Geometrische

Anschauungslehre

für

Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

I. Abtheilung.

Mit 126 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Eilfte, mit Rücksicht auf die metrischen Maße umgearbeitete Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

Vorrede zur ersten Auflage.

Durch den geometrischen Anschauungsunterricht in dem Untergymnasium sollen die Schüler mit den verschiedenen Raumformen, ihren wichtigsten Beziehungen und Gesetzen durch richtig geleitete Anschauung bekannt gemacht, und dadurch auf die wissenschaftlich beweisende Geometrie des Obergymnasiums naturgemäß vorbereitet werden.

Die Methode dieses vorbereitenden Unterrichtes muß offenbar dem Standpuncte entsprechen, auf welchem sich die Geistesentwicklung der Schüler des Untergymnasiums befindet. Ein in Tändelei ausartendes, geistloses Anschauen der Figuren, ein bloß mechanisches Nachbilden derselben würde als eben so zweckwidrig zu bezeichnen sein, als eine wissenschaftliche Behandlung des geometrischen Lehrstoffes. Die Anschauung muß in diesem Unterrichte vorherrschen, aber eine verständige Anschauung; das Auge soll an eine mit Nachdenken verbundene Betrachtung der Raumformen gewöhnt werden, die Constructionen müssen mit klarem Bewußtsein dessen geschehen, was man ausführt und warum man es ausführt. Die Bekanntschaft mit den geometrischen Gebilden wird durch unmittelbare Anschauung gewonnen; auf demselben Wege können auch eine Menge Eigenschaften der angeschauten Objecte erkannt werden. Allein unter den Gesetzen und Beziehungen der Raumgrößen, deren Kenntniß schon an und für sich sehr wichtig, zur verständigen Lösung der elementaren Aufgaben aber unerläßlich nothwendig ist, die daher in dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte füglich nicht übergangen werden können, gibt es auch solche, die durch die unmittelbare Anschauung nicht vollständig oder gar nicht zu erfassen sind; die Erkenntniß dieser muß durch einfache Operationen des Verstandes vermittelt werden. Wenn auch die Schüler für strenge Beweise, für das Verständniß langer Schlußreihen noch nicht die nöthige geistige Reife besitzen, so sind sie doch reif genug, um leichte Folgerungen und Combinationen, einfache Schlüsse zu verstehen und zu formuliren; Operationen, zu denen meistens eine viel geringere Geistesschärfe erfordert wird, als z. B. zu den beim Sprachunterrichte anzustellenden Untersuchungen über das Verhältniß der Glieder eines zusammengesetzten Satzes und zur Unterscheidung der verschiedenen Arten bei- und untergeordneter Sätze, welche Anforderungen doch auch an die Schüler des Untergymnasiums gestellt werden.

Während daher bei dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte vorzugsweise die Ausbildung und Schärfung des Anschauungsvermögens und der mathematischen Phantasie angestrebt wird, findet dabei stets auch die Erregung des Denkvermögens gebührende Berücksichtigung, wodurch der Geist allmählig erstarkt, und für die spätere Wissenschaftslehre der Geometrie die erforderliche Gewandtheit erlangt.

Mit Rücksicht auf die hier vorausgeschickten Bemerkungen dürfte sich beim geometrischen Anschauungsunterrichte das nachstehende Lehrverfahren als zweckentsprechend herausstellen:

1. Die einzelnen geometrischen Formen werden durch entsprechende, an der Schultafel auszuführende und von den Schülern nachzubildende Zeichnungen, zum Theile auch an den wirklichen Dingen der Außenwelt und an Modellen zur klaren Anschauung gebracht. Man läßt die Schüler die Entstehungsweise, die Merkmale und Bestandtheile, die Arten, so wie die verschiedenen Eigenschaften der gezeichneten Figuren, insofern diese Eigenschaften ein Gegenstand der unmittelbaren Anschauung sind, aufmerksam betrachten, und dann die klar aufgefaßten Anschauungen eben so klar, vollständig und bestimmt mit Worten ausdrücken. Der mathematische Unterricht soll stets auch sprachbildend sein.

2. Eigenschaften und Beziehungen der Raumgrößen, welche durch die Construction und unmittelbare Anschauung nicht erkannt werden können, müssen mit Hilfe einfacher Verstandesoperationen entwickelt werden. Hiebei hilft man dem Schüler durch entsprechende Fragen aus den bereits gewonnenen Anschauungen, durch leichte Folgerungen und Combinationen die gesuchte Wahrheit ableiten, welche auf diese Art durch die Selbstthätigkeit des Schülers entwickelt, bleibendes geistiges Eigenthum desselben wird.

3. Bei solchen geometrischen Lehren, deren strenge Wahrheit nur durch längere Beweise zur Gewißheit erhoben werden kann, wie z. B. bei den Sätzen über die Bestimmung des Kreisumfanges oder der Kugeloberfläche, genügt es, die Schüler durch Constructionen oder einfache

Schlüsse der Wahrheit nahe zu bringen, und ihnen zu bemerken, daß es Sache der wissenschaftlichen Geometrie sei, die volle Gewißheit des näherungsweise gefundenen Satzes mit aller Schärfe nachzuweisen.

4. Die Auflösung der Aufgaben, mag dieselbe auf der unmittelbaren Anschauung oder auf bereits erkannten Lehrsätzen beruhen, soll unter der anregenden Leitung des Lehrenden jedesmal von den Schülern selbst gesucht werden. In vielen Fällen wird es dabei zweckmäßig sein, an die Schüler die Frage zu richten, ob sie nicht einen Satz kennen gelernt haben, in welchem das in der Aufgabe Verlangte als Behauptung ausgesprochen erscheint; die Voraussetzung eines solchen Lehrsatzes zeigt dann den Weg zur Auflösung.

5. Ueber die Größenbestimmung der Raumgrößen sollen zahlreiche, möglichst aus den wirklichen Verhältnissen des Lebens genommene numerische Aufgaben durchgeführt werden.

6. Die auf der Schultafel vorgezeichneten Figuren, so wie auch solche Constructionen, deren Ausführung dem häuslichen Fleiße überlassen wird, sind von den Schülern in ein besonderes Heft rein und genau einzutragen. Auch ist auf das Zeichnen der Figuren mit freier Hand ein besonderer Werth zu legen.

Dieß sind die leitenden Grundsätze, die mir bei der Abfassung der vorliegenden Anleitung zum geometrischen Anschauungsunterrichte vorgeschwebt haben, und nach denen ich dieselbe auch benützt zu sehen wünsche. Die zahlreichen, an den gehörigen Orten eingestreuten Fragen und Aufgaben sind bestimmt, das eigene Nachdenken und die Selbstthätigkeit der Schüler anzuregen und zu fördern.

Ich erlaube mir schließlich nur noch den Wunsch auszusprechen, daß diese Schrift dieselbe freundliche Aufnahme finden möge, die meinen früheren mathematischen Lehrbüchern zu Theil geworden ist.

Laibach, am 10. September 1852.

Der Verfasser.

Vorwort zur eilften Auflage.

Nachdem die achte Auflage dieser Schrift gänzlich umgearbeitet wurde, sah ich mich nicht veranlaßt, in Anlage und Darstellung des Ganzen hier eine Veränderung vorzunehmen. Die gegenwärtige Auflage stimmt daher mit den vorhergehenden drei Auflagen im wesentlichen überein; nur die Rechnungsaufgaben wurden mit Rücksicht auf die neue österreichische Maß- und Gewichtsordnung entsprechend geändert.

Graz, im Mai 1873.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Einleitung.

1. Körper.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper.

Körper, welche wir mit den Sinnen wahrnehmen können, welche also in der Natur vorhanden sind, heißen physische Körper. Jeder physische Körper, z. B. ein hölzerner Würfel, besteht aus einem Stoffe oder einer Materie; wird der Stoff weggedacht, so bleibt in unserer Vorstellung nur der begrenzte Raum übrig, der mit diesem Stoffe erfüllt war. Dieser Raum, den man jedoch nicht mit den Sinnen wahrnehmen, sondern nur im Gedanken sich vorstellen kann, heißt ein mathematischer oder geometrischer Körper.

Die beim Unterrichte verwendeten Modelle der Körper sind physische Körper und nur Versinnlichungsmittel für die mathematischen.

Jeden Körper kann man sich aus Theilen bestehend denken, die wieder Körper sind. Was aus gleichartigen Theilen besteht, oder aus solchen bestehend gedacht werden kann, heißt Größe. Jeder Körper ist also eine Größe, und zwar, weil er im Raume ausgedehnt ist, eine Raumgröße.

§. 2. Ein Körper, z. B. ein Würfel, ist nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt: von links nach rechts, von vorne nach hinten und von unten nach oben. Die Ausdehnung von links nach rechts heißt gewöhnlich Länge, die von vorne nach hinten Breite, und die von unten nach oben Höhe.

Die Höhe wird bei vielen Körpern auch Tiefe oder Dicke genannt. Ein Graben ist lang, breit und tief; so auch ein Keller. Ein Buch ist lang, breit und dick; ebenso ein Lineal.

Bei einer Röhre wird nur von der Länge und Weite gesprochen; allein auch hier denkt man an drei Ausdehnungen, nur werden die Breite und Höhe, weil sie einander gleich sind, mit dem gemeinschaftlichen Namen Weite bezeichnet.

Bei einer Kugel spricht man nur von der Dicke, weil dabei Länge, Breite und Dicke gleich groß sind.

2. Flächen.

§. 3. Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen. Ein Würfel wird von sechs Flächen begrenzt; die Grenzflächen eines Zimmers sind die vier Wände, der Fußboden und die Decke desselben.

Wie viele Flächen enthält die äußere Begrenzung eines Buches, einer Walze, eines Zuckerhutes, einer Kugel?

Die Flächen kommen nicht nur an der Außenseite eines Körpers vor, sie können auch im Innern desselben gedacht werden, wo sie die gemeinschaftliche Grenze zweier aufeinander folgender Theile des Körpers bilden.

Jede Fläche kann man sich aus Theilen bestehend denken, welche wieder Flächen sind; sie ist also eine Größe, und zwar, weil sie im Raume ausgedehnt ist, eine Raumgröße.

§. 4. Da man, um eine Fläche zu erhalten, bei dem Körper nur seine äußere Begrenzung ins Auge fassen, von seiner Ausdehnung nach innen, von der Dicke, aber absehen muß, so hat die Fläche keine Dicke, und im Vergleich mit dem Körper eine Ausdehnung weniger. Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen, die Länge und die Breite. Will man z. B. eine Wandfläche tapeziren, so kommt es dabei nicht auf die Dicke der Wand, sondern nur auf ihre beiden äußeren Ausdehnungen, die Länge und die Höhe, an; zieht man aber bei einer Wand auch die Dicke in Betracht, so hat man es nicht mit einer Fläche, sondern mit einem Körper zu thun. Ein Blatt Papier ist, wenn auch noch so fein, ein Körper, weil es nebst Länge und Breite auch Dicke hat, was man leicht ersehen kann, wenn man mehrere Blätter aufeinander legt; betrachtet man aber nur die eine Seite als Grenze des Blattes, als Fläche, so muß man dabei von der Dicke absehen, und nur die Länge und Breite ins Auge fassen.

Eine Fläche kann unbegrenzt, d. i. nach beiden Ausdehnungen hin ohne Ende erweitert, oder auch begrenzt gedacht werden.

3. Linien.

§. 5. Die Grenzen einer Fläche heißen Linien. Wo z. B. eine Wandfläche aufhört, da sind Linien; eine Wandfläche hört gewöhnlich nach vier Seiten auf, sie wird daher von vier Linien begrenzt. Jede Fläche eines Würfels wird von vier Linien begrenzt.

Wie viele Grenzlinien kommen in einem gewöhnlichen Zimmer vor? — Wie viele an einem Buche, an einer Walze, an einer Kugel?

Die Linien kommen nicht bloß an der Außenseite der Flächen, sondern auch im Innern derselben vor; jede Fläche kann man sich nämlich in Theile getheilt denken, und die gemeinschaftliche Grenze von je zwei aufeinander folgenden Theilen ist eine Linie.

Jede Linie kann aus Theilen bestehend gedacht werden, welche wieder Linien sind; sie ist daher eine Größe, und zwar, weil sie im Raume ausgedehnt ist, eine Raumgröße.

§. 6. Da man, um eine Linie zu erhalten, bei der Fläche nur die äußere Grenze derselben betrachten, von ihrer Ausdehnung nach innen, von der Breite, aber absehen muß, so hat die Linie keine Breite, und im Vergleich mit der Fläche eine Ausdehnung weniger. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge. Ist z. B. die Entfernung eines Ortes von einem andern zu bestimmen, so kommt es dabei nicht auf die Breite des Weges, sondern nur auf dessen Länge an.

Eine Linie kann man, da sie nur Länge besitzt, gar nicht zeichnen. Die Striche, durch die wir die Linien auf dem Papiere oder auf der Tafel versinnlichen, haben nebst der Länge immer auch so viel Breite und Dicke, als nöthig ist, um sie dem Auge sichtbar zu machen; sie sind daher nicht Linien, sondern nur Zeichen derselben.

Eine Linie kann man sich entweder unbegrenzt, d. i. ohne Ende ausgedehnt, oder auch begrenzt denken.

4. Puncte.

§. 7. Die Grenzen einer Linie heißen Puncte. Jede Linie eines Würfels hört auf zwei Seiten auf, sie wird von zwei Puncten begrenzt.

Die Puncte kommen nicht nur an den Enden einer Linie vor, man kann sich dieselben auch innerhalb der Linien denken, wo sie die gemeinschaftliche Grenze zweier auf einander folgender Theile der Linie bilden.

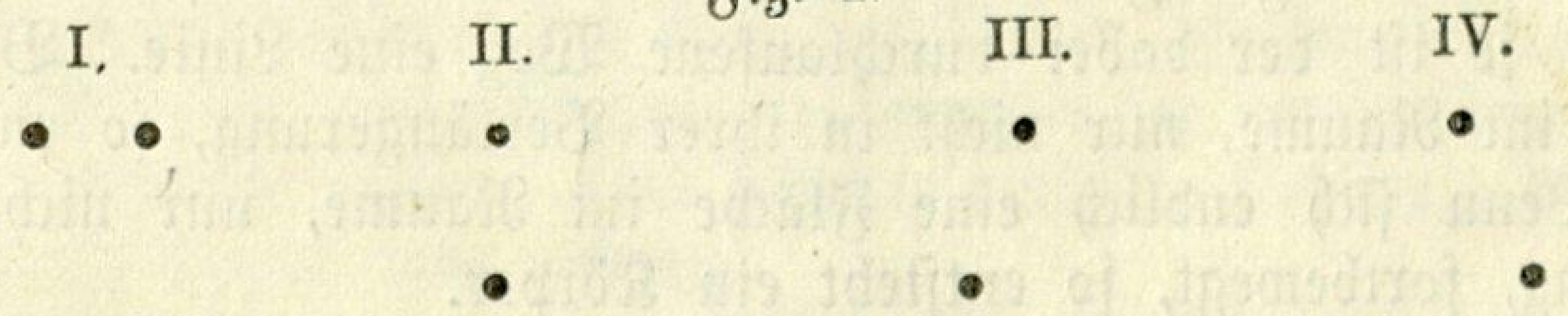
§. 8. Der Punct ist weder lang, noch breit, noch dick; er hat keine Ausdehnung und läßt sich darum weder vergrößern noch verkleinern. Der Punct ist daher keine Größe.

Einen Punkt kann man, da er keine Ausdehnung hat, gar nicht sehen und auch nicht zeichnen; er kann nur gedacht werden. Die Tupfen, durch welche man die Punkte auf dem Papier versinnlicht, sind Zeichen der Punkte; sie haben, wenn sie auch noch so klein und fein gemacht werden, immer etwas Länge, Breite und Dicke, weil sie sonst nicht sichtbar sein könnten.

§. 9. Bei den Puncten kann nur von der gegenseitigen Lage die Rede sein.

Zwei Puncte können folgende Lagen (Fig. 1) gegen einander haben:

Fig. 1.



Die beiden Puncte können neben einander (I), gerade unter einander (II) oder schräg unter einander (III und IV) liegen.

Mache drei Puncte in allen möglichen Stellungen anschaulich und gib die edesmalige Lage vollständig mit Worten an.

5. Zusammenhang der Körper, Flächen, Linien und Puncte.

§. 10. Der Körper wird von Flächen, die Fläche von Linien, die Linie von Punkten begrenzt. Da, wo das Begrenzte ist, müssen auch die Grenzen sein; wo also ein Körper ist, müssen auch Flächen sein; wo

Flächen sind, muß es auch Linien geben; und wo es Linien gibt, da müssen auch Puncte sein. Flächen, Linien und Puncte sind nicht selbstständig, sondern nur an Körpern vorhanden.

§. 11. Der Körper ist eine Raumgröße von drei Ausdehnungen, die Fläche eine Raumgröße von zwei Ausdehnungen, die Linie eine Raumgröße von nur Einer Ausdehnung. Der Punct hat keine Ausdehnung und ist daher auch keine Raumgröße, er bezeichnet nur eine gedachte Stelle des Raumes.

§. 12. Die Theile eines Körpers sind wieder Körper, die Theile einer Fläche sind Flächen und die Theile einer Linie wieder Linien.

Die Fläche ist kein Theil eines Körpers. Wenn man daher noch so viele Flächen über einander legt, so kann kein Körper entstehen, man erhält immer wieder eine Fläche; denn da eine Fläche keine Dicke hat, so kann auch durch das Aufeinanderlegen mehrerer Flächen keine Dicke entstehen.

Die Fläche, welche die Grenze zwischen Wasser und darauf schwimmendem Oel in einem Glase bildet, ist nicht von Wasser und nicht von Oel, überhaupt nicht von irgend welchem Stoffe.

Die Linie ist weder ein Theil der Fläche, noch ein Theil des Körpers. Wenn man daher noch so viele Linien an einander legt, so erhält man doch keine Fläche und keinen Körper, sondern immer nur wieder eine Linie.

Die Linie, welche die Grenze zwischen zwei Flächen bildet, deren eine roth, die andere blau angestrichen ist, ist nicht roth und nicht blau, noch hat sie irgend eine andere Farbe.

Ein Punct ist kein Theil einer Linie. Wenn daher noch so viele Punkte zu einander gelegt werden, so bekommt man doch keine Linie, sondern immer nur einen Punct.

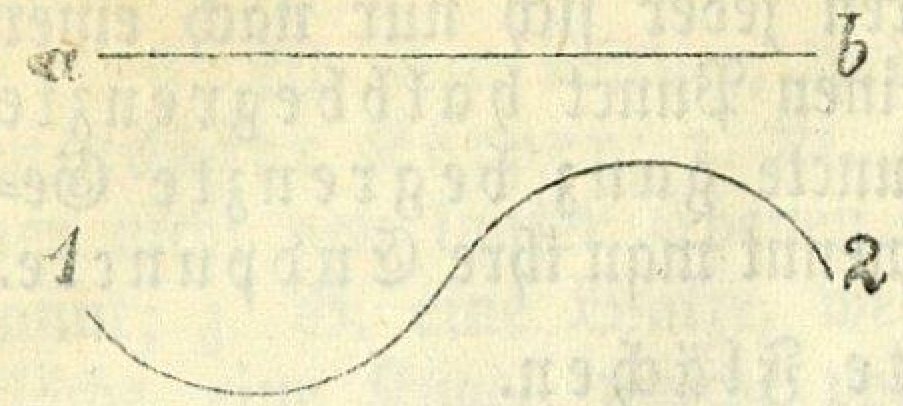
§. 13. Die Körper, Flächen, Linien und Puncte stehen nicht nur in Bezug der Begrenzung, sondern auch rücksichtlich der Art ihrer Entstehung in einem innigen Zusammenhange. Wenn sich ein Punct im Raume fortbewegt, so ist der dabei durchlaufene Weg eine Linie. Bewegt sich eine Linie im Raume, nur nicht in ihrer Verlängerung, so entsteht eine Fläche. Wenn sich endlich eine Fläche im Raume, nur nicht in ihrer Erweiterung, fortbewegt, so entsteht ein Körper.

Ein Feuerfunken, der durch die Luft fährt, zeigt unseren Blicken eine Linie. Wenn ein mit Farbe frisch bestrichener Draht über ein Blatt Papier hingerollt wird, so zeigt die entstehende Spur das Bild einer Fläche. Wird ein Brettchen mit einer Grenzfläche in weichen Thon eingedrückt und dann herausgenommen, so zeigt sich eine Vertiefung im Thon, welche lang, breit und tief ist, mithin als Körper angesehen werden muß.

§. 14. Um einen Punct zu bezeichnen, setzt man zu dem ihn versinnlichenden Tupfen einen Buchstaben oder eine Zahl, und sagt z. B. der Punct a, der Punct 1.

Um eine Linie zu bezeichnen, setzt man an jeden der Endpuncte des sie versinnlichenden Striches einen Buchstaben oder eine Zahl,

Fig. 2.



und spricht diese nach einander aus. So heißt in Fig. 2 die erste Linie a b oder b a, die zweite 1, 2 oder 2, 1.

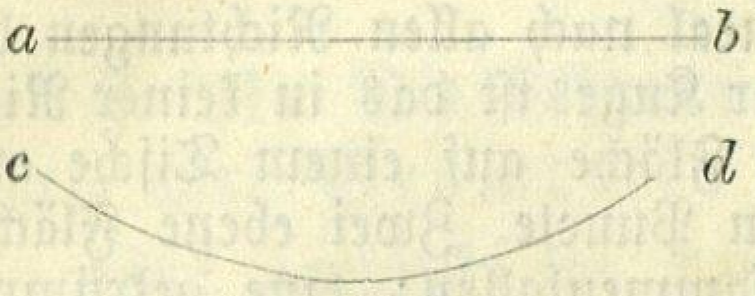
Um eine Fläche zu bezeichnen, benennt man die Linien, welche sie begrenzen.

Die Bezeichnung eines Körpers endlich geschieht durch die Angabe der Flächen, welche ihn begrenzen.

6. Gerade und krumme Linien.

§. 15. Bewegt sich ein Punct im Raume so fort, daß er dabei seine Richtung nie verändert, so heißt die Linie, die dadurch entsteht, eine gerade Linie oder eine Gerade. Wenn aber der Punct während der Bewegung seine Richtung fortwährend ändert, so heißt die dadurch entstehende Linie eine krumme Linie. In Fig. 3 ist a b eine gerade, c d eine krumme Linie.

Fig. 3.



Ein Stein, den man frei fallen läßt, fällt in einer geraden Linie zur Erde; ein Stein, welcher seitwärts geworfen wird, beschreibt eine krumme Linie. Ein gespannter Faden versinnlicht eine gerade Linie.

Gib a) verschiedene gerade Linien, b) verschiedene krumme Linien im Zimmer an.

Zum geometrischen Zeichnen gerader Linien bedient man sich des Lineals.

1. Ziehe durch einen Punct eine Gerade. Ist durch einen Punct eine Gerade bestimmt?
2. Bestimme zwei Puncte und verbinde sie aus freier Hand durch eine Gerade.
3. Bestimme drei Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, und ziehe durch je zwei eine Gerade. — Wie viele Gerade sind da möglich?
4. Wie viele gerade Linien lassen sich durch 4, 5, 6 Puncte ziehen?

Zwischen den geraden und krummen Linien bestehen folgende Unterschiede, welche durch entsprechende Zeichnungen zu versinnlichen sind:

a) Die gerade Linie hat in allen Theilen dieselbe Richtung, die krumme in jedem Theile eine andere.

b) Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten, die krumme macht einen Umweg. Die Gerade dient daher auch dazu, um den Abstand oder die Entfernung zweier Puncte von einander zu bestimmen.

c) Zwischen zwei Puncten kann man nur Eine gerade Linie ziehen, aber unzählig viele krumme. Durch zwei Puncte wird also die Richtung und die Länge einer geraden Linie vollkommen bestimmt, aber nicht jene einer krummen.

d) Zwei gerade Linien haben stets dieselbe Form, zwei krumme Linien können sich, je nachdem sie mehr oder weniger gekrümmt sind, auch durch ihre Form unterscheiden.

§. 16. Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punct in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punct halbbegrenzte Gerade heißt Strahl. Eine durch zwei Puncte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpuncte nennt man ihre Endpuncte.

7. Ebene und gekrümmte Flächen.

§. 17. Eine Fläche, in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene; z. B. die Wand eines Zimmers, die Fläche eines Tisches. Eine Fläche, in welcher nicht nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können, heißt eine gekrümmte Fläche; z. B. die äußere Fläche eines Baumstammes, auf der man nur nach einer einzigen Richtung, die Fläche einer Kugel, auf der man nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen kann.

An eine Fläche des Würfels kann man ein Lineal nach allen Richtungen hin anlegen, ohne daß ein Zwischenraum entsteht; bei einer Kugel ist das in keiner Richtung möglich. — Der Würfel kann mit einer ganzen Fläche auf einem Tische aufliegen, die Kugel aber berührt den Tisch nur an einem Puncte. Zwei ebene Flächen können so aufeinander gelegt werden, daß sie ganz zusammenfallen; eine gekrümmte Fläche dagegen kann mit einer ebenen Fläche nicht zusammenfallen.

Gib verschiedene ebene und ebenso mehrere gekrümmte Flächen an.

Wie prüft man mit dem Lineal, ob eine Fläche eben ist?

§. 18. Durch einen einzigen Punct lassen sich unendlich viele Ebenen in allen denkbaren Stellungen legen. Auch durch zwei Puncte ist die Stellung der Ebene noch nicht bestimmt; denkt man sich nämlich durch die zwei Puncte eine gerade Linie gezogen und durch diese Gerade eine Ebene gelegt, welche sich rings um die Gerade dreht, so kann diese Ebene dabei noch unzählig viele Stellungen annehmen und geht doch in jeder derselben durch die zwei gegebenen Puncte. Wird aber noch ein dritter Punct außer jener Geraden angenommen, durch welche die Ebene bei ihrer Umdrehung durchgehen muß, so wird unter allen früheren Stellungen der Ebene nur eine einzige sein, in welcher die Ebene sowohl durch die zwei Puncte in der Geraden, als auch durch den dritten außer ihr liegenden Punct geht. Durch drei Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich also nur eine einzige Ebene gelegt denken; oder, was gleichviel ist, eine Ebene wird durch drei nicht in einer Geraden liegende Puncte ihrer Stellung nach vollkommen bestimmt.

Das eben Gesagte kann sehr leicht mittelst eines Stäbchens und eines Blattes Papier versinnlicht werden.

Zur Benennung einer Ebene braucht man nur die drei Puncte, durch welche sie gelegt ist, mit Buchstaben zu bezeichnen und diese zusammenzustellen.

§. 19. Die unbegrenzte Ebene wird durch jede in ihr liegende gerade Linie in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur auf einer Seite dieser Geraden unbegrenzt ausdehnt und darum eine halbbegrenzte Ebene heißt. Eine durch Linien ganz begrenzte Ebene heißt eine ebene Figur.

8. Eckige und runde Körper.

§. 20. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt ist, heißt ein eckiger Körper; z. B. ein Würfel, ein Kasten. Ein Körper, welcher nicht von lauter Ebenen begrenzt ist, wird ein runder Körper genannt; z. B. eine Walze, welche von zwei ebenen und einer gekrümmten Fläche, eine Kugel, welche von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt wird.

Nenne verschiedene eckige und ebenso mehrere runde Körper.

Zur besseren Befestigung der bisher gewonnenen Vorstellungen sind von den Anfängern die geometrischen Grundkörper an Modellen von Holz oder Pappe anzuschauen, und es ist bei jedem derselben anzugeben, wie viele und was für Flächen daran vorkommen, ob daher der Körper ein eckiger oder runder ist; ferner, wie viele und was für Linien, und wie viele Grenzpuncte an dem Körper vorhanden sind.

9. Geometrie.

§. 21. Die Lehre von der Größe, Gestalt und Lage der Raumgrößen wird Geometrie genannt.

Sie zerfällt in zwei Hauptheile: die Planimetrie und die Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie ist die Lehre von den Eigenschaften derjenigen Raumgrößen, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber handelt von denjenigen Raumgrößen, die sich nicht in einer einzigen Ebene liegend vorstellen lassen, sondern sich auch noch im Raume außerhalb derselben ausdehnen.

Die Planimetrie.

I. Gerade Linien.

1. Richtung der Geraden.

§. 22. Läßt man eine Bleikugel oder einen anderen Körper frei fallen, so bewegt er sich in gerader Linie gegen die Erde. Die Richtung, in welcher die Körper frei fallen, heißt die verticale Richtung, und man nennt daher auch eine Linie, welche diese Richtung hat, vertical. Diese Richtung wird durch das Bleiloth, d. i. eine Schnur, an deren einem Ende eine Bleikugel hängt, bestimmt. Man sagt darum statt vertical auch lothrecht.

Durch einen Punct ist nur eine einzige verticale Gerade möglich.

Wenn durch eine verticale Linie eine Ebene gelegt wird, so heißt diese eine Vertical-Ebene.

Nenne verticale Linien in und außer dem Schulzimmer; ferner auch verticale Ebenen.

Auf dem Papiere oder an der Tafel wird die verticale Richtung durch eine von oben nach unten oder umgekehrt gezogene gerade Linie dargestellt.

Ziehe auf deiner Schreibtafel eine Gerade von oben nach unten, und bringe dann die Tafel in eine solche Stellung, daß die Gerade wirklich vertical wird.

§. 23. Wenn man bei einer Wage in beide Schalen gleich viel Gewicht legt, so steht das Zünglein des Wagebalkens vertical; der Wagebalken neigt sich in dieser Lage weder auf der einen, noch auf der andern Seite zur Erde herab; er hat die Richtung, welche man horizontal oder wagrecht nennt. So heißt auch jede gerade Linie, welche eine solche Richtung hat.

Durch einen Punct sind unzählig viele horizontale Gerade möglich.

Eine Ebene, in welcher sich nach allen Richtungen horizontale Linien ziehen lassen, nennt man eine Horizontal-Ebene; z. B. der Fußboden, eine ruhige Wasserfläche.

Nenne verschiedene horizontale Linien und Ebenen.

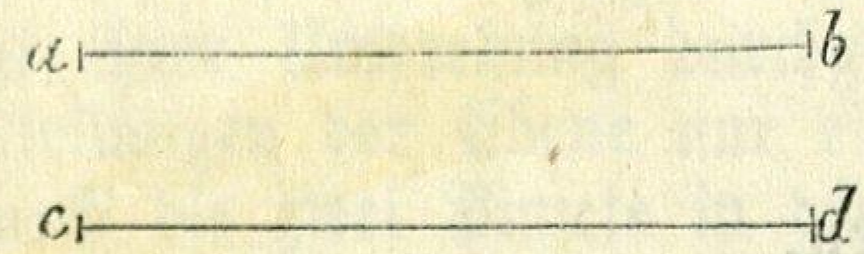
Eine horizontale Linie wird auf dem Papier oder an der Tafel durch eine von der Linken gegen die Rechte gezogene Gerade dargestellt.

§. 24. Eine Gerade, welche sich auf einer Seite gegen die Erde neigt, welche also weder vertical, noch horizontal ist, heißt schräg.

1. Nenne Gegenstände, an denen schräge Linien vorkommen.
2. Zeichne mehrere Puncte in verticaler, dann in wagrechter und endlich auch in schräger Richtung.
3. Zeichne in gleichen Entfernungen vier horizontale Linien.
4. Zeichne eben so vier verticale Linien.
5. Zeichne eben so vier schräge Linien und zwar a) von links unten nach rechts oben, b) von links oben nach rechts unten.

§. 25. Zwei gerade Linien haben entweder dieselbe oder eine verschiedene Richtung.

Fig. 4.

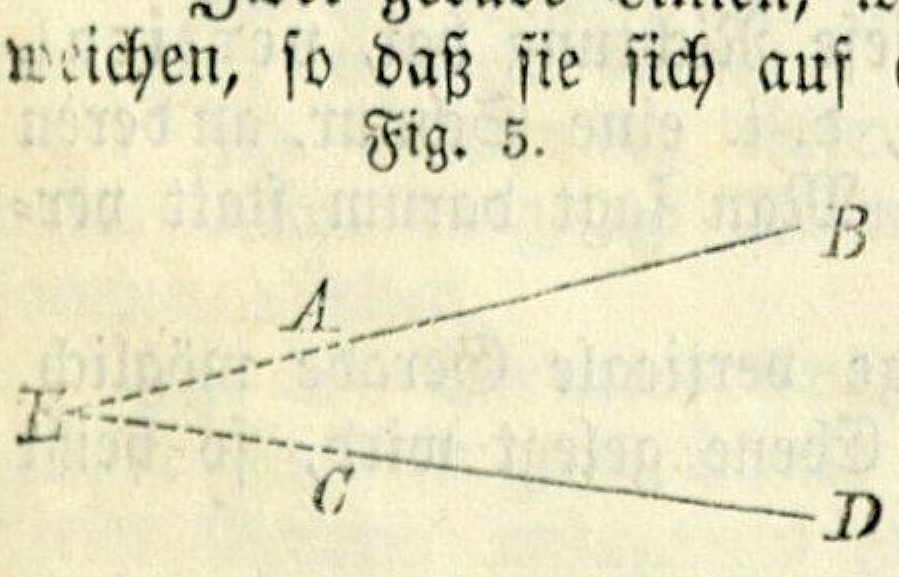


Zwei Gerade, welche dieselbe Richtung haben, wie a b und c d (Fig. 4), heißen gleichlaufend oder parallel; sie können, weil sie überall gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängern würde. Daß a b und c d parallel sind, drückt man so aus: a b || c d.

Zwei parallele Strahlen können entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sein.

Zwei gerade Linien, welche in ihren Richtungen von einander abweichen, so daß sie sich auf einer Seite nähern, auf der andern Seite entfernen, wie A B und C D (Fig. 5), nennt man ungleichlaufend oder nicht parallel; sie müssen hinreichend verlängert, in einem Puncte zusammentreffen. Man sagt dann: die zwei Geraden schneiden sich, und nennt den gemeinschaftlichen Punct ihren Durchschnittspunct.

Fig. 5.



Die nichtparallelen Linien heißen nach jener Seite hin, wo sie sich nähern, convergirend, nach der entgegengesetzten Seite hin divergirend. So sind BA und DC gegen E hin convergirend, AB und CD nach der entgegengesetzten Richtung divergirend.

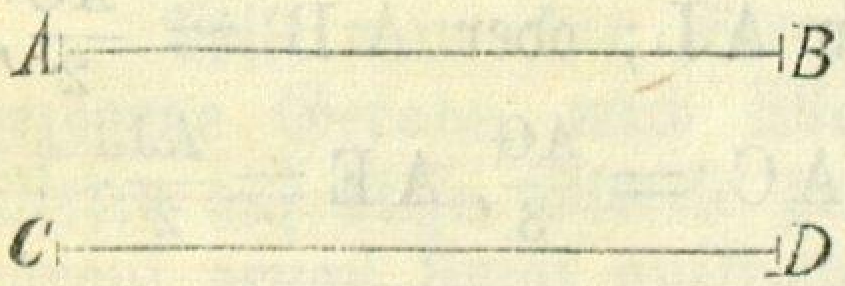
1. Können sich zwei nicht parallele Gerade in zwei Puncten treffen? Warum nicht? — Zwei Gerade können also nur Einen Durchschnittspunct haben.
2. Nenne parallele und dann auch nichtparallele Linien.
3. Sind zwei verticale Linien parallel? Warum nicht? — Da jedoch die Entfernung von der Oberfläche der Erde bis zum Mittelpuncte derselben sehr groß ist, so ist für eine kleine Strecke der Erde die Abweichung in den Richtungen zweier Verticalen so gering, daß man dieselben füglich als parallel annehmen darf.
4. Gib parallele Linien an, die a) vertical, b) horizontal, c) schräg sind.
5. Zeichne eine Gerade und zu ihr in beliebiger Entfernung eine Parallele.
6. Zeichne eine Gerade und zu ihr in gleichen Entfernungen vier Parallele.
7. Zeichne eine verticale Linie, nimm darin 5 Puncte an und ziehe durch dieselben parallele Linien.
8. Wie können mit Hilfe der sogenannten Winkelbretter Parallele gezogen werden?

2. Länge der Strecken.

§. 26. In Hinsicht der Länge können zwei Strecken gleich oder ungleich sein.

Zwei Strecken sind gleich, wenn die Endpuncte der einen eben so weit von einander entfernt sind, als die Endpuncte der andern. Legt man bei zwei gleichen Strecken AB und CD (Fig. 6) den Anfangspunct C der einen auf den Anfangspunct A der andern, und beide Strecken der Richtung nach auf einander, so müssen auch die beiden Endpuncte D und B auf einander fallen, und die Strecken einander vollkommen decken.

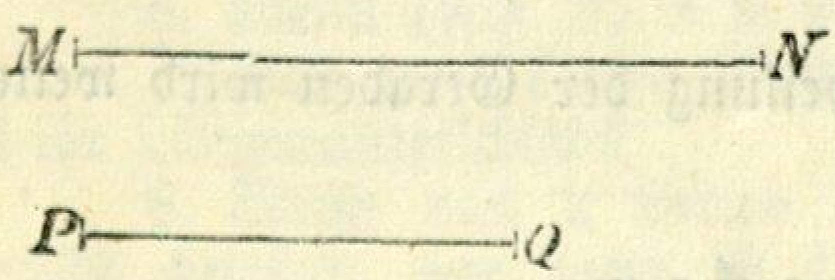
Fig. 6.



Um die Gleichheit der Strecken AB und CD anzuzeigen, schreibt man: $AB = CD$.

Zwei Strecken, deren Endpuncte ungleiche Entfernungen von einander haben, sind ungleich, und zwar ist diejenige die größere, deren Endpuncte weiter von einander abstehen, die andere die kleinere. Zwei ungleiche Strecken, wie MN und PQ (Fig. 7), können einander nicht decken.

Fig. 7.

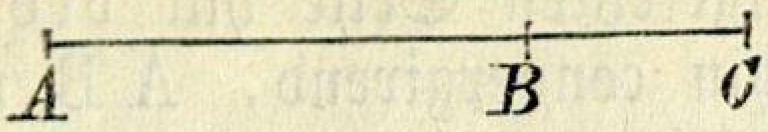


Das Zeichen der Ungleichheit ist $>$ oder $<$; $MN > PQ$ heißt: die Strecke MN ist größer als PQ; und $PQ < MN$ heißt: die Strecke PQ ist kleiner als MN.

1. Wie untersucht man mit dem Cirkel, ob zwei Strecken gleich oder ungleich sind.
2. Zeichne zwei gleiche Strecken, die a) horizontal, b) vertical, c) schräg sind.
3. Zeichne drei, vier solche Strecken.

§. 27. Mit den Strecken kann man dieselben Rechnungsoperationen vornehmen wie mit den Zahlen.

Fig. 8.



