

# Numerični izračun razporeditve koncentriranih navitij v električnih strojih

Danilo Makuc

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana  
E-pošta: danilo.makuc@fe.uni-lj.si

## Numerical calculation of concentrated windings in electrical machines

**Abstract.** Concentrated winding, also called fractional slot winding are very common in nowadays electrical machines, especially permanent magnet motors. Unfortunately, the design process of a winding scheme for such winding is not straightforward and intuitive. The paper presents a development of an algorithm for a numerical calculation and distribution of an arbitrary concentrated winding. The results can be directly used in scripts for modeling of electrical machines, which are often an option in different tools for finite elements analysis.

## 1 Uvod

Izmenični električni motorji s trajnimi magneti so pogost element električnih pogonov, saj z veliko specifično močjo (W/kg) uspešno opravljajo funkcije zahtevnih servopogonov, pri mnogih električnih vozilih pa tudi nalogo glavnega pogonskega motorja.

Razmeroma majhne dimenzije teh strojev, ki so posledica velike gostote magnetne energije trajnih magnetov, in s tem manjšega prostora, potrebnega za vzbujanje, so posredno omejele tudi prostor namenjen aktivnemu navitju. Običajno je pri motorjih z zunanjim rotorjem navitje nameščeno v notranjosti motorja, tako da je prostorska stiska še večja.

Pri distribuiranih oz. porazdeljenih navitjih se želena prostorska porazdelitev magnetnega polja v stroju doseže z ustrezno porazdelitvijo magnetne napetosti (Amper-ovojev) v utore. Pri takih navitjih so torej tok, število ovojev in nenazadnje število utorov, tiste količine, ki neposredno vplivajo na obliko magnetnega polja. Pri pomanjkanju prostora se, tudi zaradi tehnoloških omejitev, hitro odločimo za manjše število utorov, to pa že določa največje število magnetnih polov, ki ga z distribuiranim navitjem lahko izvedemo.

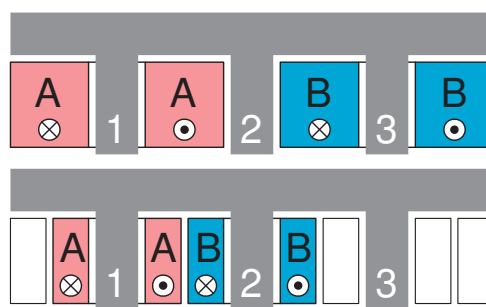
Pri načrtovanju navitij uporabljamo količino: "število utorov na pol in fazo", ki dejansko predstavlja to, kar ime pove, pomembna pa je zato, ker predstavlja osnovo za izdelavo vezalnega načrta navitja. Izračunamo ga s pomočjo števila vseh utorov ( $Z$ ), števila parov magnetnih polov ( $p$ ) in števila faz navitja ( $m$ ):

$$q = \frac{Z}{2 p m}. \quad (1)$$

Če  $q$  ni celo število, govorimo o ulomkastih navitjih, ki so v določeni meri izvedljiva, a ko je  $q$  manjši od 1, se

navitje spremeni v drugačen tip navitja, ki ga imenujemo koncentrirano navitje.

Posamezne tuljave, ki medsebojno povezane sestavljajo fazno navitje, lahko praktično zasedajo poljubno površino utorov, ne morejo pa objeti manj kot enega zoba, saj je najkrajša tuljavica (zanka) lahko vstavljena le v dva sosednja utora. Pri dvoplastnih izvedbah navitij so tako tuljavice ovite okoli vsakega zoba, saj vsaka od njih zaseda polovico utora in si ga lahko delita, pri enoplastni izvedbi pa ena tuljavica zaseda celoten utor zato so tu tuljavice ovite le okoli vsakega drugega zoba (slika 1). Šele ustrezna medsebojna električna povezava teh tuljavic ustvari navitje posamezne faze.



Slika 1. Tuljavice enoplastnega (zgoraj) in dvoplastnega (spodaj) koncentriranega navitja.

Pri distribuiranih navitjih, ki imajo za  $q$  večkratnik  $1/2$  ali kar celo število, je razporeditev tuljavic v utore razmeroma enostavna in intuitivna, saj načeloma izhaja iz simetrije faz in magnetnih polov. Največkrat lahko vezalni načrt navitja izdelamo "peš" in grafično, brez dodatnega računanja. Pri koncentriranih navitjih take simetrije običajno ni, zato pri načrtovanju teh navitij brez računanja ne gre.

