TRIKOTNIK, ENAKOOSNA HIPERBOLA IN BERNOULLIJEVA LEMNISKATA

MARKO IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A55, 51M04, 51M15

V prispevku obravnavamo geometrijsko konstrukcijo trikotnika ABC z dano osnovnico AB, razliko $\alpha - \beta$ kotov ob osnovnici in premico, na kateri je oglišče C. Naloga je posplošitev tiste, ki jo je Josipu Plemlju postavil leta 1891 njegov profesor matematike Vincenc Borštner na ljubljanski gimnaziji.

TRIANGLE, RECTANGULAR HYPERBOLA AND LEMNISCATE OF BERNOULLI

In this contribution we discuss a geometric construction of a triangle ABC when its base AB, difference $\alpha - \beta$ between the angles at this base, and a straight line on which the vertex C is located are given. The problem is a generalization of one posed in the year 1891 to Josip Plemelj by his mathematics teacher Vincenc Borštner in secondary school in Ljubljana.

Uvod

Znano je (več v [4, 5]), da je dal prof. Vincenc Borštner (1843–1917) na ljubljanski državni gimnaziji leta 1891 petošolcem, med katerimi je bil tudi Josip Plemelj (1873–1967), iz neke, nam še vedno *neznane zbirke*, naslednjo konstrukcijsko nalogo.

Naloga (A).

Konstruirati je treba trikotnik z znano stranico c, razliko kotov $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ ob njej in višino v_c.

Vse konstrukcije naj se opravijo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Vemo, da se nalogo (A) da rešiti na več načinov. Plemelj jo je najprej rešil z računom, nato pa našel geometrijsko konstrukcijo. V iskanju *neznane zbirke* naletimo dvakrat na isto nalogo v obsežnem delu [2], kjer avtorja pri konstrukciji uporabita izrek o potenci točke glede na krožnico oziroma metodo dopolnitve trikotnika v enakokraki trapez, tako kot je opisano v [1]. Nobena od teh možnosti ni tista, ki naj bi bila v Borštnerjevi zbirki in je obrazložena v [4, 5]. V nadaljevanju iskanja *neznane zbirke* najdemo višješolski učbenik [3] iz leta 1855, v katerem je na strani 185 splošnejša naloga, kot je Borštnerjeva.

Naloga (B).

Konstruirati je treba trikotnik ABC z znano stranico $c = |AB|$, razliko kotov $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ ob njej, pri tem pa mora oglišče C ležati na dani premici p.

Predpostavili bomo, da je trikotnik ABC standardno označen, pri čemer je $0 < \varepsilon < \pi$. Koti α, β in γ so notranji trikotnikovi koti. Če je p vzporedna s stranico AB, potem iz (B) dobimo Borštnerjevo nalogo (A). V nalogi (B) sta dani oglišči A in B, ki določata stranico z dolžino c trikotnika ABC. Kajti le tako je tedaj smiselno podati premico, ki vsebuje tretje oglišče.

Analitična rešitev

Najprej bomo nalogo (B) rešili analitično, podobno kot je to narejeno v [6]. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy naj bosta oglišči trikotnika $A(-f, 0)$ in $B(f, 0)$, pri čemer je $f = c/2 = |AB|/2$. Oglišče C naj ima pozitivno ordinato, da bo trikotnik ABC pravilno označen (slika 1). Če izberemo kot α, potem mora biti kot β enak $\alpha - \varepsilon$. Premica skozi A, nosilka stranice b, in premica skozi B, nosilka stranice a iskanega trikotnika, imata enačbi

$$y = (x + f)\operatorname{tg}\alpha, \quad y = -(x - f)\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon). \tag{1}$$

Njuno presečišče je točka $C(x_C, y_C)$, tretje oglišče iskanega trikotnika. Ko rešimo sistem enačb (1) in dobljena izraza poenostavimo, dobimo:

$$x_C = -f \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}, \quad y_C = f \cdot \frac{\cos\varepsilon + \cos\gamma}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

Z nekoliko daljšim, pa ne težkim računom, najdemo zvezo

$$x_C^2 - y_C^2 - 2x_C y_C \cot\varepsilon - f^2 = 0,$$

kar pomeni, da oglišče C leži na stožnici, ki ima enačbo

$$x^2 - y^2 - 2xy\cot\varepsilon - f^2 = 0. \tag{3}$$

V skladu z nalogo je oglišče C lahko le na tistem njenem delu, kjer je $x < 0$ in $y > 0$. Ker je $\varepsilon = \alpha - \beta < \alpha + \beta = \pi - \gamma$, sledi še omejitev $0 < \gamma < \pi - \varepsilon$. Parametrični enačbi te krivulje sta po (2) $x = -f\sin\varepsilon/\sin t$, $y = f(\cos\varepsilon + \cos t)/\sin t$, $0 < t < \pi - \varepsilon$.