Verlängert man die Strecke AB (Fig. 8) um die Strecke BC, so ist die Strecke AC so groß, als die Strecke AB und BC zusammengenommen, oder es ist AC die Summe der Strecken AB und BC; also

$$AC = AB + BC.$$

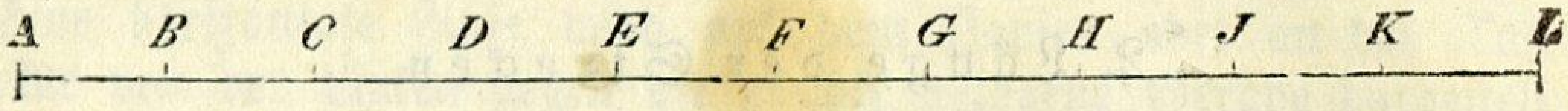
Umgekehrt ist AB der Unterschied zwischen AC und BC, nämlich $AB = AC - BC$.

1. Zeichne zwei ungleiche parallele Linien und bestimme sowohl die Summe als den Unterschied derselben.

2. In welche Lage muß man zwei Strecken bringen, um sie addiren, und in welche, um sie subtrahiren zu können?

§. 28. Trägt man auf eine Gerade die gleichen Strecken AB, BC, CD, ... KL (Fig. 9) auf, so ist

Fig. 9.



AC 2mal so groß als AB, AD 3mal..., AL 10mal so groß als AB; man erhält also dadurch das 2-, 3-, 4-, ..., 10fache der Strecke AB. Es ist daher $AC = 2AB$, $AD = 3AB, \ldots, AL = 10AB$; ferner $AE = 2AC$, $AL = 5AC$, $AL = 2AF$.

Umgekehrt ist AB die Hälfte von AC, das Drittel von AD, der 4te Theil von AE, der 10te Theil von AL; oder $AB = \frac{AC}{2}$, $AB = \frac{AD}{3}$, $AB = \frac{AE}{4}$, $AB = \frac{AL}{10}$; auch ist $AC = \frac{AG}{3}$, $AE = \frac{AJ}{2}$.

1. Welche Strecke ist in Fig. 9 gleich:
   a) der Summe $BD + DG$?
   b) dem Unterschiede $AE - AD$?
   c) dem 3fachen der Strecke $AB + CD$?
   d) dem 4fachen der Strecke $AD - CD$?

2. Zeichne eine Strecke, welche 2-, 3-, 4mal so groß ist als eine gegebene Strecke.

3. Zeichne eine Strecke, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ einer gegebenen Geraden ist.

4. Zeichne 10 parallele gerade Linien, von denen die zweite das Doppelte der ersten, die dritte das 3fache der ersten u. s. w., die zehnte das 10fache der ersten ist.

5. Zeichne eine Strecke und theile sie in zwei gleiche Theile.

6. Zeichne vier Parallele so, daß die nächstfolgende immer die Hälfte der vorhergehenden sei.

7. Zeichne mehrere Strecken und theile sie nach dem Augenmaße in 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5, 10, 7, 9 gleiche Theile.

Die Anweisung über die geometrische Theilung der Geraden wird weiter unten folgen.

3. Messen der Strecken.

§. 29. Die Größe eines Gegenstandes bestimmen, heißt denselben **messen**.

Um eine Raumgröße zu messen, muß man irgend eine Raumgröße derselben Art als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft diese als

Einheit angenommene Größe in der andern enthalten ist. Jede Größe kann nur durch eine Größe derselben Art, daher eine Linie nur durch eine Linie gemessen werden. Um also eine Strecke zu messen, d. i. um ihre Länge zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Strecke als Einheit des Längenmaßes an und untersucht, wie oft diese Längeneinheit in der zu messenden Strecke enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des neuen Längenmaßes der österreichisch-ungarischen Monarchie ist das Meter.

Das Meter (^{m}) wird in 10 Decimeter (^{dm}) à 10 Centimeter (^{cm}) à 10 Millimeter (^{mm}) eingetheilt.

Anschauung an einem Meterstabe.

1000 Meter sind 1 Kilometer (^{Km}), 10000 Meter sind 1 Myriameter (^{Mm}).

Die bisherige Einheit des Längenmaßes ist der Wiener Fuß (′) = 12 Zoll (″) à 12 Linien (‴). 6 Fuß = 1 Klafter (°); 4000 Klafter = 1 österr. Meile. Die geographische Meile = 0·978184 österr. Meilen, und 1 österr. Meile = 1·022302 geogr. Meilen.

Verhältniß zwischen den neuen und den früheren Längenmaßen:

$1^m = 3·16375'$	$1' = 0·31608^m$
$1^{dm} = 3·7965''$	$1'' = 0·2634^{dm}$
$1^{Km} = 0·131823$ ö. Meil.	1 ö. Meil. $= 7·585936^{Km}$.

Will man eine Strecke, z. B. eine nach der Länge des Zimmers gezogene Gerade, nach Meter messen, so untersucht man, wie oft ein Meter auf diese Strecke gelegt werden kann. Läßt sich z. B. das Meter darauf genau 8mal auftragen, so ist die Länge dieser Strecke 8mal so groß als die Länge eines Meters, und man sagt: die Strecke mißt 8 Meter oder sie ist 8 Meter lang; 8 ist die Maßzahl der Strecke in Beziehung auf das Meter als Längeneinheit.

Aufgaben:

1. Verwandle in das Metermaß a) 7°, b) 3·924′, c) 18° 3′ 11″.
2. Verwandle in das W. Fußmaß a) 6^m, b) $0·895^m$, c) $2^m\ 4^{dm}\ 9^{cm}\ 5^{mm}$.
3. Wie viel Centimeter lang ist 32zölliges Scheitholz?
4. Welche Dimensionen im Metermaße hat ein Ziegelstein, der 11·5″ lang, 5·5″ breit und 2·5 dick ist?
5. Von zwei Geraden ist die eine $12^m\ 5^{dm}\ 6^{cm}$, die andere $7^m\ 3^{dm}\ 9^{cm}$ lang; wie groß ist die Summe beider Linien?
6. Wenn (Fig. 9) $AB = 6·63^m$, $BC = 2·26^m$ ist, wie viel beträgt AC?
7. Von zwei Latten misst die längere $2^m\ 3^{dm}$, die kürzere $1^m\ 9^{dm}$; wie groß ist ihr Längenunterschied?
8. Wenn von 2 Latten die kleinere $2^m\ 18^{cm}$ misst und der Unterschied beider $0·29^m$ beträgt, wie lang ist die größere Latte und wie groß die Summe beider Längen?
9. Eine Strecke ist $7^m\ 4^{dm}\ 11^{cm}$ lang und eine andere 5mal so lang; wie lang ist die letztere?
10. Ein Balken von $4^m\ 3^{dm}\ 2^{cm}$ Länge soll in vier gleiche Stücke geschnitten werden; wie lang wird jedes Stück sein?
11. Wenn der dritte Theil einer Strecke $1^m\ 4^{dm}\ 7^{cm}$ beträgt, wie lang ist diese Strecke selbst?

12. Von einer Straße, welche 9^{Km} 348^{m} lang werden soll, ist der sechste Theil fertig; wie viel bleibt noch zu bauen übrig?

§. 30. Zum wirklichen Messen längerer Linien gebraucht man die **Meterstäbe**, oder eine **Meßschnur**, oder die **Meßkette**.

Zum Messen kleinerer Längen bedient man sich der **Maßstäbe**; diese sind Stäbe von Holz oder Metall, auf welchen die Länge einer oder mehrerer Längeneinheiten angegeben ist.

Miß verschiedene Linien wirklich aus, z. B. die Länge und Breite der Schultafel, die Breite und Höhe der Thüren und Fenster; die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers u. dgl. Vor dem wirklichen Ausmessen aber schätze zur Uebung des Augenmaßes die zu messende Länge jedesmal früher ab.

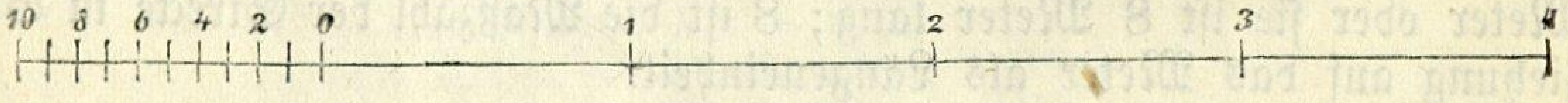
Handelt es sich um keine große Genauigkeit, so kann man die beiläufige Länge einer Geraden auch durch das **Abschreiten** finden. Zu diesem Zwecke gewöhne man sich an einen gleichmäßigen Schritt und untersuche, wie viele solcher Schritte auf etwa 10 Meter gehen.

§. 31. Sollen in der Wirklichkeit gemessene Längen auf dem Papiere dargestellt werden, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, **verjüngten** Maße. Es wird nämlich angenommen, daß eine bestimmte Länge z. B. ein Centimeter auf dem Papiere eine bestimmte Länge z. B. 1 Meter oder 20 Meter in der Wirklichkeit vorstellen soll.

Ein Maßstab, auf welchem die wirklichen Maße sammt ihren Unterabtheilungen verkleinert aufgetragen sind, heißt ein **verjüngter Maßstab**.

Um z. B. einen Maßstab von 5 Meter, worauf auch Decimeter zu entnehmen sind, in der Verjüngung $1^{m} = 2^{cm}$ natürlicher Größe zu zeichnen, trage man (Fig. 10) auf eine Gerade 2^{cm} natürlicher Größe 5mal auf und theile dann die erste Strecke links in 10 gleiche Theile.

Fig. 10.



1. Ziehe fünf parallele Linien und trage darauf nach dem obigen Maßstabe nach der Reihe 3^{m}, 2^{m}, 1^{dm}, 4^{m}, 8^{dm}, 1^{m}, 5^{dm}, 9^{dm} auf.

2. Ziehe mehrere Strecken und untersuche, wie viel Meter und Decimeter jede derselben nach dem obigen verjüngten Maßstabe vorstellt.

3. Zeichne einen Maßstab von 3 Meter so, daß 3^{cm} natürlicher Größe ein Meter vorstellen und man noch 5^{cm} abnehmen kann.

4. Ziehe mehrere **Strecken** und miß dieselben mit dem verjüngten Maßstabe.

5. Zeichne mit beliebiger Verjüngung einen Maßstab von 200 Meter, so daß man noch die Zehner der Meter abnehmen kann.

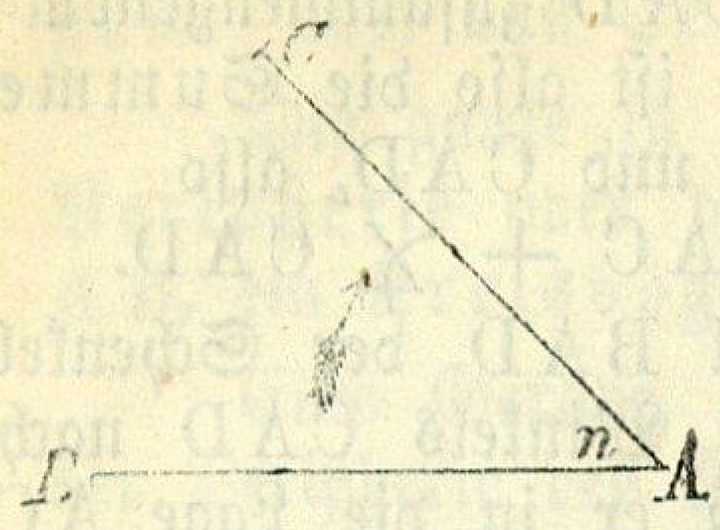
Von einer anderen bequemeren Art verjüngter Maßstäbe wird später (§. 168) gehandelt werden.

II. Winkel.

1. Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§. 32. Wenn von einem Puncte A (Fig. 11) zwei Strahlen AB und AC gezogen werden, so weichen sie in ihren Richtungen von ein-

Fig. 11.



ander ab. Die Größe dieser Abweichung wird ein **Winkel** ($\measuredangle$) genannt. Ein **Winkel** ist also der Richtungsunterschied zweier Strahlen, die einen gemeinschaftlichen Grenzpunct haben.

Einen Winkel kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Strahl AB um den Grenzpunct A dreht, bis er in eine zweite Lage AC kommt; die Größe der Drehung gibt den Winkel an.

Zur Versinnlichung dieser Entstehungsweise des Winkels kann ein Cirkel benützt werden.

Die beiden Strahlen AB und AC, welche den Winkel bilden, nennt man die **Schenkel**, und den Punct A, in welchem sie zusammentreffen, den **Scheitel** des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel oder durch einen kleinen Buchstaben, den man nahe an den Scheitel zwischen die beiden Schenkel setzt, oder durch drei Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel und zuletzt der Buchstabe an dem andern Schenkel genannt und geschrieben wird. Der Winkel in Fig. 11 heißt entweder der Winkel A, oder der Winkel n, oder der Winkel BAC oder CAB.

2. Größe der Winkel.

§. 33. Verlängert man die Schenkel eines Winkels, so werden dadurch ihre Richtungen nicht geändert; es bleibt somit auch der Unterschied ihrer Richtungen, d. i. der Winkel, unverändert. Die Größe eines Winkels ist daher unabhängig von der Länge der Schenkel.

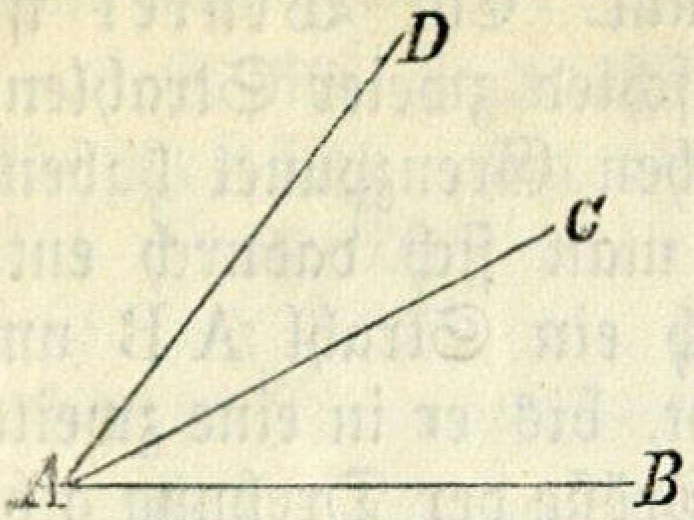
Die Größe eines Winkels hängt nur von der größeren oder geringeren Abweichung in den Richtungen der Schenkel ab. Wenn man die Schenkel des Winkels von einander dreht, so wird dadurch der Winkel größer; läßt man die gegenseitige Neigung der Schenkel abnehmen, so wird dadurch der Winkel kleiner.

Zwei Winkel sind **gleich**, wenn die Richtungen ihrer Schenkel gleich stark von einander abweichen. Werden zwei gleiche Winkel so übereinander gelegt, daß ihre Scheitel zusammenfallen und daß ein Schenkel des einen längs einem Schenkel des anderen zu liegen kommt, so müssen auch die zweiten Schenkel in einander fallen; die Winkel decken sich also.

Zwei Winkel sind **ungleich**, wenn die Richtungen der Schenkel des einen mehr von einander abweichen, als die Richtungen der Schenkel des andern. Welcher von zwei ungleichen Winkeln ist der größere, welcher der kleinere? Wie überzeugt man sich durch das Aufeinanderlegen zweier ungleicher Winkel, welcher von ihnen der größere und welcher der kleinere ist?

§. 34. Dreht man in dem Winkel BAC (Fig. 12) den Schenkel AC von AB weg, bis er in die Lage AD kommt, so entsteht der

Fig. 12.



Winkel BAD, welcher so groß ist, als die beiden Winkel BAC und CAD zusammengenommen; der Winkel BAD ist also die Summe der beiden Winkel BAC und CAD, also

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD.$$

Wird in dem Winkel BAD der Schenkel AD um die Größe des Winkels CAD nach einwärts gedreht, so daß er in die Lage AC kommt, so bleibt noch der Winkel BAC übrig, welcher also die Differenz zwischen den beiden Winkeln BAD und CAD ist; somit

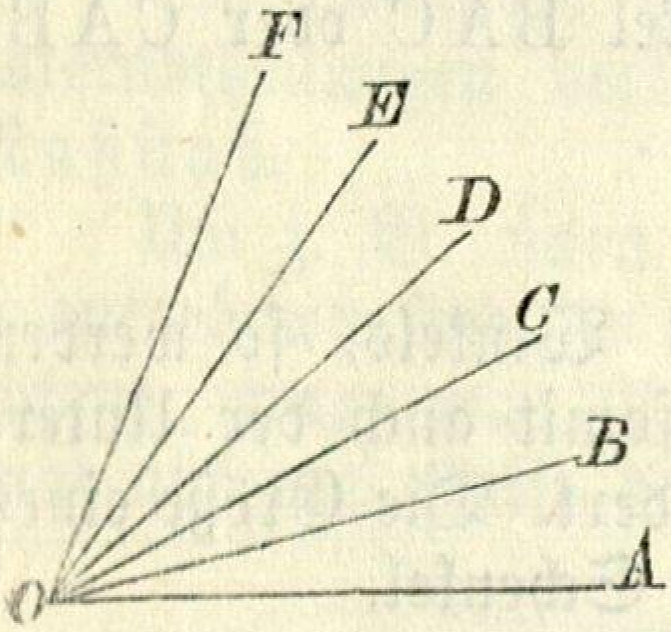
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD.$$

Man kann also Winkel so wie andere Größen addiren und subtrahiren.

Welche Lage müssen der Scheitel und die Schenkel zweier Winkel haben, um ihre Summe, und welche Lage, um ihre Differenz durch die Zeichnung zu erhalten?

§. 35. Sind die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, EOF, (Fig. 13) einander gleich, so ist $\sphericalangle$ AOC 2mal so groß als AOB, $\sphericalangle$ AOD 3mal so groß, $\sphericalangle$ AOE 4mal, $\sphericalangle$ AOF 5mal so groß als AOB oder $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD = 3 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOE = 4 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOF = 5 \sphericalangle AOB$.

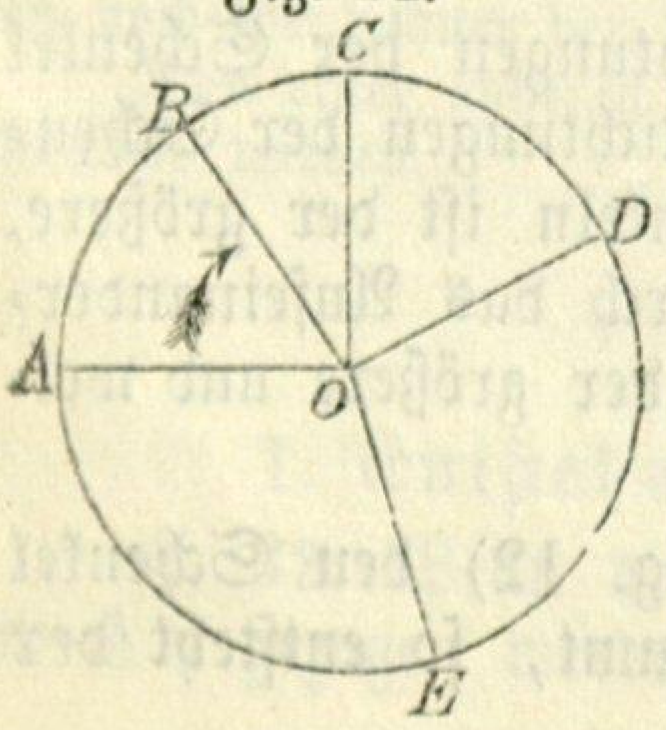
Fig. 13.



Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Theil von AOD, der vierte Theil von AOE und der fünfte Theil von AOF; od. $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \frac{1}{3} \sphericalangle AOD = \frac{1}{4} \sphericalangle AOE = \frac{1}{5} \sphericalangle AOF$.

1. Nenne in Fig. 14 alle einfachen und zusammengesetzten Winkel, so wie die Theile, aus welchen die letzteren zusammengesetzt sind.
2. Welcher Winkel ist gleich:
   a) der Summe $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COE$?
   b) der Differenz $\sphericalangle AOF - \sphericalangle COF$?
3. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2 mal, der dritte 5 mal so groß ist als der erste.
4. Theile ebenfalls nach dem Augenmaße einen Winkel in zwei gleiche Theile, in 3, 4, 5, 6 gleiche Theile.

Fig. 14.



3. Die Kreislinie und die Kreisbogen.

§. 36. Dreht sich in einer Ebene eine Strecke AO (Fig. 14) um den einen als fest gedachten Endpunct O so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der andere Endpunct A eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis heißt.

Aus der Entstehung der Kreislinie geht hervor, daß alle ihre Puncte von dem innerhalb liegenden

Puncte O gleichweit abstehen. Dieser Punct wird darum der Mittelpunct oder das Centrum des Kreises genannt.

Die ganze in sich selbst zurückkehrende Kreislinie wird auch die Peripherie oder der Kreisumfang, und jeder Theil davon, wie AB, ein Kreisbogen, auch geradezu Bogen genannt.

Eine Gerade, welche vom Mittelpuncte zu irgend einem Puncte der Peripherie des Kreises gezogen wird, wie OA, OB, OC, heißt ein Halbmesser oder Radius desselben. Ein Halbmesser zeigt die Entfernung eines Punctes des Umfanges vom Mittelpuncte an; da nun alle Puncte des Umfanges vom Mittelpuncte gleich weit entfernt sind, so müssen alle zu demselben Kreise gehörigen Halbmesser gleich sein.

Zum geometrischen Zeichnen der Kreislinie bedient man sich des Cirkels.

Beschreibe
a) einen beliebigen Kreis;
b) aus einem gegebenen Mittelpuncte einen Kreis von beliebiger Größe;
c) mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis in beliebiger Lage;
d) einen Kreis aus einem gegebenen Mittelpuncte und mit einem gegebenen Halbmesser.

Wodurch ist also die Lage und die Größe eines Kreises vollkommen bestimmt?

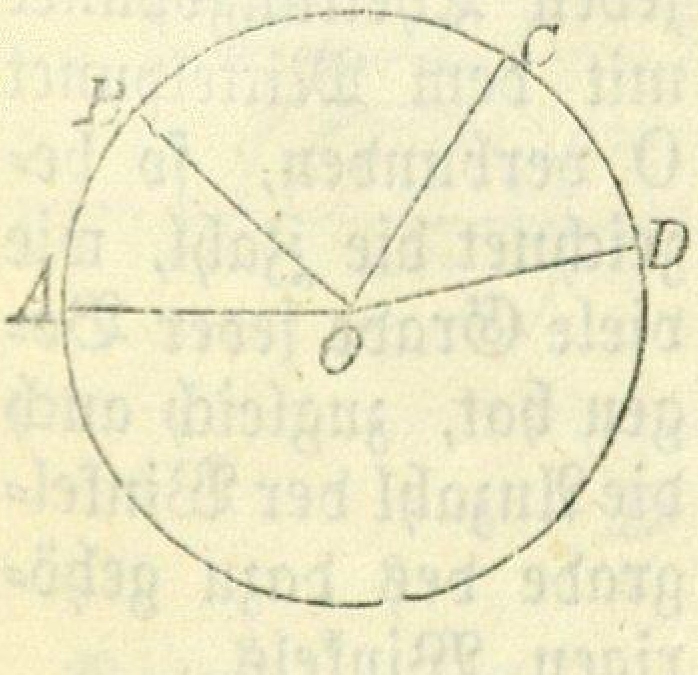
§. 37. Um einen Kreisbogen zu messen, nimmt man den 360sten Theil der Peripherie, den man einen Bogengrad nennt, als Einheit des Bogenmaßes an und untersucht, wie oft die Bogeneinheit in dem zu messenden Bogen enthalten ist. Um auch kleinere Bogen messen zu können, theilt man einen Bogengrad in 60 Bogenminuten, und eine Bogenminute in 60 Bogensecunden ein.

Die Grade, Minuten und Secunden der Bogen werden durch ^{0}, $'$, $''$ bezeichnet.

4. Messen der Winkel.

§. 38. Wenn sich in einer Ebene die Strecke AO (Fig. 14) in der Richtung des Pfeiles um den einen Endpunct O so dreht, daß sie nach und nach in die Lagen BO, CO, DO,... kommt, so wird der Kreisbogen, den der zweite Endpunct B beschreibt, und ebenso der Winkel, welchen die jedesmalige Lage der bewegten Strecke mit ihrer Anfangslage bildet, um so größer, je weiter die Drehung fortgeschritten ist. Die ganze Umdrehung gibt den größten Kreisbogen, d. i. die ganze Kreislinie, und den größten am Mittelpuncte möglichen Winkel.

Fig. 15.



Sind (Fig. 15) die Winkel AOB und COD einander gleich, so sind auch die dazu gehörigen Bogen AB und CD gleich. Legt man nämlich den Winkel COD (den man zu diesem Ende herausschneiden kann) so über den Winkel AOB, daß der Scheitel O auf O, und der Schenkel CO auf AO zu liegen kommt, so müssen wegen der Gleichheit der Winkel auch die Schenkel DO und BO in einander fallen; dann müssen sich aber auch die Bogen CD und AB vollkommen decken, weil alle Puncte des einen Bogens dieselbe Entfernung von O haben, als die Puncte des andern.

Eben so kann man zeigen, daß, wenn die Bogen AB und CD gleich sind, auch die Winkel AOB und COD gleich sein müssen.

Daraus folgt:

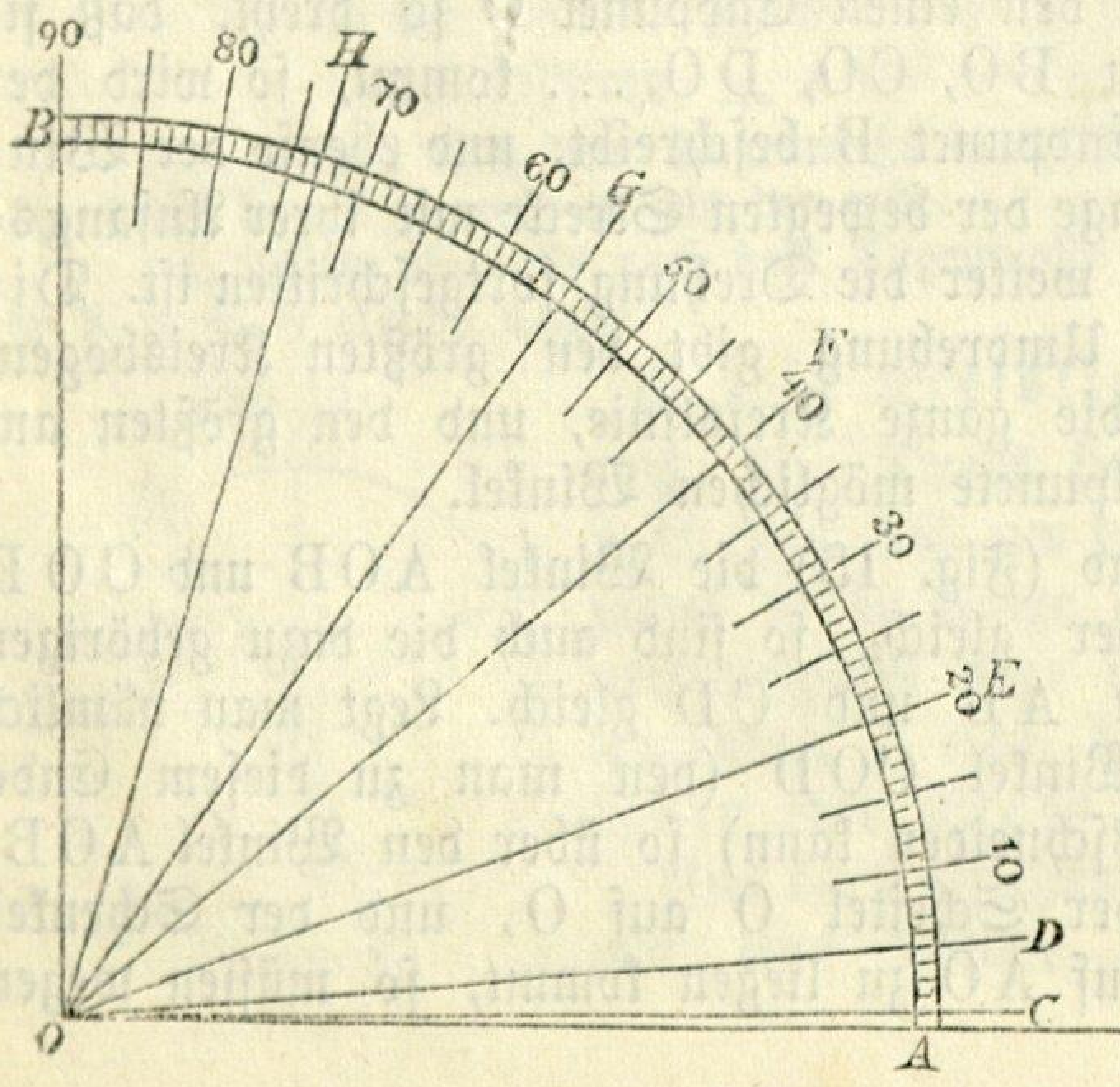
1. **Zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte eines Kreises gehören gleiche Bogen desselben.**
2. **Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Winkel am Mittelpuncte desselben.**

§. 39. Die letzten zwei Sätze bieten ein einfaches Mittel dar, die Größe der Winkel zu bestimmen.

Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, so daß jeder Theil ein Bogengrad ist, und zieht zu jedem Theilungspuncte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunct herum 360 Winkel, welche, da sie zu gleichen Bogen gehören, unter einander gleich sind. Jeder solche Winkel, der einem Bogengrade entspricht, wird auch ein **Grad**, und zwar ein **Winkelgrad** genannt. Ein Winkelgrad bildet nun die **Einheit des Winkelmaßes**; er wird in 60 **Winkelminuten**, und jede Winkelminute in 60 **Winkelsecunden** eingetheilt. Um irgend einen Winkel zu messen, sollte man eigentlich untersuchen, wie oft ein Winkelgrad in dem zu messenden Winkel enthalten ist. In der That aber geschieht diese Untersuchung nicht unmittelbar, sondern es werden die Winkel mittelbar durch die zugehörigen Kreisbogen gemessen, indem man dabei schließt: **Jeder Winkel hat eben so viele Winkelgrade, Winkelminuten und Winkelsecunden, als der zugehörige Bogen Bogengrade, Bogenminuten und Bogensecunden enthält.**

Die Grade, Minuten und Secunden bei den Winkeln werden so wie die Bogengrade und ihre Untertheilungen durch °, ′, ″ bezeichnet.

Fig. 16.



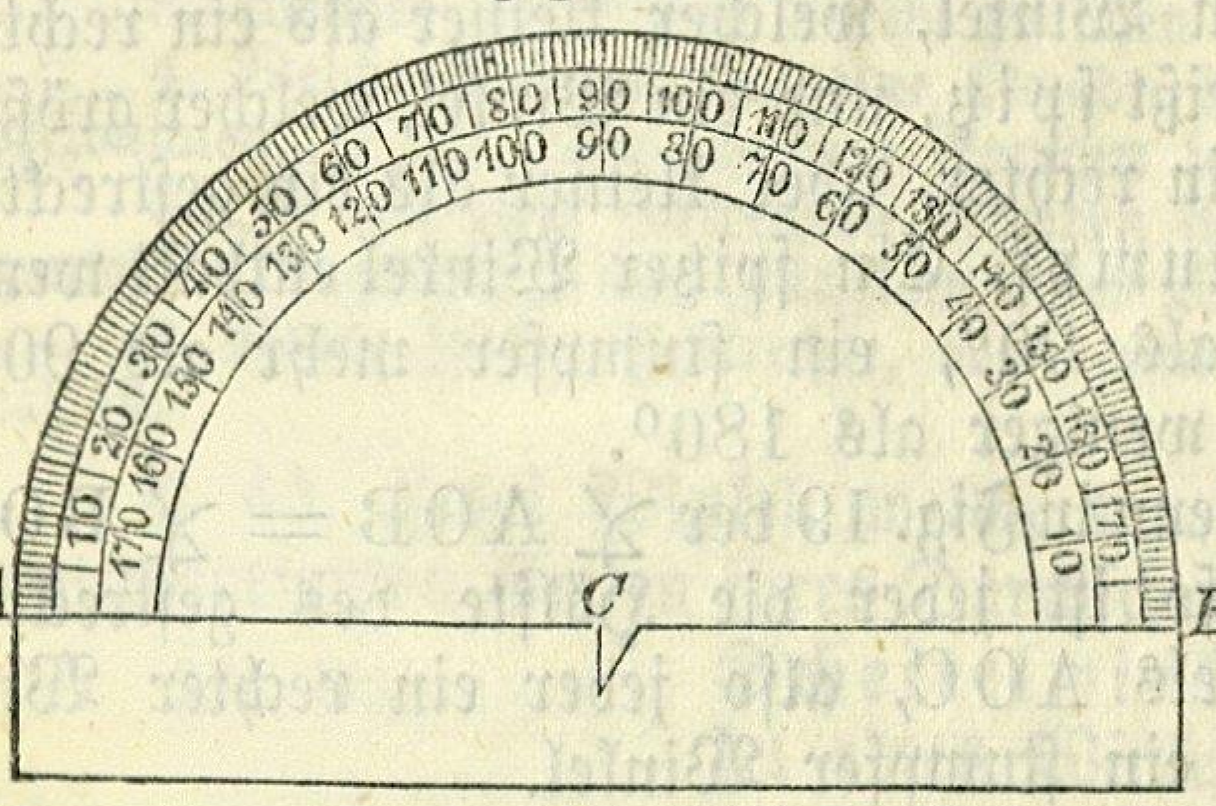
Ist der Bogen AB (Fig. 16), welcher den vierten Theil des Kreisumfanges vorstellen soll, in 90 gleiche Theile getheilt, und denkt man sich jeden Theilungspunct mit dem Mittelpunct O verbunden, so bezeichnet die Zahl, wie viele Grade jeder Bogen hat, zugleich auch die Anzahl der Winkelgrade des dazu gehörigen Winkels.

So ist AOC ein Winkel von einem Grade, oder $\measuredangle AOC = 1^0$, der Winkel AOD ein Winkel von 5 Graden, $\measuredangle AOE = 20^0$, $\measuredangle AOF = 40^0$, $\measuredangle AOG = 55^0$, $\measuredangle AOH = 73^0$, $\measuredangle AOB = 90^0$.

1. Wie groß ist der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, in 2, 5, 12 Stunden beschreibt?
2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1 Stunde, in 1, 5, 10, 30 Zeitminuten beschreibt?
3. Wie groß ist der Winkel, den die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11 Uhr bilden?
4. Suche die Summe der Winkel $37^0\ 48'\ 35''$, $28^0\ 39'$ und $78^0\ 9'\ 55''$.
5. Wie groß ist die Differenz der Winkel $128^0\ 15'\ 31''$ und $69^0\ 42'\ 18''$?
6. Bestimme das 2-, 3-, 4-, 5fache von $18^0\ 35'$, von $9^0\ 12'\ 48''$.
7. Suche die Hälfte, den dritten, vierten, fünften Theil von $72^0\ 27'$, von $58^0\ 20'$.

§. 40. Zum Messen und zum Verzeichnen der Winkel bedient man sich, wenn keine große Genauigkeit erfordert wird, des **Transporteurs** (Fig. 17), d. i. eines in Grade eingetheilten Halbkreises, bei welchem die scharfe Kante AB den Durchmesser und der Einschnitt C den Mittelpunct vorstellt.

Fig. 17.

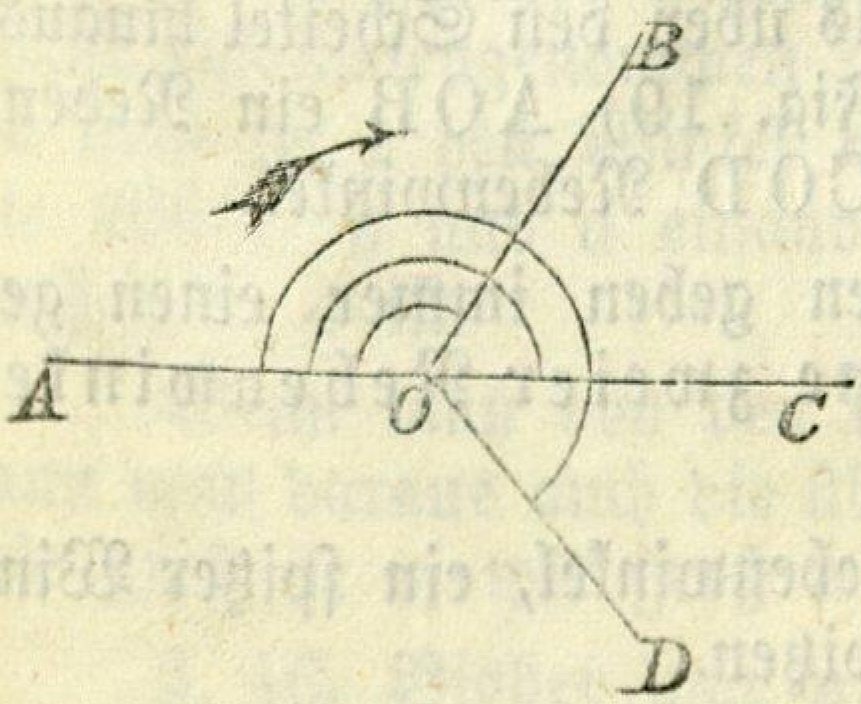


1. Wie wird mit dem Transporteur ein Winkel auf dem Papier gemessen?
2. Zeichne verschiedene Winkel, schätze ihre Größe zuerst nach dem Augenmaße ab und miß dann dieselben mit dem Transporteur.
3. Ziehe von einem Puncte einer Geraden auf einer Seite derselben mehrere Strahlen, miß die dadurch entstehenden neben einander liegenden Winkel und addire sie. Wie groß ist die Summe? Wie groß muß die richtige Summe sein?
4. Ziehe von einem Punct aus drei, vier oder mehrere Strahlen, miß alle rings um den Punct gelegenen Winkel und suche ihre Summe.
5. Wie kann man mit dem Transporteur einen Winkel verzeichnen, der eine bestimmte Anzahl Grade hat?
6. Verzeichne einen Winkel von 20^0, ferner einen Winkel von 30^0, 50^0, 90^0, 15^0, 65^0, 34^0, 79^0, 81^0, 100^0, 150^0, 142^0, 180^0, 209^0, 270^0, 326^0.

5. Arten der Winkel und ihre Eigenschaften.

§. 41. Ein Winkel, dessen Schenkel vom Scheitel aus in entgegengesetzter Richtung liegen und daher eine gerade Linie bilden, wird ein **gestreckter Winkel** genannt. Er hat 180^0.

Fig. 18.



Ein Winkel, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein **hohler**; ein Winkel, welcher größer als ein gestreckter ist, ein **erhabener Winkel**. Ein hohler Winkel hat weniger, ein erhabener mehr als 180^0.

In Fig. 18 ist AOC ein gestreckter, AOB ein hohler, AOD ein erhabener Winkel.