Pri modeliranju in analizi električnih strojev z metodo končnih elementov (MKE) je v modelu potrebno definirati tudi navitje, saj to, poleg trajnih magnetov, predstavlja glavno magnetno vzbujanje. Pri velikem številu utorov, večfaznih in večplastnih navitjih, je zato s tem veliko dela. Večina programskih orodij za analize z MKE omogoča uporabo skriptov (npr. LUA, Visual Basic) ali celo neposredno vodenje iz drugih programov (npr. Octave/Matlab, Mathematica, SciLab), kar velikokrat uporabimo za avtomatiziran izris in definicijo celotnega modela motorja. Zaželeno je torej poznati navijalni načrt navitja in sicer v taki obliki, da ga lahko enostavno uporabimo v teh skriptih oz. programih. V nadaljevanju je predstavljen razvoj algoritma za numerični izračun razporeditve koncentriranega navitja v utore električnega stroja.

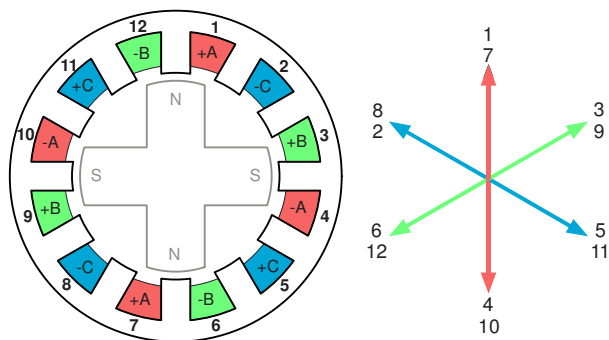
## 2 Načrtovanje navitij

Načrtovanje navitja električnega stroja večinoma temelji na inducirani napetosti v tem navitju, izjema so le vzbujalna navitja, kjer je osnova načrtovanja magnetno polje, ki naj ga navitje ustvari. V našem primeru se bom omejil na večfazna navitja izmeničnih rotacijskih strojev, ki so sicer lahko tudi primarno namenjena ustvarjanju, običajno vrtilnega, magnetnega polja, a je inducirana napetost še vedno glavni dejavnik, ki določa magnetne razmere v taki elektromagnetni strukturi.

### 2.1 Kazalci utorskih induciranih napetosti

Na pojem utorskih induciranih napetosti naletimo pri spoznavanju načrtovanja navitij dokaj zgodaj. Temelji na dejstvu, da dobimo, zaradi prostorske premaknitve utorov, tudi časovno (fazno) premaknitev induciranih napetosti v ovojih posameznega utora. S poznavanjem vektorjev teh utorskih napetosti, je omogočeno enostavno grafično ali numerično seštevanje teh kazalcev in s tem določanje induciranih napetosti v navitjih, ki zasedajo ustrezne utore.

Na sliki 2 je primer razporeditve navitja in kazalcev teh utorskih napetosti za primer stroja z štiripolnim ( $p = 2$ ) in trifaznim navitjem ( $m = 3$ ), ki je razporejeno v 12 utorov ( $Z = 12$ ).



Slika 2. Shema motorja z vrisanimi faznimi navitji (A, B, C) in smermi toka ter zvezda kazalcev utorskih napetosti.

To, da navitju v enem utoru priredimo kazalec inducirane napetosti, izgleda na prvi pogled skregano z osnovnim indukcijskim zakonom, saj je tam govora o zanki. Dejstvo je namreč, da je inducirana napetost sorazmerna časovnemu odvodu magnetnega pretoka skozi zaključeno zanko, kar izračunamo z enačbo:

$$e = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (2)$$

kjer je  $B$  gostota magnetnega pretoka,  $S$  pa površina, ki jo določa ta zanka. Enačba (2) je splošna, zato velja tudi za tuljavo z  $N$  ovoji, a v teh primerih si težko predstavljamo površino, ki jo le-ti določajo. Zaradi tega večinoma obravnavamo tuljavo kot skupek zank, pri čemer vsak ovoj predstavlja eno zanko. A če uporabimo Stokesov izrek, lahko v enačbi (2) ploskovni integral nadomestimo z linijskim ter tako inducirano napetost zapišemo z magnetnim vektorskim potencialom  $A$ :

$$e = -\frac{d}{dt} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (3)$$

kjer je  $L$  zaključena zanka, ki določa površino  $S$  iz enačbe (2), kar pa je dejansko zanka, ki jo opisujejo vsi ovojji tuljave. Zaradi načina gradnje in posledično oblike magnetnega polja v rotacijskih strojih, magnetne razmere velikokrat obravnavamo dvodimenzionalno, saj vektor gostote magnetnega pretoka  $B$  nima aksialne komponente oz. komponente v smeri osi  $z$ . V takih primerih se izračun z enačbo (3) poenostavi in moramo poznati le magnetni vektorski potencial v utorih, ki definirajo zanko navitja [1]. To dejstvo je osnova za uporabo kazalcev utorskih induciranih napetosti, ki pa jih bom pri koncentriranih navitjih uporabil le pri izračunu faktorja navitja.