Mešani člen $-2xy\cot\varepsilon = 2xy\operatorname{tg}(\varepsilon - \pi/2)$ pove (glej na primer [7]), da je stožnica v koordinatnem sistemu Oxy zasukana okoli O za kot $\vartheta =$

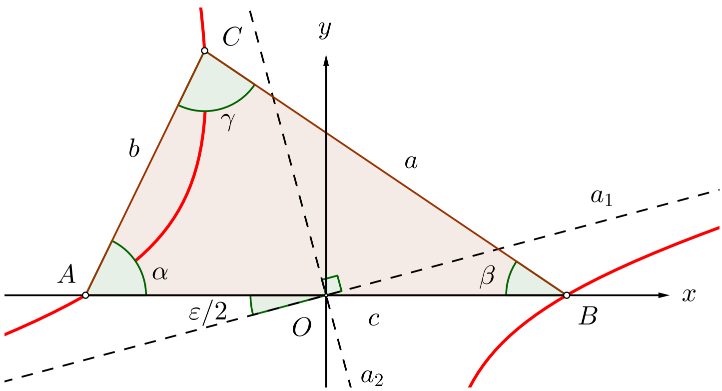
$\varepsilon/2 - \pi/4$. Za $\varepsilon = \pi/2$ preide (3) v $x^2 - y^2 = f^2$, kar je enačba enakoosne hiperbole. Spoznali bomo, da enačba (3) za vsak ε med 0 in π predstavlja enakoosno hiperbolo v koordinatnem sistemu Oxy, zasukano okoli O za kot $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$.

Ponovimo najosnovnejše o hiperboli. Enačba splošne hiperbole v kanonski obliki je $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Pri tem je a *realna polos*, b pa *imaginarna polos* hiperbole. Točki $E(-a, 0)$ in $F(a, 0)$ sta *temeni* hiperbole. Premici, ki sta zajeti v enačbi $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$, sta *asimptoti hiperbole*. Za $a = b$ dobimo *enakoosno hiperbolo* $x^2 - y^2 = a^2$. Razdalja $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ je *linearna ekscentričnost* hiperbole. *Gorišči* hiperbole sta točki $G_1(-e, 0)$ in $G_2(e, 0)$. Enakoosna hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ ima gorišči $G_1(-a\sqrt{2}, 0)$ in $G_2(a\sqrt{2}, 0)$.

Ker obstaja realen razcep

$$x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon = \left(y + x \cot \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(x \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - y\right),$$

je stožnica (3) res hiperbola, njeni asimptoti a_1 in a_2 pa sta premici $y = x \operatorname{tg}(\varepsilon/2)$ in $y = -x \cot(\varepsilon/2)$, ki sta očitno med seboj pravokotni, kar samo potrjuje dejstvo, da je hiperbola (3) enakoosna, saj ima samo taka hiperbola med seboj pravokotni asimptoti. Asimptota a_1 oklepa z osjo x kot $\varepsilon/2$, asimptota a_2 pa kot $\varepsilon/2 + \pi/2$.



Slika 1. Trikotnik in hiperbola.

Hiperbola (3) poteka skozi točki A in B. Z njima in razliko kotov ε je natančno določena. Označimo jo s $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$. Točki E in F hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$, ki sta središču O najbližji, sta temeni hiperbole. Poiščimo ju hkrati z dolžino realne polosi $|OE| = |OF|$ hiperbole z metodami linearne algebre. Kvadratni formi $x^2 - 2xy \cot \varepsilon - y^2$, ki definira hiperbolo $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$, pripada simetrična matrika

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\cot\varepsilon \\ -\cot\varepsilon & -1 \end{bmatrix},$$

ki ima karakteristično enačbo

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - \cot^2\varepsilon = \lambda^2 - \frac{1}{\sin^2\varepsilon} = 0.$$

Lastni vrednosti matrike M sta $\lambda_1 = 1/\sin\varepsilon$ in $\lambda_2 = -1/\sin\varepsilon$. Lastni vrednosti $\lambda_2 < 0$ pripada lastni vektor $\vec{v}_2$, ki definira smer Oy' premice, ki hiperbole ne seka. Lastni vrednosti $\lambda_1 > 0$ pa pripada lastni vektor $\vec{v}_1$ s koordinatama u in v, ki zadoščata enačbi $(1-\lambda_1)u - v\cot\varepsilon = 0$, iz katere dobimo

$$\frac{v}{u} = \frac{1-\lambda_1}{\cot\varepsilon} = \frac{\sin\varepsilon - 1}{\cos\varepsilon}.$$

Z uvedbo kota $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$ zapišemo dobljeni rezultat v enostavnejši obliki: $v/u = \operatorname{tg}\vartheta$. Lastni vektor $\vec{v}_1$ definira smer Ox' premice $y = x\operatorname{tg}\vartheta$, ki hiperbolo seka v temenih E in F. V koordinatnem sistemu $Ox'y'$ ima hiperbola enačbo $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = (x'^2 - y'^2)/\sin\varepsilon = f^2$, iz katere lahko izrazimo dolžino realne polosi hiperbole $\mathcal{H}(A,B,\varepsilon)$: $|OE| = |OF| = f\sqrt{\sin\varepsilon}$. Temeni E in F imata polarna radija

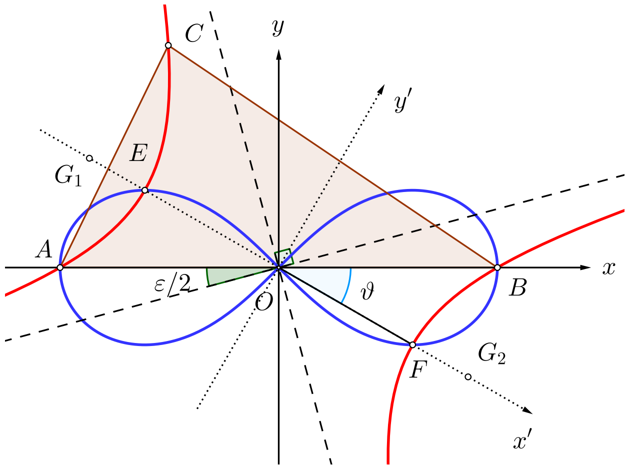
$$\varrho = f\sqrt{\sin\varepsilon} = f\sqrt{\sin(2\vartheta + \pi/2)} = f\sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Temeni E in F hiperbole s spreminjanjem kota ε potujeta po *Bernoullijevi lemniskati*, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = f\sqrt{\cos 2\varphi}$, v pravokotnih karteričnih koordinatah pa $(x^2+y^2)^2 = f^2(x^2-y^2)$.