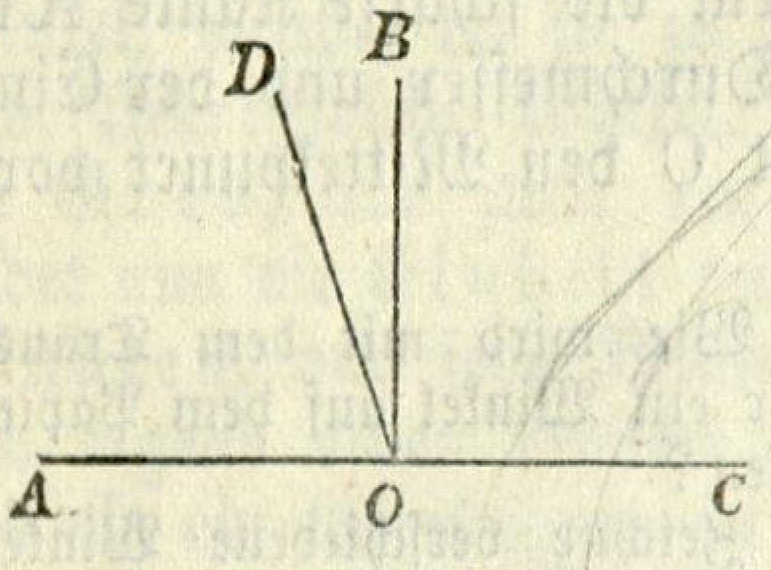
Zur Entstehung eines gestreckten Winkels wird genau die halbe Umdrehung, zur Entstehung eines hohlen Winkels weniger, und eines erhabenen Winkels mehr als die halbe Umdrehung des sich bewegenden Schenkels erfordert.

Neben jedem hohlen Winkel, der von zwei Strahlen gebildet wird, befindet sich immer auch ein erhabener; übrigens ist, wenn von dem Winkel zweier Strahlen gesprochen wird, stets der hohle zu verstehen, wenn man nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt.

§. 42. Die hohlen Winkel werden in rechte, spitze und stumpfe untergetheilt.

Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten und erfordert zu seiner Erzeugung genau den vierten Theil einer Umdrehung des sich bewegenden Schenkels. Er hat 90° und wird gewöhnlich durch den Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 19.



Ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt spitz, und ein Winkel, welcher größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, stumpf. Ein spitzer Winkel enthält weniger als 90°, ein stumpfer mehr als 90°, aber weniger als 180°.

Wenn in Fig. 19 der $\measuredangle$ AOB = $\measuredangle$ BOC ist, so ist jeder die Hälfte des gestreckten Winkels AOC, also jeder ein rechter Winkel; AOD ist ein spitzer, COD ein stumpfer Winkel.

Spitze und stumpfe Winkel werden im Gegensatze zu dem rechten auch schiefe Winkel genannt.

1. Suche an den Gegenständen im Zimmer rechte Winkel auf.
2. Um wie viel Uhr bilden die beiden Zeiger einer Uhr einen rechten, um wie viel Uhr einen gestreckten Winkel?
3. Verzeichne einen rechten Winkel mit gleichen Schenkeln.
4. Zeichne einen rechten Winkel, von dem ein Schenkel das dreifache des andern sei.

Schiefe Winkel geben minder gefällige Formen, weßhalb sie seltener angewendet werden.

§. 43. Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel. Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man dessen Nebenwinkel. So ist (Fig. 19) AOB ein Nebenwinkel von BOC; eben so sind AOD und COD Nebenwinkel.

Zwei Nebenwinkel zusammen genommen geben immer einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; die Summe zweier Nebenwinkel ist also gleich zwei Rechten oder 180°.

Ein rechter Winkel hat einen rechten Nebenwinkel, ein spitzer Winkel einen stumpfen und ein stumpfer einen spitzen.

1. Wie groß ist der Nebenwinkel von 63°? 180°—63° = 117°.

2. Suche den Nebenwinkel von 10°, 39°, 85°, 100°, 134°, 15° 48′, 79° 13′ 52″.

§. 44. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden gleiche Nebenwinkel, so sagt man: sie steht auf ihr senkrecht. Bildet eine Gerade mit einer andern zwei ungleiche Nebenwinkel, so steht sie auf ihr schief. In Fig. 19 steht BO senkrecht auf AC, was man so bezeichnet: BO ⊥ AC, dagegen steht DO auf AC schief.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, worauf sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzen und einen stumpfen, somit zwei schiefe Winkel.

Die Senkrechte wird auch Loth oder Perpendikel genannt.

1. Gib an Gegenständen im Schulzimmer Gerade an, welche auf einander a) senkrecht, b) schief stehen.

2. Zeichne eine Gerade und ziehe zu derselben von verschiedenen außer ihr liegenden Puncten senkrechte Gerade.

3. Welcher Unterschied besteht zwischen senkrechten und verticalen Geraden?

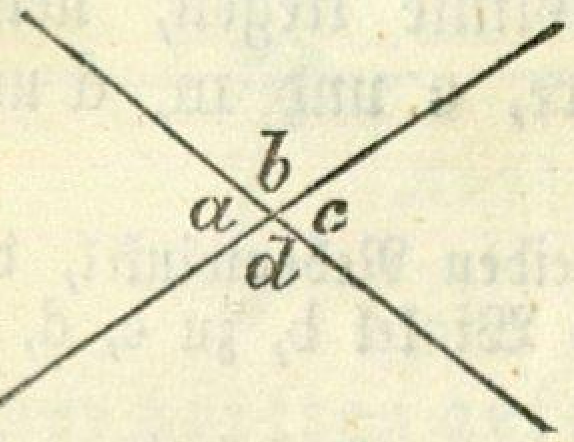
4. Welche Richtung hat eine Gerade, die a) auf einer verticalen, b) auf einer horizontalen, c) auf einer schrägen Geraden senkrecht steht?

5. Ist von zwei senkrechten Geraden immer die eine vertical, die andere horizontal? (Wagebalken und Zünglein einer Wage.)

6. Nenne solche Senkrechte, von denen die eine horizontal und die andere vertical ist.

§. 45. Zwei Winkel, welche von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunctes gebildet werden, heißen Scheitelwinkel. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man den Scheitelwinkel desselben. In Fig. 20 ist a der Scheitelwinkel von c, und b der Scheitelwinkel von d.

Fig. 20.



Durch welche Merkmale unterscheiden sich die Scheitelwinkel von den Nebenwinkeln?

Da zwei Scheitelwinkel von denselben zwei Geraden gebildet werden, und diese auf der einen Seite ihres Durchschnittspunctes eben so von einander abweichen als auf den anderen, so folgt: Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

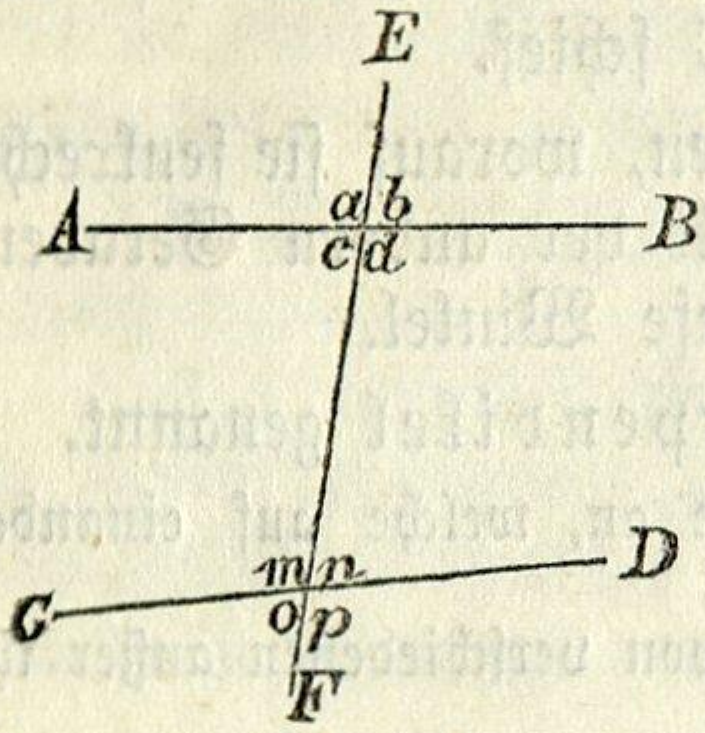
Die Richtigkeit dieses Satzes folgt auch aus der oben von den Nebenwinkeln angeführten Eigenschaft. Da nämlich a und b Nebenwinkel sind, so beträgt ihre Summe 180°, aber auch a und d sind Nebenwinkel, somit zusammengenommen gleich 180°; man erhält also dieselbe Summe, ob man zu a den Winkel b oder den Winkel d addirt; folglich müssen die Winkel b und d einander gleich sein. Zeige auf dieselbe Art, daß auch a = c ist.

Wenn man von den vier Winkeln a, b, c, d den einen kennt, so kann man daraus auch die übrigen drei bestimmen. Es sei z. B. a = 50°; wie groß ist c, wie groß b und d?

§. 46. Bisher war nur von solchen Winkeln die Rede, welche an einem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte vorkommen; nun sollen auch

Winkel betrachtet werden, welche an zwei verschiedenen Scheiteln liegen. Solche Winkel entstehen, wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden.

Fig. 21.



Es seien AB und CD (Fig. 21) die beiden geschnittenen Linien und EF die durchschneidende Gerade, so entstehen um die beiden Durchschnittspuncte acht Winkel, welche wegen ihrer wichtigen Beziehungen besondere Namen haben.

Die vier Winkel c, d, m und n, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere Winkel, die anderen vier, a, b, o, p, äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der durchschneidenden Geraden liegen, heißen Gegenwinkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere Winkel, oder auch zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf den entgegengesetzten Seiten der durchschneidenden Geraden liegen, werden Wechselwinkel genannt. Aeußere Wechselwinkel sind a und p, b und o; innere Wechselwinkel sind c und n, ebenso d und m.

Zwei innere oder auch zwei äußere Winkel, welche an verschiedenen Scheiteln und auf derselben Seite der Durchschnittslinie liegen, nennt man Anwinkel. So sind a und o, b und p äußere, c und m, d und n innere Anwinkel.

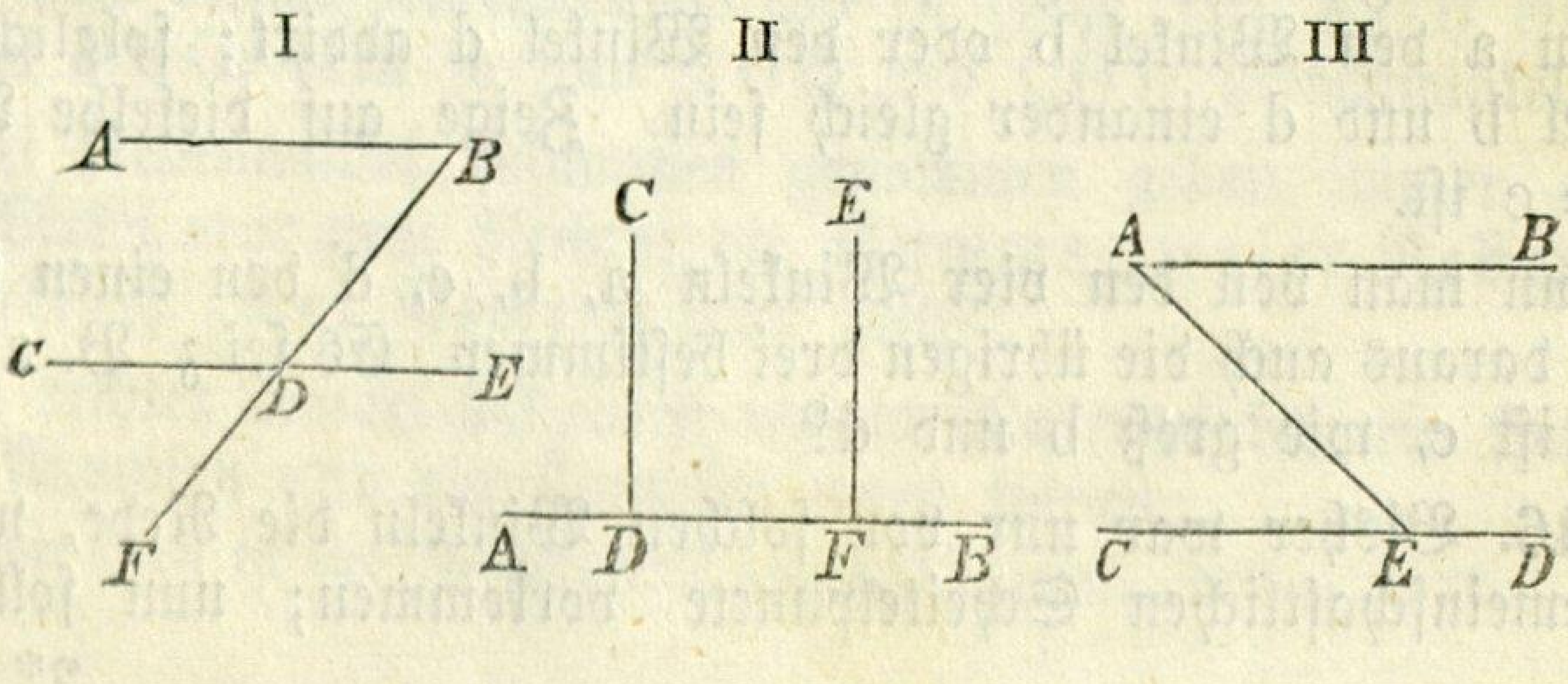
1. Suche zu dem Winkel a den Scheitelwinkel, die beiden Nebenwinkel, den Gegen-, den Wechsel- und den Anwinkel auf; ebenso zu dem Winkel b, zu c, d, m, n, o, p.

2. Es sei der Winkel $a = 98^\circ$ und $m = 110^\circ$; wie groß sind dann die übrigen Winkel?

Schwieriger erscheint die Aufsuchung der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel in solchen Fällen, wo einzelne Gerade nur von einem Durchschnittspuncte zum andern gezogen erscheinen, oder wo mehrere Schneidende oder mehrere Paare von Geschnittenen vorkommen.

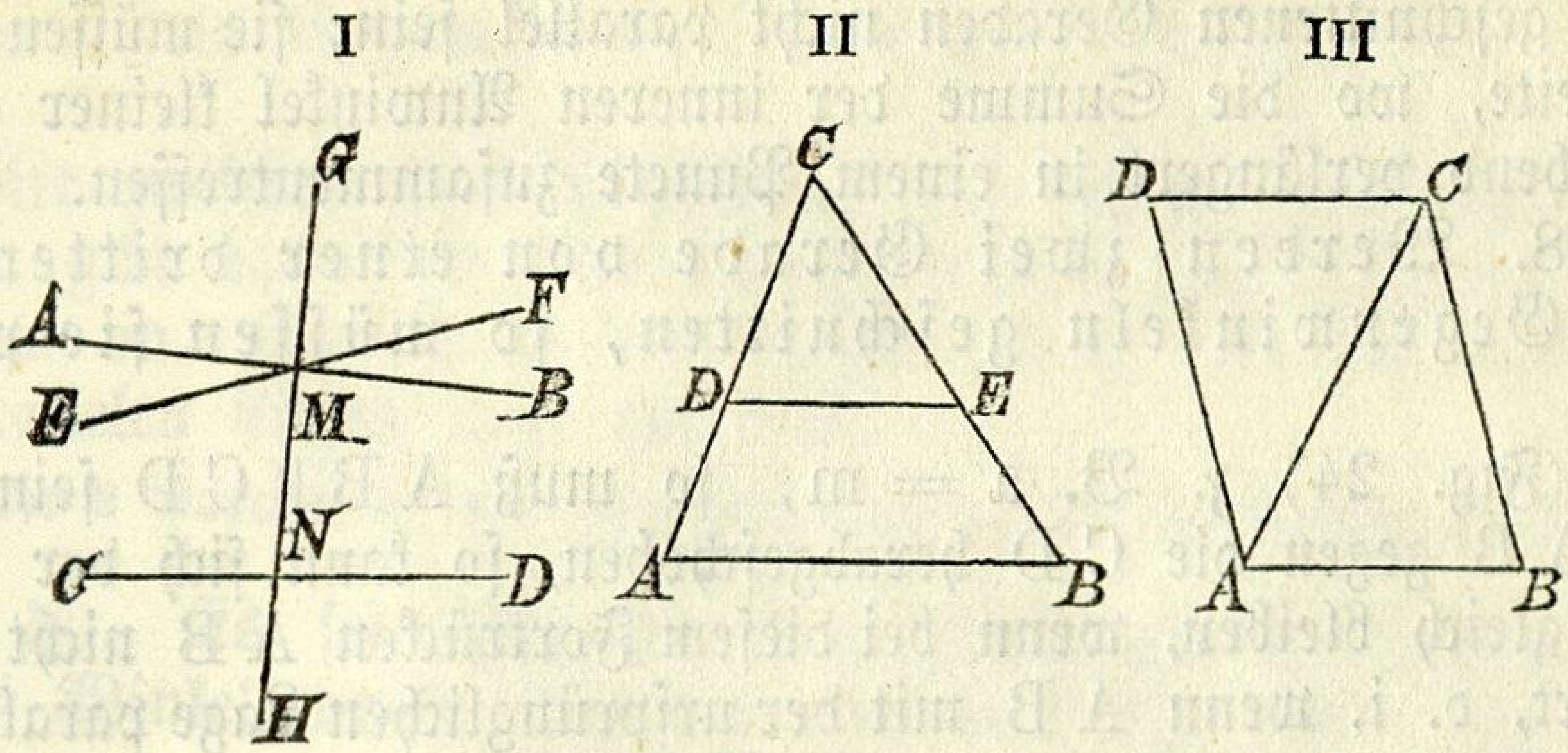
1. Suche die Gegen-, Wechsel- und Anwinkel in Fig. 22, I, II und III auf.

Fig. 22.



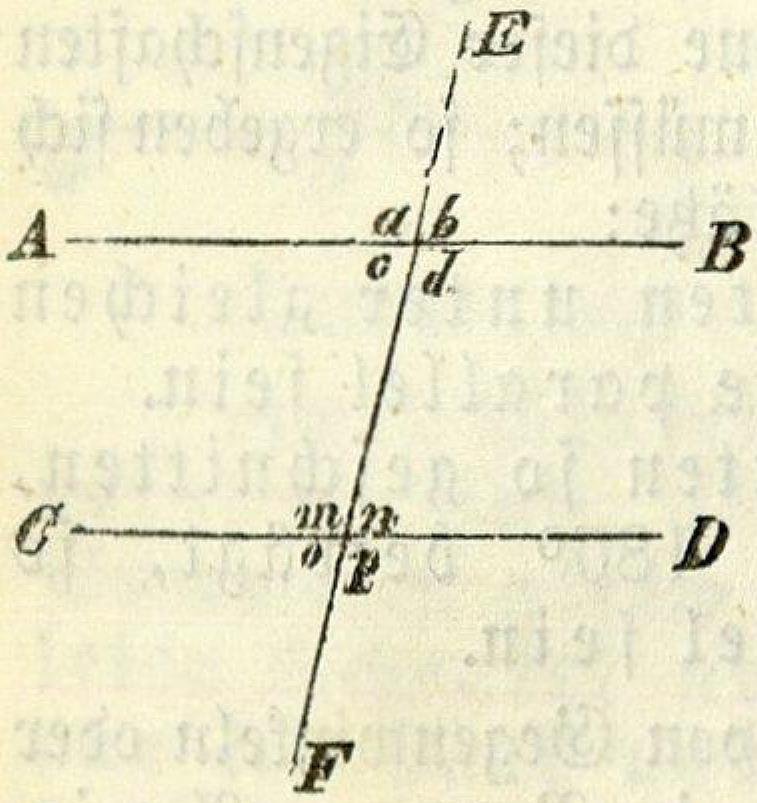
2. Gib ferner die Gegen-, Wechsel- und Anwinkel in Fig. 23 an, und zwar in I, indem einmal die AB und CD, und dann die EF und CD als die geschnittenen Geraden angenommen werden; in II zuerst in Bezug auf die Schneidende AC und dann in Bezug auf die Schneidende BC; in III für alle dort möglichen Fälle.

Fig. 23.



§. 47. Besonders merkwürdig ist die Beschaffenheit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel, wenn die beiden durchschnittenen Geraden AB und CD (Fig. 24) parallel sind.

Fig. 24.



a) Wird die Gerade AB so herabgeschoben, daß sie stets mit ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so wird sie mit der EF, da sich die Richtung der Schenkel nicht ändert, in jeder neuen Lage dieselben vier Winkel a, b, c, d bilden, und dies auch noch dann, wenn sie bei ihrem Verschieben in die Lage CD gekommen ist; es muß also $a = m$, $b = n$, $c = o$, $d = p$ sein. Diese Winkel sind aber Gegenwinkel; daher hat man den Satz:

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind je zwei Gegenwinkel gleich.

Das hier erwähnte Verschieben einer Geraden an einer andern sie schneidenden in der Art, daß zunächst von einem Winkel nachgewiesen werden kann, daß er sich gleich bleibe, kann mittelst eines Winkelbrettes und eines Lineals anschaulich gemacht werden.

b) Wenn $a = m$ ist, so muß a auch dem Scheitelwinkel von m d. i. dem Winkel p gleich sein. — Eben so läßt sich zeigen, daß $b = o$, $c = n$ und $d = m$ ist.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich.

c) Die Winkel a und c betragen als Nebenwinkel zusammen 180°; da nun c und o als Gegenwinkel gleich groß sind, so müssen auch a und o zusammen 180° betragen; also $a + o = 180°$. — Auf ähnliche Weise kann man zeigen, daß auch $b + p = 180°$, $c + m = 180°$ und $d + n = 180°$ ist.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so betragen je zwei Anwinkel zusammen genommen 180° oder zwei Rechte.

Ziehe die drei Sätze unter a), b) und c) in einen einzigen zusammen.

Aus den hier erwiesenen Sätzen folgt auch: wenn ein Paar von Gegenwinkeln oder ein Paar von Wechselwinkeln ungleich ist, oder wenn ein Paar von Anwinkeln mehr oder weniger als 180° beträgt, können die beiden geschnittenen Geraden nicht parallel sein; sie müssen nach derjenigen Seite, wo die Summe der inneren Anwinkel kleiner als 180° ist, hinreichend verlängert in einem Puncte zusammentreffen.

§. 48. Werden zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten, so müssen sie parallel sein.

Ist (Fig. 24) z. B. a = m, so muß A B || C D sein. Denn, wird die A B gegen die C D herabgeschoben, so kann sich der Winkel a nur dann gleich bleiben, wenn bei diesem Fortrücken A B nicht die Richtung ändert, d. i. wenn A B mit der ursprünglichen Lage parallel bleibt; es wird daher auch die letzte Lage C D, damit m = a sei, mit der anfänglichen parallel sein müssen.

Da bei dem Durchschnitte zweier Geraden von einer dritten die drei Eigenschaften, daß die Gegenwinkel gleich sind, daß die Wechselwinkel gleich sind, und daß je zwei Anwinkel 180° betragen, nicht abgesondert vorkommen können, sondern, sobald die eine dieser Eigenschaften eintritt, immer auch die anderen zwei stattfinden müssen; so ergeben sich aus dem letzten Satze auch noch folgende zwei Sätze:

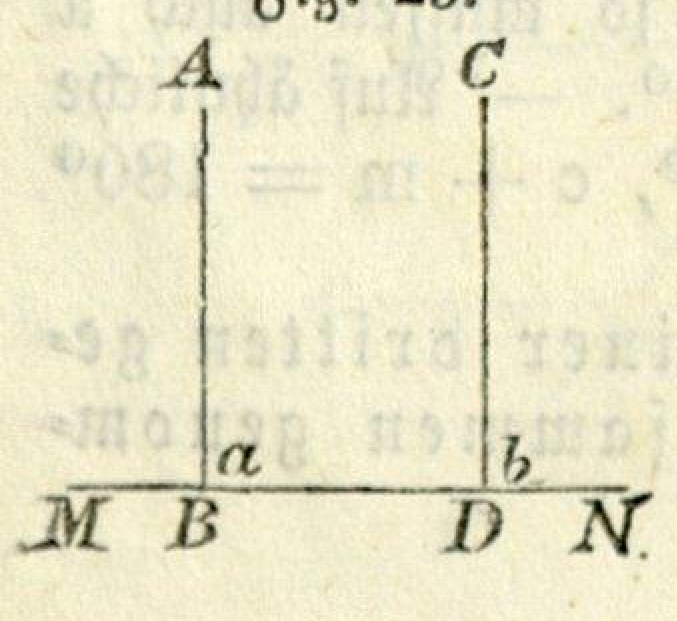
Werden zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so müssen sie parallel sein.

Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß ein Paar von Anwinkeln zusammen 180° beträgt, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Ist daher bekannt, daß entweder ein Paar von Gegenwinkeln oder ein Paar von Wechselwinkeln gleich ist, oder daß ein Paar von Anwinkeln zusammen 180° beträgt, so kann man daraus schließen, daß die beiden geschnittenen Geraden parallel sind.

Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel. Um mit Gewißheit behaupten zu können, daß zwei Linien parallel sind, sollte man zeigen, daß sie fort und fort verlängert, doch niemals zusammentreffen. Da aber eine solche Verlängerung nicht ausführbar ist, so wird die parallele Lage zweier Geraden ganz einfach durch die Winkel entschieden, welche entstehen, wenn diese Geraden von einer dritten durchschnitten werden.

Fig. 25.



§. 49. Es sei (Fig. 25) A B ⊥ M N und C D ⊥ M N. Da a = 90°, b = 90°, also a = b ist, so müssen die beiden Geraden A B und C D, welche von der dritten M N geschnitten, mit ihr gleiche Gegenwinkel bilden, parallel sein. Daraus folgt:

Stehen zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.

Umgekehrt: Steht eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht, so ist auch jede mit der ersteren Parallele auf der zweiten Geraden senkrecht.

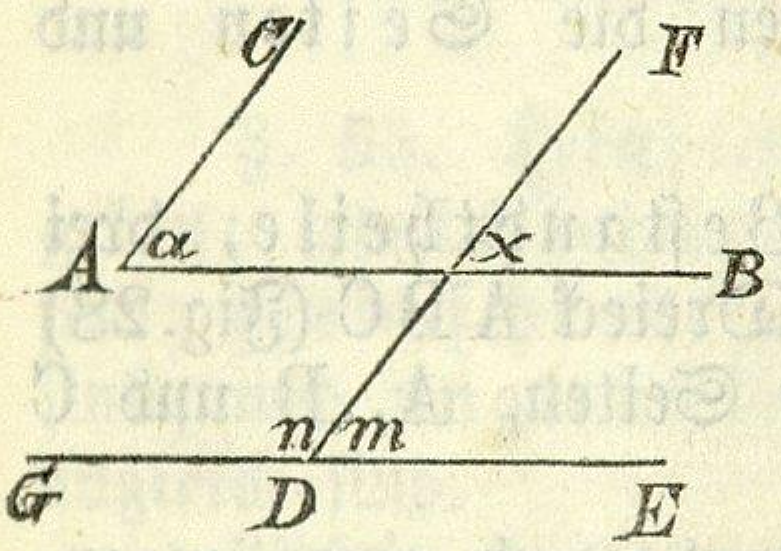
Denn: Ist (Fig. 25) $AB \perp MN$ und $CD \parallel AB$, daher $a = 90^0$ und $b = a$ (als Gegenwinkel), so muß auch $b = 90^0$ d. i. $CD \perp MN$ sein.

Wird zwischen zwei Parallelen eine darauf senkrechte Gerade gezogen, so gibt diese die Entfernung oder den Abstand der beiden Parallelen an. So ist in der obigen Figur BD die Entfernung der zwei parallelen Linien AB und CD.

Ziehe 2 Parallelen und zwischen denselben 6 Senkrechte in gleichen Entfernungen.

§. 50. Es sei (Fig. 26) $AB \parallel DE$ und $AC \parallel DF$. m und a sind zwei Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite parallel laufen; sie sind einander gleich, weil beide dem gemeinschaftlichen Gegenwinkel x gleich sind; also $m = a$. Die Winkel n und a haben auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Da $n + m = 180^0$ und $m = a$ ist, so ist auch $n + a = 180^0$.

Fig. 26.

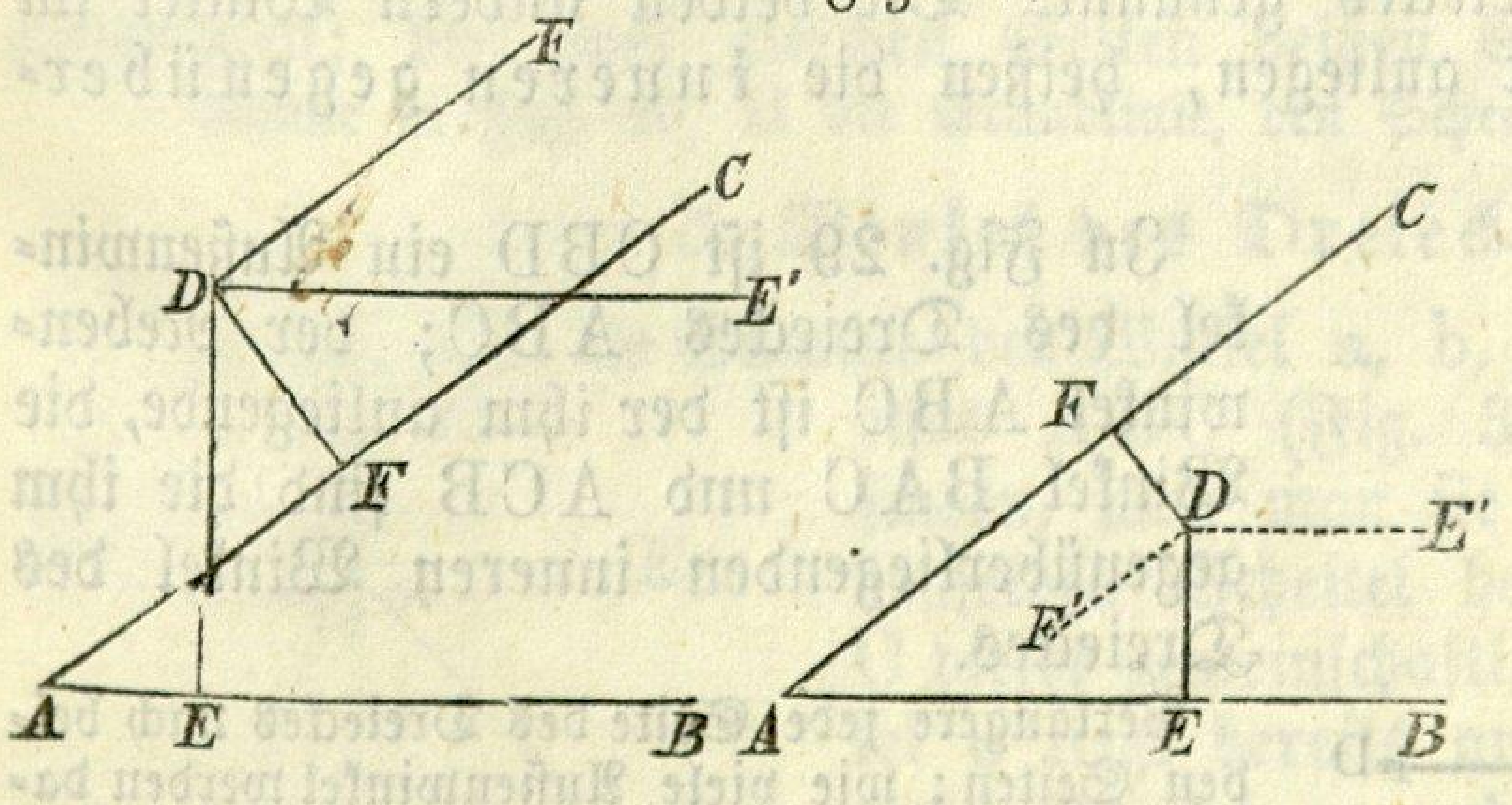


Daraus folgt:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise mit einander parallel sind, sind entweder einander gleich oder ihre Summe ist gleich 180^0, je nachdem beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite gerichtet sind, oder nur ein Paar nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

§. 51. Es sei (Fig. 27) $DE \perp AB$ und $DF \perp AC$. Man drehe den Winkel EDF, ohne dessen Größe zu ändern, um 90^0, so daß er in die Lage E'DF' kommt.

Fig. 27.



In I haben die Winkel E'DF' und BAC paarweise parallele und nach derselben Seite gerichtete Schenkel; also ist $\measuredangle E'DF' = \measuredangle BAC$, folglich auch $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$. — In II sind auch die Schenkel der Winkel E'DF' und BAC paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist $\measuredangle$ E'DF' + $\measuredangle$ BAC = 180°, folglich auch $\measuredangle$ EDF + $\measuredangle$ BAC = 180°.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise auf einander senkrecht stehen, sind entweder gleich, oder ihre Summe ist gleich 180°.

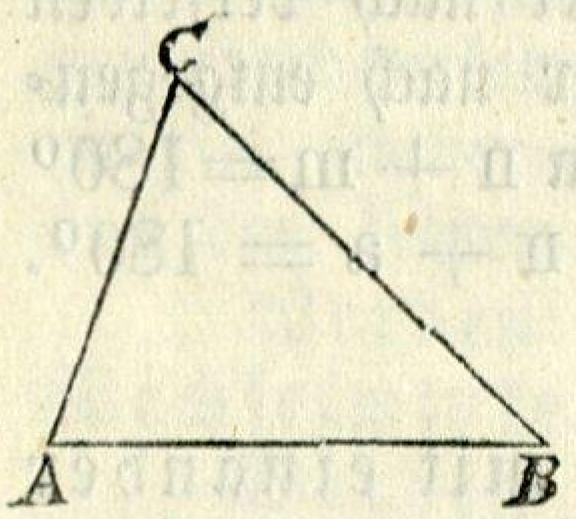
Wann findet die erste, und wann die zweite Beziehung statt?

III. Dreiecke.

I. Erklärungen.

§. 52. Jede von drei geraden Linien begrenzte Figur wird ein **Dreieck** (△) genannt; die drei Geraden heißen die **Seiten** und ihre Summe der **Umfang** des Dreieckes.

Fig. 28.



Ein Dreieck hat sechs Bestandtheile, drei Seiten und drei Winkel. Im Dreieck ABC (Fig. 28) sind AB, AC und BC die Seiten, A, B und C die Winkel.

Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel; z. B. die Seite AB hat die beiden anliegenden Winkel A und B und den gegenüberliegenden Winkel C.

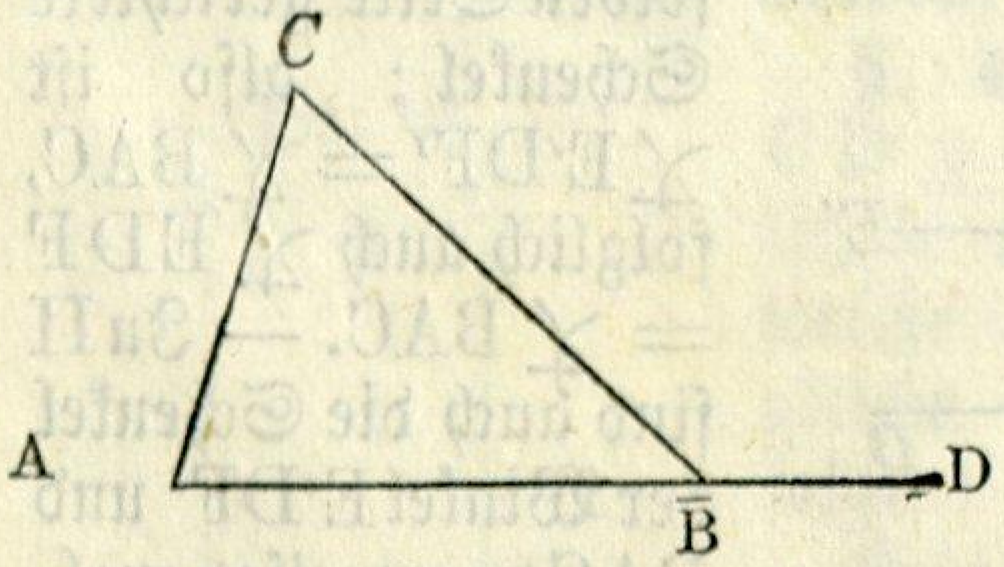
Welche Winkel liegen an der Seite AC, welche an der BC? Welche Winkel liegen diesen Seiten gegenüber?

Jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, und die dritte BC liegt ihm gegenüber.

Von welchen Seiten wird der Winkel B eingeschlossen, von welchen der Winkel C? Welche Seiten liegen den Winkeln B und C gegenüber?

§. 53. Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so entsteht ein neuer Winkel als Nebenwinkel eines Winkels im Dreiecke; er wird ein **Außenwinkel** des Dreieckes genannt. Die beiden andern Winkel im Dreiecke, die ihm nicht anliegen, heißen die **inneren gegenüberliegenden Winkel**.

Fig. 29.



In Fig. 29 ist CBD ein Außenwinkel des Dreieckes ABC; der Nebenwinkel ABC ist der ihm anliegende, die Winkel BAC und ACB sind die ihm gegenüberliegenden inneren Winkel des Dreieckes.

Verlängere jede Seite des Dreieckes nach beiden Seiten; wie viele Außenwinkel werden dadurch gebildet? Wie sind je zwei von ihnen beschaffen? Nenne zu jedem Außenwinkel den inneren anliegenden und die beiden gegenüberliegenden Winkel.

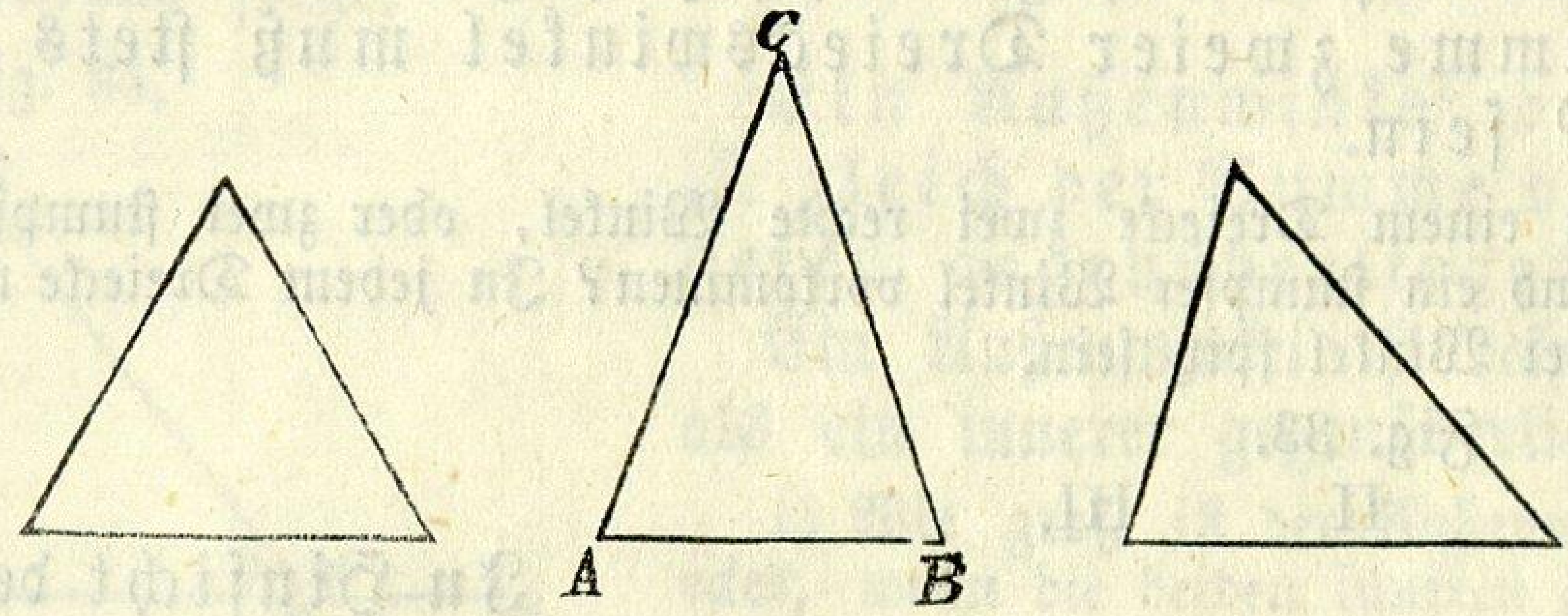
2. Seiten des Dreieckes.