### 2.2 Osnova načrtovanja koncentriranih navitij

Pri koncentriranih navitjih tuljava objema en zob, zato lahko inducirano napetost izračunamo neposredno z magnetnim pretokom v zobu in z enačbo (2). Namesto utorskih induciranih napetosti uporabimo vektorje magnetnih pretokov v posameznih statorskih zobeh, oz. posledično induciranih napetosti v tuljavah na zobeh.

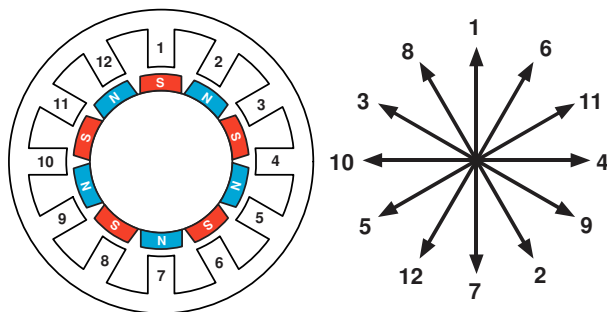
Če je navitje dvoplastno in so tuljavice navite okoli vsakega zoba, so fazni koti teh induciranih napetosti:

$$\alpha_i = (i-1) \cdot \frac{p}{Z} \cdot 360^\circ, \quad (4)$$

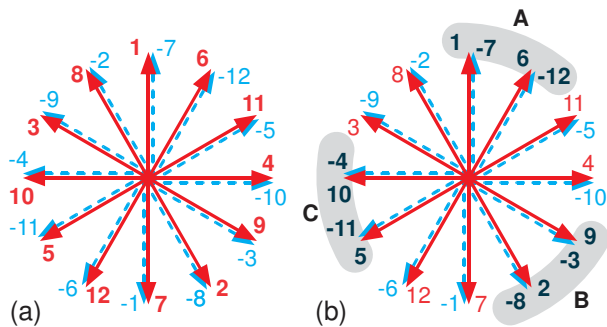
pri čemer je  $i$  zaporedna številka statorskega zoba,  $p$  pa število parov magnetnih polov rotorskega magnetnega polja, večinoma ustvarjenega s trajnimi magneti,

Kot primer vzemimo, da želimo narediti trifazno ( $m = 3$ ) dvoplastno navitje na statorju z 12-imi utori oz. zobi ( $Z = 12$ ) in rotorjem, ki ima 10 magnetnih polov ( $p = 5$ ). Fazni koti med kazalci induciranih napetosti v tuljavah sosednjih zob bo tako  $150^\circ$ . Shema takega motorja in kazalci teh napetosti so prikazani na sliki 3. Z zamenjavo priključkov (ali smeri navijanja) tuljavice lahko zamenjamo polariteto inducirane napetosti (fazno premaknemo za  $180^\circ$ ), zato ob kazalce s pozitivnimi številkami zob, narišemo še kazalce z zamenjano polariteto in jih označimo z negativnimi številkami (slika 4a).

V faznem navitju želimo čim višjo inducirano napetost, zato zaporedno vežemo napetosti tistih tuljavic, katerih vektorska vsota bo dala največjo dolžino kazalca napetosti. Največjo vsoto bomo dobili, če seštejemo kazalce, med katerimi je najmanjši fazni kot. Ker je število zob, ki jih v našem primeru objemajo tuljavice enega faznega navitja, znano ( $Z/m = 12/4 = 4$ ), iz nabora kazalcev enostavno izberemo tiste štiri, ki so



Slika 3. Geometrija motorja s trajnimi magneti ( $Z = 12$ ,  $p = 5$ ,  $m = 3$ ) in kazalci magnetnih pretokov v statorskih zobeh.