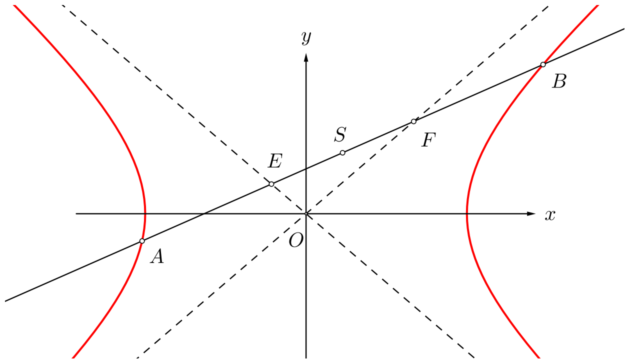
Gorišči G_1 in G_2 hiperbole $\mathcal{H}(A,B,\varepsilon)$ tudi ležita na premici $y = x\operatorname{tg}\vartheta$, njuna polarna radija pa sta $f\sqrt{2\cos 2\vartheta}$, kar pomeni, da se pri spreminjanju kota ε tudi gibljeta po Bernoullijevi lemniskati, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = f\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Enakoosna hiperbola ima lastnost, da vsak trikotnik ABC, ki ima za stranico AB premer hiperbole, oglišče C pa drsi po eni od vej hiperbole, ohranja razliko kotov ob AB. Premer hiperbole je vsaka tetiva skozi središče hiperbole. Za dokaz potrebujemo najprej trditev 1.

Trditev 1. *Če neka premica preseka hiperbolo v točkah A in B, njeni asimptoti pa v točkah E in F, potem imata tetiva AB in daljica EF isto razpolovišče S. Razpolovišča med seboj vzporednih tetiv ležijo na skupni premici.*



Slika 2. Trikotnik, hiperbola in Bernoullijeva lemniskata.



Slika 3. Če premica preseka hiperbolo in njeni asimptoti, velja $|AE| = |BF|$.

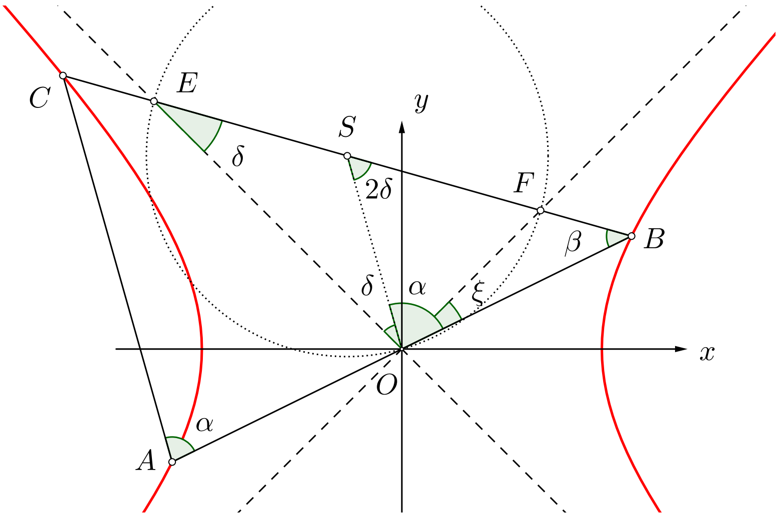
Dokaz. Vzemimo hiperbolo $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (slika 3). Njeni asimptoti zapišemo z razcepno enačbo $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Če je poljubna premica, ki seka hiperbolo in asimptoti, navpična, imata tetiva AB in daljica EF očitno skupno razpolovišče, ki leži na abscisni osi. S tem je za ta primer potrjen tudi zadnji del trditve.

V preostalih primerih pa naj ima premica enačbo $y = kx + n$. Za abscisi presečišč vsake take premice s hiperbolo dobimo kvadratno enačbo oblike $x^2 + px + q_h = 0$, za abscisi presečišč z asimptotama pa enačbo oblike $x^2 + px + q_a = 0$. Po Viètovem pravilu je v obeh primerih polovična vsota abscis presečišč enaka $x_0 = -p/2 = a^2kn/(b^2 - a^2k^2)$, polovična vsota ustreznih ordinat pa $y_0 = kx_0 + n = b^2n/(b^2 - a^2k^2)$. S tem imamo koordinati točke S. Središča vseh med seboj vzporednih tetiv hiperbole z naklonom k

ležijo na isti premici, ki ima enačbo $a^2ky = b^2x$. Na sliki 3 tetiva povezuje obe veji hiperbole. Trditev pa velja tudi za tetive posamezne veje. ∎

Očitna posledica trditve sta enakosti $|AE| = |BF|$ in $|AF| = |BE|$.