§. 54. **In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammengenommen größer als die dritte.**

Dieser Satz ist von selbst klar; denn der Umweg über A C und C B (Fig. 28), um von A nach B zu kommen, ist gewiß länger als der gerade Weg über A B.

Fig. 30.

I II III.

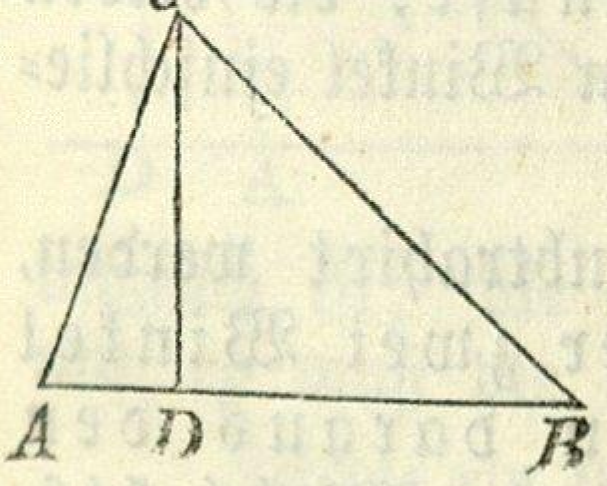


§. 55. Hinsichtlich der Seiten kann es dreierlei Dreiecke geben: **gleichseitige** (Fig. 30, I), in denen alle drei Seiten gleich sind; **gleichschenklige** (Fig. 30, II), in denen nur zwei Seiten gleich sind; und **ungleichseitige** (Fig. 30, III), in denen alle drei Seiten ungleich sind.

Zeichne a) ein gleichseitiges, b) ein gleichschenkliges, c) ein ungleichseitiges Dreieck.

§. 56. Ein Dreieck kann man sich über jeder Seite errichtet denken; diese Seite heißt dann die **Grundlinie**. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, wird die **Spitze** oder der **Scheitel**, und die Senkrechte, welche man von der Spitze zur Grundlinie zieht, die **Höhe** des Dreieckes genannt. Stellt man sich das Dreieck A B C (Fig. 31) über der Seite A B aufgerichtet vor, so ist A B die Grundlinie, C der Scheitel und C D die Höhe.

Fig. 31.



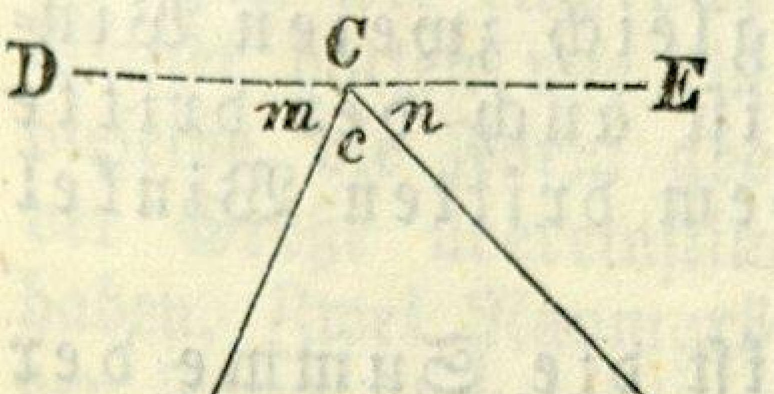
Im **gleichschenkligen** Dreiecke wird immer die dritte verschiedene Seite als **Grundlinie** angenommen; die zwei gleichen Seiten heißen **Schenkel** des Dreieckes.

Nenne in Fig. 30, II die Grundlinie, den Scheitel und die Schenkel.

3. Winkel des Dreieckes.

§. 57. Um die Summe der Winkel a, b, c eines beliebigen Dreieckes A B C (Fig. 32) durch Zeichnung zu finden, muß man sie alle neben einander um denselben Scheitel herum anbringen. Es sei C dieser gemeinschaftliche Scheitel. Der Winkel c liegt bereits an demselben; um neben c einen Winkel zu erhalten, welcher = a ist, darf man nur durch C eine Gerade DE parallel mit A B ziehen, der Winkel m ist dann

Fig. 32.



als Wechselwinkel gleich a; durch dieselbe Parallele wird neben c auch der Winkel n erzeugt, welcher als Wechselwinkel gleich b ist. Die Summe der drei Winkel a, b, c ist daher ebenso groß als die Summe der Winkel m, c, n. Die letztere Summe aber beträgt zwei Rechte oder 180°; eben so groß muß also auch die Summe von a, b und c sein.

In jedem Dreiecke beträgt daher die Summe der drei inneren Winkel zwei Rechte oder 180°.

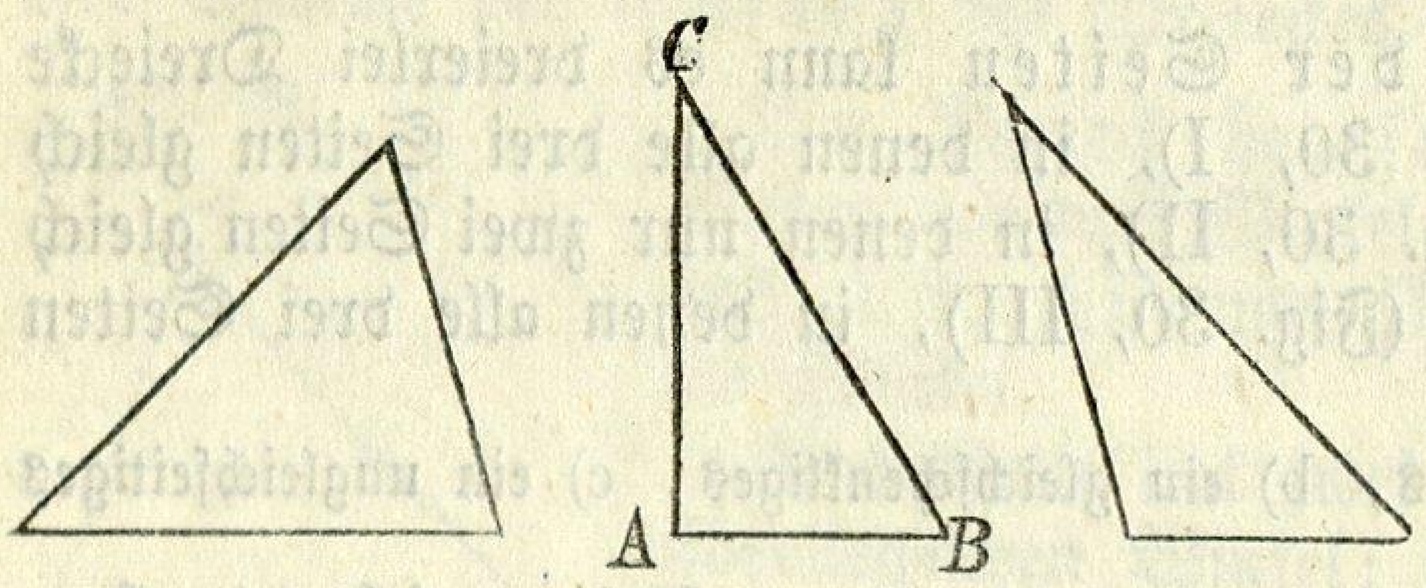
§. 58. Aus diesem wichtigen Lehrsatze folgt:

a) Die Summe zweier Dreieckswinkel muß stets kleiner als 180° sein.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? In jedem Dreiecke müssen daher wenigstens zwei Winkel spitz sein.

Fig. 33.

I II III.



In Hinsicht der Winkel unterscheidet man spitzwinklige Dreiecke (Fig. 33, I), in denen alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklige (Fig. 33, II), in denen ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen; und stumpfwinklige (Fig. 33, III), welche einen stumpfen und zwei spitze Winkel enthalten. In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite BC, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, die Hypotenuse; die beiden andern Seiten AB und AC, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten.

b) Wenn zwei Winkel eines Dreieckes von 180° subtrahirt werden, so bleibt der dritte Winkel übrig. Sind daher zwei Winkel eines Dreieckes bekannt, so kann man daraus den dritten Winkel bestimmen. Es sei z. B. ein Winkel 54°, der zweite 68°, so ist die Summe 122°, daher der dritte Winkel 180° — 122° = 58°.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind:

1) 37° und 71°;	4) 45° 32′ 18″ und 62° 50′ 57″;
2) 82° „ 48°;	5) 64° 47′ 33″ „ 77° 18′ 41″;
3) 50° 48′ „ 17° 39′;	6) 108° 5′ 29″ „ 38° 43′ 31″;

wie groß ist der dritte Winkel?

c) Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zweien Winkeln eines anderen Dreieckes, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreieckes gleich dem dritten Winkel des zweiten Dreieckes.

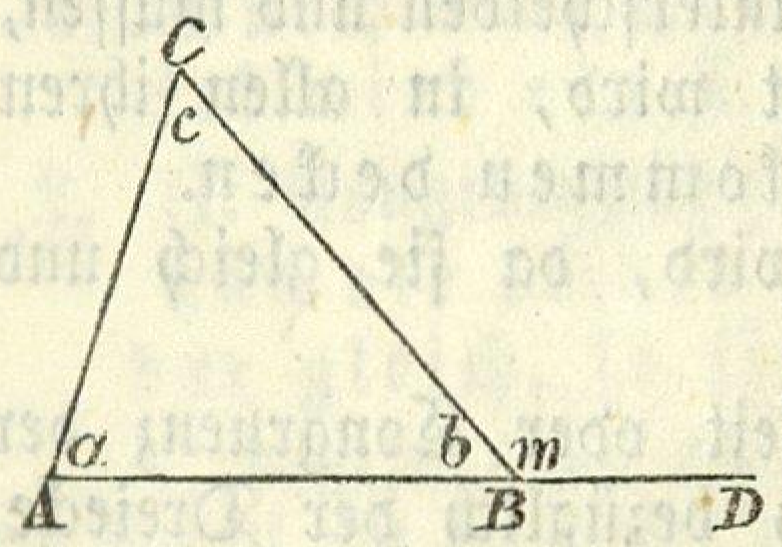
d) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der beiden spitzen Winkel gleich 90°. Ist daher einer dieser Winkel bekannt, so kann man daraus auch den anderen finden.

Der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes ist
a) 63^0, b) 37^0, c) $27^0\ 15'$, d) $58^0\ 12'\ 48''$;
wie groß ist der andere?

§. 59. Addirt man (Fig. 34) zu dem Winkel b den Außenwinkel m als Nebenwinkel, so erhält man 180^0; dieselbe Summe, nämlich 180^0, erhält man auch, wenn zu b die beiden Winkel a und c addirt werden. Es muß daher der Außenwinkel m eben so groß sein als die Winkel a und c zusammengenommen.

Daraus folgt:

Fig. 34.



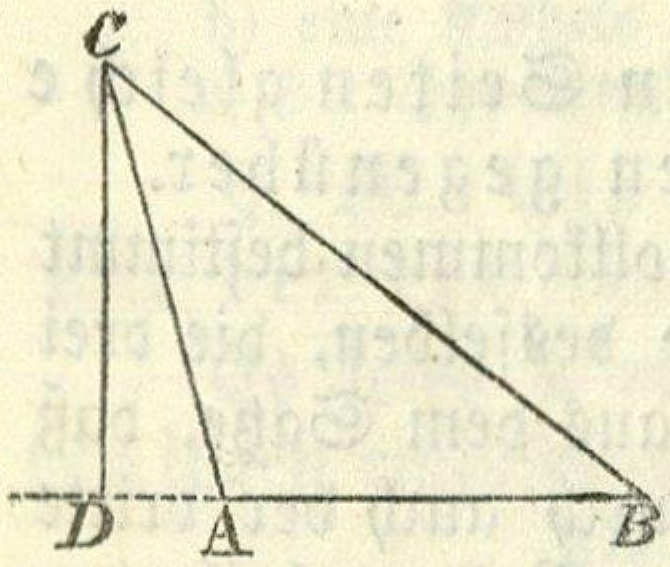
Ein Außenwinkel des Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel. Ein Außenwinkel ist daher stets größer als ein innerer gegenüberliegender Winkel.

1) Wie groß ist der Außenwinkel eines Dreieckes, wenn die beiden inneren gegenüberliegenden Winkel $38^0\ 35'\ 28''$ und $69^0\ 18'\ 46''$ betragen?

2) Der Außenwinkel eines Dreieckes ist 86^0, und einer der inneren gegenüberliegenden Winkel $57^0\ 48'$; wie groß ist jeder der beiden anderen Winkel des Dreieckes?

3) Wenn man an jeder Spitze des Dreieckes einen Außenwinkel entstehen läßt, wie groß ist dann die Summe dieser Außenwinkel?

Fig. 35.



§. 60. Wird in einem stumpfwinkligen Dreiecke BAC (Fig. 35) eine der Seiten, welche den stumpfen Winkel bilden, als Grundlinie angenommen, z. B. die AB, so kann die von der Spitze auf die Grundlinie gezogene Senkrechte nicht innerhalb des Dreieckes hineinfallen, weil man sonst ein Dreieck mit einem stumpfen und einem rechten Winkel erhielte, was nicht möglich ist; die Höhe CD wird also außerhalb des Dreieckes liegen, und es muß die Grundlinie AB über A hinaus verlängert werden.

Zeichne ein spitzwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein rechtwinkliges Dreieck und die darin möglichen Höhen, und gib dann alle Fälle in Bezug auf die Lage der Höhe an.

4. Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz.

§. 61. Eine krumme Linie kann dieselbe Länge haben wie eine gerade; eine krummlinig begrenzte Wiese kann eben so viel Raum einschließen wie eine viereckige; ein vierkantiges Gefäß kann eben so viel Wasser halten wie ein rundes. In allen diesen Fällen ist die Größe dieselbe, die Form aber verschieden. Zwei Raumgrößen können daher in der Größe übereinstimmen, ohne daß sie auch zugleich dieselbe Form haben. Zwei Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, sie mögen in der Form übereinstimmen oder nicht, heißen gleich.

Zwischen zwei gleiche Größen wird das Gleichheitszeichen = gesetzt.

§. 62. Zwei gerade Linien haben immer dieselbe Form, wenn sie auch verschiedene Länge haben; ebenso haben zwei Kreise, zwei Würfel dieselbe Gestalt, wenn sie sich auch in der Größe unterscheiden. Raumgrößen können daher in der Form übereinstimmen, wenn sie auch nicht gleich groß sind. Zwei Raumgrößen, welche dieselbe Form haben, sie mögen in der Größe übereinstimmen oder nicht, heißen ähnlich.

Zwischen zwei ähnliche Raumgrößen wird das Zeichen $\sim$ gesetzt.

§. 63. Stimmen zwei Raumgrößen, sowohl in der Größe als in der Form überein, sind sie also nicht nur gleich, sondern auch ähnlich, so werden sie congruent genannt. Zwei congruente Raumgrößen können sich nur durch ihre Lage von einander unterscheiden und müssen, wenn die eine an die Stelle der anderen gelegt wird, in allen ihren Ausdehnungen zusammenfallen, d. h. sich vollkommen decken.

Zwischen zwei congruente Raumgrößen wird, da sie gleich und ähnlich sind, das Zeichen $\cong$ gesetzt.

Was hier von der Gleichheit, Aehnlichkeit oder Congruenz der Raumgrößen überhaupt gesagt wurde, gilt auch bezüglich der Dreiecke.

5. Construction der Dreiecke und Congruenz derselben.

§. 64. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Größe und in der Form übereinstimmen, also über einander gelegt sich vollkommen decken.

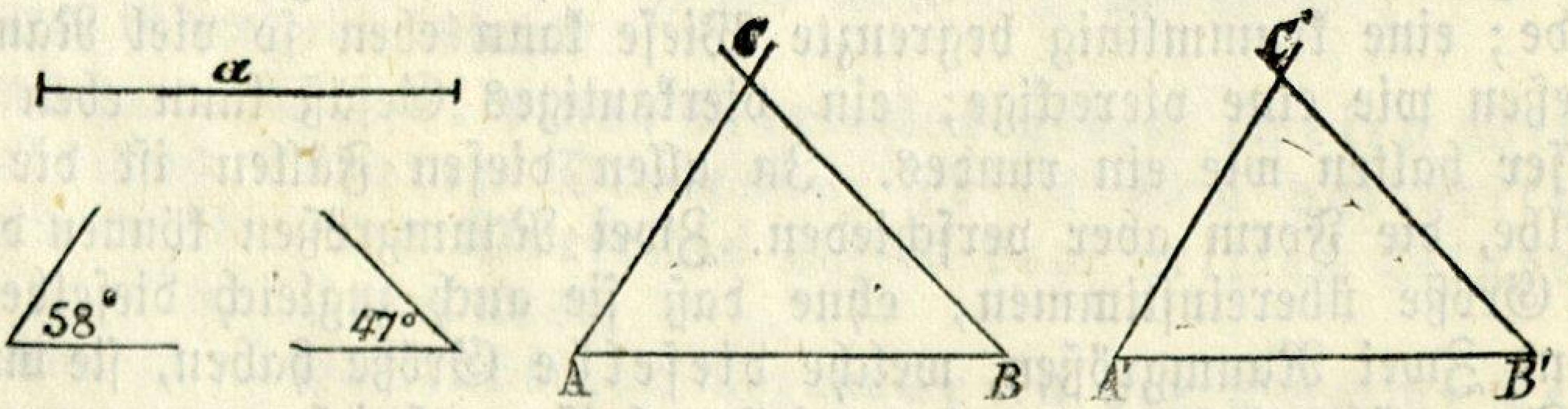
Daraus folgt:

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Damit ein Dreieck der Größe und Form nach vollkommen bestimmt sei, ist nicht erforderlich, daß alle sechs Bestandtheile desselben, die drei Seiten und die drei Winkel, gegeben wären. Schon aus dem Satze, daß wenn zwei Winkel eines Dreieckes bekannt sind, dadurch auch der dritte bestimmt ist, ersieht man, daß bei der Angabe der Bestandtheile der dritte Winkel wegbleiben könne, und daß somit die Angabe von fünf Bestandtheilen genüge. Allein es sind auch nicht einmal fünf Stücke zur Bestimmung des Dreieckes nothwendig; man kann, wie in dem Folgenden nachgewiesen werden wird, meistens schon mit drei gegebenen Stücken ein ganz bestimmtes Dreieck verzeichnen.

§. 65. Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gegeben sind.

Fig. 36.



Ist (Fig. 36) a die gegebene Seite, und betragen die ihr anliegenden Winkel 58° und 47°, so ziehe man AB = a, verzeichne in A einen Winkel von 58^0 und in B einen Winkel von 47^0; die Schenkel dieser Winkel durchschneiden sich in C, und man erhält aus den gegebenen drei Stücken das Dreieck ABC, welches eine ganz bestimmte Größe und Form hat.

Construirt man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck A'B'C', so muß dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Form haben, und wenn man eines dieser Dreiecke mit den gleichen Stücken über das andere legt, so müssen sich beide vollkommen decken.

Daraus folgt:

1. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel wird ein Dreieck vollkommen bestimmt.
2. (I. Congruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel einzeln einander gleich, so sind die Dreiecke congruent.

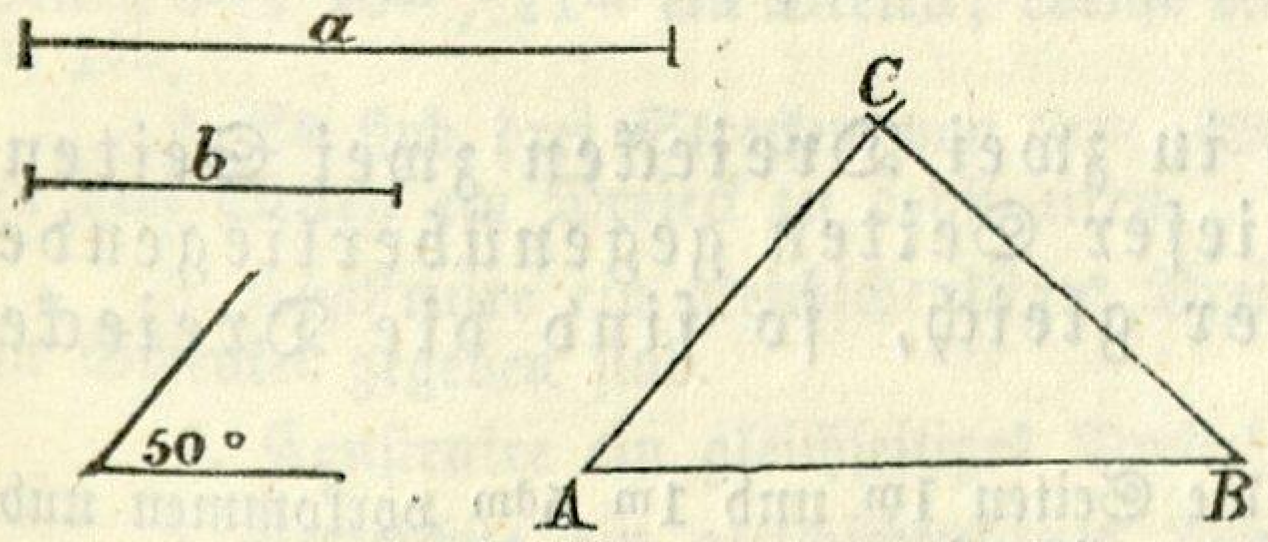
1. Verzeichne mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes und des Transporteurs ein Dreieck mit der Seite 1^m 9^{dm} und den anliegenden Winkeln 69^0 und 41^0.
2. Versuche mit der Seite 2^{dm} und den Winkeln 105^0 und 75^0 ein Dreieck zu verzeichnen. — Wie müssen die anliegenden Winkel beschaffen sein, damit die Construction des Dreieckes möglich sei?
3. Construire ein Dreieck, wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:

a) eine Kathete $= 1^m$ 5^{dm} und der anliegende spitze Winkel $= 57^0$;
b) eine Kathete $= 3^{dm}$ und der gegenüberliegende Winkel $= 63^0$;
c) die Hypotenuse $= 2^{dm}$ und ein anliegender Winkel $= 42^0$.

§. 66. Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Es seien a und b (Fig. 37) die gegebenen Seiten, und 50^0 der von ihnen eingeschlossene Winkel, so wird man, um mit diesen drei Stücken ein Dreieck zu beschreiben, zuerst einen Winkel $A = 50^0$ verzeichnen, dann auf dessen Schenkeln die gegebenen Seiten a und b bis B und C auftragen und endlich BC ziehen; ABC ist nun dasjenige Dreieck, welches die gegebenen drei Stücke enthält.

Fig. 37.



Verzeichnet man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck, so muß dieses mit ABC in der Größe und in der Form vollkommen übereinstimmen.

Daraus folgt:

1. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird ein Dreieck vollkommen bestimmt.
2. (II. Congruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln einander gleich, so sind die Dreiecke congruent.

1. Zeichne einen verjüngten Maßstab und construire dann ein Dreieck mit den Seiten 7^m und 11^m, welche einen Winkel von 62° einschließen.

2. Zwei Strecken betragen 1·7^m und 1·2^m; zeichne mit denselben ein Dreieck, in welchem der von ihnen eingeschlossene Winkel 1) 45°, 2) 82° beträgt.

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel 2^{dm} 8^{cm} und dessen Winkel an der Spitze 72° ist.

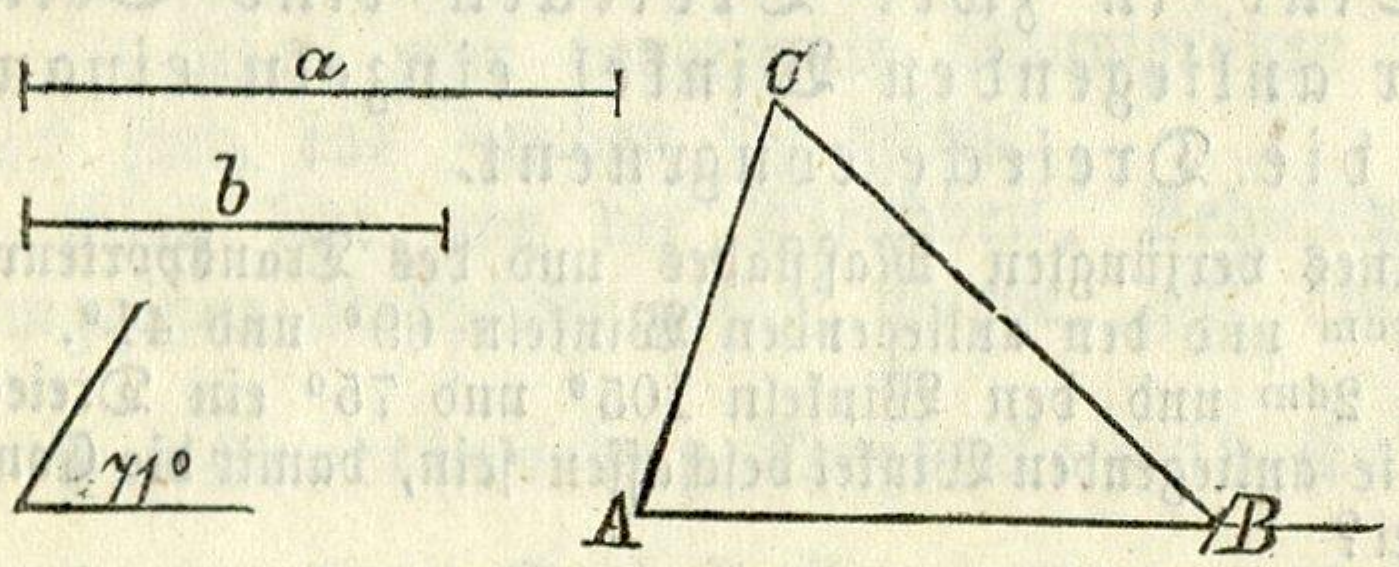
4. Construire ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem die beiden Katheten gegeben sind.

5. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2^{dm} 2^{cm} und 2^{dm} 6^{cm} sind.

6. Zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, wo eine Kathete 2^m beträgt.

§. 67. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Fig. 38.



Es seien (Fig. 38) a und b die beiden gegebenen Seiten und zwar sei a > b; der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel betrage 71°. Um mit diesen Stücken ein Dreieck zu construiren, verzeichne man an A einen Winkel von 71°, mache den einen Schenkel AC gleich der kleineren gegebenen Seite b, und beschreibe aus C mit der größeren Seite a als Halbmesser einen Bogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels A im Puncte B durchschneidet. Hierdurch erhält man aus den gegebenen drei Stücken das Dreieck ABC.

Construirt man mit denselben drei Stücken noch ein zweites Dreieck, so muß dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Form haben.

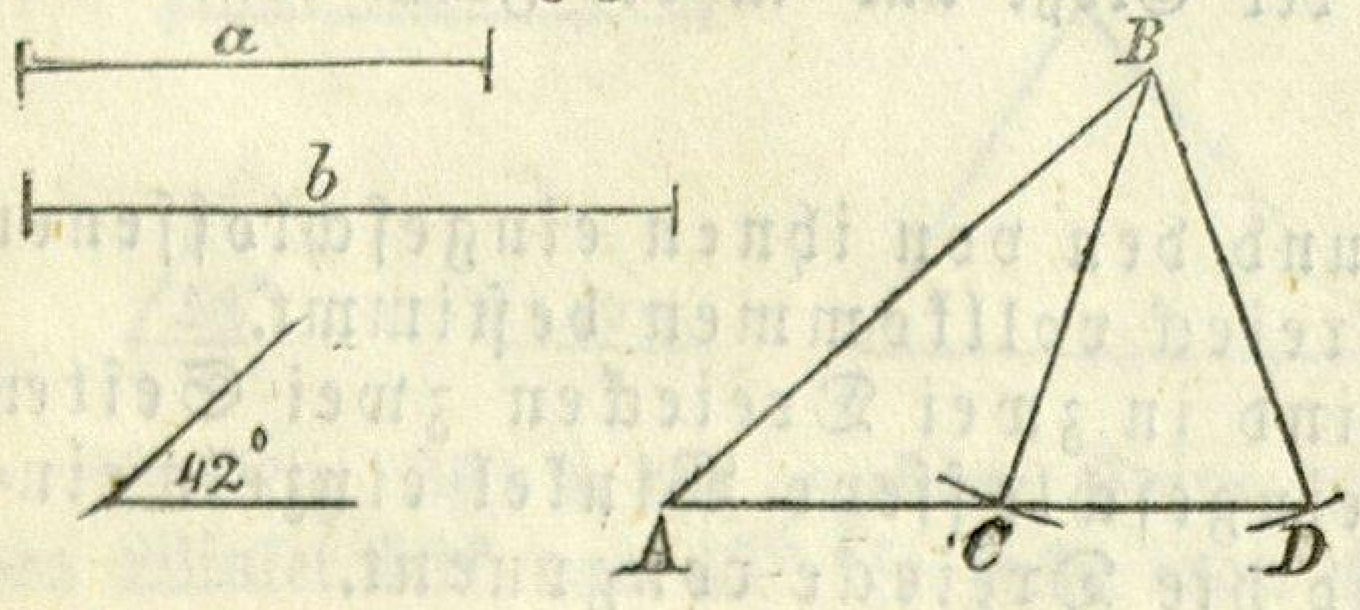
Daraus folgt:

1. **Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.**
2. (III. Congruenzsatz.) **Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel einzeln einander gleich, so sind die Dreiecke congruent.**

1. Zeichne ein Dreieck, worin die Seiten 1^m und 1^m 5^{dm} vorkommen und der zweiten Seite ein Winkel von 76° gegenüberliegt.

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 8^{dm} und eine Kathete 6^{dm} ist.

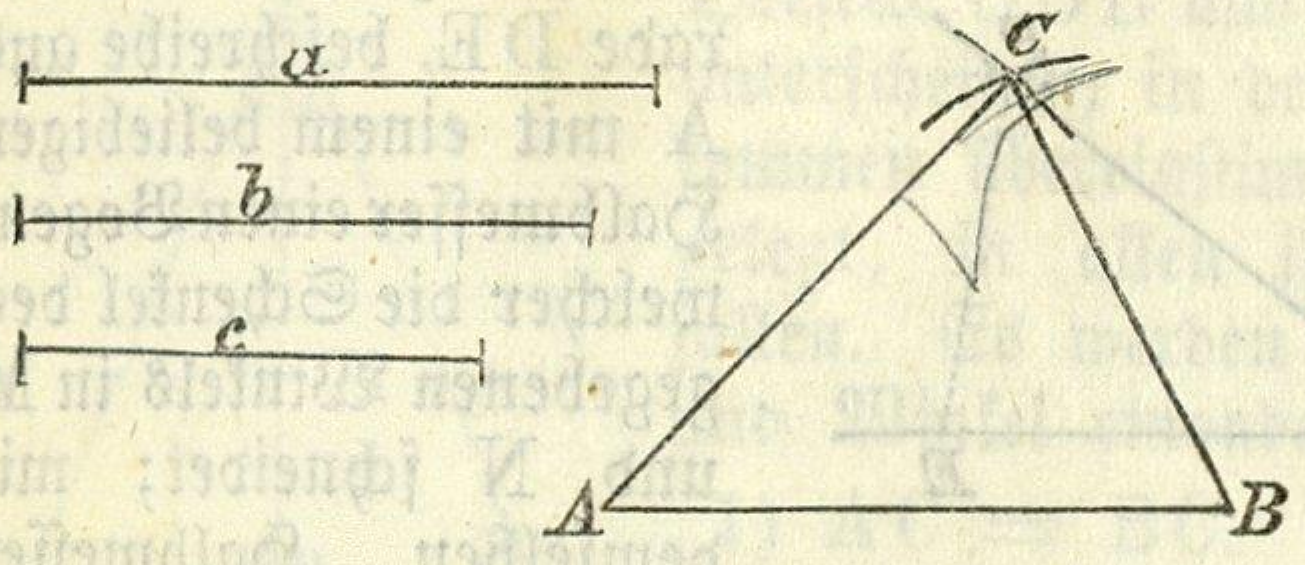
Fig. 39.



Durch zwei Seiten und den der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck nicht vollkommen bestimmt; es lassen sich, wie man aus Fig. 39 sieht, mit den beiden Seiten a und b, wo $a < b$ ist, und mit dem der kleineren Seite a gegenüberliegenden Winkel von 42° zwei Dreiecke ABC und ABD construiren, deren Verschiedenheit in die Augen fallend ist, und die doch beide die gegebenen drei Stücke in sich enthalten.

§. 68. Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Fig. 40.



Es seien (Fig. 40) a, b, c die Längen der drei Seiten. Um mit diesen drei Seiten ein Dreieck zu construiren, zieht man $AB = a$, beschreibt aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesser c Kreisbogen, welche sich in C schneiden. Zieht man nun AC und BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Verzeichnet man mit denselben drei Stücken a, b und c noch ein zweites Dreieck, so unterscheidet sich dieses von dem früheren ABC nur durch die Lage; die Größe und die Form ist bei beiden dieselbe, so daß, wenn man sie mit den gleichen Seiten über einander legen würde, sie vollkommen zusammenfallen müssen.

Daraus folgt:

1. Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.
2. (IV. Congruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten einzeln einander gleich, so sind die Dreiecke congruent.

1. Zeichne zuerst einen verjüngten Maßstab, und construire dann mit den Seiten 8^m, 10^m, 11^m ein Dreieck; ebenso ein zweites mit den Seiten 2^m, $1^m\ 6^{dm}$, $1^m\ 1^{dm}$.

2. Es sind drei Strecken von 8^{cm}, 12^{cm} und 4^{cm} gegeben; versuche mit diesen drei Seiten ein Dreieck zu construiren.

3. Construire ein gleichschenkliges Dreieck, von welchem die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind.

4. Construire ein gleichseitiges Dreieck, von welchem eine Seite gegeben ist.

5. Verzeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis $2^m\ 4^{dm}$ und dessen Schenkel $1^m\ 9^{dm}$ ist.

6. Construire ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $1^m\ 8^{dm}$ beträgt.

§. 69. Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

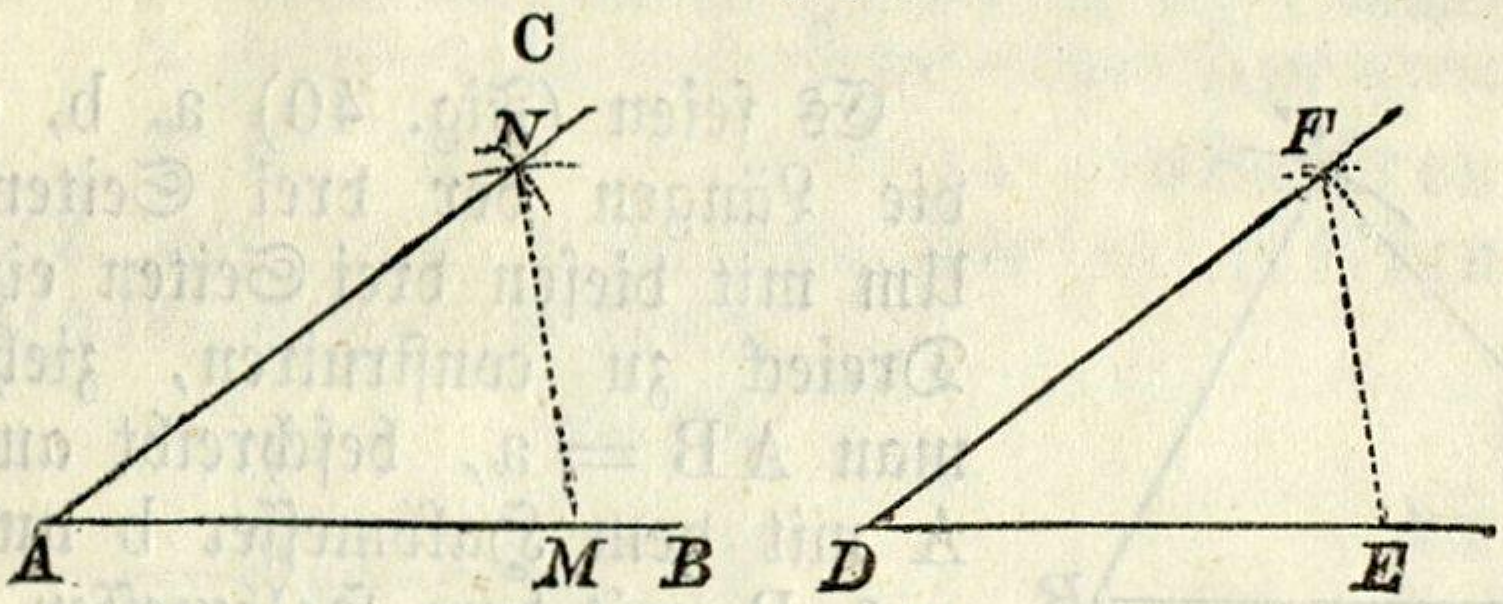
Um diese Construction auszuführen, darf man nur drei Stücke des gegebenen Dreieckes nehmen, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, und mit demselben das neue Dreieck verzeichnen. Am einfachsten ist die Construction mittelst der drei Seiten. Man trägt also auf einer Geraden zuerst eine Seite des gegebenen Dreieckes auf, und beschreibt aus ihren

Endpuncten mit den beiden anderen Seiten Kreisbögen, welche sich schneiden; der Durchschnitt ist der dritte Winkelpunct des gesuchten Dreieckes.

Zeichne verschiedene Dreiecke und construire zu jedem ein congruentes Dreieck.

§. 70. **Einen Winkel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel BAC (Fig. 41) gleich ist.**

Fig. 41.

