PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 6
Strani 289–293

Alojzij Vadnal:

MAGIČNI KVADRATI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/859-Vadnal.pdf

MAGIČNI KVADRATI

Uvod

Magični kvadrat sestavljajo v kvadratno matriko urejena naravna števila. V njem so vsote števil v vrsticah, v stolpcih in v obeh diagonalah med seboj enake. Lahko tudi zahtevamo, da ima magični kvadrat še kake dodatne lastnosti, npr. da njegovi elementi sestavljajo kako predpisano množico naravnih števil.

Magični kvadrat razsežnosti 4 x 4 z vsotami 34 na množici {1, 2, 3, ..., 16}:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

srečamo pri renesančnem umetniku in učenjaku Albrechtu Dürerju (1471—1528); ta ga je l. 1514 ovekovečil na bakrorezu "Melanholija".

Iz približno istega razdobja poznamo "kitajski" magični kvadrat razsežnosti 6 x 6 z vsotami 111 na množici {1, 2, 3, ..., 36} :

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Za to priložnost je sestavil pisec "šahovski" magični kvadrat razsežnosti 8 x 8 z vsotami 64:

15	5	4	12	5	11	6	6
6	9	11	9	8	7	10	4
10	6	6	9	9	6	9	9
3	12	11	2	10	8	7	11
5	8	10	8	3	15	8	7
8	8	12	7	1	8	15	5
9	4	8	6	22	4	5	6
8	12	2	11	6	5	4	16

A Dürer ni bil samo velik umetnik, ampak se je uspešno ukvarjal tudi z naravoslovjem, še posebno pa z geometrijo. Objavil je dela o perspektivi in o geometrijskih konstrukcijah z ravnilom in šestilom.

Človeške organe je proučeval z opisnogeometrično metodo tako, da jih je projiciral na vse tri projekcijske ravnine.

Ne vem, kako je A. Dürer sestavil upodobljeni magični kvadrat. Morda je bil tedaj že znan kot "Jupitrova mizica"? Morda se je pretolkel do njega z ugibanjem? Morda je uporabil metodo, ki jo je opisal Borut Zalar v 5. številki letošnjega "Preseka"?

Z matematičnega vidika gre pri sestavljanju magičnega kvadrata za reševanje sistema več linearnih enačb s še večjim številom neznank; ob tem pa morajo biti neznanke naravna števila in morajo zadoščati še kakim dodatnim zahtevam.

Za začetek se lotimo magičnih kvadratov dimenzije 3 x 3.

Poskusimo sestaviti magični kvadrat razsežnosti 3 x 3, ki ima v prvi vrstici števila

37 19 34

Z ugibanjem je križ; lahko, da se nam sploh ne posreči. Pomagajmo si torej z algebro.

Pri sestavljanju magičnega kvadrata razsežnosti 3 x 3 z vsotami s

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array}$$

je treba v naravnih številih rešiti sistem 8 enačb z 9 neznankami. Sistem enačb in reševanje sta podana v tabelarični obliki. (stran 323)

Iz sistema enačb I eliminiramo neznanke Z_1, Z_2 in Z_3:

$$Z_1 = s - X_1 - Y_1$$
$$Z_2 = s - X_2 - Y_2$$
$$Z_3 = s - X_3 - Y_3$$

in dobimo sistem enačb II. Iz tega eliminiramo

$$Y_3 = X_1 - X_3 + Y_2$$

in dobimo sistem III. Iz tega eliminiramo

		X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Z_1	Z_2	Z_3	desna stran enačbe
	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	s
	2	.	.	.	1	1	1	.	.	.	s
	3	.	.	.	.	.	.	1	1	1	s
	4	1	.	.	1	.	.	1	.	.	s
I	5	.	1	.	.	1	.	.	1	.	s
	6	.	.	1	.	.	1	.	.	1	s
	7	1	.	.	.	1	.	.	.	1	s
	8	.	.	1	.	1	.	1	.	.	s
	1	1	1	1	.	.	.				s
	2	.	.	.	1	1	1				s
	3	1	1	1	1	1	1				$2s$
II	7	1	.	−1	.	1	−1				0
	8	−1	.	1	−1	1	.				0
	1	1	1	1	.	.	.				s
III	2	1	.	−1	1	2	.				s
	3	2	1	.	1	2	.				$2s$
	8	−1	.	1	−1	1	.				0
	1	1	1	1	.	.	.				s
IV	2	3	.	−3	3	.	.				s
	3	4	1	−2	3	.	.				$2s$
	1	1	1	1							s
V	2	1	1	1							s

$$Y_2 = X_1 - X_3 + Y_1$$

in dobimo sistem IV. Iz tega eliminiramo

$$Y_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - 4X_1 - X_2 + 2X_3\right)$$

in dobimo sistem dveh enakih enačb V.

Po primernem izboru vrednosti X_1, X_2, X_3 dobimo retrogradno iz eliminacijskih enačb:

$$Y_1 = \frac{1}{3}(-2X_1 + X_2 + 4X_3)$$
$$Y_2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$
$$Y_3 = \frac{1}{3}(4X_1 + X_2 - 2X_3)$$
$$Z_1 = \frac{1}{3}(2X_1 + 2X_2 - X_3)$$
$$Z_2 = \frac{1}{3}(2X_1 - X_2 + 2X_3)$$
$$Z_3 = \frac{1}{3}(-X_1 + 2X_2 + 2X_3)$$

Ob zahtevi, da morajo biti neznanke naravna števila, dobimo od tod naslednje navodilo za sestavljanje magičnih kvadratov razsežnosti 3 x 3.

Izhajajoč od naravnih števil X_1, X_2 in X_3 z vsoto $s = X_1 + X_2 + X_3$ lahko sestavimo magični kvadrat, če števila zadoščajo naslednjim pogojem:

1. Vsota s je deljiva s 3.
2. Vsako število je manjše od vsote drugih dveh števil.
3. Veljata neenačbi:

$$2X_1 < X_2 + 4X_3$$
$$2X_3 < 4X_1 + X_2$$

Pri izpolnjenih pogojih je magični kvadrat otročje lahko sestaviti. Izračunati je treba samo $Y_2 = s/3$; vse druge manjkajoče elemente določamo nato v kvadratu samem.

Sestavljanje magičnega kvadrata je še bolj preprosto, če zahtevamo, da naj vsebuje kvadrat 9 zaporednih naravnih števil

$$\{n, n+1, ..., n+8\}$$

Za sestavljanje kvadrata zadostuje, če predpišemo en sam, ponavadi najmanjši element.

Bralcu prepuščamo, da izvede za sestavljanje takih magičnih kvadratov naslednje navodilo:

1. Izberemo poljubno naravno število n.
2. V polje v središču kvadrata vpišemo $n + 4$.
3. V polja na glavni diagonali vpišemo od zgoraj navzdol naraščajoče aritmetično zaporedje z diferenco 1.
4. V polja na stranski diagonali vpišemo od zgoraj navzdol naraščajoče aritmetično zaporedje z diferenco 3.

5. Manjkajoče elemente v drugih poljih izračunamo ob upoštevanju, da so vse vsote enake $3(n + 4)$.
Tako dobimo magični kvadrat:

$$\begin{array}{ccc} n+3 & n+8 & n+1 \\ n+2 & n+4 & n+6 \\ n+7 & n & n+5 \end{array}$$

Pri tem je n poljubno naravno število.

Alojzij Vadnal

A. Dürer, *Melanholija*, bakrorez 1514