Trditev 2. *V trikotniku, ki ima za stranico AB katerikoli izbrani premer enakoosne hiperbole, oglišče C pa leži na tej hiperboli, ostane razlika kotov ob stranici AB stalna pri spreminjanju C, če je pri tem C na isti veji hiperbole, trikotnik ABC pa ne menja svoje orientacije.*



Slika 4. Trikotnik, ki ima za stranico premer enakoosne hiperbole.

Dokaz. Koordinatno izhodišče O razpolavlja premer AB hiperbole, točka S pa njeno tetivo CB, pa tudi daljico EF med asimptotama, ki se sekata pravokotno (slika 4). Zato je trikotnik OFE pravokoten, trikotnika EOS in OFS pa enakokraka. Trikotnika ABC in OBS sta si podobna, ker se ujemata v kotu β in v razmerju stranic, ki ga oklepata. Zato sta stranici AC in OS vzporedni. Naj bo ξ kot med daljicama OB in OF. Če upoštevamo relacije med koti v trikotnikih OBS in OBF, dobimo: $\alpha - (\pi/2 - \delta) = \xi$ in $\pi - (\pi/2 + \delta) - \beta = \xi$. Iz obeh sledi $\alpha - \beta = 2\xi$, neodvisno od C. ∎

V posebnem primeru, ko je tetiva AB realna os hiperbole $x^2 - y^2 = a^2$, je $\xi = \pi/4$ in s tem $\alpha - \beta = \pi/2$.

Začeli smo z nalogo (B) in prišli do enakoosne hiperbole. Lahko pa začnemo z enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = f^2 \sin\varepsilon$ in načrtamo njen premer

AB, ki oklepa z njeno realno osjo kot $\pi/4 - \varepsilon/2$. Ta premer ima dolžino $2f = c$. Če izberemo na levi veji hiperbole točko C s pozitivno ordinato, je razlika kotov trikotnika ABC ob osnovnici AB enaka ε po trditvi 2. Presek C pozitivnega dela leve veje take hiperbole s premico p določa trikotnik ABC, ki je rešitev naloge (B).

Če izberemo točko C na desni veji hiperbole, dobimo trikotnik, v katerem je $\beta > \alpha$ in $\beta - \alpha = \pi - \varepsilon$.

Nalogo (B) lahko še posplošimo, če zahtevamo, da je oglišče C na poljubni dani krivulji $\mathcal{C}$ namesto na premici. Tedaj konstruiramo za znano stranico AB in znano razliko kotov ε hiperbolo $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$, oglišče C je potem, glede na to, kako je trikotnik ABC označen, in glede na to, da je $0 < \varepsilon < \pi$, presek pozitivnega dela leve veje te hiperbole s krivuljo $\mathcal{C}$. Reševanje problemov z metodo presekov stožnic in drugih krivulj ni nič novega. Že nekateri antični matematiki so jo uporabljali pri problemu podvojitve kocke in razdelitve kota na tri enake dele.

Na žalost pa stožnice, razen krožnice, niso pravi konstrukcijski elementi, ker konstrukcije ne potekajo samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, zato bomo le za primer, ko je $\mathcal{C}$ premica p, pokazali pravilno konstrukcijo. Je pa nedvomno že solidna skica hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ uporabna, ker nam hitro da grobo informacijo o obstoju in številu rešitev. Če premica p preseka dvakrat pozitivni del leve veje hiperbole, obstajata dve rešitvi naloge. Če jo preseka enkrat ali pa se je dotika, je rešitev ena sama. Sicer pa naloga nima rešitve.

Geometrijske konstrukcije

Oglišče $C(x_C, y_C)$ iskanega trikotnika naj leži na premici p, ki naj ima enačbo v normalni obliki: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = d$. Pri tem pomeni φ orientirani kot, ki ga pravokotnica dolžine $d > 0$ iz O na to premico oklepa z osjo x. Če pa je d=0, vzamemo za φ naklonski kot premice, povečan za $\pi/2$. Pri tem je $0 \le \varphi < 2\pi$. V enačbo premice p vstavimo koordinati točke C, ki sta zapisani v (2), upoštevamo $f = c/2$ in dobimo enačbo za kot γ:

$$2d\sin\gamma - c\sin\varphi\cos\gamma = c\sin(\varphi - \varepsilon). \tag{4}$$

Če vzamemo $d = v_c$ in $\varphi = \pi/2$, dobimo enačbo, ki je objavljena v [4, 5]. Podobno kot je naredil dijak Plemelj, lahko vpeljemo pomožni kot μ in razdaljo m tako, da vzamemo $2d = m\cos\mu$, $c\sin\varphi = m\sin\mu$, $m = \sqrt{4d^2 + c^2\sin^2\varphi}$. Pri tem je $|\mu| < \pi/2$. S tem enačbo (4) lahko prepišemo v obliko

$$\frac{\sin(\varphi - \varepsilon)}{m} = \frac{\sin(\gamma - \mu)}{c}, \tag{5}$$

v kateri spoznamo, če sta razliki $\varphi-\varepsilon$ in $\gamma-\mu$ med 0 in π, sinusni izrek za trikotnik s stranico m in njej nasproti ležečim kotom $\varphi-\varepsilon$ ter stranico c z njej nasproti ležečim kotom $\gamma-\mu$, ki pa ni znan. Sinusni izrek ima zaradi lihosti sinusne funkcije smisel tudi, ali sta razliki $\varepsilon-\varphi$ in $\mu-\gamma$ med 0 in π. Lahko pa tudi katerokoli pravkar zapisano razliko kotov nadomestimo s suplementarnim kotom. Na žalost v (5) nastopajoči koti niso vedno notranji koti trikotnika. Lahko se zgodi troje, kar povejo tudi preseki premice p s pozitivnim delom leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A,B,\varepsilon)$: naloga ima eno, dve ali pa nobene rešitve. To je odvisno od kotov ε,φ in razmerja d/c.