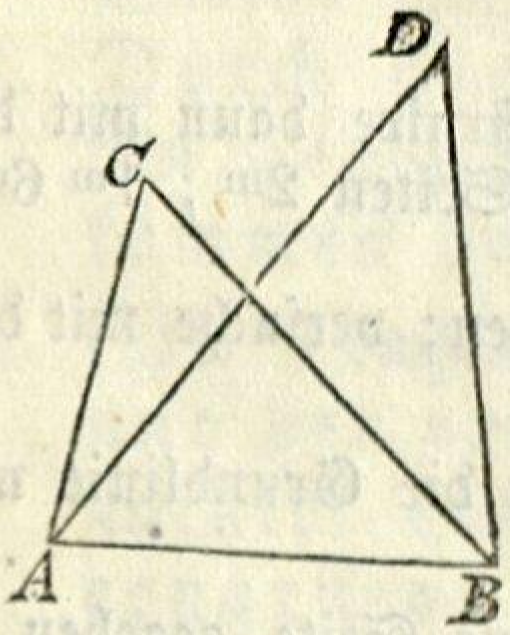


Man ziehe eine Gerade DE, beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus D einen Bogen, welcher die Gerade DE in E durchschneidet; endlich fasse man mit dem Cirkel den Abstand MN und durchschneide aus E den von D aus beschriebenen Bogen in F; zieht man nun DF, so ist $\measuredangle$ EDF = $\measuredangle$ BAC.

Denn $\triangle$ DEF $\cong$ $\triangle$ AMN (nach dem IV. Congruenzsatze); daher müssen die Winkel EDF und MAN, welche den gleichen Seiten EF und MN gegenüber liegen, gleich sein.

§. 71. Wenn man die Schenkel eines Winkels ABC (Fig. 42), ohne deren Länge zu ändern, von einander wegdreht, so wird dadurch nicht nur der Winkel größer, sondern es werden auch die Endpuncte der beiden Schenkel weiter von einander entfernt sein.

Fig. 42.



Zieht man daher AC und AD, so haben die dadurch entstandenen Dreiecke ABC und ABD zwei Seiten wechselseitig gleich, nämlich AB = AB und BC = BD; dagegen ist die dritte Seite AD im $\triangle$ ABD größer als die dritte Seite AC im $\triangle$ ABC. Zugleich ist der der Seite AD gegenüberliegende Winkel ABD im $\triangle$ ABD größer als der der Seite AC gegenüberliegende Winkel ABC im $\triangle$ ABC.

Daraus folgt:

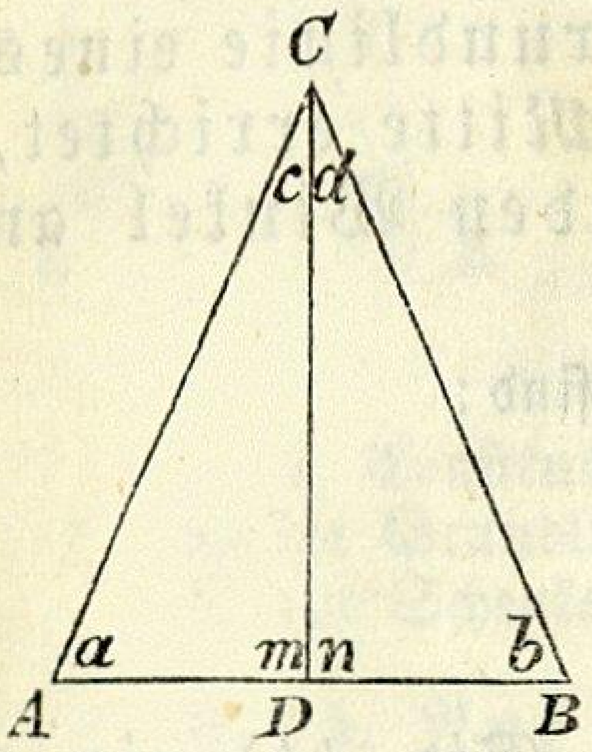
1. **Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten einzeln einander gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren dieser Winkel auch eine größere Seite gegenüber.**

2. **Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten einzeln einander gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren dieser Seiten auch ein größerer Winkel gegenüber.**

6. Einige Haupteigenschaften der Dreiecke nebst Anwendungen.

§. 72. Es sei (Fig. 43) CD ⊥ AB. Dreht man um den Punct C von CD aus eine Gerade, bis sie in die Lage CB kommt, und bringt eine zweite Gerade durch eine gleich große Drehung nach der andern Seite in die Lage CA, so werden die dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke CDB und CDA sich nur durch ihre Lage unterscheiden, in der Form und Größe aber vollkommen übereinstimmen, so daß sie, über einander gelegt, in allen ihren Bestandtheilen zusammenfallen. Es werden daher die nachstehenden Linien und Winkel einander gleich sein:

Fig. 43.



1) AC = BC. Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig; AB ist darin die Grundlinie und C der Scheitel.

2) AD = BD. Die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreieckes ABC wird daher durch die Gerade CD halbirt.

3) a = b. Diese gleiche Winkel liegen an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes ABC.

4) c = d. Die Gerade CD halbirt also den Winkel ACB am Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes.

5) m = n. Es ist also CD ⊥ AB, was ohnehin schon in der Voraussetzung angenommen wurde.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich folgende Sätze:

a) In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; oder: Sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich.

Im gleichseitigen Dreiecke müssen alle Winkel gleich sein, und es beträgt also jeder 60°.

1. Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel ein rechter ist?

2. Der Winkel am Scheitel sei 63° 35′, wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie?

3. Wie groß ist der Winkel am Scheitel, wenn ein Winkel an der Grundlinie 55° 12′ 38″ beträgt?

b) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so müssen auch die gegenüberstehenden Seiten gleich sein.

c) Die Senkrechte, welche aus dem Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gefällt wird, halbirt die Grundlinie wie auch den Winkel am Scheitel.

Sowohl im gleichschenkligen als im gleichseitigen Dreiecke wird die Grundlinie von der Höhe halbirt.

d) Die gerade Linie, welche den Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Mitte der Grundlinie verbindet, steht auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel am Scheitel.

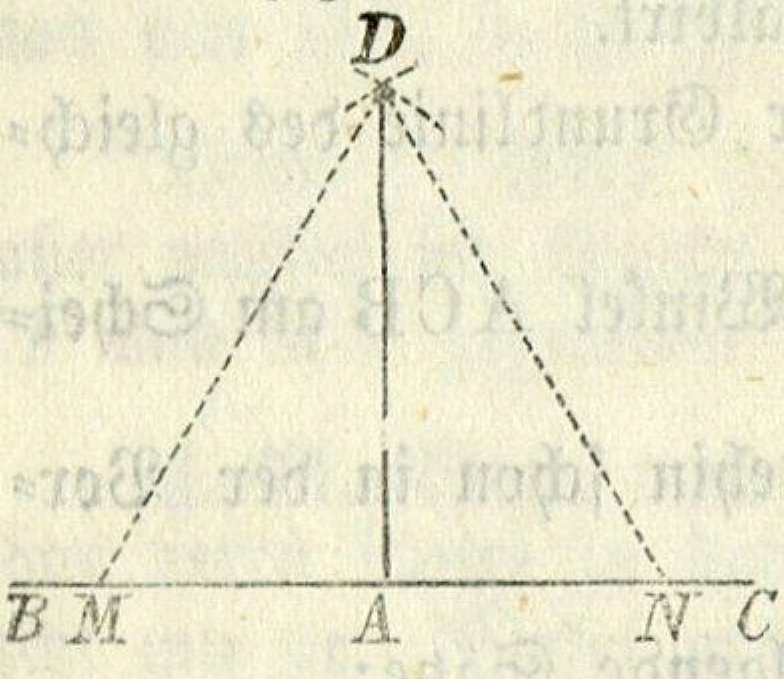
e) Die gerade Linie, welche den Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes halbirt, steht auf der Grundlinie senkrecht und halbirt dieselbe.

f) Die Senkrechte, welche man auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes aus ihrer Mitte errichtet, geht durch den Scheitel und halbirt den Winkel an demselben.

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
a) die Grundlinie und ein anliegender Winkel;
b) die Grundlinie und der gegenüberliegende Winkel;
c) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie;
d) ein Schenkel und der Winkel am Scheitel.

§. 73. In einem gegebenen Puncte A (Fig. 44) einer Geraden BC auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Fig. 44.

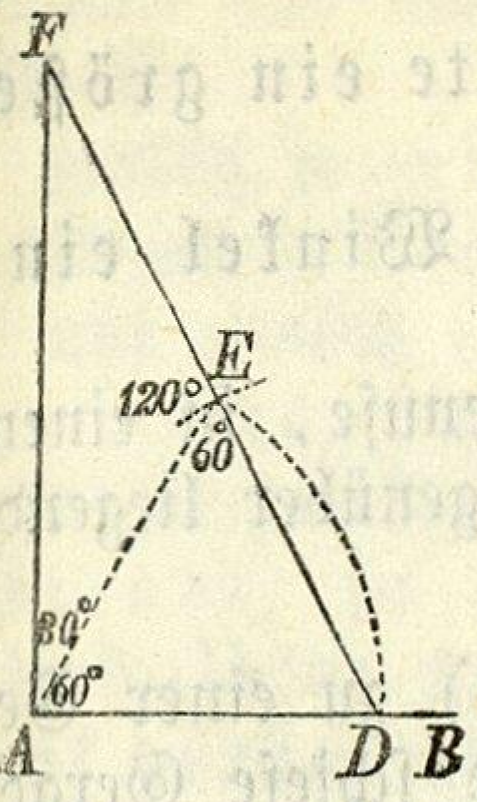


a) Da die Gerade, welche die Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes mit dem Scheitel verbindet, auf der Grundlinie senkrecht steht, so braucht man, um die vorliegende Aufgabe aufzulösen, nur ein gleichschenkliges Dreieck MND zu bilden, dessen Grundlinie in die gegebene Gerade BC so hineinfällt, daß der gegebene Punct A als Mittelpunct der Grundlinie erscheint, und dann die Spitze D mit dem Puncte A durch eine Gerade zu verbinden.

Um daher in einem Puncte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, schneide man, von jenem Puncte aus, an der Geraden zu beiden Seiten gleiche Stücke ab, beschreibe aus den Durchschnittspuncten mit einem gleichen Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Puncte durchschneiden, und verbinde diesen Durchschnittspunct mit dem gegebenen Puncte durch eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

b) Ist der gegebene Punct A der Endpunct der gegebenen Geraden AB, wie in Fig. 45, so darf man nur die Gerade über diesen Endpunct hinaus verlängern, wo sodann die Auflösung wie vorhin geschieht. Läßt sich aber die Linie nicht über den Endpunct hinaus verlängern, so kann man die verlangte Senkrechte auf folgende Art erhalten: Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die AB in D schneidet; mit demselben Halbmesser durchschneide man aus D den früheren Kreisbogen in E, und beschreibe aus E einen neuen Bogen, welcher von der durch D und E gezogenen Geraden in F geschnitten wird. Zieht man nun die AF, so steht diese auf AB senkrecht.

Fig. 45.



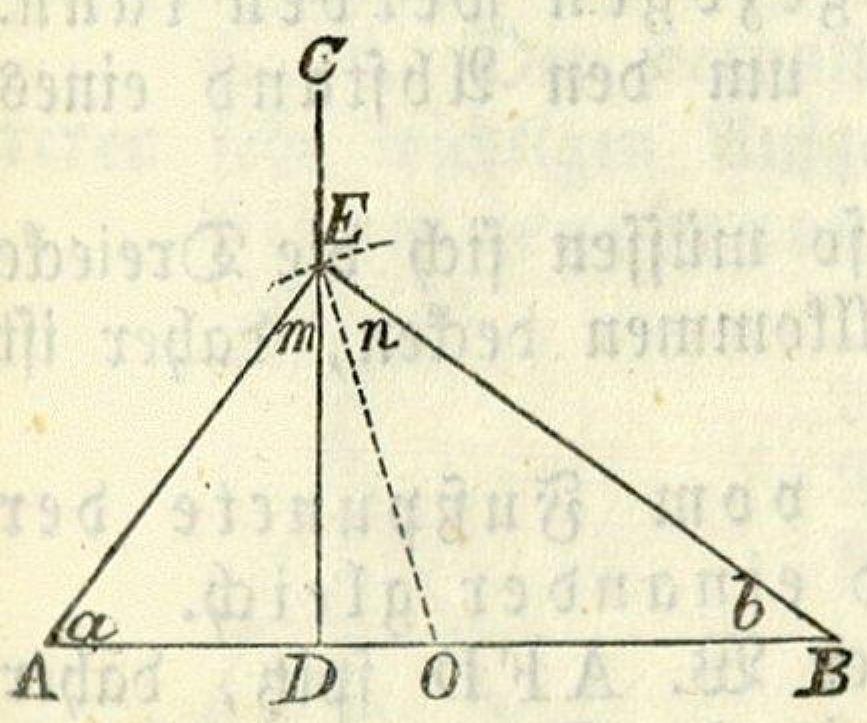
Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Vermöge der Construction ist das Dreieck ADE gleichseitig, daher darin jeder Winkel gleich 60°. Das Dreieck AEF ist gleichschenklig, folglich sind die Winkel F und EAF an der Grundlinie einander gleich; da nun $\measuredangle$ AEF $= 120°$ ist, so betragen beide Winkel an der Grundlinie 60°, daher kommen auf den Winkel EAF 30°. Mithin $\measuredangle$ DAF $=$ $\measuredangle$ EAD $+$ $\measuredangle$ EAF $= 60° + 30° = 90°$, und daher AF $\perp$ AB.

1. Construire ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe 1 Decimeter ist.

2. Construire ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind
a) die Grundlinie und die Höhe;
b) ein Schenkel und die Höhe.

§. 74. **Auf einer gegebenen Geraden ist eine Senkrechte von unbestimmter Länge errichtet; man soll über jener Geraden als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck construiren, dessen Katheten in einem Puncte der Senkrechten zusammenstoßen.**

Fig. 46.



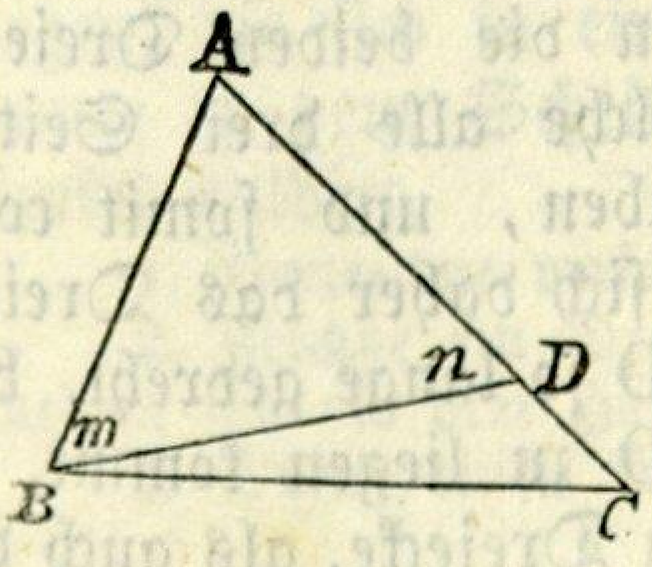
Es sei (Fig. 46) CD $\perp$ AB. Man halbire AB in O, und beschreibe aus O mit dem Halbmesser AO einen Kreisbogen, welcher die CD in E durchschneidet; der Winkel AEB ist nun ein rechter und daher AEB das verlangte rechtwinklige Dreieck.

Daß AEB ein rechter Winkel ist, kann auf folgende Art nachgewiesen werden: Im gleichschenkligen Dreiecke AOE ist der Winkel $m = a$, im gleichschenkligen Dreiecke BOE ist ebenso $n = b$, daher auch die Summe $m + n$ gleich der Summe $a + b$; die Winkel m, n, b und a bilden nun die Winkel eines Dreieckes, also ist ihre Summe gleich zwei Rechten, somit $m + n$ oder der Winkel AEB, als die Hälfte jener Summe, gleich einem Rechten.

Construire ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gegeben ist.

§. 75. Ist (Fig. 47) AB = AD, also das Dreieck ABD gleichschenklig, so sind die Winkel m und n an der Grundlinie einander gleich.

Fig. 47.



Verlängert man nun die AD bis zu dem beliebigen Puncte C und zieht BC, so ist offenbar der Winkel ABC größer als m, der Winkel ACB dagegen um so viel kleiner als n, indem der dritte Dreieckswinkel A ungeändert geblieben ist.

In dem Dreiecke ABC ist demnach die Seite AC > AB, und zugleich der Winkel ABC > ACB.

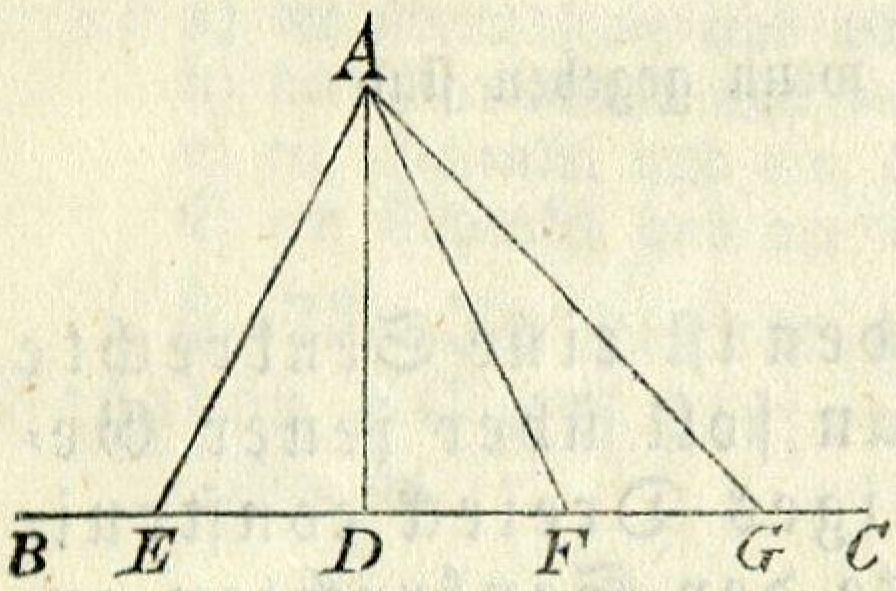
Daraus folgt:

1. In jedem Dreiecke steht der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber; und umgekehrt:
2. In jedem Dreiecke liegt dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse, in einem stumpfwinkligen Dreiecke die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite die größte Seite.

§. 76. Zieht man von einem Puncte A (Fig. 48) zu einer Geraden BC die Senkrechte AD und zugleich verschiedene schiefe Gerade AE, AF, AG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADF, ADG, in denen AD als Kathete und AE, AF, AG als Hypotenusen erscheinen. Da nun die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes größer ist, als eine Kathete, so ist jede der schiefen Geraden AE, AF, AG größer als die Senkrechte AD.

Fig. 48.



Daraus folgt:

1. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade, die von einem Puncte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Die Senkrechte dient daher auch dazu, um den Abstand eines Punctes von einer Geraden zu messen.

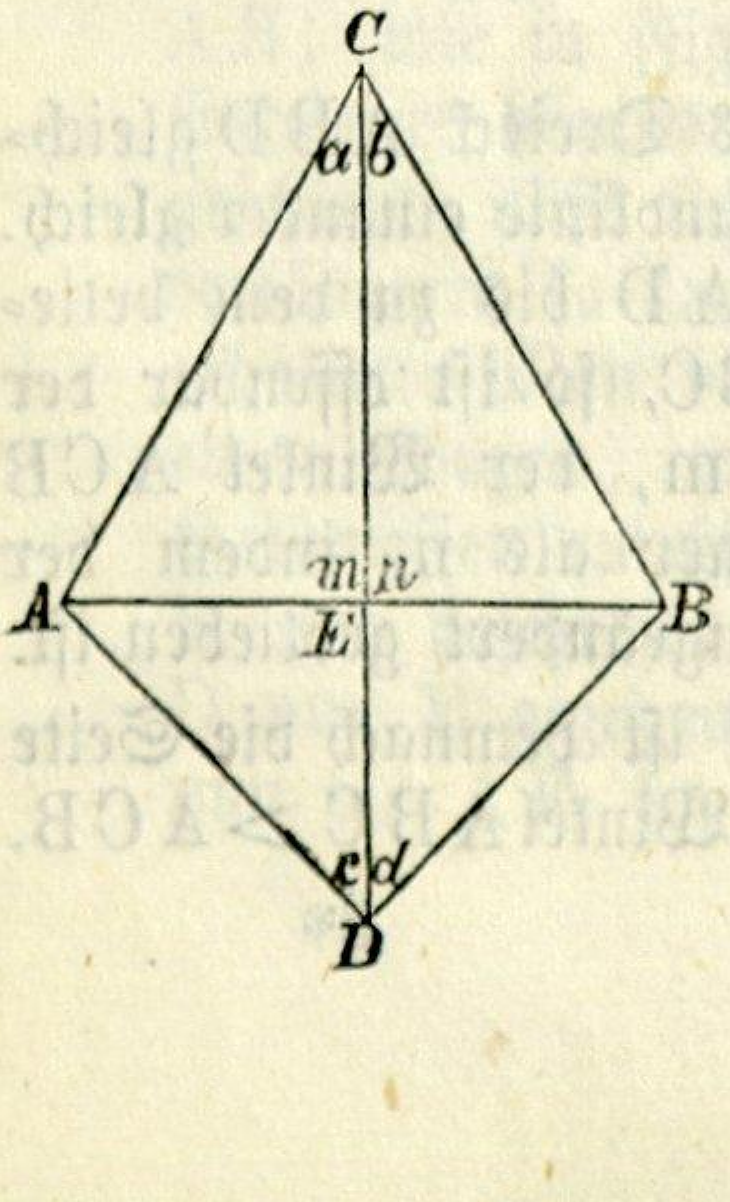
Ist in der obigen Figur DE = DF, so müssen sich die Dreiecke ADE und ADF, über einander gelegt, vollkommen decken, daher ist auch AE = AF, d. h.:

2. Zwei schiefe Gerade, welche vom Fußpuncte der Senkrechten gleich weit abstehen, sind einander gleich.

Im rechtwinkligen Dreiecke ADF ist der W. AFD spitz, daher ist sein Nebenwinkel AFG stumpf, und somit im Dreiecke AFG die Seite AG > AF; d. h.:

3. Von zwei schiefen Geraden ist diejenige die größere, welche von dem Fußpuncte der Senkrechten weiter entfernt ist.

Fig. 49.



§. 77. Es seien über der Grundlinie AB (Fig. 49) zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD errichtet, so daß AC = BC und AD = BD ist.

Zieht man durch die Scheitel C und D die Gerade CD, so entstehen die beiden Dreiecke ACD und BCD, welche alle drei Seiten einzeln einander gleich haben, und somit congruent sind. Denkt man sich daher das Dreieck ACD um die Gerade CD so lange gedreht, bis es auf das Dreieck BCD zu liegen kommt, so werden sowohl diese beiden Dreiecke, als auch die

Linien AE und BE vollkommen zusammenfallen, und es müssen die Winkel und Linien, welche sich dabei decken, einander gleich sein. Es ist also

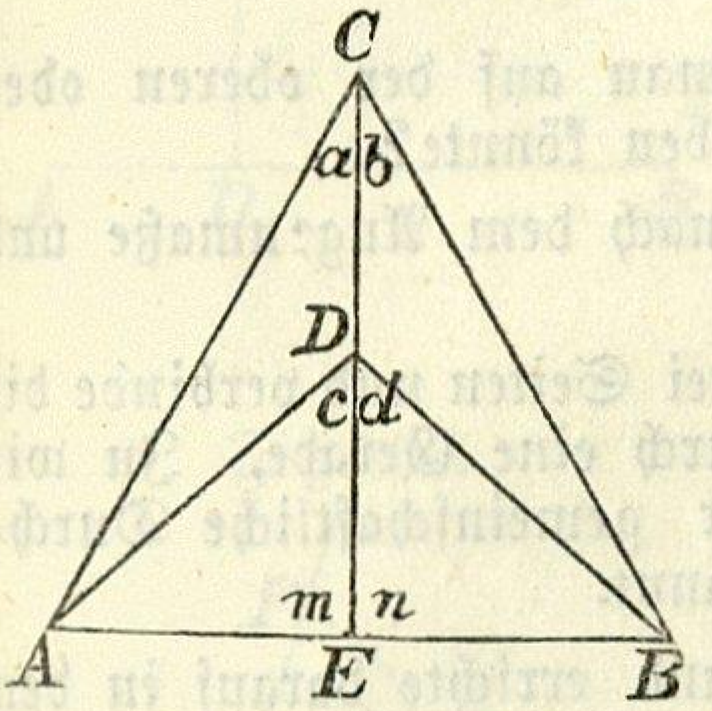
erstlich $a = b$ und $c = d$,

ferner $AE = BE$,

und endlich $m = n$, oder $CB \perp AB$.

Verzeichnet man daher über einer geraden Linie zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbirt diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbirt 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf dieser Grundlinie senkrecht.

Fig. 50.

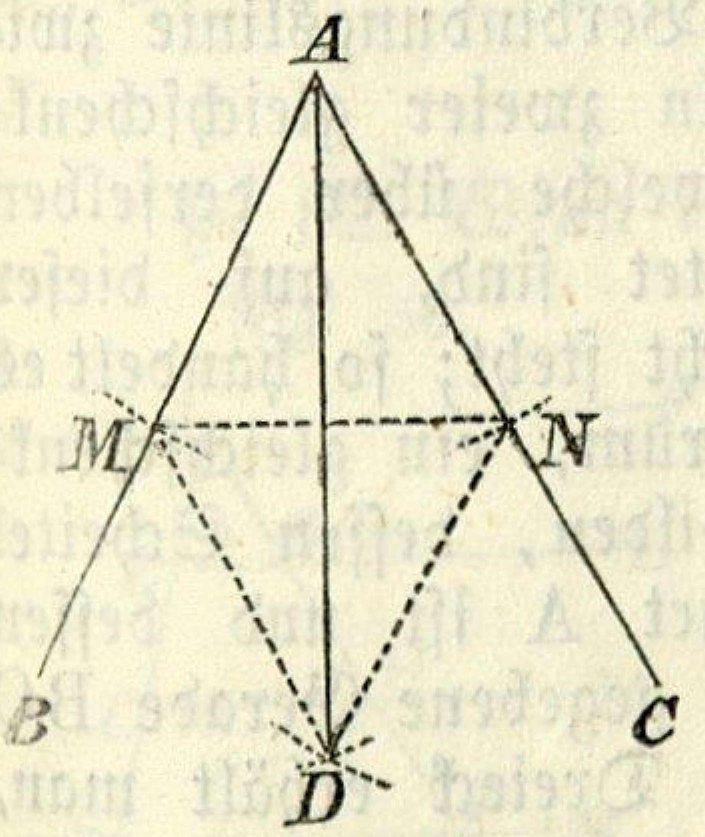


In der vorhergehenden Figur erscheinen die beiden gleichschenkligen Dreiecke auf den entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Grundlinie. Dieselben Folgerungen können auch gemacht werden, wenn die zwei gleichschenkligen Dreiecke auf derselben Seite der Grundlinie liegen, wie in Fig. 50. Der eben abgeleitete Satz ist also richtig, mögen die beiden gleichschenkligen Dreiecke auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Grundlinie verzeichnet werden.

§. 78. Der voranstehende Lehrsatz liefert die Auflösung zu mehreren sehr wichtigen Aufgaben.

Einen gegebenen Winkel BAC (Fig. 51) zu halbiren.

Fig. 51.



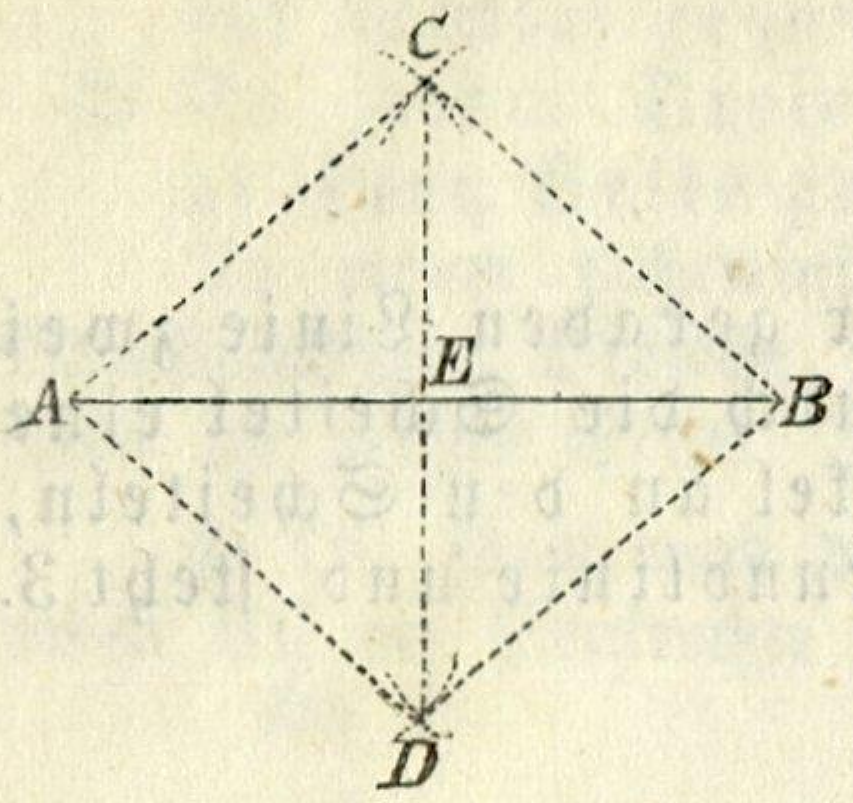
Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe handelt es sich zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, worin der gegebene Winkel BAC als Winkel am Scheitel vorkommt; dieses geschieht, indem man von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abschneidet und die Endpuncte M und N verbindet; dann braucht man nur noch über dieser Grundlinie MN ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND zu beschreiben und durch die Scheitel die Gerade AD zu ziehen. Man hat daher folgende Auflösung:

Um einen Winkel zu halbiren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel durchschneidet; aus den Durchschnittspuncten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Puncte schneiden; zieht man von diesem letzten Puncte zu dem Scheitel des Winkels eine Gerade, so wird dadurch der Winkel halbirt.

1. Verzeichne verschiedene Winkel und halbire dieselben.
2. Zeichne ein Dreieck und halbire alle drei Winkel. In wie viel Puncten schneiden sich die drei Halbirungslinien?
3. Theile einen Winkel in 4, in 8 gleiche Theile.

§. 79. Eine Strecke AB (Fig. 52) zu halbiren.

Fig. 52.



Hier kommt es nur darauf an, über AB zwei gleichschenklige Dreiecke zu beschreiben und die Scheitel derselben durch eine Gerade CD zu verbinden. Die Auflösung ist also:

Um eine Strecke zu halbiren, beschreibe man aus ihren Endpuncten nach oben und unten Bogen, welche sich in zwei Puncten durchschneiden; die Gerade, welche durch diese zwei Durchschnittspuncte gezogen wird, halbirt die gegebene Strecke.

1. Wie würde man eine Strecke halbiren, wenn man auf der oberen oder auf der unteren Seite derselben keinen Kreisbogen beschreiben könnte?

2. Ziehe mehrere Strecken und theile jede, zuerst nach dem Augenmaße und dann geometrisch in zwei gleiche Theile.

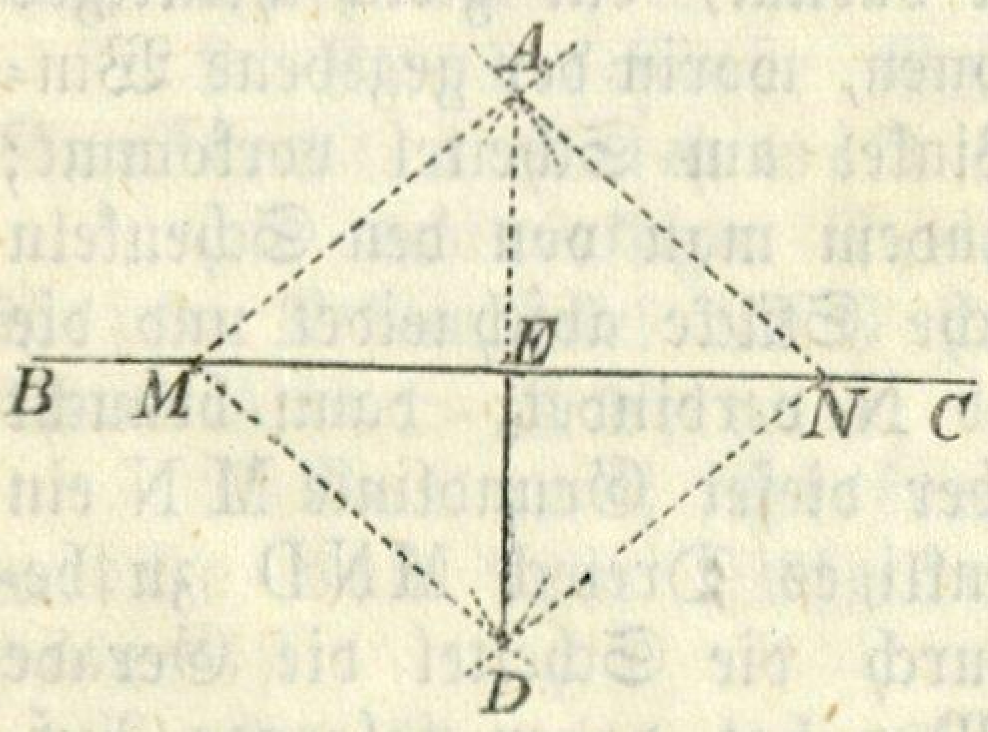
3. Verzeichne ein beliebiges Dreieck, halbire alle drei Seiten und verbinde die Mitte jeder Seite mit dem gegenüberstehenden Scheitel durch eine Gerade. In wie viel Puncten schneiden sich diese Verbindungslinien? Der gemeinschaftliche Durchschnittspunct wird der Schwerpunct des Dreieckes genannt.

4. Zeichne ein Dreieck, halbire darin jede Seite und errichte darauf in den Halbirungspuncten Senkrechte. In wie viel Puncten schneiden sich die drei Senkrechten?

5. Theile eine Strecke in 4, in 8 gleiche Theile.

§. 80. Auf eine Gerade BC (Fig. 53) von einem außer ihr liegenden Puncte A eine Senkrechte zu fällen.

Fig. 53.



Da die gerade Verbindungslinie zwischen den Scheiteln zweier gleichschenkliger Dreiecke, welche über derselben Grundlinie errichtet sind, auf dieser Grundlinie senkrecht steht; so handelt es sich hier zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, dessen Scheitel der gegebene Punct A ist und dessen Grundlinie in die gegebene Gerade BC fällt; ein solches Dreieck erhält man, wenn man aus A mit einem hinlänglich großen Halbmesser Bogen beschreibt, welche die gegebene Gerade in zwei Puncten M und N durchschneiden, wodurch die Grundlinie MN bestimmt ist. Beschreibt man nun über dieser Grundlinie noch ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND und zieht AD, so muß AD und somit auch AE auf BC senkrecht sein.

Um daher aus einem Puncte auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen, beschreibe man aus jenem Puncte mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche die Gerade in zwei Puncten schneiden; aus diesen beschreibe man gleichfalls mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Puncte durchschneiden. Die Gerade, welche durch diesen letzten

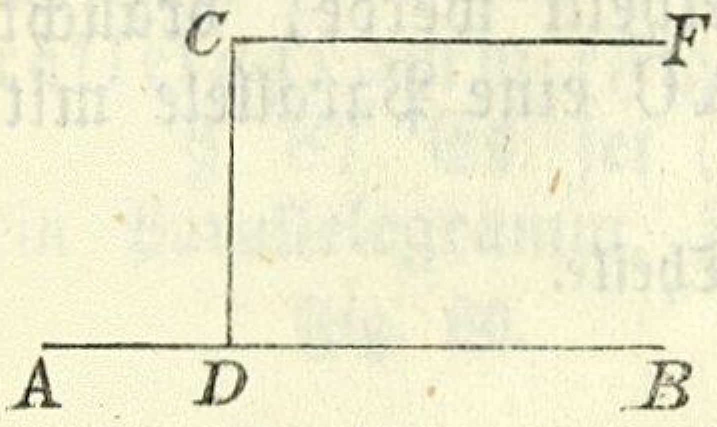
Durchschnittspunct und durch den gegebenen Punct geht, ist die gesuchte Senkrechte.

1. Nimm über einer Geraden mehrere Puncte an und ziehe von jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte.

2. Verzeichne ein beliebiges Dreieck und fälle von jedem Scheitelpuncte auf die gegenüberstehende Seite eine Senkrechte. In wie viel Puncten schneiden sich die drei Senkrechten?

§. 81. **Durch einen Punct C (Fig. 54) außerhalb einer Geraden AB mit dieser eine Parallele zu ziehen.**

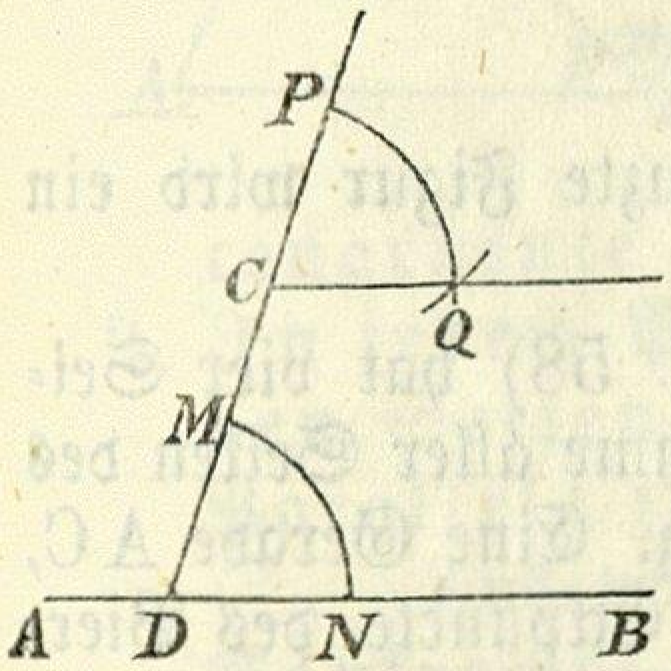
Fig. 54.



Man fälle von C die Senkrechte CD auf AB und errichte in C auf CD die Senkrechte CF; so sind CF und AB beide auf CD senkrecht, daher mit einander parallel.