Slika 4. (a) Kazalci vseh možnih induciranih napetosti tuljavic in (b) izbrane tuljavice za posamezna fazna navitja.

si po kotu najbližje (slika 4b). Pri trifaznem sistemu je fazni kot med napetostmi  $120^\circ$ , tako da tudi pri izboru zob (tuljavic) za ostali dve fazi izberemo ustrezno fazno premaknjene kazalce.

### 3 Algoritem za porazdelitev tuljav koncentriranega navitja

Algoritem za izračun koncentriranega navitja mora biti splošen, tako da bo dal ustrezno porazdelitev in vezavo tuljavic, ne glede na število zob, magnetnih polov in števila tuljavic v enem utoru. Postopek je naslednji:

1. Zobe najprej indeksiramo z zaporedno številko, vsakemu pa priredimo vrednost izračunanega faznega kota kazalca inducirane napetosti, zapisane ga z vrednostjo manjšo od  $360^\circ$ . Tako bi za opisani primer dobili kazalce, ki so prikazani v tabeli 1a.
2. Vsakemu izračunanemu kazalcu napetosti generiramo še en možen kazalec, in sicer za tuljavico na istem zobu, a z nasprotno polariteto (tabela 1b).
3. Vrsteni red vseh možnih kazalcev napetosti uredimo po velikosti faznega kota (tabela 1c).
4. Število zob (utorov) in faz določa tudi število tuljavic, ki sestavljajo fazno navitje. Iz nabora urejenih kazalcev izberemo toliko začetnih kazalcev, kolikor je teh tuljavic (tabela 1c).
5. Navitja naslednjih faz dobimo tako, da enako število tuljavic izberemo na zobeh, ki imajo kazalce induciranih napetosti fazno premaknjene za osnovni fazni kot večfaznega navitja; pri 3-faznem sistemu je ta kót  $120^\circ$  oz.  $240^\circ$  (tabela 1c).

Sedaj, ko vemo katere zobe in s kakšno polariteto zasedajo tuljavice faznih navitij, lahko izdelamo navijalni načrt. Pri izdelavi modelov električnih strojev z MKE, je predvsem pomembna informacija o tokovnem vzbujanju v posameznem utoru, zato raje izdelamo shemo, ki neposredno kaže katero fazno navitje in s kakšno smerjo toka (navijanja) je v posameznem statorskem utoru (slika 5). Razviti algoritem za izračun koncentriranih navitij je izdelan v okolju Octave oz. Matlab in vrne rezultat v obliki matrike, kjer vrstica predstavlja plast navitja, stolpec pa utor. Utorska porazdelitev in smeri toka tuljav za naš primer so prikazane v tabeli 2. Zaradi številčnega indeksiranja faz pri generiranju modelov z MKE so le-te namesto s črkami označene s številčkami. Tuljavica, ki pri

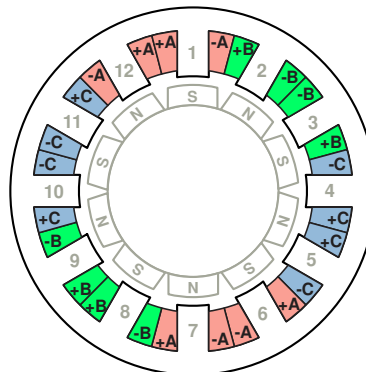
Tabela 1. (a) Osnovni nabor kazalcev induciranih napetosti, (b) vse možne napetosti tuljavic, (c) kazalci, urejeni po kotih z označenimi izbranimi tuljavicami za posamezna fazna navitja.

ZOB	KOT	ZOB	KOT	ZOB	KOT
1	$0^\circ$	1	$0^\circ$	1	$0^\circ$
2	$150^\circ$	2	$150^\circ$	7	$180^\circ$
3	$300^\circ$	3	$300^\circ$	8	$330^\circ$
4	$90^\circ$	4	$90^\circ$	9	$120^\circ$
5	$240^\circ$	5	$240^\circ$	10	$270^\circ$
6	$30^\circ$	6	$30^\circ$	11	$60^\circ$
7	$180^\circ$	7	$180^\circ$	12	$210^\circ$
8	$330^\circ$	8	$330^\circ$	-1	$180^\circ$
9	$120^\circ$	9	$120^\circ$	-2	$330^\circ$
10	$270^\circ$	10	$270^\circ$	-3	$120^\circ$
11	$60^\circ$	11	$60^\circ$	-4	$270^\circ$
12	$210^\circ$	12	$210^\circ$	-5	$60^\circ$
		-1	$180^\circ$	-6	$210^\circ$
		-2	$330^\circ$	-7	$0^\circ$
		-3	$120^\circ$	-8	$150^\circ$
		-4	$270^\circ$	-9	$300^\circ$
		-5	$60^\circ$	-10	$90^\circ$
		-6	$210^\circ$	-11	$240^\circ$
		-7	$0^\circ$	-12	$30^\circ$
		-8	$150^\circ$		
		-9	$300^\circ$		
		-10	$90^\circ$		
		-11	$240^\circ$		
		-12	$30^\circ$		