Ena od možnosti je tudi, da v (4) izrazimo $\sin\gamma$ in $\cos\gamma$ z $\gamma/2$. Če označimo $T=\operatorname{tg}(\gamma/2)$, dobimo enačbo

$$f\cos(\varphi-\varepsilon/2)\sin(\varepsilon/2)T^2+dT-f\sin(\varphi-\varepsilon/2)\cos(\varepsilon/2)=0, \qquad (6)$$

iz katere izračunamo T in nato γ. Ker je γ notranji kot trikotnika in ker mora biti $0<\gamma<\pi-\varepsilon$, pridejo v poštev samo tiste rešitve T, za katere je $0<T<\cot(\varepsilon/2)$. Potem iz enačb $\alpha-\beta=\varepsilon$ in $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ izrazimo $\alpha=(\pi-\gamma+\varepsilon)/2$ in $\beta=(\pi-\gamma-\varepsilon)/2$. S tem je trikotnik ABC določen.

Za $d\geq f$ ima naloga eno rešitev pri pogoju $\varepsilon/2<\varphi<\varepsilon/2+\pi$. Mejna kota sta določena z naklonskim kotom $\varepsilon/2$ asimptote a_1 hiperbole $\mathcal{H}(A,B,\varepsilon)$. Sicer naloga za $d\geq f$ nima rešitve.

Za $0<d<f$ so razmere malo bolj zapletene. S proučevanjem presečišč premice p s hiperbolo $\mathcal{H}(A,B,\varepsilon)$ pridemo do ugotovitev, ki jih tukaj ne bomo podrobno utemeljevali. Izračunati je treba kota $\varphi_0=\pi-\arccos(d/f)$ in $\varphi_2=\pi+\arccos(d/f)$, pri katerih premica p, izražena v normalni obliki, poteka skozi točko A. Očitno velja relacija $\varphi_0>\pi/2>\varepsilon/2$. Če je $d\leq f\sqrt{\sin\varepsilon}$, vpeljemo še kot $\varphi_1=(\varepsilon-\arcsin((d/f)^2/\sin\varepsilon))/2+\pi$, za katerega je p tangenta na pozitivni del leve veje hiperbole. Nato se pojavijo naslednje štiri možnosti za eksistenco rešitve.

a) V primeru, ko je $d\leq f\sqrt{\sin\varepsilon}$ in $\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\varepsilon/2+\pi$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2<\varphi<\varphi_0$ ali $\varphi_2<\varphi<\varepsilon/2+\pi$. Če je $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$, sta rešitvi dve. V tangentnem primeru $\varphi=\varphi_1$ je rešitev ena sama.

b) V primeru, ko je $d\leq f\sqrt{\sin\varepsilon}$ in $\varphi_0<\varphi_1<\varepsilon/2+\pi<\varphi_2$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2<\varphi<\varphi_0$ ali $\varepsilon/2+\pi<\varphi<\varphi_2$. Če je $\varphi_1<\varphi<\varepsilon/2+\pi$, sta rešitvi dve. V tangentnem primeru $\varphi=\varphi_1$ je rešitev ena sama.

c) V primeru, ko je $d>f\sqrt{\sin\varepsilon}$ in $\varphi_0<\varphi_2<\varepsilon/2+\pi$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2<\varphi<\varphi_0$ ali $\varphi_2<\varphi<\varepsilon/2+\pi$. Če je $\varphi_0<\varphi<\varphi_2$, sta rešitvi dve.

d) V primeru, ko je $d>f\sqrt{\sin\varepsilon}$ in $\varphi_0<\varepsilon/2+\pi<\varphi_2$, ima naloga eno rešitev, če velja $\varepsilon/2<\varphi<\varphi_0$ ali $\varepsilon/2+\pi<\varphi<\varphi_2$. Če je $\varphi_0<\varphi<\varepsilon/2+\pi$, sta rešitvi dve.

Za $d = 0$ poteka premica p skozi točko O. Če je njen naklonski kot ψ, premica p enkrat preseka zgornji del leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ za $\varepsilon/2 + \pi/2 < \psi < \pi$. Naloga ima tedaj eno rešitev. Sicer za $d = 0$ naloga nima rešitve.