Man kann auch so verfahren:

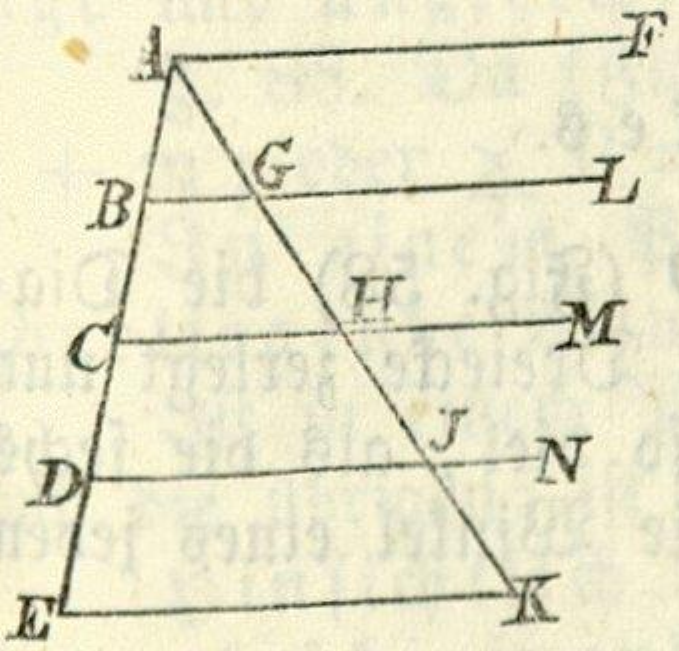
Fig. 55.



Man ziehe durch C (Fig. 55) eine Gerade, welche die gegebene Gerade AB in D durchschneidet; und es handelt sich nur darum, zu dem Winkel BDC im Puncte C einen gleichen Gegenwinkel zu construiren. Zu diesem Ende beschreibe man aus D einen Kreisbogen MN und mit derselben Cirkelöffnung auch aus C einen Bogen PQ; fasse mit dem Cirkel den Abstand zwischen M und N, und schneide damit von P aus den Bogen PQ ab. Zieht man durch C und Q eine Gerade, so ist $\measuredangle PCQ = \measuredangle CDB$, daher $CQ \parallel AB$.

§. 82. Wenn eine Gerade AF (Fig. 56) von willkürlicher Länge auf einem Schenkel AE des Winkels EAK parallel fortschreitet, so daß auf jenem Schenkel gleiche Abschnitte AB, BC, CD, DE gebildet werden, und die fortschreitende Gerade nach und nach in die Lagen BGL, CHM, DJN, EK kommt, so werden dadurch auch auf dem zweiten Schenkel AK unter einander gleiche Abschnitte AG, GH, HJ, JK gebildet.

Fig. 56.

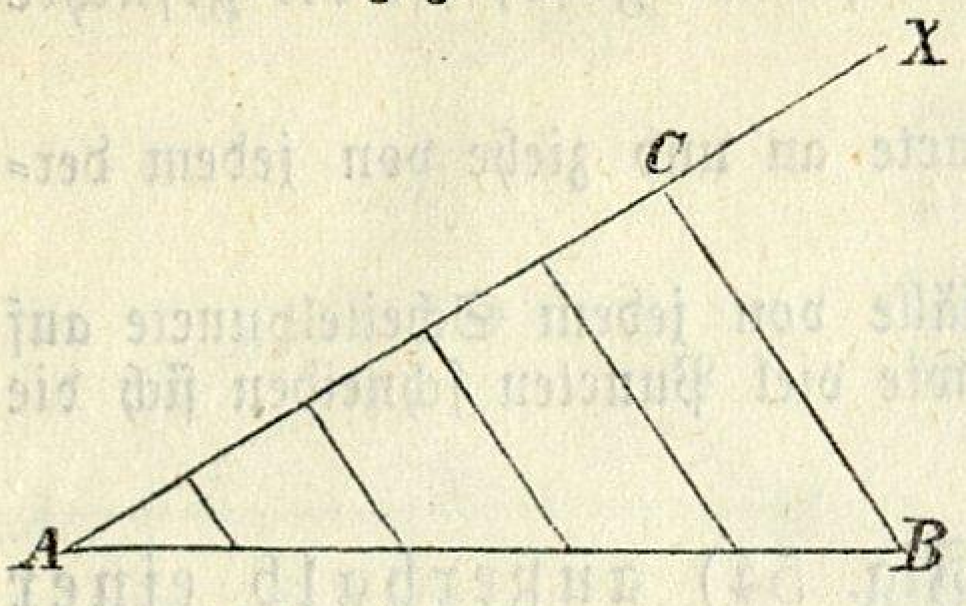


Man kann diese Beziehung auch durch folgenden Satz ausdrücken.

Wenn in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt ist, und man zieht durch jeden Theilungspunct eine Parallele mit der zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt.

§. 83. **Eine gegebene Strecke AB (Fig. 57) in mehrere gleiche Theile zu theilen.**

Fig. 57.



Die Strecke AB sei z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man zieht durch den einen Endpunct A unter einem beliebigen Winkel einen Strahl AX, trägt darauf 5 gleiche Theile von beliebiger Größe auf und verbindet den letzten Theilungspunct C mit dem zweiten Endpuncte B. Dadurch erhält man ein Dreieck ACB, worin die Seite AC in 5 gleiche Theile getheilt ist; damit auch die Seite AB in 5 gleiche Theile getheilt werde, braucht man daher nur durch jeden Theilungspunct der AC eine Parallele mit CB zu ziehen.

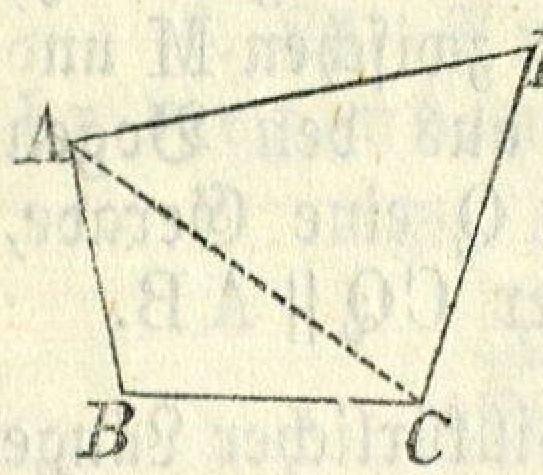
Theile eine Strecke in 3, 6, 7, 9, 10, 12 gleiche Theile.

IV. Vierecke.

1. Erklärungen.

§. 84. Eine von vier geraden Linien begrenzte Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 58.



Jedes Viereck ABCD (Fig. 58) hat vier Seiten und vier Winkel. Die Summe aller Seiten des Viereckes heißt dessen Umfang. Eine Gerade AC, welche zwei gegenüberliegende Eckpuncte des Viereckes mit einander verbindet, heißt eine Diagonale.

1. In wie viele Dreiecke wird das Viereck durch eine Diagonale zerlegt?

2. Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

2. Winkel des Viereckes.

§. 85. Zieht man in dem Vierecke ABCD (Fig. 58) die Diagonale AC, so wird dadurch das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt und es betragen die vier Winkel des Viereckes genau so viel, als die sechs Winkel der zwei Dreiecke zusammen genommen; die Winkel eines jeden Dreieckes betragen nun 180°. Daraus folgt:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich 360° oder vier Rechten.

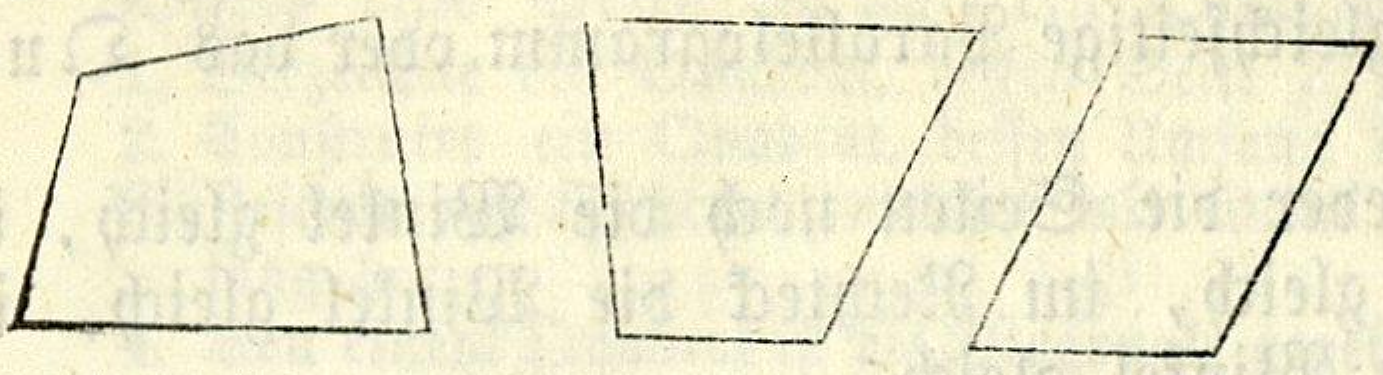
Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder derselben?

3. Arten der Vierecke.

§. 86. Mit Rücksicht auf die Lage der gegenüberliegenden Seiten unterscheidet man drei Arten der Vierecke.

Fig. 59.

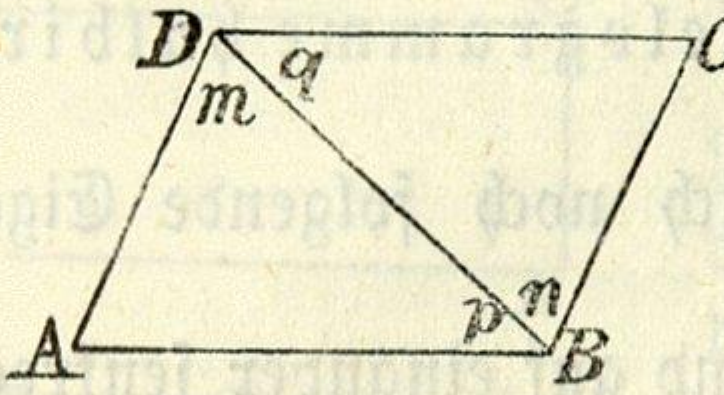
I. II. III.



Ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein **Trapezoid** (Fig. 59, I). Ein Viereck, in welchem zwei gegenüber liegende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nichtparallel sind, heißt ein **Trapez** (Fig. 59, II). Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein **Parallelogramm** (Fig. 59, III).

§. 87. Es sei (Fig. 60) $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, also $ABCD$ ein Parallelogramm. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel m und n, und eben so die Wechselwinkel p und q einander gleich; daher ist $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (I. Congruenzsatz), und folglich $AB = CD$ und $AD = BC$.

Fig. 60.



Daraus folgt:

1. **Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.**
2. **In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich;** oder:
Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Aus dem zweiten Satze folgt auch:

Senkrechte zwischen Parallelen sind einander gleich.

Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten gleich, so sind es alle.

Hinsichtlich der Seiten unterscheidet man daher **gleichseitige** und **ungleichseitige** Parallelogramme.

§. 88. Da (Fig. 60) $p = q$ und $n = m$ ist, so ist auch $p + n = p + m$; oder $\sphericalangle B = D$. Eben so läßt sich zeigen, daß $\sphericalangle A = C$ ist.

In einem Parallelogramme sind also je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

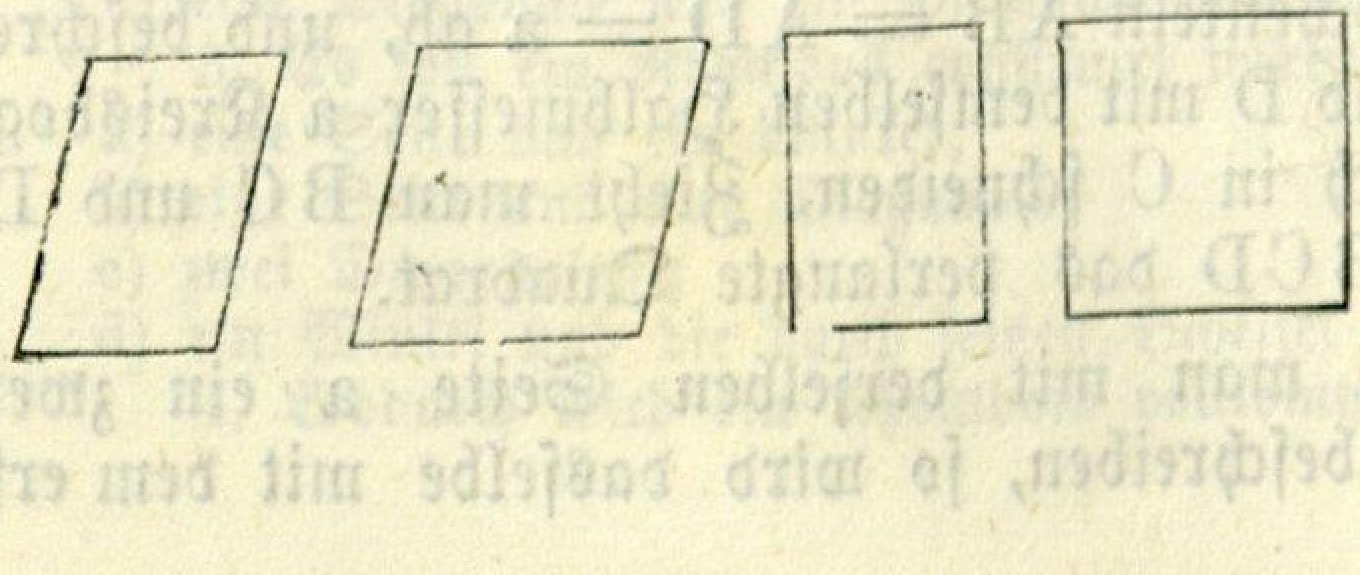
Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die übrigen; ist ein Winkel ein schiefer, so sind es auch die übrigen.

Hinsichtlich der Winkel unterscheidet man daher **rechtwinklige** und **schiefwinklige** Parallelogramme.

§. 89. Mit Rücksicht auf die Größe der Winkel und der Seiten ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen; das schiefwinklig nichtgleichseitige Parallelogramm oder das **Rhomboid** (Fig. 61, I); das schiefwinklig gleich-

Fig. 61.

I. II. III. IV.

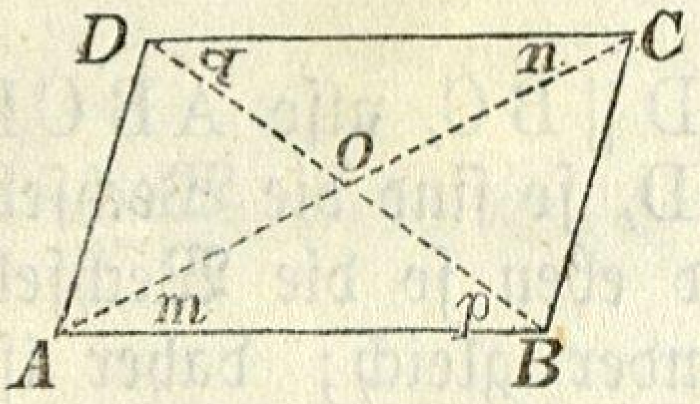


seitige Parallelogramm oder der **Rhombus** (Fig. 61, II); das rechtwinklig nichtgleichseitige Parallelogramm oder das **Rechteck** (Fig. 61, III); und das rechtwinklig gleichseitige Parallelogramm oder das **Quadrat** (Fig. 61, IV).

Im Rhomboid sind weder die Seiten noch die Winkel gleich, im Rhombus sind die Seiten gleich, im Rechteck die Winkel gleich, im Quadrat die Seiten und die Winkel gleich.

§. 90. Zieht man in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 62) die Diagonalen AC und BD, so ist $\triangle$ AOB $\cong \triangle$ COD (I. Congruenzsatz), weil AB $=$ CD, $m = n$, $p = q$ ist; es müssen daher die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich sein, also AO $=$ CO, BO $=$ DO.

Fig. 62.



Daraus folgt:

In jedem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen.

In Bezug auf die Diagonalen lassen sich noch folgende Eigenschaften nachweisen:

1) Im Quadrate sind die Diagonalen gleich und auf einander senkrecht.
2) Im Rechtecke sind die Diagonalen gleich und auf einander schief.
3) Im Rhombus sind die Diagonalen ungleich und auf einander senkrecht.
4) Im Rhomboid sind die Diagonalen ungleich und auf einander schief.

§. 91. In einem Parallelogramme kann irgend eine Seite, über welche man sich dasselbe errichtet denkt, als **Grundlinie** angesehen werden; die Senkrechte, die auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung von der gegenüberstehenden Seite gefällt wird, ist dann die **Höhe**.

In einem Rechtecke stellt die eine von zwei zusammentreffenden Seiten die Grundlinie, die andere die Höhe vor.

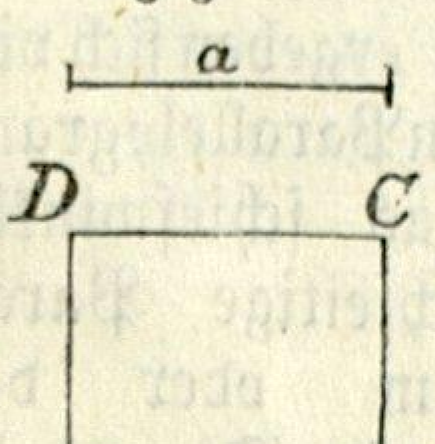
Beim Quadrat kann jede Seite als Grundlinie oder Höhe angesehen werden.

In einem Trapez stellt die Senkrechte, welche von einer der parallelen Seiten auf die andere herabgelassen wird, die Höhe vor.

In einem Trapezoid kann von einer Grundlinie und Höhe nicht die Rede sein.

4. Construction der Vierecke.

Fig. 63.



§. 92. **Mit einer gegebenen Seite a (Fig. 63) ein Quadrat zu beschreiben.**

Man construire einen rechten Winkel A, schneide an den Schenkeln AB $=$ AD $=$ a ab, und beschreibe aus B und D mit demselben Halbmesser a Kreisbogen, welche sich in C schneiden. Zieht man BC und DC, so ist ABCD das verlangte Quadrat.

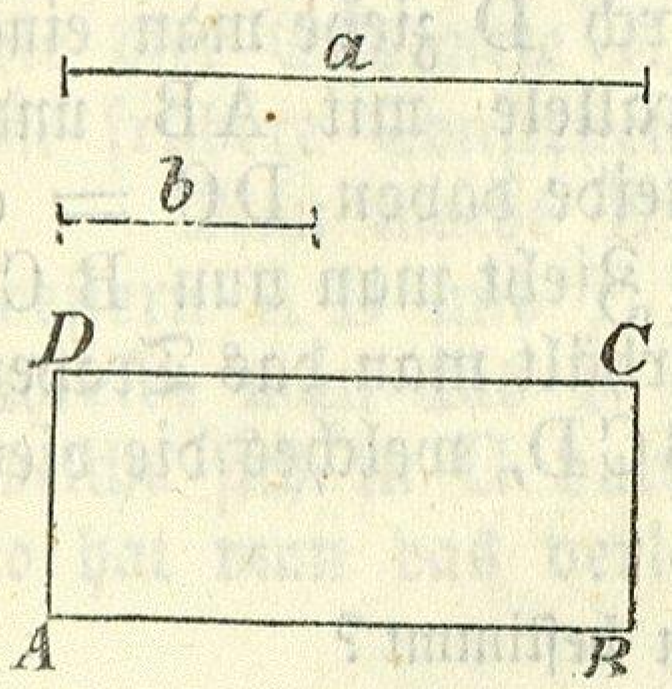
Würde man mit derselben Seite a ein zweites Quadrat beschreiben, so wird dasselbe mit dem ersten in der Form und Größe vollkommen übereinstimmen, also mit ihm congruent sein.

Durch eine Seite ist also ein Quadrat vollkommen bestimmt.

1. Verzeichne ein Quadrat, dessen Seite $2 \cdot 4^{dm}$ ist.
2. Construire ein Quadrat, dessen Umfang 1^{m} ist.
3. Zeichne ein Quadrat, welches mit einem gegebenen Rechtecke gleichen Umfang hat.
4. Von einem Quadrat ist die Diagonale gegeben; man soll dasselbe construiren.

§. 93. Ein Rechteck zu construiren, wenn zwei zusammentreffende Seiten a und b (Fig. 64) gegeben sind.

Fig. 64.



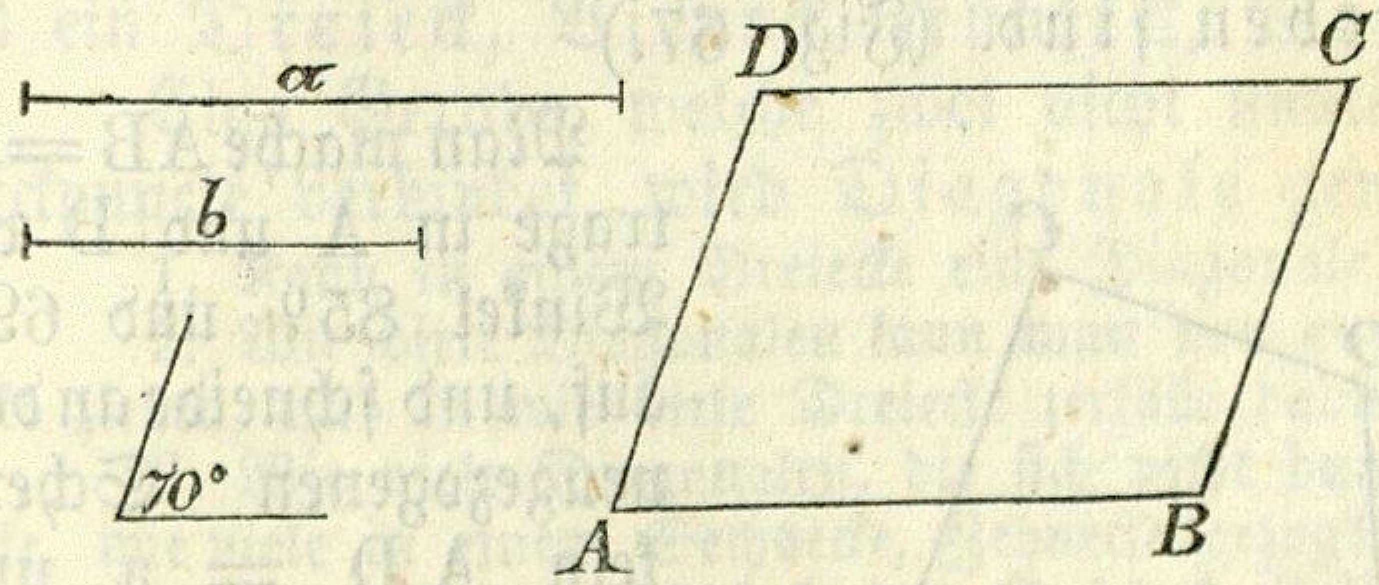
Man verzeichne einen rechten Winkel A, mache $AB = a$, $AD = b$, und beschreibe aus B mit dem Halbmesser b, und aus D mit dem Halbmesser a Kreisbogen; der Durchschnittspunct C ist der vierte Eckpunct des gesuchten Rechteckes.

Aus dieser Construction geht hervor, daß ein Rechteck durch zwei zusammentreffende Seiten vollkommen bestimmt ist. Zwei Rechtecke müssen demnach congruent sein, wenn sie zwei zusammentreffende Seiten gleich haben.

Zeichne ein Rechteck, dessen Seiten 3^{m} und 2^{m} 2^{dm} sind.
Construire ein Rechteck, dessen eine Seite und Diagonale gegeben sind.

§. 94. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel z. B. 70° gegeben sind. (Fig. 65.)

Fig. 65.



Man construire den Winkel $A = 70^{0}$, mache $AB = a$, $AD = b$, und beschreibe aus B und D mit den Halbmessern b und a Bogen, welche sich in C schneiden; ABCD ist das gesuchte Parallelogramm.

Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen also ein Parallelogramm vollkommen.

1. Zeichne ein Parallelogramm, worin die Seiten $2 \cdot 1^{m}$ und $1 \cdot 5^{m}$ den Winkel 123° einschließen.

2. Construire ein Rechteck, wenn gegeben sind:
a) eine Seite und eine Diagonale;
b) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Durchschnittswinkel der Diagonalen;
c) eine Diagonale und ein Durchschnittswinkel der Diagonalen.

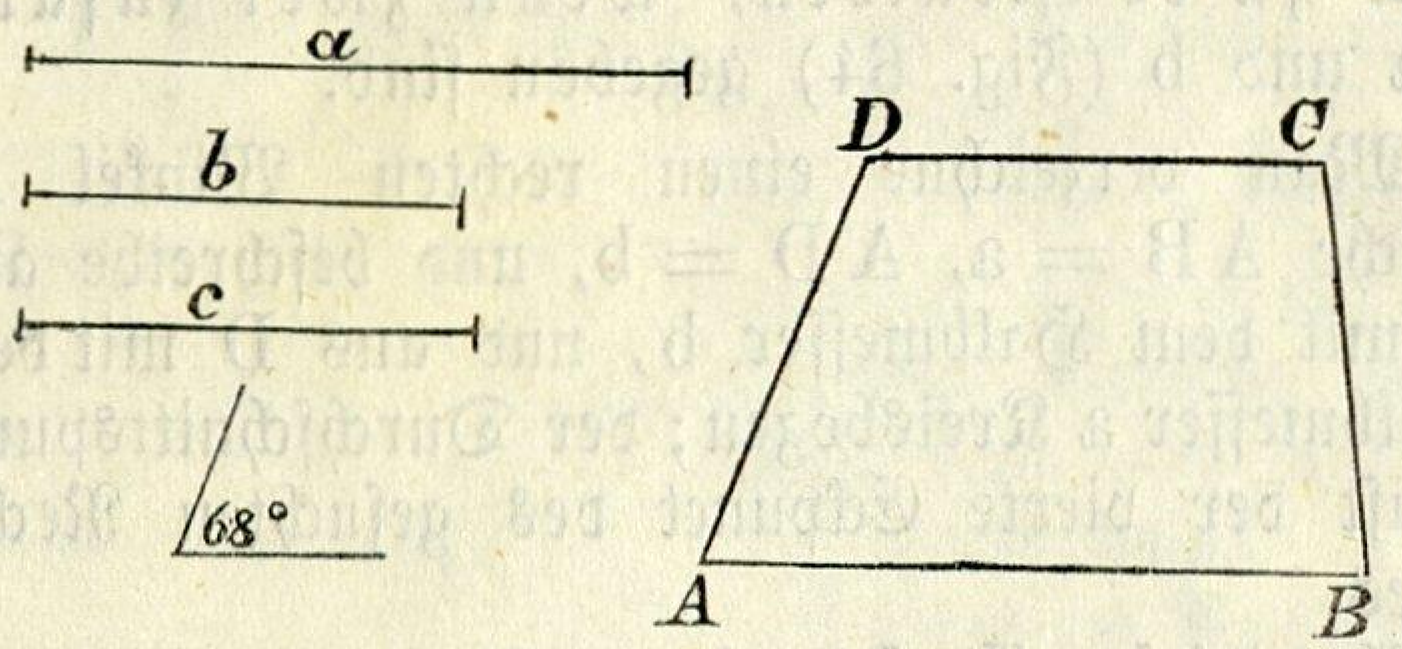
3. Es soll ein Rhombus construirt werden, wenn gegeben sind:
a) eine Seite und ein Winkel;
b) eine Seite und eine Diagonale;
c) zwei Diagonalen;
d) ein Winkel und die durch seinen Scheitel gehende Diagonale.

4. Wodurch wird ein Rhomboid vollkommen bestimmt?

5. Verzeichne ein Rhomboid, wenn gegeben sind:
a) zwei zusammenstoßende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel;
b) zwei zusammenstoßende Seiten und eine Diagonale;
c) eine Seite und die zwei Diagonalen;
d) ein Winkel und die beiden Diagonalen.

§. 95. **Ein Trapez zu construiren, wenn drei Seiten a, b, c und ein Winkel, z. B. 68°, gegeben sind.** (Fig. 66.)

Fig. 66.



Man construire einen Winkel A = 68°, mache AB = a, AD = b. Durch D ziehe man eine Parallele mit AB und schneide davon DC = c ab. Zieht man nun BC, so erhält man das Trapez ABCD, welches die vier gegebenen Stücke enthält.

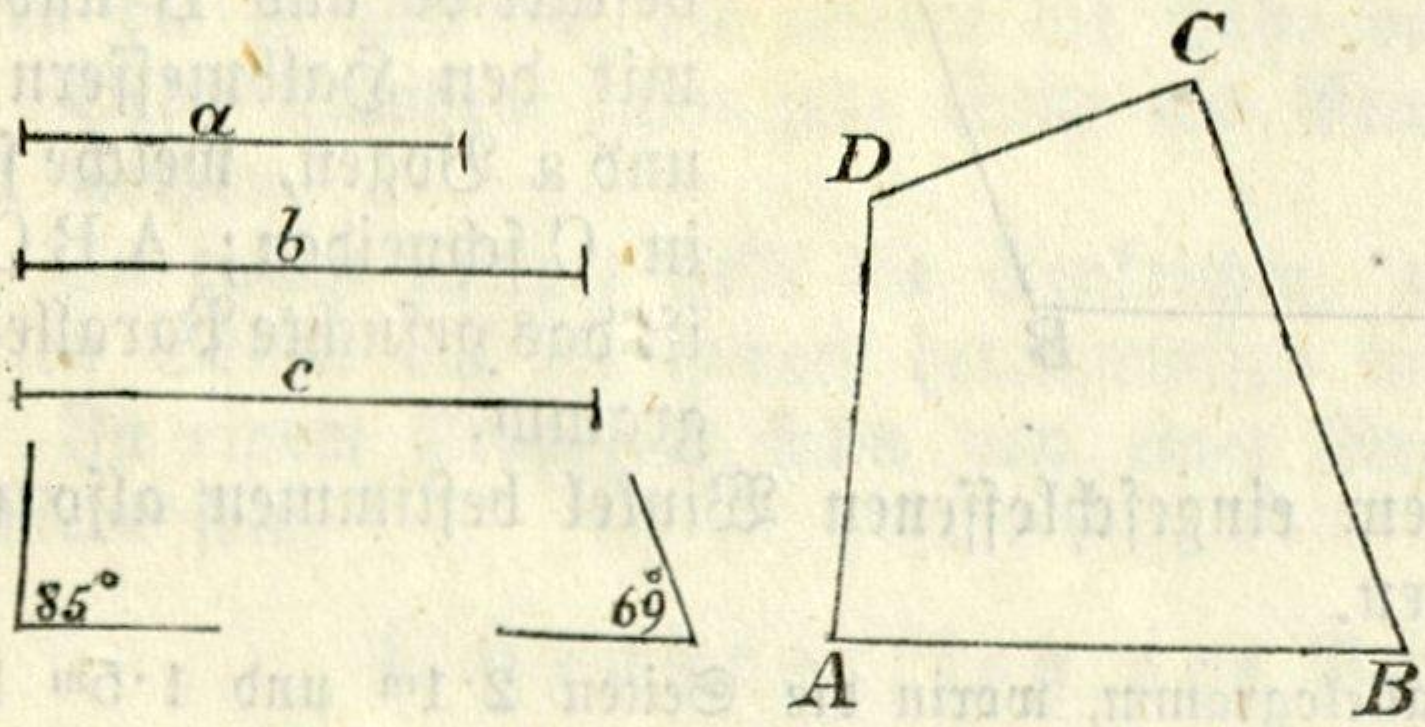
1. Durch welche Stücke wird ein Trapez vollkommen bestimmt?

2. Construire ein Trapez, worin die Seiten $2^m\ 8^{dm}$, $1^m\ 3^{dm}$, $2^m\ 2^{dm}$ vorkommen, von denen die zwei ersteren den Winkel 80° einschließen.

3. Verzeichne ein Trapez, wenn gegeben sind:
a) die zwei parallelen Seiten und die Höhe;
b) die zwei nichtparallelen Seiten und die Höhe;
c) die zwei parallelen Seiten und eine der nichtparallelen Seiten;
d) die zwei nichtparallelen Seiten und eine der parallelen Seiten.

§. 96. **Ein Trapezoid zu beschreiben, wenn drei Seiten a, b, c, und zwei Winkel 85° und 69°, deren Schenkel jene drei Seiten bilden, gegeben sind.** (Fig. 67.)

Fig. 67.



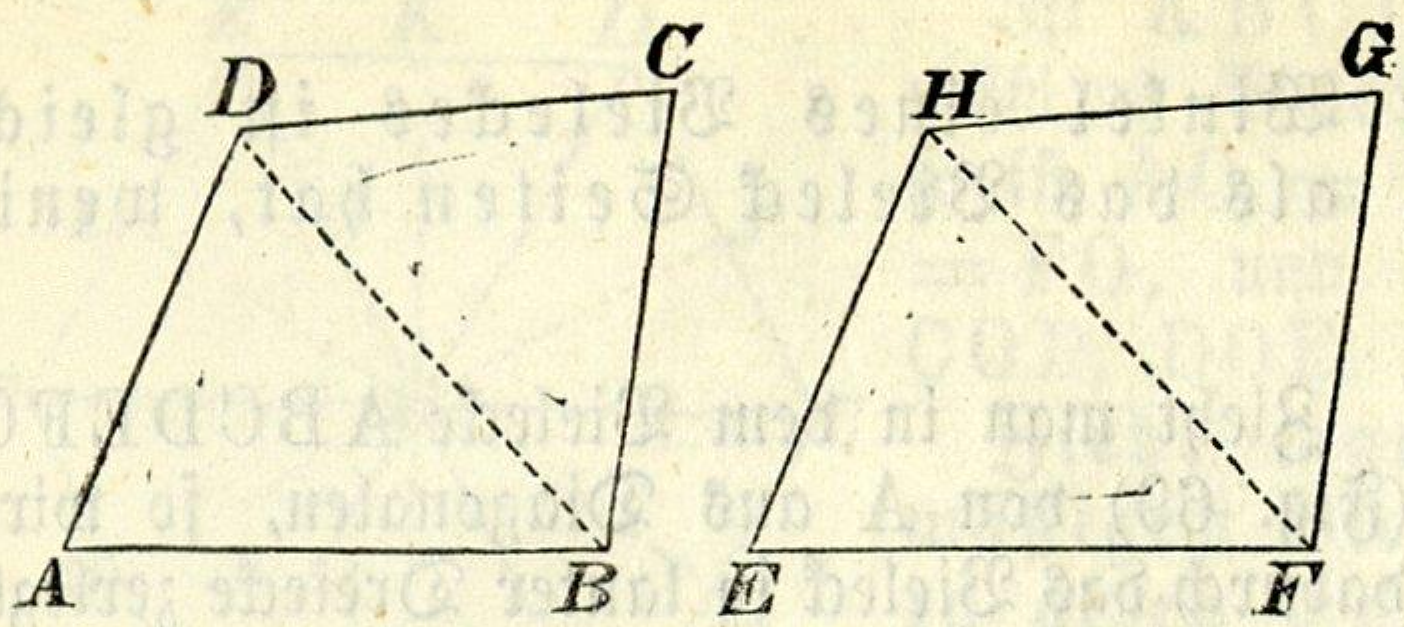
Man mache AB = b trage in A und B die Winkel 85° und 69° auf, und schneide an den neugezogenen Schenkeln AD = a und BC = c ab. Zieht man noch CD, so hat man das verlangte Trapezoid.

1. Verzeichne ein Trapezoid mit den drei Seiten $1 \cdot 8^m$, $2 \cdot 2^m$, $1 \cdot 4^m$, und den eingeschlossenen Winkeln 67° und 83°.

2. Construire ein Viereck, wenn gegeben sind:
a) drei Winkel und die dazwischenliegenden Seiten;
b) vier Seiten und ein Winkel;
c) vier Seiten und eine Diagonale.

§. 97. **Ein Viereck zu construiren, welches mit einem gegebenen Vierecke ABCD (Fig. 68) congruent ist.**

Fig. 68.



Zieht man die Diagonale BD, verzeichnet das Dreieck EFH $\cong$ $\triangle$ ABD, und über FH das Dreieck FGH $\cong$ $\triangle$ BCD, so ist das Viereck EFGH $\cong$ ABCD. Es ist übrigens nicht nöthig, die Diagonale BD wirklich zu ziehen und die Dreiecke vollständig zu verzeichnen; es handelt sich nur darum, die vier Eckpuncte E, F, G, H des neuen Viereckes mit Rücksicht auf die frühere Construction zu bestimmen, was auf folgende Art geschieht:

Man mache EF = AB, beschreibe aus E und F mit den Halbmessern AD und BD Bogen, welche sich in H schneiden; ferner beschreibe man aus F und H mit den Halbmessern BC und CD Bogen, welche sich in G durchschneiden. Zieht man dann EH, HG und GF, so hat man das verlangte Viereck.

V. Vielecke.

1. Erklärungen.

§. 98. Jede von mehreren geraden Linien begrenzte Figur wird ein Vieleck oder Polygon genannt.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel; jede Seite hat zwei anliegende Winkel, jeder Winkel zwei ihn einschließende Seiten.

Je nachdem ein Vieleck drei, vier, fünf, sechs, ... Seiten hat, heißt es ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck u. s. w.

Eine Gerade, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpuncte verbindet, wird Diagonale genannt.

1. Kann in einem Dreiecke eine Diagonale gezogen werden?
2. Wie viele Diagonalen kann man von einem Eckpuncte aus in einem Vierecke ziehen, und in wie viele Dreiecke zerfällt dadurch das Viereck?
3. Wie viele Diagonalen, die sich nicht durchschneiden, können in einem Fünfecke, wie viele in einem Sechsecke, Zehnecke gezogen werden, und in wie viele Dreiecke wird dadurch das Fünfeck, das Sechseck, Zehneck zerlegt?

Die Anzahl Diagonalen, die in einem Vielecke von einem Eckpuncte aus gezogen werden können, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten; und die Anzahl der Dreiecke, in welche dadurch das Vieleck zerlegt wird, ist um 2 kleiner als die Seitenanzahl.

Wie viele Diagonalen können überhaupt in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Zehnecke gezogen werden?

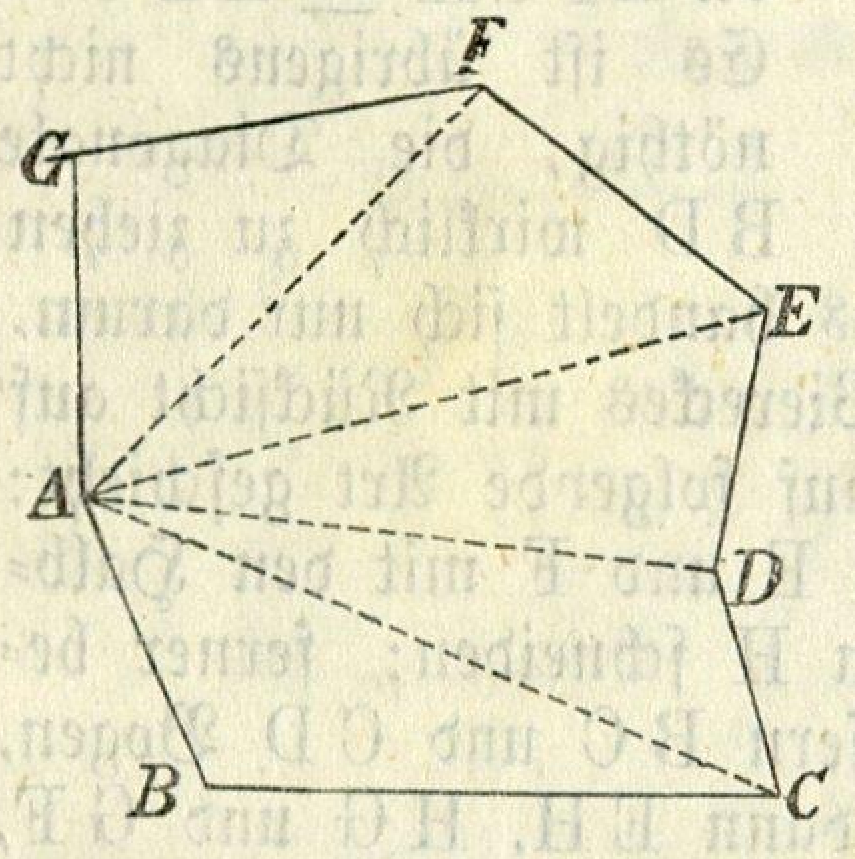
2. Winkel des Vieleckes.

