naloga

Na sliki so štiri diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih poenostavi do osnovne oblike.



Rešitev naloge:

Odziv dijakov na uro je bil pozitiven. Všeč jim je bilo predvsem to, da smo se dotaknili njihovega področja, pri tem pa utrdili matematično predznanje.



Zaključek

Algebro bločnih diagramov uporabljajo na področju elektrotehnike, vendar sem delovni list sestavila povsem splošno, tako da je primeren tudi za druge smeri. V opisani uri se dijaki urijo v dokazovanju, preoblikovanju enačb, uporabljajo številne zakone ter diagrame povezujejo z enačbami in obratno. Pri tem spoznajo uporabnost računskih zakonov, ki so jim na ravni števil tako samoumevni. Tema je zelo primerna za skupinsko delo, saj je snov za vse popolnoma nova in med dijaki ni večjih razlik v predznanju.

Viri

- Puncer, U. (2018). Bločna algebra. Zbornik razširjenih povzetkov KUPM 2018. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Str. 86, 87.
<http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/AVS/AVS.pdf> (21. 3. 2018).
<https://www.slideshare.net/tendeo/control-chap3> (21. 3. 2018).
https://www.tutorialspoint.com/control_systems/control_systems_block_diagram_algebra.htm (21. 3. 2018).



Osnovni pojmi:

Ime	Simbol	Matematična enačba
Blok (Na levi strani je vhodni signal, na desni pa izhodni signal. Blok na sredini pove zvezo med vhomom in izhodom.)		$b = a \cdot G$
Sumacijska točka (ponazarja seštevanje ali odštevanje dveh signalov)		$c = a \pm b$
Razcepišče (pove, da določen signal deluje na različnih mestih v bločnem diagramu)		
Povratna zanka		

Osnovna pravila algebre:

Ime	Ekvivalentna diagrama in dokaz ekvivalence	Kaj smo uporabili?
1 Redukcija zaporedne vezave		
2 Redukcija vzporedne vezave		
3 Redukcija zanke		
4 Zamenjava vrstnega reda zaporednih blokov		
5 Zamenjava vrstnega reda zaporednih sumacijskih točk		



6	Zamenjava vrstnega reda zaporednih razcepišč		
7	Premik sumacijske točke za blok		
8	Premik sumacijske točke pred blok		

Naloga:

Na sliki so štiri diagrami. Z uporabo zgornjih pravil ugotovi, kateri so ekvivalentni in jih poenostavi do osnovne oblike.