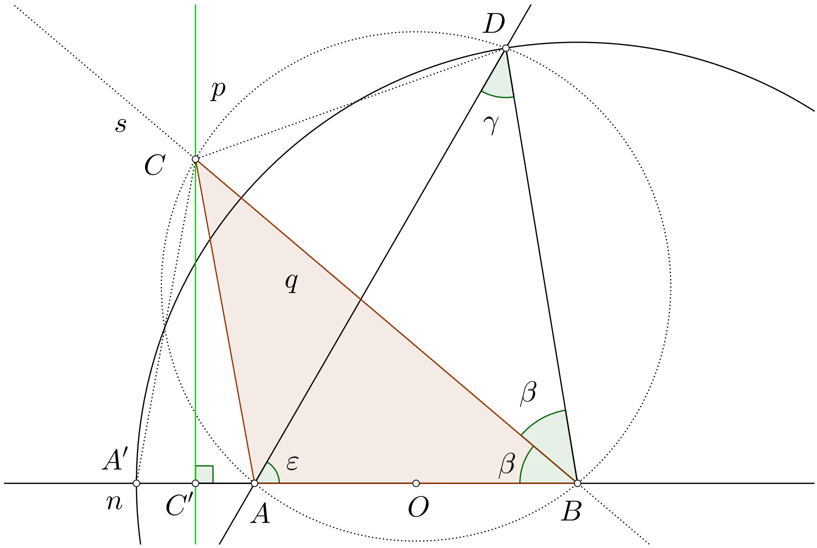
Poglejmo si poseben primer $\varphi = 0$. Tedaj je p premica $x = d > 0$ pravokotna na nosilko n stranice c, ki jo seka desno od njenega središča. Premica p se ne seka s pozitivnim delom leve veje hiperbole $\mathcal{H}(A, B, \varepsilon)$ in zato naloga nima rešitve.

V primeru $\varphi = \pi$ ima premica p enačbo $x = -d < 0$ in je pravokotna na nosilko n stranice c, levo od njenega središča O. Presečišče premice p z n je točka C'. Pri določenih pogojih, ki jih bomo navedli kasneje, ima tedaj naloga lahko eno rešitev, dve rešitvi ali pa nobene. Pogoji izhajajo iz kvadratne enačbe za neznanko y, ki jo dobimo iz enačbe hiperbole (3), ko vanjo vstavimo $x = -d$. Naloga je rešljiva, če je vsaj en koren te kvadratne enačbe pozitiven.

V tem primeru konstrukcija trikotnika ABC poteka takole (slika 5). Za iskani trikotnik načrtamo stranico AB dane dolžine c in dano premico p, ki je pravokotna na nosilko n stranice AB. Presečišče premic p in n označimo s C'. Prav tako določimo razpolovišče O stranice AB. Točko A prezrcalimo prek p, da dobimo točko A'. Skozi A pod kotom ε potegnemo premico q, načrtamo krožni lok s središčem v B in polmerom $|BA'| = 2|OC'| = 2d$. Če je ta polmer dovolj velik, krožni lok preseka q vsaj enkrat nad n. Naj bo D eno od teh presečišč. Simetrala s kota DBA seka premico p v točki C, ki je oglišče iskanega trikotnika ABC.

Pravilnost opisane konstrukcije je treba še utemeljiti. Trikotnik ABC dve zahtevi že izpolnjuje: ima za stranico c daljico AB in oglišče C na premici p. Pokazati moramo še, da je res $\varepsilon = \alpha - \beta$. V ta namem notranje kote v trikotniku ABC vpeljemo standardno: $\alpha = \sphericalangle BAC, \beta = \sphericalangle CBA, \gamma = \sphericalangle ACB$. Štirikotnik $A'BDC$ je deltoid, ki ima za simetralo premico s. Zato velja $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BA'C = \pi - \alpha$. V štirikotniku $ABDC$ sta zato kota α in $\sphericalangle CDB = \pi - \alpha$ suplementarna. Ker je vsota notranjih kotov v štirikotniku $ABDC$ enaka 2π, sta suplementarna tudi kota $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle ACD$. Zato je štirikotnik $ABDC$ tetivni in mu lahko očrtamo krožnico, za katero je AB tetiva. Zato sta obodna kota $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle ADB$ enaka γ. V trikotniku ABD velja zveza $\varepsilon + 2\beta + \gamma = \pi$, iz katere dobimo $\varepsilon = \pi - 2\beta - (\pi - \alpha - \beta) = \alpha - \beta$. Rezultat je v soglasju s sinusnim izrekom $\sin\varepsilon/(2d) = \sin\gamma/c$ v trikotniku ABD, ker je $|BA'| = |BD| = 2d$. Iz enačbe (5) namreč za $\varphi = \pi$, $m = 2d$ in $\mu = 0$ dobimo enak rezultat.

Pripomnimo, da smo obravnavali primer, ko leži točka C' levo od A. Posebej je treba obravnavati primer, ko leži C' med A in O. Nazadnje pa pridemo do enakega rezultata.



Slika 5. Konstrukcija trikotnika za navpično premico.

V trikotniku CBD velja zveza $\sphericalangle BCD + (\pi - \alpha) + \beta = \pi$, iz katere sledi $\sphericalangle BCD = \alpha - \beta = \varepsilon$. To pomeni, da iz oglišča C vidimo daljici BD in $A'B$ pod kotom ε. Ta ugotovitev omogoča še eno konstrukcijo, ker znamo poiskati krožnico, s katere vidimo dano daljico pod danim kotom. Presek te krožnice s premico p je oglišče C iskanega trikotnika.

Naloga ima rešitev, če obstaja trikotnik s stranico c, priležnim kotom ε in temu nasproti ležečo stranico $2d$. Natančneje: rešitev je ena sama, če je $2d \geq c$. Če je $c \sin \varepsilon < 2d < c$, sta rešitvi dve, če pa je $c \sin \varepsilon = 2d$, je rešitev tudi le ena. Naloga nima rešitve, če je $c \sin \varepsilon > 2d$ ali pa če je C' desno od razpolovišča O stranice AB.