§. 99. Die Winkel eines Vieleckes können spitz, recht, stumpf und selbst auch erhaben sein; die letzteren heißen einspringende Vieleckswinkel.

Verzeichne ein Vieleck, in welchem alle diese vier Arten von Winkeln vorkommen.

Die Summe aller Winkel eines Vieleckes ist gleich doppelt so viel Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger 4 Rechten.

Fig. 69.



Zieht man in dem Vielecke ABCDEFG (Fig. 69) von A aus Diagonalen, so wird dadurch das Vieleck in lauter Dreiecke zerlegt. Die Summe aller Vieleckswinkel ist offenbar so groß als die Summe der Winkel in allen Dreiecken; sie wird daher doppelt so viel Rechten gleich sein, als Dreiecke gebildet werden können, da die Winkel eines jeden Dreieckes zwei Rechte betragen. Wären nun so viele Dreiecke möglich, als das Vieleck Seiten hat, so wäre die Summe aller Winkel des Vieleckes gleich doppelt so viel Rechten, als Seiten vorhanden sind. Da aber zwei Dreiecke weniger vorkommen, so ist auch jene Summe um zweimal zwei Rechte, d. i. um 4 Rechte kleiner.

Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes, eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Zwölfeckes?

3. Arten der Vielecke.

§. 100. Ein Vieleck, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt **gleichseitig**; ein Vieleck, in welchem alle Winkel gleich sind, **gleichwinklig**; ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, **regelmäßig**. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so ist es leicht, die Größe eines derselben zu finden; man darf nur die Summe aller Winkel suchen, und dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiren. Es beträgt z. B. jeder Winkel

des regelmäßigen Dreieckes $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

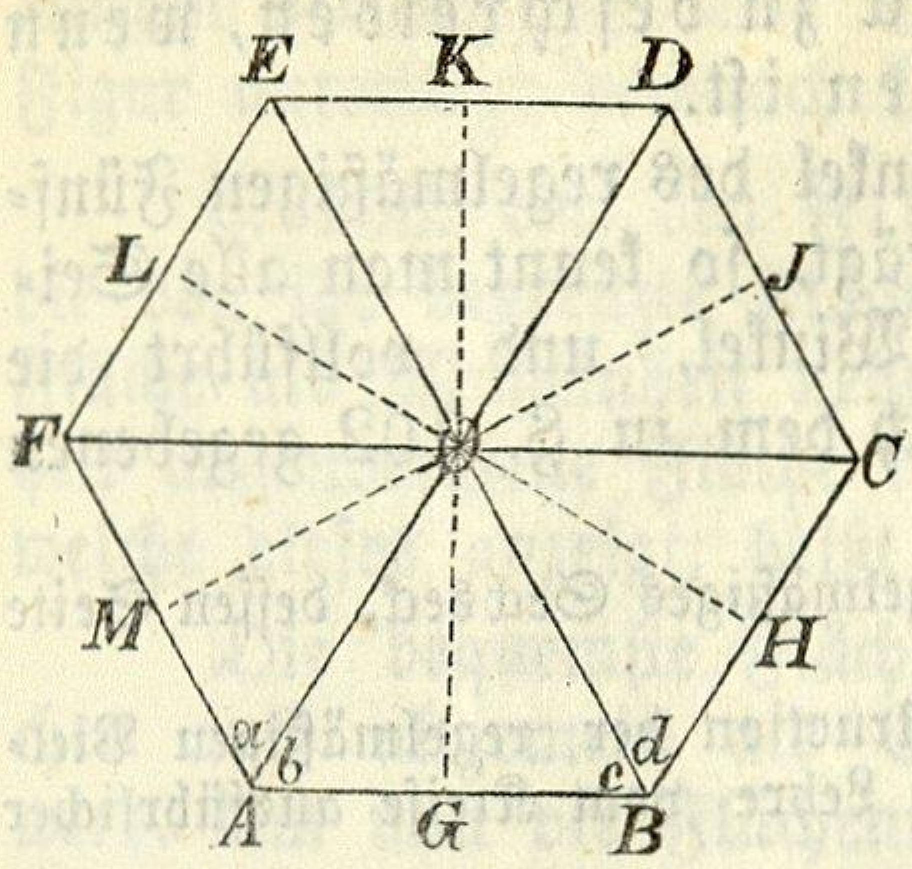
" " Viereckes $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

" " Fünfeckes $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

" " Sechseckes $\frac{720^0}{6} = 120^0$ u. s. w.

§. 101. In jedem regelmäßigen Vielecke gibt es einen Punct, welcher von allen Seiten und eben so auch von allen Eckpuncten gleich weit absteht. Er wird darum der **Mittelpunct** des regelmäßigen Vieleckes genannt.

Fig. 70.



Ist ABCDEF (Fig. 70) ein regelmäßiges Vieleck und O dessen Mittelpunct, so ist AO = BO = CO = DO = EO = FO, und die Dreiecke AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA sind congruent. Zieht man daher in einem regelmäßigen Vielecke vom Mittelpuncte zu allen Eckpuncten gerade Linien, so wird dadurch das Vieleck in so viele congruente Dreiecke zerlegt, als dasselbe Seiten hat.

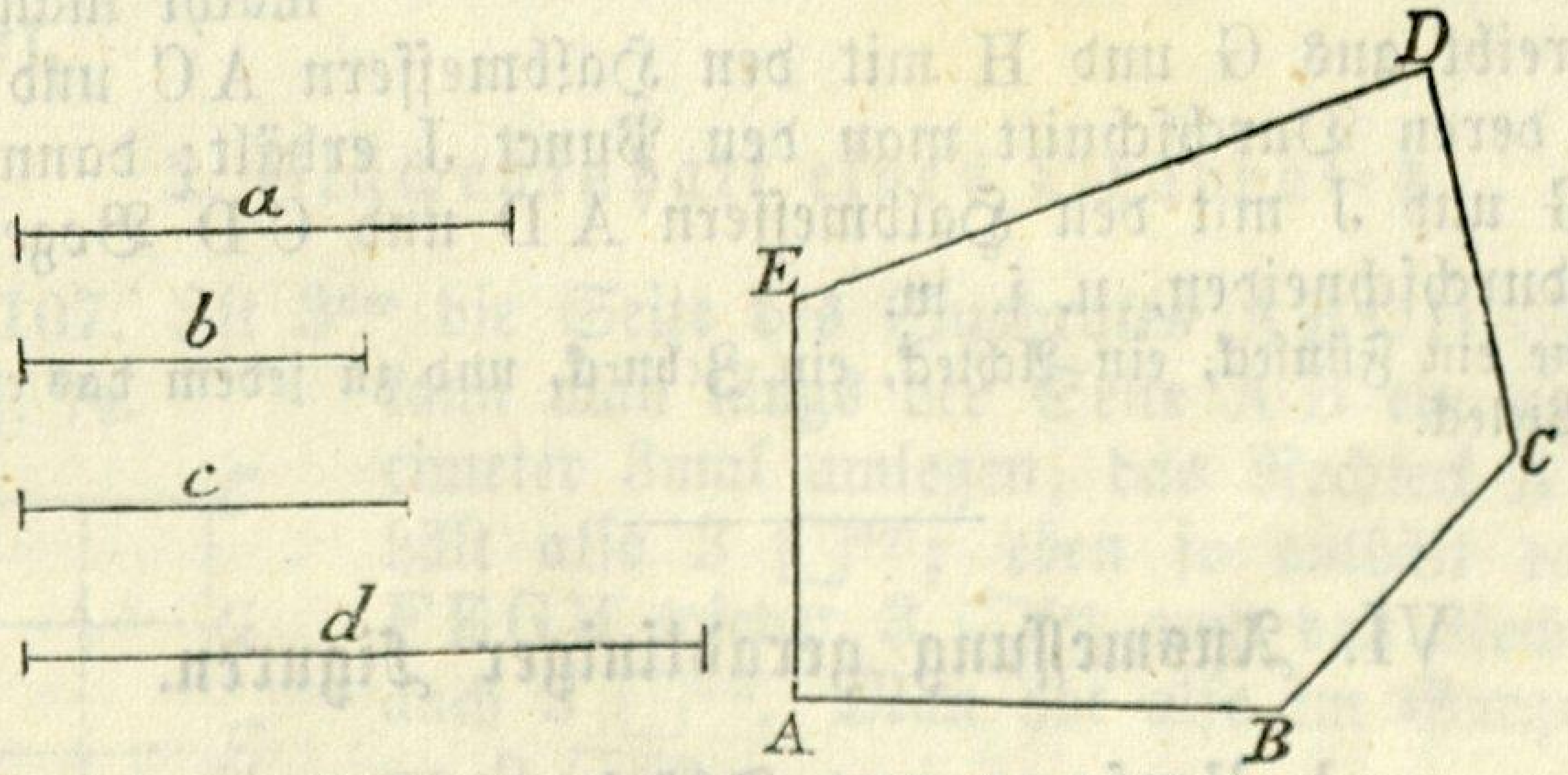
Auch sieht man, daß durch die Geraden AO, BO, CO, . . . die Vieleckswinkel A, B, C . . . halbirt werden, daß nämlich a = b, c = d, . . . ist. Um daher den Mittelpunct eines regelmäßigen Vieleckes zu finden, braucht man nur zwei Vieleckswinkel zu halbiren; der Durchschnittspunct dieser Halbirungslinien ist der gesuchte Mittelpunct.

Fällt man vom Mittelpuncte O auf die Seiten des Vieleckes die Senkrechten OG, OH, OJ, . . . so sind diese als Entfernungen des Punctes O von den Seiten AB, BC, CD, . . . einander gleich.

4. Construction der Vielecke.

§. 102. Ein Fünfeck zu construiren, wenn die Seiten a, b, c, d, und die von diesen eingeschlossenen Winkel 132°, 125° und 84° gegeben sind.

Fig. 71.

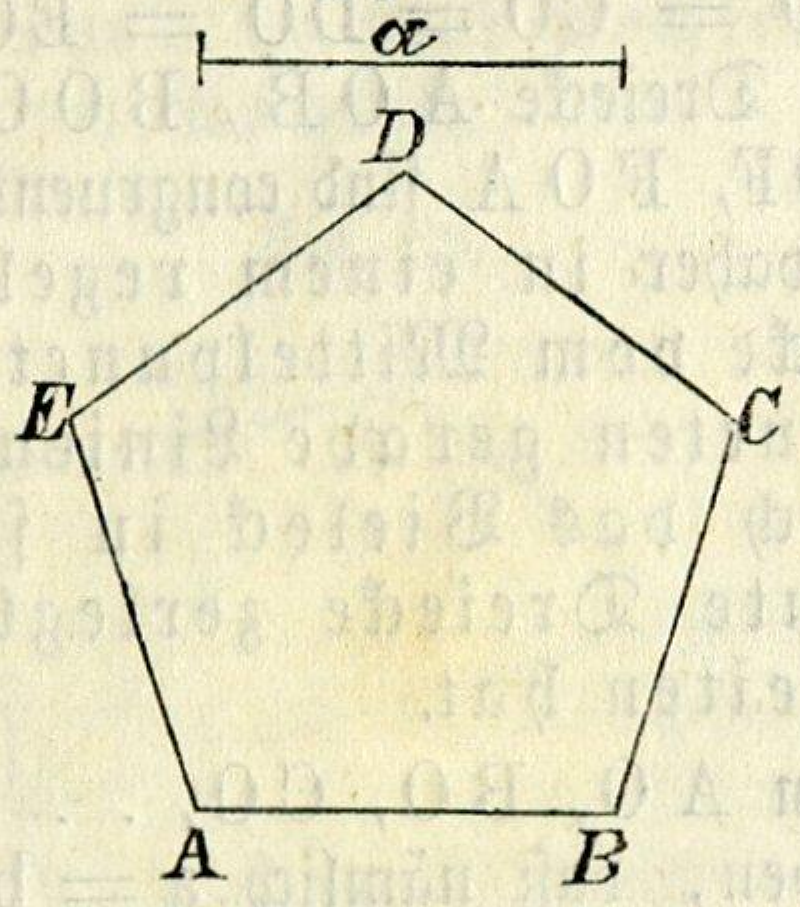


Man mache (Fig. 71) AB = a, trage in B den Winkel 132° auf; auf dem neuen Schenkel schneide man BC = b ab, trage in C den Winkel 125° auf; mache ferner CD = c, verzeichne in D den Winkel 84°, und schneide DE = d ab. Zieht man nnn AE, so ist ABCDE das verlangte Fünfeck.

Zeichne ein Sechseck, worin die Seiten $2^m\ 2^{dm}$, $8^m\ 1^{dm}$, $1^m\ 8^{dm}$, $2^m\ 5^{dm}$, $2^m\ 9^{dm}$ nach der Ordnung die Winkel 76°, 158°, 35°, 200° einschließen.

§. 103. **Ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben, wenn die Seite desselben a (Fig. 72) gegeben ist.**

Fig. 72.



Da jeder Winkel des regelmäßigen Fünfeckes 108° beträgt, so kennt man alle Seiten und alle Winkel, und vollführt die Construction nach dem in §. 102 gegebenen Verfahren.

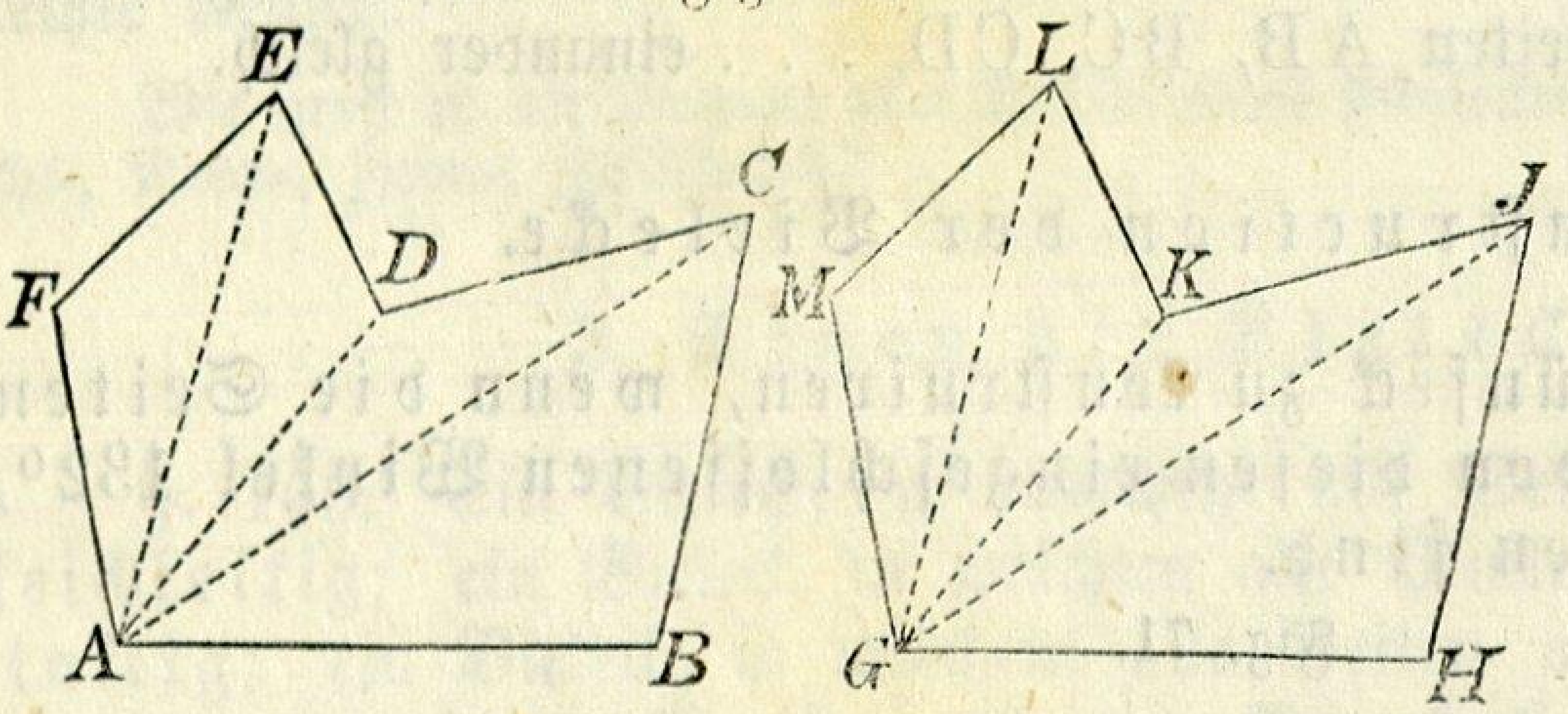
Zeichne ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite 8cm beträgt.

Ueber die Construction der regelmäßigen Vielecke wird bei der Lehre vom Kreise ausführlicher gehandelt werden.

§. 104. **Ein Vieleck zu construiren, welches mit einem gegebenen Vielecke ABCDFF (Fig. 73) congruent ist.**

Denkt man sich das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so darf man nur das Dreieck GHJ $\cong$ ABC, über GJ das Dreieck GJK $\cong$ ACD, über GK das Dreieck GKL $\cong$ ADE, und über GL das Dreieck GLM $\cong$ AEF construiren, und es wird das Sechseck GHJKLM $\cong$ ABCDEF sein. Es ist übrigens nicht

Fig. 73.



nöthig, diese Dreiecke wirklich zu verzeichnen; man braucht nur die Puncte G, H, J, K, L, M so zu bestimmen, daß man sich zwischen ihnen jene Dreiecke vorstellen kann. Zu diesem Ende macht man GH = AB, beschreibt aus G und H mit den Halbmessern AC und BC Bogen, durch deren Durchschnitt man den Punct J erhält; dann beschreibt man aus G und J mit den Halbmessern AD und CD Bogen, welche sich in K durchschneiden, u. s. w.

Zeichne ein Fünfeck, ein Achteck, ein Zehneck, und zu jedem das entsprechende congruente Vieleck.

VI. Ausmessung geradliniger Figuren.

1. Umfang und Flächeninhalt.

§. 105. Jede Figur wird von Linien begrenzt. Alle Grenzlinien einer Figur zusammengenommen nennt man den **Umfang**, und den Raum, den sie begrenzen, den **Flächeninhalt** der Figur.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Längen ihrer Seiten addiren. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite multiplicirt mit der

Anzahl der Seiten. Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt demnach keiner weitern Schwierigkeit.

§. 106. Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, d. i. die von ihr begrenzte Fläche zu messen, muß man irgend eine bekannte Fläche als Maßeinheit nehmen, und untersuchen, wie oft diese als Einheit angenommene Fläche in der zu messenden enthalten ist; die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

Die bequemste Fläche zum Ausmessen ist das Quadrat, welches auch allgemein als Einheit des Flächenmaßes angenommen wird. Um nun die Flächenmaße mit den Längenmaßen in Verbindung zu bringen, nimmt man zum Messen Quadrate an, deren Seiten die Längeneinheiten sind, und benennt sie, indem man vor den Namen des Längenmaßes noch das Wort Quadrat setzt, also: Quadrat-Meter ($\square^{m}$), Quadrat-Decimeter ($\square^{dm}$), ...

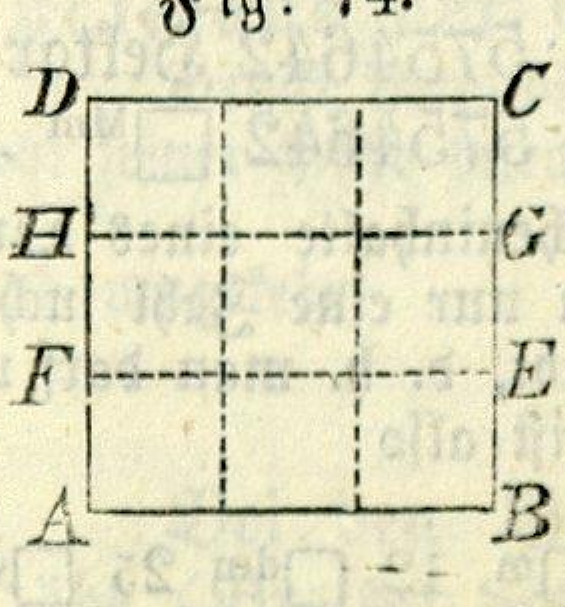
Was bedeutet daher ein $\square$Meter, ein $\square$Decimeter, u. s. w.?

Der Flächenraum einer Figur ist bekannt, sobald man gefunden hat, wie viele $\square^{m}$, $\square^{dm}$ u. s. w. dieselbe enthält. Man würde daher, um z. B. die Fläche eines Tisches auszumessen, darauf ein Quadrat-Decimeter so oft nebeneinander legen als es angeht; bliebe ein Rest, der kein Quadrat-Decimeter mehr enthält, so würde man auf demselben ein Quadrat-Centimeter so oft auftragen als es möglich ist. Dadurch würde man sicher erfahren, wie viel $\square^{dm}$ und $\square^{cm}$ die Fläche des Tisches enthält. Allein ein solches unmittelbares Ausmessen der Flächen wäre zu weitläufig und in den meisten Fällen auch gar nicht ausführbar. Man pflegt daher den Flächeninhalt der Figuren mittelbar zu bestimmen, indem man diejenigen Strecken, von welchen die Größe einer Figur abhängt, durch die Längeneinheit mißt und aus den Maßzahlen dieser Strecken mittelst einfacher Schlüsse den Inhalt der Fläche berechnet.

2. Flächeninhalt eines Quadrates.

§. 107. Ist 3^{dm} die Seite des Quadrates ABCD (Fig. 74), so kann man längs der Seite AB ein Quadrat-Decimeter 3mal umlegen, das Rechteck ABEF enthält also 3 $\square^{dm}$; eben so enthält das Rechteck FEGH wieder 3 $\square^{dm}$, und das Rechteck HGCD auch 3 $\square^{dm}$. Man hat also im Ganzen 3mal 3 = 9 $\square^{dm}$.

Fig. 74.



Würde die Seite des Quadrates 3 Meter betragen, so wäre der Flächeninhalt 9 $\square$Meter.

Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 4^{dm} ist, und suche durch gehörige Eintheilung der Seiten und Verbindung der entsprechenden Theilungspuncte, wie viel $\square^{dm}$ dasselbe enthält.

Bestimme auf gleiche Weise den Flächeninhalt eines Quadrates, wenn die Seite a) 5^{dm}, b) 6^{cm}, c) 7^{m} beträgt.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Flächeneinheit in einem Quadrate enthalten ist, wird gefunden, indem man die Zahl, welche anzeigt, wie oft die entsprechende Längeneinheit in einer Seite enthalten ist, mit sich selbst multiplicirt.

Eine Zahl mit sich selbst multipliciren oder zur zweiten Potenz erheben, heißt darum auch, diese Zahl zum Quadrat erheben.

Den vorhergehenden Satz drückt man gewöhnlich kürzer so aus:

Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

Drückt man die Maßzahlen des Flächeninhaltes und der Seite eines Quadrates durch f und s aus, so ist $f = s^2$.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seite ab; ist z. B. die Seite in Decimeter ausgedrückt, so zeigt die Zahl, welche man als Flächeninhalt erhält, □ Decimeter an.

Ein Quadrat, dessen Seite 10^{dm} ist, hat $10 \times 10 = 100$ □^{dm}; ein solches Quadrat ist nun 1 □^{m}; daher ist

1 □ Meter = 100 □ Decimeter.

Ebenso folgt:

1 □ Decim. = 100 □ Centimeter,
1 □ Centim. = 100 □ Millimeter.

100 □ Meter nennt man als Bodenflächenmaß ein Ar, 100 Ar oder 10000 □ Meter ein Hektar. Ein □ Myriameter = 10000 Hektar.

Für das bisherige Fußmaß ist

1 □^{0} = 6 × 6 = 36 □′,
1 □′ = 12 × 12 = 144 □″,
1 □″ = 12 × 12 = 144 □‴,
1 □ Meile = 4000 × 4000 = 16000000 □^{0}.

Eine Fläche, welche 1600 □^{0} enthält, heißt ein Joch, und ist gleich einem Quadrate, dessen Seite 40^0 beträgt. 1 österr. □ Meile = 10000 Joch.

Verhältniß zwischen den neuen und den früheren Flächenmaßen:

1 □^{m} = 10·00931 □′	1 □′ = 0·099907 □^{m}
1 Hektar = 1·737727 Joch	1 Joch = 0·5754642 Hektar
1 □^{Mm} = 1·737727 □ Meil.	1 □ Meile = 0·5754642 □^{Mm}.

§. 108. Will man umgekehrt aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Quadrates die Länge einer Seite berechnen, so darf man nur eine Zahl suchen, die mit sich selbst multiplicirt den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man darf nur aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen*). Es ist also

$$s = \sqrt{f}.$$

Z. B. der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt 8 □^{m} 12 □^{dm} 25 □^{cm}; wie groß ist eine Seite?

8 □^{m} 12 □^{dm} 25 □^{cm} = 8·1225 □^{m}

$\sqrt{8\cdot1225} = 2\cdot85^m = 2^m\ 8^{dm}\ 5^{cm}$.

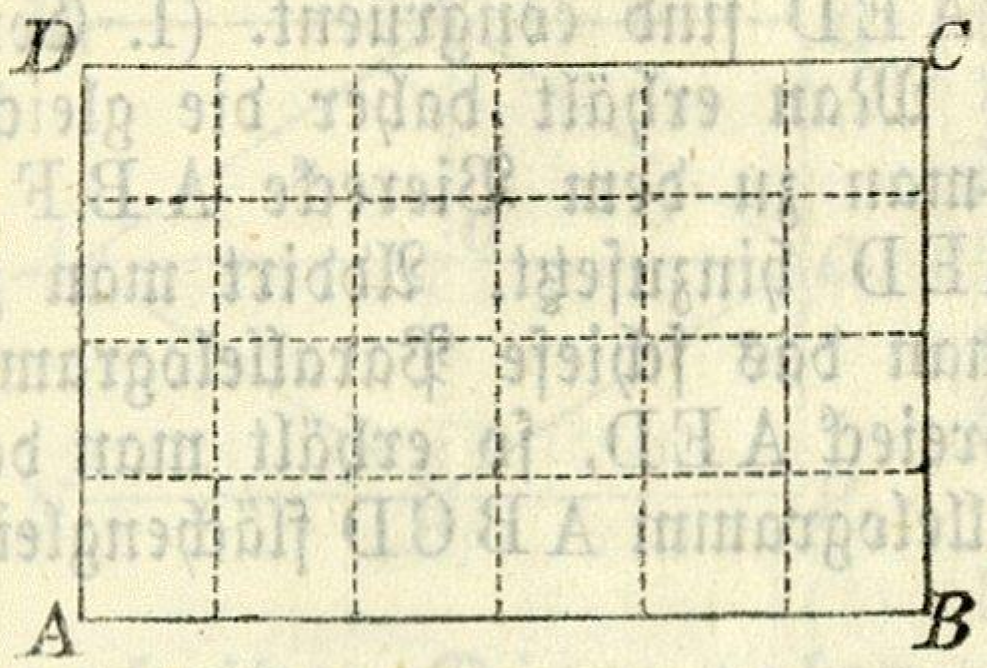
---

*) Die Aufgaben, welche sich auf das Ausziehen der Quadratwurzel gründen, werden, wenn die Schüler damit noch nicht vertraut sind, später nachzuholen sein; sie sind hier zur Unterscheidung von anderen Aufgaben mit kleineren Lettern gedruckt.

3. Flächeninhalt des Rechteckes.

§. 109. Es sei der Flächeninhalt des Rechteckes ABCD (Fig. 75), in welchem die Grundlinie $AB = 6^m$ und die Höhe $AD = 4^m$ ist, zu bestimmen.

Fig. 75.



Theilt man die Grundlinie in 6, und die Höhe in 4 gleiche Theile, so daß jeder Theil 1^m ist, und zieht durch jeden Theilungspunct der Höhe eine Gerade, die mit der Grundlinie parallel ist, so zerfällt das Rechteck in 4 gleiche Parallelstreifen. Zieht man dann auch durch jeden Theilungspunct der Grundlinie eine Gerade, die mit der Höhe parallel ist, so wird dadurch jeder Parallelstreifen in 6 Quadrate getheilt, deren jedes $1 \square^m$ ist. Das Rechteck hat also 4 Parallelstreifen, und in jedem $6 \square^m$, daher zusammen $6 \times 4 = 24 \square^m$.

Zeichne ein Rechteck, in welchem die Grundlinie 5^{dm} und die Höhe 3^{dm} beträgt, und suche durch eine ähnliche Construction dessen Flächeninhalt.

Bestimme ebenso den Inhalt eines Rechteckes, worin
a) die Grundlinie 4^m, die Höhe 3^m,
b) „ „ 7^{dm}, „ „ 5^{dm},
c) „ „ 8^{cm}, „ „ 4^{cm} ist.

Zeichne ein Rechteck mit der Grundlinie $4\frac{1}{2}^m$, und mit der Höhe $3\frac{1}{4}^m$, und bestimme durch gehörige Zerlegung dessen Flächeninhalt.

Um also die Fläche eines Rechteckes zu bestimmen, darf man nur mit dem Längenmaße die Grundlinie und die Höhe messen, und die dabei erhaltenen Maßzahlen mit einander multipliciren.

Die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Rechteckes wird demnach gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multiplicirt.

Diesen Satz pflegt man gewöhnlich ganz kurz so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Drückt man die Maßzahl der Grundlinie eines Rechteckes durch g, die Maßzahl seiner Höhe durch h, und die Maßzahl des Flächeninhaltes durch f aus, so ist

$$f = g \times h,$$

und umgekehrt

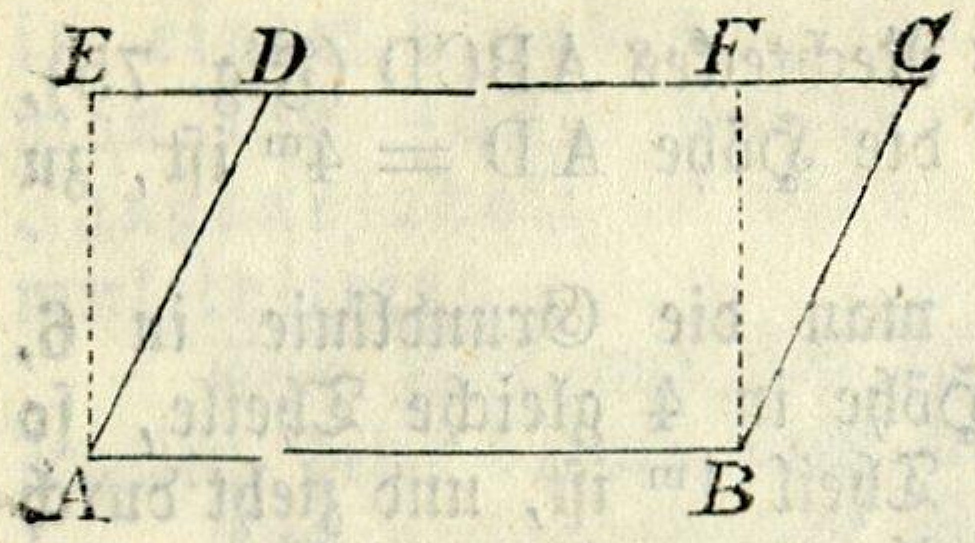
$$g = \frac{f}{h}, \quad h = \frac{f}{g}.$$

Bei den Berechnungen müssen die Grundlinie (Länge) und die Höhe (Breite) des Rechteckes auf dieselbe Längeneinheit bezogen werden, von welcher sodann auch die Benennung des Flächeninhaltes abhängt.

4. Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms.

§. 110. Ein schiefwinkliges Parallelogramm ABCD (Fig. 76) in ein Rechteck zu verwandeln.

Fig. 76.



Man errichte in den Puncten A und B der Grundlinie AB auf diese zwei Senkrechte, welche die gegenüberstehende Seite und ihre Verlängerung in den Puncten E und F treffen. Die rechtwinkligen Dreiecke BFC und AED sind congruent. (I. Congruenzsatz.) Man erhält daher die gleiche Fläche, ob man zu dem Vierecke ABFD das Dreieck BFC oder das Dreieck AED hinzusetzt. Addirt man zu ABFC das Dreieck BFC, so erhält man das schiefe Parallelogramm ABCD; addirt man zu ABFD das Dreieck AED, so erhält man das Rechteck ABFE. Also ist das schiefe Parallelogramm ABCD flächengleich mit dem Rechtecke ABFE.

Zur Versinnlichung dieser Verwandlung schneide man das Trapez ABFD und das Dreieck BFC aus Pappendeckel heraus, und lege das Dreieck an das Trapez einmal in der Stellung BFC und dann in der Stellung AED an; im ersten Falle bekommt man das schiefe Parallelogramm, im zweiten das Rechteck, welche beide, da sie aus denselben Bestandtheilen zusammengesetzt sind, auch gleichen Flächeninhalt haben müssen.

Da AB die Grundlinie sowohl des schiefen Parallelogramms als des Rechteckes ist, und BF die Höhe von beiden Vierecken vorstellt, so sieht man, daß sich jedes schiefe Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln läßt, welches mit ihm dieselbe Grundlinie nnd gleiche Höhe hat.

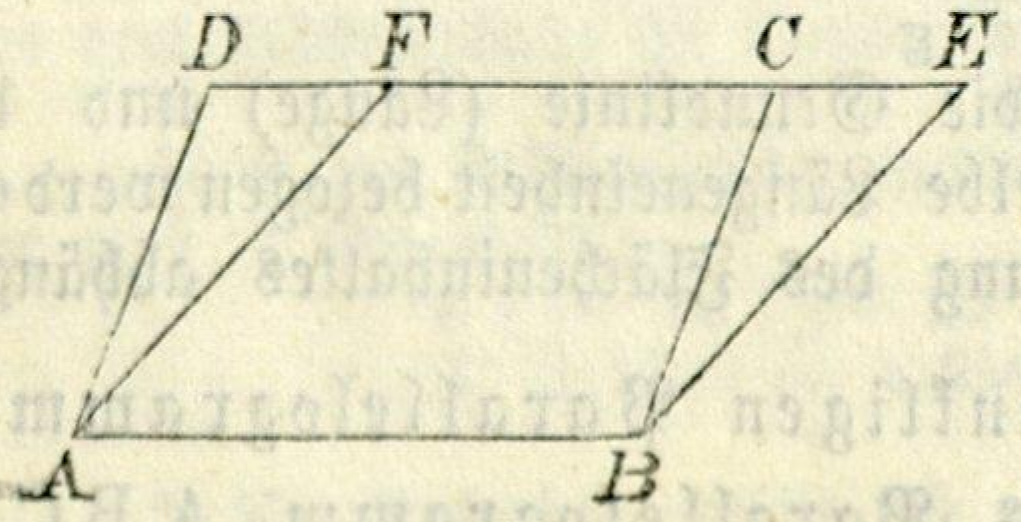
§. 111. Der Flächeninhalt des Rechteckes ABFE (Fig. 75) ist gleich der Maßzahl der Grundlinie AB multiplicirt mit der Maßzahl der Höhe BF; daher ist auch der Flächeninhalt des gleich großen schiefen Parallelogramms ABCD gleich $AB \times BF$; d. h.:

Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Ist z. B. die Grundlinie $AB = 8^m$, die Höhe $BF = 4^m$, so ist $8 \times 4 = 32 \square^m$ der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.

Aus dem Vorhergehenden folgt: Zwei Parallelogramme, welche dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe haben, sind einander gleich. Man kann sich davon auch durch eine einfache Construction zweier solcher Parallelogramme ABCD und ABEF (Fig. 77) unmittelbar überzeugen.

Fig. 77.

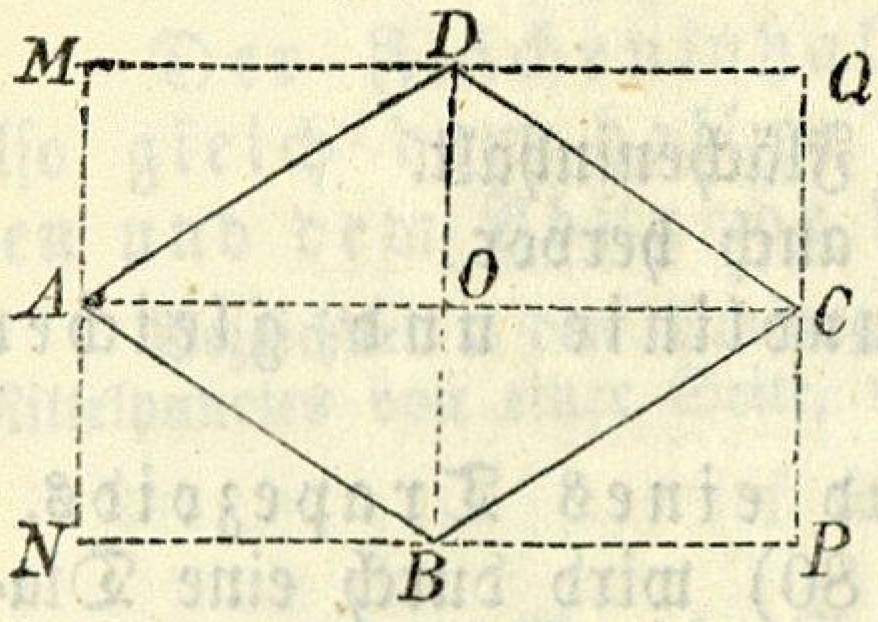


Es ist leicht zu zeigen, daß die Dreiecke ADF und BCE congruent sind. Nimmt man nun von dem Parallelogramm ABCD das Dreieck ADF hinweg und überträgt es an die Stelle von BCE, so verwandelt sich dadurch jenes Parallelogramm in das Parallelogramm ABEF; folglich müssen beide gleich groß sein.

Welche Lagen können die der gemeinschaftlichen Grundlinie AB gegenüberliegenden Seiten CD und EF noch haben, und wie wird in diesen Fällen anschaulich gezeigt, daß die beiden Parallelogramme gleich sind?

§. 112. Ist ABCD (Fig. 78) ein Rhombus, so stehen die Diagonalen AC und BD auf einander senkrecht und halbiren sich im Puncte O. Zieht man durch die Eckpuncte gerade Linien, welche mit den Diagonalen parallel sind, so erhält man ein Rechteck MNPQ, dessen Grundlinie und Höhe den Diagonalen des Rhombus gleich sind. Da nun der Rhombus genau die Hälfte dieses Rechteckes ist, so ergibt sich der Satz:

Fig. 78



Der Flächeninhalt eines Rhombus ist gleich dem halben Producte der beiden Diagonalen.