dvoplastni izvedbi zaseda polovico utora na obeh straneh zoba, je označena v enem utoru zgoraj, v drugem pa spodaj, čeprav so dejansko sosednje tuljavice koncentriranih navitij običajno ena zraven druge (slika 5) in ne ena nad drugo.

Tabela 2. Oblika zapisa rezultata utorske porazdelitve in smeri tokov tuljav vseh faznih navitij.

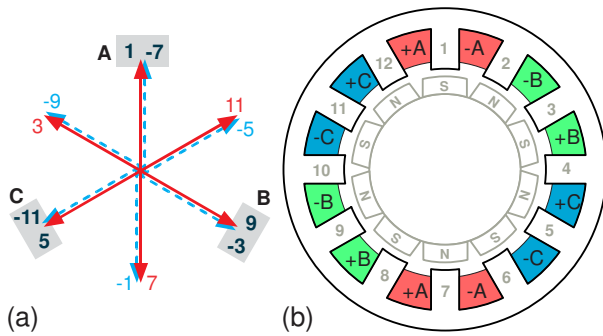
Utor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Plast 1	1	2	-2	-3	3	1	-1	-2	2	3	-3	-1
Plast 2	1	-1	-2	2	3	-3	-1	1	2	-2	-3	3



Slika 5. Geometrija motorja s trajnimi magneti ( $Z = 12$ ,  $p = 5$ ,  $m = 3$ ), ki ima v statorskih utorih tuljave označene s fazo, ki ji pripadajo (A,B,C) in smerjo toka v tuljavi.

#### 3.1 Enoplastna koncentrirana navitja

V primeru, ko želimo izračunati enoplastno koncentrirano navitje, se prav tako izračunajo vektorji induciranih napetosti tuljavic na posameznih zobih, a ker v tem primeru tuljavica zaseda celotna utora ob zobu, lahko postavimo tuljavice le na vsak drugi zob, zato tudi uporabimo kazalce vsakega drugega zoba. Za isti primer motorja je torej možnih 12 kazalcev (slika 6a), vseh tuljavic pa je 6 (le na lihih zobeh), tako da je posamezno fazno navitje sestavljeno le iz dveh (slika 6b).



Slika 6. (a) Kazalci vseh možnih napetosti posameznih tuljavic enoplastnega navitja motorja s trajnimi magneti ( $Z = 12, p = 5, m = 3$ ) in (b) geometrija motorja z označenimi tuljavami.

#### 4 Numerični izračun faktorja navitja

Zaradi geometrije in nelinearnih lastnosti magnetne strukture, prostorska porazdelitev magnetnega polja v zračni reži rotacijskih strojev ni sinusna (harmonična), tako da pri vrtenju rotorja inducirana napetost vsebuje, poleg osnovne, tudi višje harmonske komponente, kar je večinoma nezaželeno. Pomemben podatek vsakega navitja je zato tudi faktor navitja, ki podaja razmerje med aritmetično in vektorsko vsoto kazalcev inducirane napetosti navitja. Običajno želimo, da bi bil le-ta za osnovno harmonsko komponento čim večji (največ 1), za višje harmonske komponente pa čim manjši.

Numerični izračun faktorja navitja za poljubno število harmonskih komponent je del algoritma za izračun koncentriranega navitja. Princip je tak, da izračunamo kazalce utorskih induciranih napetosti za tako število magnetnih polov rotorja, kot jih ima ustrezna harmonska komponenta magnetnega polja. Osnovna harmonska komponenta, ki jo edino upoštevamo že pri osnovnem izračunu navitja, ima število magnetnih polov dejanskega rotorja, vse višje pa večkratnik le-tega. V našem primeru, kjer je rotor 10-polni ( $p = 5$ ), bi npr. 2., 3., 4. in 5. harmonska komponenta tako imele 20, 30, 40 in 50 magnetnih polov. Tudi za izračun faznih kotov kazalcev utorskih napetosti lahko uporabimo enačbo (4). Pri izračunu faktorja navitja za peto harmonsko komponento ( $p' = 5 \cdot p = 25$ ), bi v našem primeru dobili kazalce s koti:

$$\alpha_{h5,i} = (i-1) \frac{p'}{Z} \cdot 360^\circ = (i-1) \cdot 30^\circ$$

pri čemer je  $i$  zaporedna številka utora. Te kote uporabimo za zapis kazalcev z enotskimi vektorji v kompleksnem prostoru (tabela 3).