Ko obstajata dve rešitvi, trikotnika ABC in ABC_1, sta kota $\gamma = \sphericalangle ACB$ in $\gamma_1 = \sphericalangle AC_1B$ različna. Ker veljata sinusna izreka $\sin \varepsilon/(2d) = \sin \gamma/c$ in $\sin \varepsilon/(2d) = \sin(\gamma_1)/c$, ne gre drugače, kot da sta γ in γ_1 suplementarna kota.

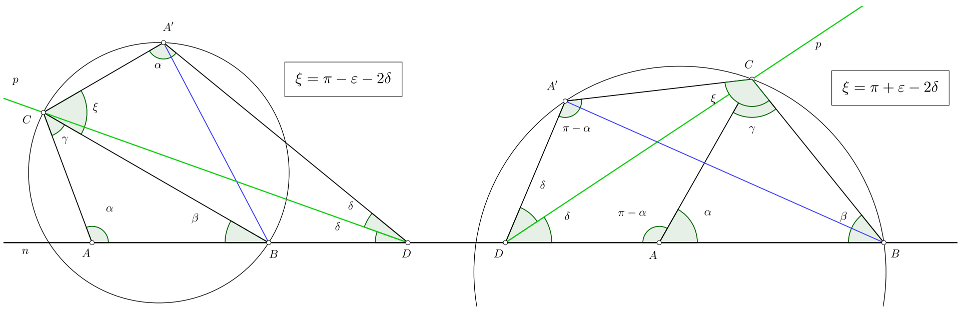
Kaj pa v primeru, ko premica p ni pravokotna na nosilko n? Na podlagi enačbe (5) se trikotnik ABC morda da konstruirati, vendar je treba upoštevati več možnosti glede razlik kotov. Pomožni kot μ in razdaljo m lahko narišemo z ravnilom in šestilom, prav tako pomožni trikotnik, ki nam da razliko kotov $\gamma - \mu$. S tem in danim $\varepsilon = \alpha - \beta$ sta kota α in β določena. Vendar s konstrukcijo ne moremo biti povsem zadovoljni.

Druga možnost, ki se nam ponuja in za katero dobimo navdih v Borštnerjevi rešitvi naloge (A) v [4, 5], pa tudi v prejšnji konstrukciji, je naslednja.

Premica p naj preseka nosilko n stranice AB v točki D, z δ pa označimo ostri kot med p in n, tako kot kaže slika 6.

Skromen namig za splošno rešitev naloge (B) najdemo tudi v [3], kjer pa ni ne slike in ne natančne razlage. Točko A prezrcalimo prek premice p v točko A', nato pa konstruiramo krožnico, s katere vidimo daljico $A'B$ pod nekim stalnim kotom ξ ali njemu suplementarnim kotom. Presek te krožnice in premice p je manjkajoče oglišče C iskanega trikotnika. Kot ξ je odvisen od ε in kota δ. Glede na lego premice p se kot ξ izraža v obliki: $\xi = \pm\pi \pm \varepsilon \pm 2\delta$. Kombinatorično je teh primerov osem. Vendar glede na velikosti kotov δ in ε pridejo v poštev le štirje.

1. Denimo, da je trikotnik ABC na sliki 6 levo rešitev problema. Situacija je poenostavljena, p preseka n v točki D, ki je desno od iskanega trikotnika. Oglejmo si deltoid $ADA'C$. Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ. Vsota vseh notranjih kotov deltoida je $2\alpha + \gamma + \xi + 2\delta = 2\pi$. Ker je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, dobimo kot $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$, ki je konstanten pri danih podatkih.

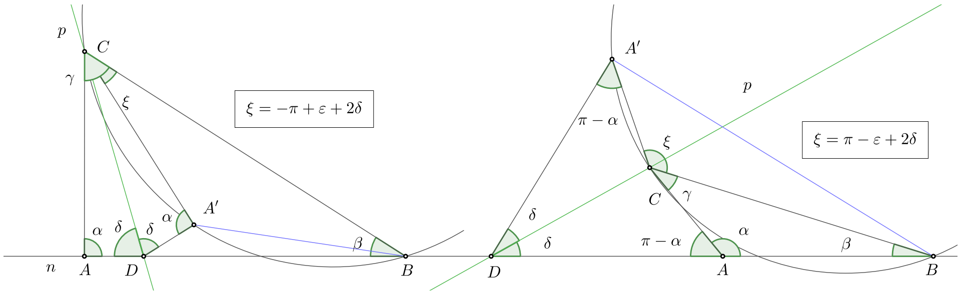


Slika 6. Obravnava trikotnikov za poševno premico v 1. in 2. primeru.

2. Oglejmo si trikotnik ABC na sliki 6 desno kot rešitev problema. Premica p preseka n v točki D, ki je levo od iskanega trikotnika. Oglejmo si deltoid $DACA'$. Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ. Vsota vseh notranjih kotov deltoida je tokrat $2\delta + 2(\pi - \alpha) + \xi - \gamma = 2\pi$, iz česar sledi $\xi = \pi + \varepsilon - 2\delta$.

3. Na sliki 7 levo premica p preseka stranico AB v točki D. Iz C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ. Prav tako kot v prejšnjem primeru opazujemo deltoid $ADA'C$. Za vsoto njegovih notranjih kotov velja: $2\alpha + 2\delta + \gamma - \xi = 2\pi$. Tokrat dobimo $\xi = -\pi + \varepsilon + 2\delta$.