Ebenso läßt sich nachweisen:

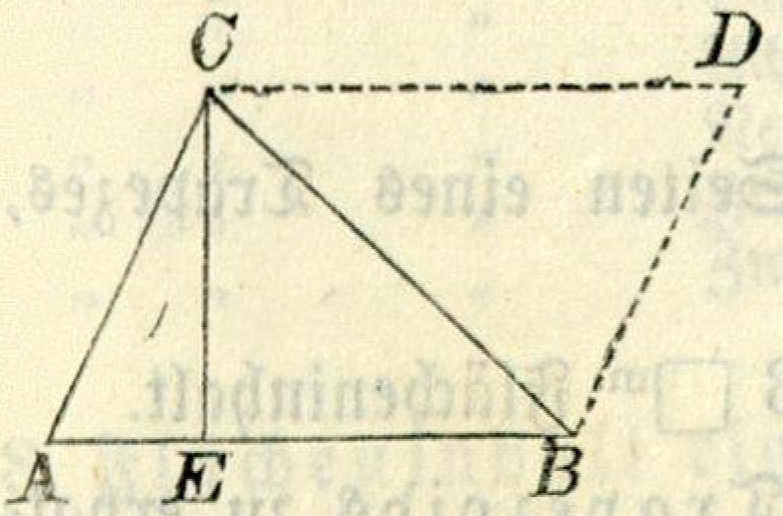
Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der halben zweiten Potenz seiner Diagonale.

5. Flächeninhalt eines Dreieckes.

§. 113. Jedes Dreieck ABC (Fig. 79) kann als die Hälfte eines Parallelogramms ABDC, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, dargestellt werden; man darf nur durch zwei Eckpuncte B und C mit den gegenüberliegenden Seiten Parallele ziehen. Da also $\triangle ABC = \frac{1}{2} ABDC$ und $ABDC = AB \times CE$ ist, so ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} \times AB \times CE; \text{ d. h.:}$$

Fig. 79.



Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Drückt man die Maßzahlen der Grundlinie, der Höhe und des Flächeninhaltes eines Dreieckes bezüglich durch g, h und f aus, so ist

$$f = \frac{g \times h}{2},$$

und umgekehrt

$$g = \frac{2f}{h}, \; h = \frac{2f}{g}.$$

Ist z. B. 10^m die Grundlinie und 7^m die Höhe des Dreieckes, so ist der Flächeninhalt desselben $= \frac{10 \times 7}{2} = 35 \,\square^m$.

In einem *rechtwinkligen Dreiecke* wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen, wo sodann die andere Kathete die Höhe vorstellt. *Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Producte der beiden Katheten.*

Es sei z. B. in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete $3^m\ 5^{dm}$ und die andere $2^m\ 4^{dm}$, so hat man

$$
\begin{array}{r}
3^m\ 5^{dm} = 3{\cdot}5^m \\
2^m\ 4^{dm} = 2{\cdot}4^m \\
\hline
140 \\
70 \\
\hline
8{\cdot}40\ \square^m
\end{array}
$$
Flächeninhalt.

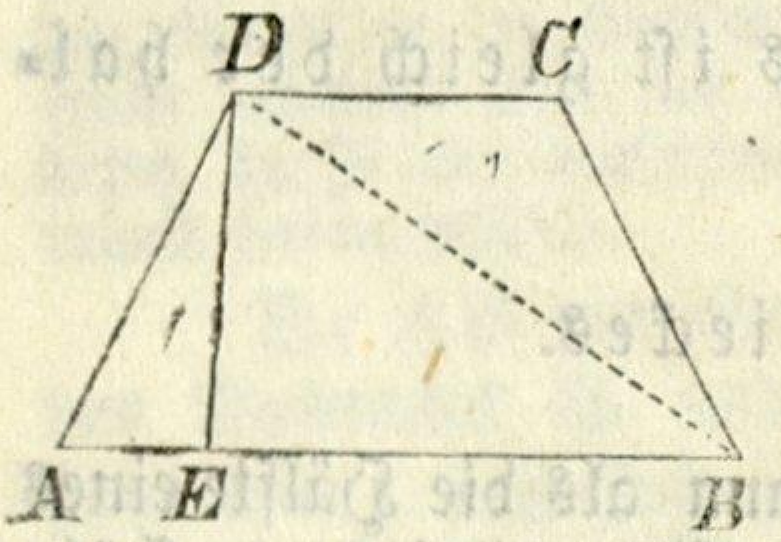
Aus den hier entwickelten Sätzen geht auch hervor:

Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

6. Flächeninhalt eines Trapezes und eines Trapezoids.

§. 114. Jedes Trapez ABCD (Fig. 80) wird durch eine Diagonale BD in zwei Dreiecke ABD und BCD zerlegt, deren Grundlinien AB und CD die Parallelseiten des Trapezes sind, und deren gemeinschaftliche Höhe DE zugleich die Höhe des Trapezes ist. Nun ist

Fig. 80.



$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} \times AB \times DE,$$
$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2} \times CD \times DE;$$

daher Trapez $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD \times DE;$ d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Producte aus der Summe der parallelen Seiten und der Höhe.

Bezeichnen a und b die parallelen Seiten, h die Höhe und f den Flächeninhalt des Trapezes, so ist $f = \frac{(a + b) \times h}{2}$.

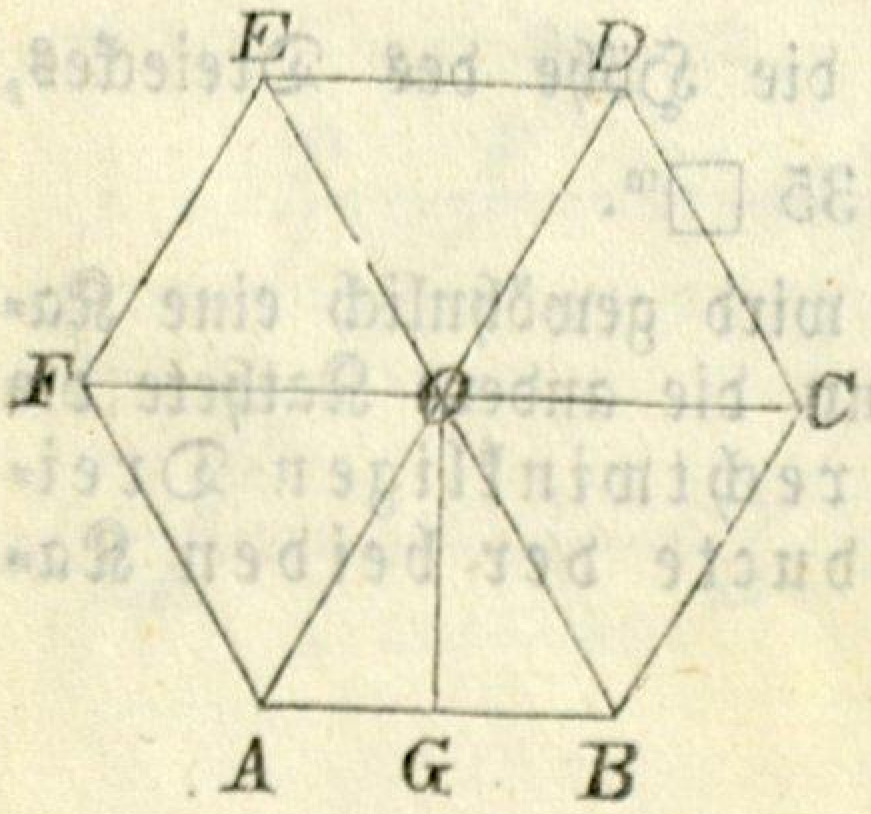
Sind z. B. 16^m und 10^m die parallelen Seiten eines Trapezes, dessen Höhe 11^m beträgt, so hat man

$$\frac{16 + 10}{2} \times 11 = \tfrac{26}{2} \times 11 = 13 \times 11 = 143\ \square^m \text{ Flächeninhalt.}$$

§. 115. Um den Flächeninhalt eines Trapezoids zu erhalten, zerlege man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, berechne die Flächeninhalte derselben, indem man die Diagonale als gemeinschaftliche Grundlinie und die darauf von den gegenüberliegenden Eckpuncten gefällten Senkrechten als Höhen annimmt, und addire die Dreiecksflächen.

7. Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes.

Fig. 81.



§. 116. Ist O (Fig. 81) der Mittelpunct des regelmäßigen Vieleckes ABCDEF, und zieht man von diesem Puncte zu allen Eckpuncten gerade Linien, so zerfällt das Vieleck in so viele congruente Dreiecke, als es Seiten hat. Der Abstand OG des Mittelpunctes von einer Seite stellt die gemeinschaftliche Höhe aller dieser Dreiecke vor, wenn man in denselben die Vielecksseiten als Grundlinien annimmt. Nun ist der Flächenınhalt eines Dreieckes gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe; daher der Flächeninhalt des Vieleckes gleich dem halben Producte aus der Summe der Grundlinien aller Dreiecke, d. i. aus dem Umfange des Vieleckes und der gemeinschaftlichen Höhe der Dreiecke, d. i. dem Abstande des Mittelpunctes von einer Seite.

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist also gleich dem halben Producte aus dem Umfange desselben und dem Abstande des Mittelpunctes von einer Seite.

Bezeichnet u den Umfang eines regelmäßigen Vieleckes, r den Abstand des Mittelpunctes von einer Seite, und f den Flächeninhalt, so ist

$$f = \frac{u \times r}{2}.$$

Es sei z. B. die Seite eines regelmäßigen Sechseckes 3^m 81^{cm} und der Abstand des Mittelpunctes von einer Seite 3^m 3^{dm}, so hat man

Seite $3^m\ 8^{cm}$ = 38^{cm}	$2286 \times 165 = 377190 \square^{cm}$	
Umfang = 2286^{cm}	$= 37 \square^m\ 71 \square^{dm}\ 90 \square^{cm}$	
Abstand $3^m\ 3^{dm}$ = 330^{cm}	Inhalt des Sechseckes.	

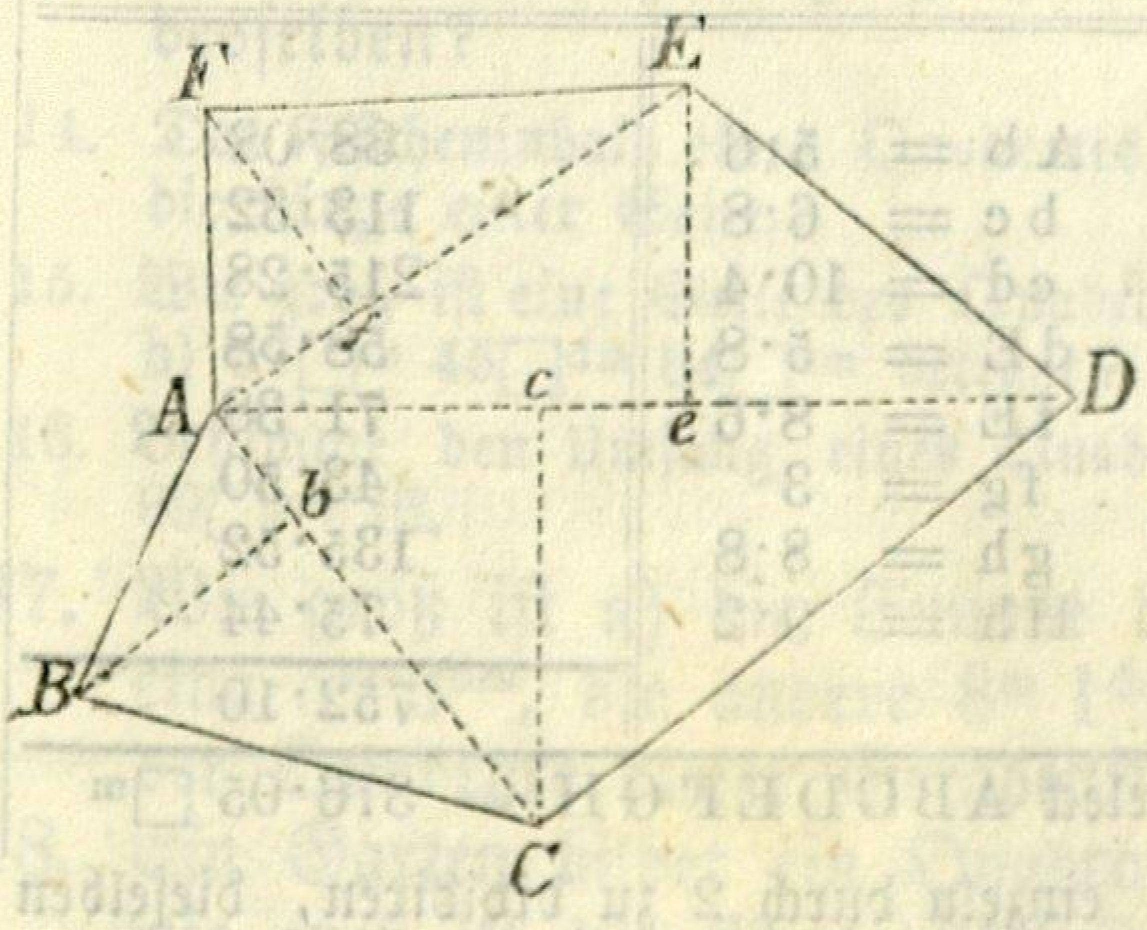
Der Abstand des Mittelpunctes eines regelmäßigen Vieleckes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich den Abstand des Mittelpunctes von einer Seite zu finden, muß man die Maßzahl der Seite

in einem gleichseitigen		Dreiecke	mit	0·28868,
„ „		Quadrate	„	0·50000,
„ „	regelmäßigen	Fünfecke	„	0·68819,
„ „	„	Sechsecke	„	0·86603,
„ „	„	Siebenecke	„	1·08326,
„ „	„	Achtecke	„	1·20711,
„ „	„	Neunecke	„	1·37374,
„ „	„	Zehnecke	„	1·53884,
„ „	„	Zwölfecke	„	1·86603 multipliciren.

8. Flächeninhalt einer unregelmäßigen geradlinigen Figur.

§. 117. Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man auf eine der folgenden Arten bestimmen:

Fig. 82.



a) Man zerlege das Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne den Inhalt jedes dieser Dreiecke und addire alle Dreiecksflächen.

Es sei der Flächeninhalt des Vieleckes ABCDEF (Fig. 82) zu bestimmen. Man zerlege dasselbe in Dreiecke, und es sei $AC = 12·8^m$, $Bb = 6·9^m$, $AD = 20·8^m$, $Cc = 10·4^m$, $Ee = 8^m$, $AE = 13·8^m$ und $Ff = 5·9^m$.

Man hat nun

$$\text{Dreieck } ABC = \frac{AC \times Bb}{2} = \frac{12{\cdot}8 \times 6{\cdot}9}{2} = 44{\cdot}16 \ \square^{m}$$

$$\text{,, } ACD = \frac{AD \times Cc}{2} = \frac{20{\cdot}8 \times 10{\cdot}4}{2} = 108{\cdot}16 \text{ ,,}$$

$$\text{,, } ADE = \frac{AD \times Ee}{2} = \frac{20{\cdot}8 \times 8}{2} = 83{\cdot}2 \text{ ,,}$$

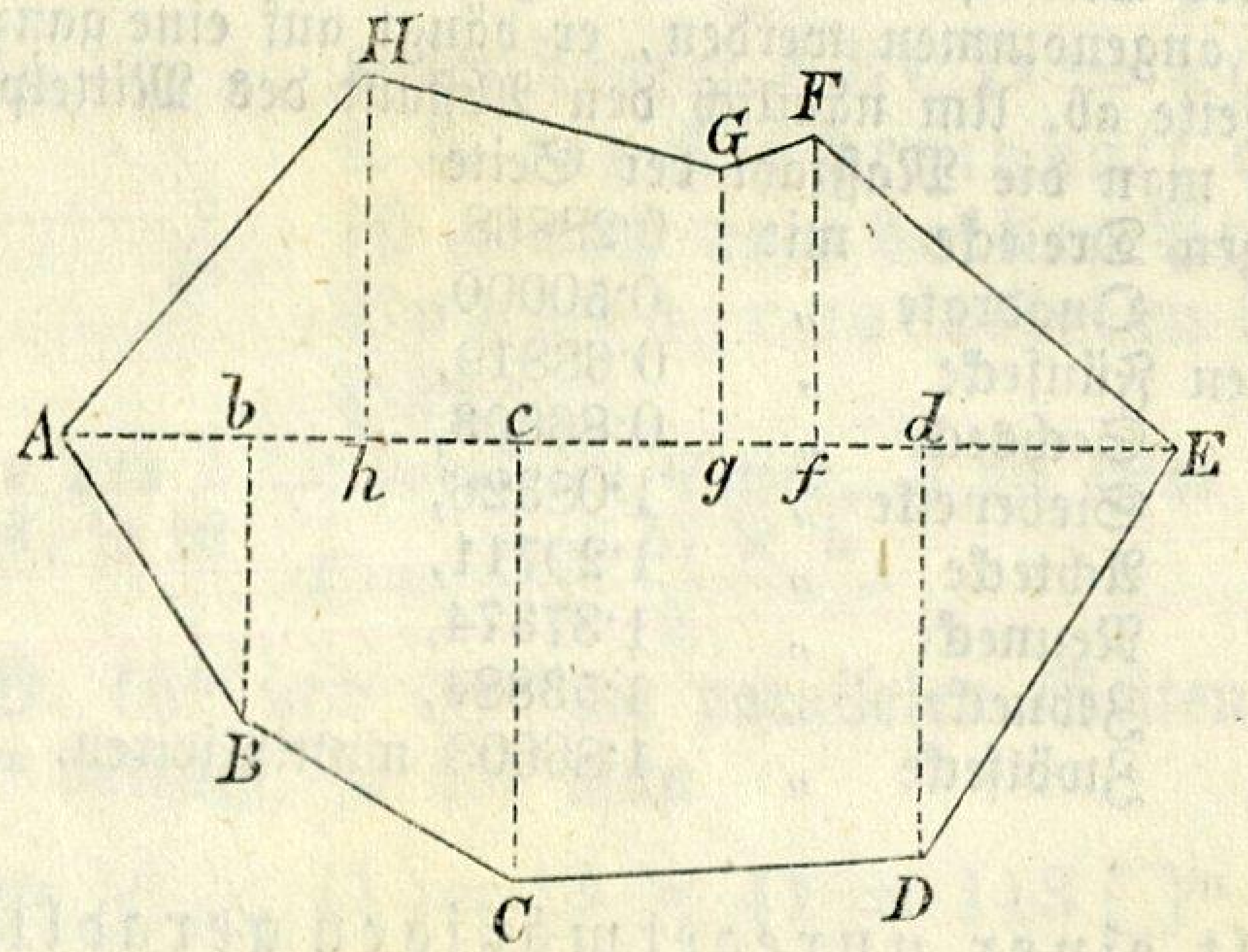
$$\text{,, } AEF = \frac{AE \times Ff}{2} = \frac{13{\cdot}8 \times 5{\cdot}9}{2} = 40{\cdot}71 \text{ ,,}$$

$$\text{Vieleck } ABCDEF = 276{\cdot}23 \ \square^{m}.$$

b) Man ziehe durch die zwei entferntesten Eckpuncte eine Gerade und fälle darauf von allen übrigen Eckpuncten Senkrechte, so zerfällt das Vieleck in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addirt werden.

Es sei (Fig. 83) $Bb = 6{\cdot}8^{m}$, $Cc = 10{\cdot}6^{m}$, $Dd = 10{\cdot}1^{m}$, $Ff = 8{\cdot}3^{m}$, $Gg = 6{\cdot}2^{m}$, $Hh = 9{\cdot}2^{m}$; ferner $Ab = 5{\cdot}6^{m}$, $bh = 2{\cdot}6^{m}$, $hc = 4{\cdot}2^{m}$, $cg = 4{\cdot}6^{m}$, $gf = 3^{m}$, $fd = 2{\cdot}8^{m}$, $dE = 5{\cdot}8^{m}$.

Fig. 83.



Man kann die Rechnung so zusammenstellen:

Bestandtheile des Vielecks	Factoren: Grundlinien oder Summen der Parallelseiten	Factoren: Höhen	Producte
△ ABb	Bb = 6·8	Ab = 5·6	38·08
Trap. BbcC	Bb + Cc = 17·4	bc = 6·8	113·32
„ CcdD	Cc + Dd = 20·7	cd = 10·4	215·28
△ DdE	Dd = 10·1	dE = 5·8	58·58
„ EFf	Ff = 8·3	fE = 8·6	71·38
Trap. FfgG	Ff + Gg = 14·5	fg = 3	43·50
„ GghH	Gg + Hh = 15·4	gh = 8·8	135·52
△ AhH	Ah = 8·2	Hh = 9·2	75·44
			752·10

Vieleck ABCDEFGH = 376·05 $\square^{m}$

Hier hat man, anstatt die Producte einzeln durch 2 zu dividiren, dieselben früher addirt, und erst die Summe durch 2 dividirt.

9. Aufgaben
über die Ausmessung geradliniger Figuren.

§. 118. Umrechnung der Flächenmaße.

1. Verwandle in $\square^{m}$, $\square^{dm}$, $\square^{cm}$:
   a) $57\square'$, b) $0{\cdot}872\square^{0}$, c) $2\square^{0}$ $24\square'$ $109\square''$.
2. Verwandle in $\square^{0}$, $\square'$, $\square''$:
   a) $43\square^{m}$, b) $2{\cdot}34\square^{m}$, c) $8\square^{m}$ $74\square^{dm}$ $50\square^{cm}$.
3. Verwandle in Hektar und Ar:
   a) 728 Joch, b) 3 Joch $613\square^{0}$.
4. Verwandle in n. ö. Joch und $\square^{0}$:
   a) 14 Hektar, b) 3 Hektar 82 Ar $35\square^{m}$.
5. Für die Pflasterung von $1\square^{0}$ rechnet man 6 fl. 80 kr.; wie viel demnach für $1\square^{m}$?
6. Wenn eine $\square^{0}$ in $\frac{3}{8}$ Stunden umgegraben wird, in welcher Zeit kann man 1 Ar umgraben?
7. Wie theuer ist das Glas zu 6 Fenstern, wenn zu jedem $14\square'$ Glas erforderlich sind und das $\square^{m}$ Glas 3 fl. 12 kr. kostet?
8. Ein Landmann will ein Stück Ackerland, das $4\frac{1}{4}$ Joch beträgt, verkaufen. A bietet für das Joch 536 fl., B für ein Hektar 925 fl.; wer bietet für das ganze Stück mehr, und wie viel mehr?

§. 119. Ausmessung des Quadrates.

9. Die Seite eines Quadrates ist
   a) 15^{m}, b) 1^{m} 3^{dm}, c) 3^{m} 2^{dm} 8^{cm}, d) $5\frac{1}{4}^{m}$, e) $2{\cdot}195^{m}$, f) 1^{m} 8^{cm} 2^{mm}; wie groß ist der Umfang desselben?
10. Bestimme den Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite ist
    a) 37^{m}, b) 18^{m} 5^{dm}, c) 1^{m} 8^{dm} 7^{cm}, d) $9\frac{2}{5}^{m}$, e) $3{\cdot}82^{m}$, f) 2^{m} $5{\cdot}35^{dm}$.
11. Die Seite eines Quadrates ist a) $3{\cdot}714^{m}$, b) 6^{dm} 4^{cm} 5^{mm}; wie groß ist m) der Umfang, n) der Flächeninhalt des Quadrates?
12. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Umfang 2^{m} 5^{dm} 8^{cm} beträgt?
13. Der Umfang eines Quadrates ist a) 2^{m} 8^{dm}, b) 4^{m} 3^{dm} 8^{cm}, c) $19{\cdot}356^{dm}$; wie groß ist m) eine Seite, n) der Flächeninhalt desselben?
14. Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt $24\square^{m}$ $20\square^{dm}$ $64\square^{cm}$; bestimme die Länge einer Seite.
15. Wie groß ist eine Seite des Quadrates, wenn der Flächeninhalt a) $38{\cdot}44\square^{m}$ b) $57\square^{m}$ $45\square^{dm}$ $64\square^{cm}$ beträgt?
16. Bestimme den Umfang eines Quadrates, dessen Flächeninhalt $8\square^{m}$ $23\square^{dm}$ $69\square^{cm}$ ist.
17. Wie groß ist a) die Summe der Quadrate zweier Geraden, deren eine 5^{m} 3^{dm}, die andere 8^{m} 1^{dm} 5^{cm} lang ist, und b) die Differenz der Quadrate dieser Geraden?
18. Ein Garten bildet ein Quadrat, worin jede Seite 22^{m} 5^{dm} mißt; wie groß ist die Gartenfläche?

19. Eine quadratförmige Wand soll vertäfelt werden; was kostet die Vertäfelung, wenn eine Seite 4^{m} 2^{dm} beträgt und für jedes Quadratmeter $12\frac{1}{2}$ fl. gezahlt werden?

20. Wie viel kosten 12 quadratförmige Glastafeln von $4 \cdot 8^{dm}$ Seitenlänge, wenn das $\square^{m}$ zu 3 fl. 40 kr. gerechnet wird?

21. Böhmen hat ein Flächenraum von $519 \cdot 55$ $\square^{Mm}$; wie lang ist die Seite eines gleich großen Quadrates?

§. 120. Ausmessung des Rechteckes und schiefwinkligen Parallelogrammes.

22. Ein Rechteck hat $3 \cdot 4^{m}$ zur Grundlinie und $2 \cdot 8^{m}$ zur Höhe; wie groß ist der Umfang desselben?

23. An einem schiefwinkligen Parallelogramme betragen zwei zusammentreffende Seiten 3^{m} 8^{dm} und 9^{dm} 5^{cm}; welchen Umfang hat das Parallelogramm?

24. Die Grundlinie eines Rechteckes beträgt 23^{dm}, die Höhe 15^{dm}; wie groß ist der Flächeninhalt?

25. Bestimme den Flächeninhalt eines Rechteckes, wenn gegeben sind:
    a) Länge = 7^{m} 4^{dm}, Breite = 3^{m} 5^{dm};
    b) „ = 3^{m} 1^{dm} 2^{cm}, „ = 1^{m} 5^{dm};
    c) „ = $18\frac{1}{2}^{dm}$, „ = $14\frac{3}{4}^{dm}$ 9^{cm};
    d) „ = $5 \cdot 154^{m}$, „ = $2 \cdot 35^{m}$.

26. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, das 53^{m} 2^{dm} lang ist, und dessen Breite $\frac{3}{14}$ der Länge beträgt?

27. In einem Rechtecke beträgt a) die Grundlinie 6^{m} 5^{dm}, die Höhe 2^{m} 7^{dm}; b) die Grundlinie 4^{dm} 9^{cm}, die Höhe 8^{cm}; wie groß ist m) der Umfang, n) der Flächeninhalt des Rechteckes?

28. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 24^{m}, die Grundlinie ist 9^{m} 2^{dm}; wie groß ist die Höhe?

29. Ein Rechteck ist 9^{m} 4^{dm} breit und hat 86^{m} 2^{dm} im Umfange; wie groß ist a) die Länge, b) der Flächeninhalt dieses Rechteckes?

30. Ein Rechteck hat
    a) $34\square^{dm}$ Inhalt und 4^{dm} Länge,
    b) $21\square^{m}$ $92\square^{dm}$ $40\square^{cm}$ „ „ 6^{m} 3^{dm} „ ;
    wie groß ist die Breite?

31. Ein anderes Rechteck ist
    a) $6\square^{m}$ $12\square^{dm}$ groß und 1^{m} 6^{dm} breit;
    b) $16\square^{m}$ 19^{dm} $80\square^{cm}$ „ „ 3^{m} 6^{dm} 4^{cm} „
    wie viel beträgt die Länge?

32. Ein schiefwinkliges Parallelogramm hat zur Grundlinie 3^{m} 4^{dm}, zur Höhe 1^{m} 5^{dm}; wie groß ist der Abstand der beiden an der Grundlinie anliegenden Seiten, wenn eine derselben 3^{m} beträgt?

33. Der Umfang eines Rechteckes mißt 200^{m}, die Grundlinie ist doppelt so lang als die Höhe; wie groß ist a) die Grundlinie, b) die Höhe, c) der Flächeninhalt?

34. Ein Rechteck ist 7^{dm} lang und 6^{dm} breit; wie vielmal so groß wird seine Fläche, wenn man die Länge und die Breite verdoppelt?
35. Um wie viel wird der Inhalt eines Rechteckes von $4{\cdot}56^{m}$ Länge und $3{\cdot}45^{m}$ Breite kleiner, wenn jede Seite um $0{\cdot}75^{m}$ kleiner wird?
36. Zeichne ein Rechteck von 16^{dm} Länge und 4^{dm} Breite, bilde aus demselben ein neues, indem die Länge um 1^{dm} verkleinert und die Breite um 1^{dm} vergrößert wird, und fahre fort, auf diese Art neue Rechtecke zu bilden, bis zuletzt Länge und Breite gleich sind. Vergleiche dann diese rechtwinkligen Vierecke nach der Reihe in Hinsicht ihres Umfanges und ihres Flächeninhaltes mit einander. Welches unter ihnen hat den größten Inhalt?
37. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches an Inhalt einem Parallelogramme gleich ist, dessen Grundlinie 9^{m} 5^{dm} 4^{cm} und dessen Höhe 2^{m} 2^{dm} 9^{cm} ist?
38. In einem Rhombus ist eine Seite 12^{dm} und der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten 8^{dm}; wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt?
39. Bestimme den Flächeninhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen a) 3^{m} 5^{dm} und 5^{m} 4^{dm}, b) $1{\cdot}04^{m}$ und $0{\cdot}85^{m}$ sind.
40. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Diagonale a) 2^{m}, b) $3{\cdot}5^{m}$, c) 1^{m} 4^{dm} 8^{mm} ist?

---

41. Wie viel Quadratcentimeter kann man aus einem Bogen Papier, dessen Länge 52^{cm} und dessen Breite 40^{cm} beträgt, herausschneiden?
42. Eine rechteckige Glastafel ist $0{\cdot}4^{m}$ lang, und 3^{dm} breit; wie groß ist ihre Fläche?
43. Ein Grundstück, dessen Figur ein Parallelogramm bildet, ist nach einer Seite 27^{m} 4^{dm} lang, die entsprechende Höhe beträgt 10^{m} 2^{dm}; wie groß ist der Flächeninhalt?
44. Wie lang ist ein rechtwinkliges Stück Land, das $35543{\cdot}2\square^{0}$ mißt und $61{\cdot}6^{m}$ breit ist?
45. Ein Spiegel hat 18^{dm} 8^{cm} im Umfang und 6^{dm} 2^{cm} in der Höhe; wie groß ist dessen Breite?
46. Wie groß ist die Fläche eines Tisches, welcher 1^{m} 8^{dm} lang und 1^{m} 3^{dm} breit ist?
47. Die Decke eines Zimmers ist rechtwinklig, 6^{m} 8^{dm} lang und 2^{m} 9^{dm} breit; suche ihren Flächeninhalt.
48. Welchen Flächeninhalt bedeckt ein Brett von $4{\cdot}5^{m}$ Länge und 4^{dm} Breite?
49. Wie viel $\square^{dm}$ hat eine Ofenthür, welche $1\frac{1}{4}^{m}$ lang und $\frac{3}{4}^{m}$ breit ist?
50. Wie viel $\square^{m}$ hält eine Rolle Tapeten, welche $7{\cdot}88^{m}$ lang und 42^{cm} breit ist?
51. Ein Landmann kauft einen Acker im angegebenen Flächenmaße von $1\frac{1}{2}$ Joch. Er läßt ihn vermessen und findet als Länge 284^{m}, als Breite 30^{m}; wurde ihm die Größe des Ackers richtig angegeben?

52. Wie viel Hektar hält ein Garten in der Form eines Rechteckes, dessen Länge $348 \cdot 4^m$ und dessen Breite $\frac{3}{4}$ der Länge beträgt?
53. Eine zwischen zwei Wegen liegende Wiese hat die Form eines Rhomboids, dessen Grundlinie 396^m 4^{dm}, dessen entsprechende Höhe 167^m 5^{dm} ist; wie viel Hektar mißt die Wiese?
54. Ein Acker ist $110 \cdot 2^m$ lang und $51 \cdot 5^m$ breit; wie viel Ar beträgt der Inhalt?
55. Ein Acker hat 7·174 Hektar Inhalt, die Breite beträgt $168 \cdot 5^m$; wie groß ist die Länge?
56. Von einem 283^m langen Felde will man eine gleich lange Parzelle von 38·205 Ar Inhalt abtheilen; welche Breite wird diese Parzelle erhalten?

---

57. Wie viele Bäume können an dem Umfange eines Gartens von 144^m 2^{dm} Länge und 85^m 4^{dm} Breite gesetzt werden, wenn sie 4^m 2^{dm} von einander abstehen?
58. Ein rechtwinkliges Blumenbeet ist 1^m 2^{dm} breit und hat 11^m 2^{dm} im Umfang; wie groß ist sein Flächeninhalt?
59. Ein Stück Tuch ist 24^m lang und 145^{cm} breit; wie viel $\square^m$ enthält es?
60. In einem Zimmer sind 64 $\square^m$ Wandfläche zu tapeziren; man nimmt Tapeten von 38^{cm} Breite; wie viel Stück Tapeten braucht man, wenn jedes Stück $5\frac{1}{2}^m$ lang ist?
61. Wie viel ist ein Spiegel von $1 \cdot 2^m$ Höhe und 64^{cm} Breite werth, wenn der Preis für das Quadratmeter 86 fl. beträgt?
62. Jemand vertauscht einen Acker, welcher 1147 $\square^m$ mißt, gegen einen anderen, welcher von gleicher Güte und 10^m 5^{dm} breit ist; wie viel beträgt dessen Länge?
63. Jemand vertauscht eine Wiese von 324 $\square^m$ Inhalt gegen eine andere von gleichem Inhalt, die $21 \cdot 6^m$ lang ist; wie breit muß diese sein?
64. Ein Stück Land von 270^m Länge und 150^m Breite soll mit einem anderen von gleicher Bodengüte, das $\frac{5}{6}$ der Länge des ersteren hat, vertauscht werden; wie breit muß das letztere sein?
65. Ein rechtwinkliger Acker ist 5mal so lang als breit und hat 196^m Umfang; wie viel Ar hat er?
66. Eine Wiese ist $104 \cdot 8^m$ lang und $47 \cdot 5^m$ breit; wie viel Heu gibt sie, wenn man auf 1 Ar durchschnittlich 28 Kilogr. Heu rechnet?
67. Ein Acker hat 25·8173 Hektar Fläche und $546 \cdot 4^m$ Länge; wie groß ist a) die Breite, b) der Umfang, c) der Werth zu 12·6 fl. das Ar?
68. Wie theuer kommt ein Bauplatz von 25^m Länge und 19^m Breite, wenn das Quadratmeter mit $4\frac{2}{5}$ fl. bezahlt wird?
69. Ein anderer Bauplatz von $24 \cdot 5^m$ Länge kostet $2332\frac{3}{5}$ fl.; wie breit ist derselbe, wenn das $\square^m$ mit $8\frac{1}{2}$ fl. bezahlt wird?

70. Ein Bauplatz hat die Länge von $32{\cdot}5^{m}$ und eine Breite von $15{\cdot}2^{m}$, und wird mit $3062\frac{4}{5}$ fl. bezahlt; wie hoch kommt jedes $\square^{m}$?

71. Wie viel farbige Masse braucht man zum Einlassen eines Fußbodens, der 9^{m} lang und 6^{m} 4^{dm} breit ist, wenn man auf jedes Quadratmeter 26 Dekagramm Masse rechnet?

72. Eine 3^{m} 9^{dm} hohe und 8^{m} 2^{dm} breite Wand wird gemalt; was beträgt die Malerei zu 1 fl. 35 kr. pr. $\square^{m}$ gerechnet?

73. Wie viel kosten 10 Stück Fourniere von 8^{dm} Länge, $2{\cdot}8^{dm}$ Breite, wenn das $\square^{dm}$ mit 18 kr. bezahlt wird?

74. Ein 35^{m} 4^{dm} langer und 17^{m} 1^{dm} breiter Acker wird verkauft; wie viel nimmt man dafür ein, wenn das $\square^{m}$ mit 15 kr. bezahlt wird?

75. Ein Stück Land von $67{\cdot}5^{m}$ Länge wird für 46 fl. 98 kr. gepachtet; wie viel beträgt die Breite, wenn man für das $\square^{m}$ 3 kr. Pachtzins rechnet?

76. Um welchen Preis ist das Quadratmeter eines 43^{m} 3^{dm} langen und 18^{m} 4^{dm} breiten Gartens angekauft worden, wenn man für den ganzen Garten $2589{\cdot}34$ fl. bezahlt hat?

77. Eine Straße von 127^{m} Länge und 4^{m} 3^{dm} Breite ist gepflastert worden; wie hoch ist das $\square^{m}$ gerechnet, wenn die ganze Arbeit auf 512 fl. zu stehen kommt?

78. Ein Spiegel ist 2^{m} 8^{dm} hoch und 1^{m} 9^{dm} breit; der Rahmen ist 4^{cm} breit; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche?

79. Ein Schreiner soll einen Boden legen, der 7^{m} 22^{cm} lang und 5^{m} 48^{cm} breit ist; wie viel Meter Dielen von 29^{cm} Breite muß er dazu nehmen?

80. Wie viel kostet ein Fußboden von 8^{m} 35^{cm} Länge und 5^{m} 2^{dm} Breite, das $\square^{m}$ zu 3 fl. 90 kr. gerechnet?

81. Jemand läßt in zwei Zimmern neue Böden legen; das erste Zimmer bildet ein Quadrat, dessen Seite 6^{m} 4^{dm} mißt; das andere Zimmer ist ein Rechteck von 8^{m} 5^{dm} Länge und 6^{m} 3^{dm} Breite. Was kostet die Arbeit, wenn das $\square^{m}$ mit 2 fl. 20 kr. bezahlt wird?

82. Ein Acker ist 124^{m} lang und 20^{m} breit; wie viel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf ein Hektar $3\frac{1}{10}$ Hektoliter Weizen aussäet?

83. Man kauft zwei Gattungen Papier von gleicher Güte; das eine ist 42^{cm} lang und 33^{cm} breit und kostet 12 kr. pr. Buch; das zweite ist 60^{cm} lang und 40^{cm} breit, und kostet 16 kr. pr. Buch; welche dieser Gattungen Papier ist theurer?

84. A hat einen quadratförmigen Garten von 91^{m} Seitenlänge, B einen rechteckigen Garten von 95^{m} Länge und 76 Ar Flächeninhalt; wie viel Meter Zaun hat der eine mehr zu unterhalten als der andere?

85. A läßt einen quadratförmigen Garten von 23^{m} Seitenlänge, B einen eben so großen rechteckigen Garten von 48^{m} Länge mit einer

Mauer umgeben; welcher hat eine längere Umfangsmauer herzustellen?

86. Es sind 24 Fenster mit je 6 Scheiben von 37^{cm} Breite und 52^{cm} