Uglajena števila

Marko Razpet

Matematiki so si za naravna števila, ki imajo tako ali drugačno lastnost, izmislili celo kopico posebnih izrazov. Nekatere dobro poznamo, na primer sodo število, liho število, praštevilo, sestavljeno število, trikotniško število. Manj znana so morda uglajena ali trapezna števila, ki si jih bomo nekoliko natančneje ogledali v nadaljevanju.

Nekatera naravna števila lahko zapišemo kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil na en sam način, nekatera pa na dva ali celo več načinov. Taka števila so poimenovali *uglajena števila*, v angleščini *polite numbers*. Angleški pridevnik *polite* pomeni *vljuden, lepo vzgojen, uglajen, kultiviran, eleganten*. Število zapisov naravnega števila N z vsoto zaporednih naravnih števil je njegova *uglajenost*, angleško *politeness*. Označimo jo z $\mathrm{ugl}(N)$.

Primeri:

- $3 = 1 + 2,\ 5 = 2 + 3,\ 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4;$
- $69 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 34 + 35$
  $= 22 + 23 + 24.$

Števila $3, 5, 9, 69$ so zato uglajena. Velja: $\mathrm{ugl}(3) = \mathrm{ugl}(5) = 1, \mathrm{ugl}(9) = 2, \mathrm{ugl}(69) = 3$. Zanimivo je, da števil $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, to je potenc 2^n z nenegativnimi celimi eksponenti n, ne moremo zapisati kot vsoto zaporednih naravnih števil na noben način. Števila 2^n so neuglajena in $\mathrm{ugl}(2^n) = 0$.

Vsa liha števila razen 1 so uglajena, ker velja $2n + 1 = n + (n + 1)$. Videli bomo, da so vsa naravna števila, razen potenc števila 2, uglajena števila. Potemtakem bi marsikdo menil, da uglajena števila niso zanimiva. Vendarle pa je le pomembno, kako sploh ugotovimo, ali je dano naravno število N uglajeno, koliko je $\mathrm{ugl}(N)$ in kako ga lahko zapišemo kot vsoto zaporednih naravnih števil.

Da bi bilo N uglajeno število, morata obstajati celi števili $m \geq 0$ in $d > 1$, za kateri velja

- $(m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + d) = N.$

Na levi strani imamo d členov aritmetičnega zaporedja, katerega prvi člen je $m + 1$, zadnji pa $m + d$. Vsota teh členov je, kot je dobro znano,

- $\frac{1}{2}d((m + 1) + (m + d)) = \frac{1}{2}d(2m + d + 1).$

Pogoj uglajenosti števila N je torej enačba

- $d(2m + d + 1) = 2N.$

Iz nje se takoj vidi, da potenca $N = 2^n$ ne more biti uglajeno število. V enačbi $d(2m + d + 1) = 2^{n+1}$ namreč d ne more biti niti sodo niti liho število. Če bi bil d sod, bi dobili na levi strani produkt sodega in lihega števila, kar ne more biti potenca števila 2. Če pa je d lih, pa prav tako ne.

Če število $2N$ ni potenca števila 2, ga očitno lahko vsaj na en način izrazimo kot produkt sodega in lihega števila, recimo $2N = PQ$, pri čemer je $1 < P < Q$. Ker v relaciji $d(2m + d + 1) = 2N = PQ$ velja $d < 2m+d+1$, izberemo kar $d = P$ in $2m+d+1 = Q$. S tem imamo $m = (Q - P - 1)/2$. Če je $d = P$ sodo (liho) število, je Q liho (sodo) število. Števili P in Q sta različnih parnosti, zato je število $Q - P - 1$ sodo in posledično m naravno število.

Primeri: Naj bo $N = 2018$. Imamo $2N = 4036 = 4 \cdot 1009$. To je edini razcep števila 4036 na sodi in lihi faktor. Če izberemo $P = 4$ in $Q = 1009$, dobimo $d = Q = 4$ in $m = (Q - P - 1)/2 = (1009 - 4 - 1)/2 = 502$. Res je $2018 = 503 + 504 + 505 + 506$ in $\mathrm{ugl}(2018) = 1$.

Uglajenost števila je lahko tudi zelo velika. Da ne bomo pretiravali, vzemimo število $N = 90$. V tem primeru je $2N = 180 = 4 \cdot 3^2 \cdot 5$. To število ima 5 razcepov na sodi in lihi faktor z ustreznimi $d = P$ in Q ter $m = (Q - P - 1)/2$:

- $2N = 180 = 4 \cdot 45; d = 4, m = 20;$
  $2N = 180 = 12 \cdot 15; d = 12, m = 1;$
  $2N = 180 = 9 \cdot 20; d = 9, m = 5;$
  $2N = 180 = 3 \cdot 60; d = 3, m = 28;$
  $2N = 180 = 5 \cdot 36; d = 5, m = 15.$