4. Nazadnje si oglejmo še razmere na sliki 7 desno. V konkavnem deltoidu $DACA'$ velja za njegove notranje kote zveza $2\delta + 2(\pi - \alpha) + (2\pi - \xi - \gamma) = 2\pi$. Iz nje dobimo $\xi = \pi - \varepsilon + 2\delta$.

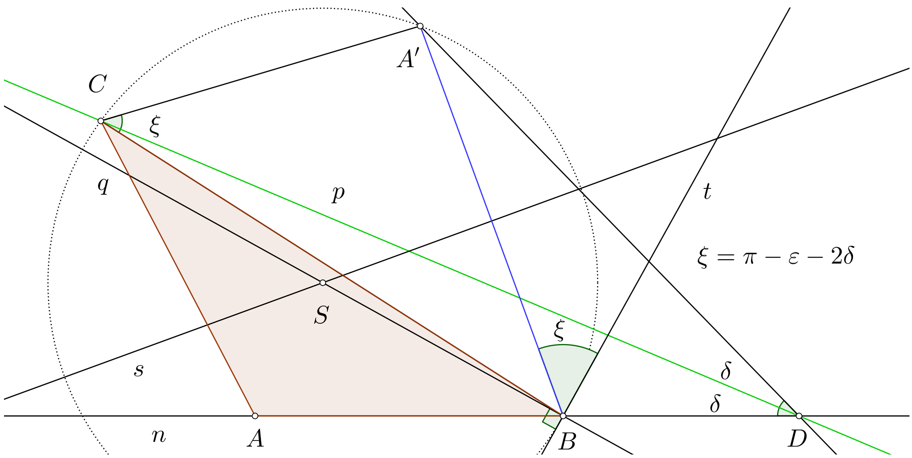


Slika 7. Obravnava trikotnikov za poševno premico v 3. in 4. primeru.

Če je premica p nad n in njej vzporedna, imamo opravka z nalogo (A). Točka D je v neskončnosti. Iz oglišča C vidimo daljico $A'B$ pod kotom $\xi = \pi - \varepsilon$. Če je p pravokotna na n, vidimo iz oglišča C daljico $A'B$ pod kotom $\xi = \varepsilon$.

Pri danih podatkih konstruiramo trikotnik ABC v vseh primerih po enakem postopku. Konstruirati je treba krožnico, s katere vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ. Rešitev je toliko, kolikorkrat ta krožnica preseka premico p nad nosilko n stranice AB in levo od njene simetrale.

Konstrukcija pri znani stranici AB, razliki $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ in premici p, na kateri je oglišče C, je potem razumljiva (slika 8). Ob daljici $A'B$ konstruiramo kot ξ oziroma $\pi - \xi$ z vrhom v B, kjer povlečemo pravokotnico na drugi krak tega kota. Presečišče s simetralo daljice $A'B$ je središče iskane krožnice, ki ima tetivo $A'B$. Krožnica preseka premico p v iskani točki C. Na koncu konstruiramo trikotnik ABC.



Slika 8. Konstrukcija trikotnika za poševno premico.

Pravilnost konstrukcuje še utemeljimo. V našem primeru je $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$. Dobljeni trikotnik ABC ima dano stranico AB in oglišče C je na dani premici p. Preveriti je treba samo še, da je razlika kotov α in β enaka danemu ε. Iz dobljene točke C vidimo daljico $A'B$ pod kotom ξ zaradi konstrukcje krožnice. Notranji koti trikotnika ADC so α, δ in $(\gamma + \xi)/2$, njihova vsota pa je π. Iz $\alpha + \delta + (\gamma + \xi)/2 = \pi$ in $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ter $\xi = \pi - \varepsilon - 2\delta$ dobimo $\varepsilon = \alpha - \beta$.

Podobno bi utemeljevali pravilnost v preostalih primerih. V 1. in 3. primeru za $\delta = (\pi - \varepsilon)/2$ dobimo $\xi = 0$. Tedaj je C presečišče premice p in premice skozi A' in B. V 2. in 4. primeru pa za $\delta = \varepsilon/2$ dobimo $\xi = \pi$ in C je presečišče premice p in daljice $A'B$.

Za konec

Konstrukcije trikotnikov in drugih likov so bile še dolgo v 20. stoletje pri pouku geometrije redna dejavnost, ki pa je precej zamrla, verjetno na račun drugih vsebin in upadanja števila učiteljev, ki jih vse to zanima. Zadnja desetletja smo priča več izvrstnim računalniškim programom, ki naj bi povrnili zanimanje za geometrijo in geometrijske konstrukcije. Namen tega prispevka je ravno v tem, pa tudi v obujanju spomina na Josipa Plemlja ob 52. letnici njegove smrti in bližajoči se 100. letnici ustanovitve ljubljanske univerze, katere prvi rektor je bil.

LITERATURA

[1] M. Brodar, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 8, str. 285.

[2] H. Holleben in P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I. in II. del, G. Reimer, Berlin 1831 in 1832.

[3] E. Heis in T. J. Eschweiler, *Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten*, Verlag der M. DuMont–Schauberg'schen Buchhandlung, Köln, 1855.

[4] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 6, 188–192.

[5] J. Plemelj, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 7, 243–245.

[6] I. Pucelj, *Plemljev trikotnik in negibne točke transformacij*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015), 1, 12–14.

[7] H. Stöcker, *Matematični priročnik z osnovami računalništva*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2006.