Ker vemo, kako so tuljavice vezane v fazno navitje (tabela 2), vektorsko seštejemo kazalce tistih utorskih napetosti ( $u_{h5,i}$ ), ki jih določajo te tuljave, pri čemer

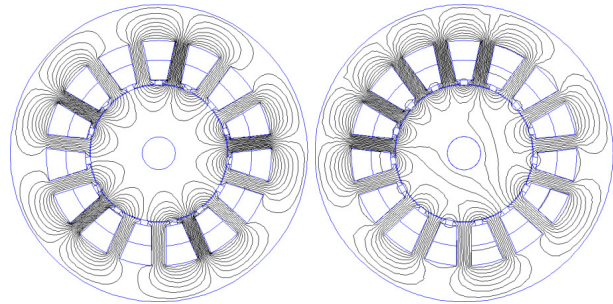
Tabela 3. Fazni koti in kompleksni kazalci induciranih napetosti v utorih, ki jih zaseda dvoplastno navitje prve faze.

$i$	$\alpha_{h5,i}$	$u_{h5,i}$
1	$0^\circ$	$+1,000 + j0,000$
2	$30^\circ$	$+0,866 + j0,500$
6	$150^\circ$	$-0,866 + j0,500$
7	$180^\circ$	$-1,000 - j0,000$
8	$210^\circ$	$-0,866 - j0,500$
12	$330^\circ$	$+0,866 - j0,500$

tistim v utorih z negativno smerjo toka, spremenimo predznak. Tako je v našem primeru aritmetična vsota enotskih kazalcev 8, dolžina vektorske vsote pa 0,5359, kar pomeni, da znaša faktor navitja za 5. harmonsko komponento 0,067. Na enak način lahko izračunamo faktorje navitja za poljubno število harmonskih komponent.

#### 5 Neuravnoteženost magnetnega polja

Pri koncentriranih navitjih obstaja možnost, da kljub simetrični porazdelitvi faznih navitij, pri določenih kombinacijah števila utorov ( $Z$ ) in parov magnetnih polov ( $p$ ), pride do neuravnoteženosti magnetnega polja, ki ga ustvari večfazno navitje, ko je ustrezno vzbujano (slika 7). Taka neuravnoteženost ponavadi pripelje do velikih radialnih sil in s tem ležajnih obremenitev, zato se po zaključenem izračunu porazdelitve koncentriranega navitja izvede še kontrola uravnoteženosti magnetnega polja. Z upoštevanjem ustreznega tokovnega vzbujanja faznih navitij se za vsak zob izračuna prostorski vektor magnetne napetosti. Da je magnetno polje uravnoteženo, mora biti vektorska vsota vseh teh vektorjev enaka nič, v kolikor ni, algoritem posreduje obvestilo o neuravnoteženosti.



Slika 7. Primer uravnoteženega magnetnega polja (levo) pri statorju:  $Z = 15, p = 5$  in neuravnoteženega (desno), pri istem številu utorov, a drugačnem številu magnetnih polov:  $p = 7$ .

#### 6 Zaključek

Načrtovanje koncentriranega navitja kar kliče po numeričnem reševanju. Predstavljeni algoritem tako določi utorsko porazdelitev in vezavo tuljav, poleg tega pa še izračuna faktorje navitja in preveri uravnoteženost magnetnega polja. Hiter izračun in ustrezna oblika rezultatov z opozorili in sporočili, omogoča enostavno integracijo algoritma v druge programe za generiranje in simulacijo modelov električnih motorjev.

#### Literatura

- [1] S. Shepard: *Finite Element Analysis of Electrical Machines*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [2] N. Bianchi, M. Dai Prè, L. Alberti, E. Fornasiero: *Theory and Design of Fractional-Slot PM Machines*, Coop. Libreria Editrice Università di Padova, 2007.
- [3] M. Caruso, A. O. Di Tommaso, F. Marignetti, R. Miceli, G. R. Galluzzo: A General Mathematical Formulation for Winding Layout Arrangement of Electrical Machines, *Energies* 2018, Volume 11, 446.