Zato je $\mathrm{ugl}(90) = 5$, zapisi v obliki vsot zaporednih naravnih števil pa so:

- $90 = 21 + 22 + 23 + 24$
  $= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$
  $= 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$
  $= 29 + 30 + 31 = 16 + 17 + 18 + 19 + 20.$

Zanima nas, kako bi najhitreje izračunali $\mathrm{ugl}(N)$. Dovolj je prešteti vse lihe delitelje števila $2N = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$. Z vsakim od njih dobimo enega od faktorjev P, Q v razcepu $2N = PQ$. Preostali je z njim natančno določen. Lihi delitelji števila $2N$ so oblike $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$, kjer so $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ nenegativna cela števila in $0 \leq \gamma_1 \leq \beta_1, 0 \leq \gamma_2 \leq \beta_2, \dots, 0 \leq \gamma_r \leq \beta_r$. Število vseh lihih deliteljev števila $2N$ je zato po osnovnem izreku kombinatorike enako produktu $(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1)$. Izločiti pa moramo primer $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_r = 0$, ki nam da delitelj 1 in s tem $d = 1$, ki pa za izračun uglajenosti števila ne pride v poštev. Tako smo našli formulo

- $\mathrm{ugl}(N) = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_r + 1) - 1.$

Primeri. $\mathrm{ugl}(100) = \mathrm{ugl}(2^2 \cdot 5^2) = (2 + 1) - 1 = 2$, $\mathrm{ugl}(1000) = \mathrm{ugl}(2^3 \cdot 5^3) = (3 + 1) - 1 = 3$, $\mathrm{ugl}(1350) = \mathrm{ugl}(2 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = (3 + 1)(2 + 1) - 1 = 11$, $\mathrm{ugl}(3^{100}) = (100 + 1) - 1 = 100$.

Iz zadnjega primera vidimo, da je uglajenost lahko poljubno velika, saj je na primer $\mathrm{ugl}(p^k) = k$ za poljubno liho praštevilo p in poljubno naravno število k. Za različni lihi praštevili p in q imata potenci p^k in q^k isto uglajenost, v številu d členov v vsoti pa se lahko razločujeta, kot spoznamo v nalogi na koncu prispevka.

Na sliki 1 je nekaj začetnih točk $(n, \mathrm{ugl}(n))$ v koordinatnem sistemu.

Matematika Joachim Lambek (1922–2014) in Leo Moser (1921-1970) sta celo našla funkcijo, s katero izračunamo n-to uglajeno število:

- $f(n) = n + 1 + \lfloor \log_2(n + 1 + \log_2(n + 1)) \rfloor.$

Pri tem pomeni $\lfloor u \rfloor$ celi del realnega števila u, to je največje celo število, ki ne presega u.

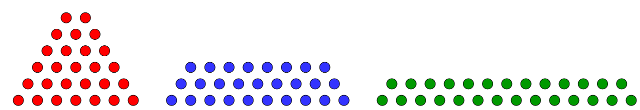
Med uglajena števila spadajo vsa trikotniška števila

- $T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1),$

razen $T_1 = 1$. Ustrezajo $m = 0$ in $d = n$. Očitno je vsako uglajeno število N razlika dveh trikotniških:

- $N = T_{m+d} - T_m.$

Pri tem vzamemo $T_0 = 0$. Podobno kot lahko trikotniška števila figurativno predstavimo s točkami, zloženimi v trikotnik, lahko uglajena števila predstavimo s točkami, zloženimi v trapez. Zato nekateri (na primer [1]) uglajena števila imenujejo kar *trapezna števila*. Slika 2 predstavlja uglajeno število 27 na 3 načine, ker ima uglajenost enako 3.

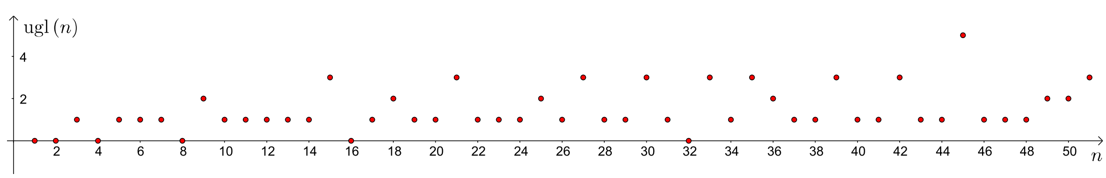


SLIKA 2.

Naloga. Naj bo p liho praštevilo, k pa naravno število. Dokaži, da je p^k vsota dveh zaporednih naravnih števil. Če pa je $k > 2$, je p^k tudi vsota $2p$ zaporednih naravnih števil, od $(p^{k-1} - 2p + 1)/2$ do $(p^{k-1} + 2p - 1)/2$.

Literatura

[1] C. Gamer, D. W. Roeder, J. J. Watkins, *Trapezoidal numbers*, Mathematics Magazine **58** (1985), št. 2, str. 108–110.



SLIKA 1.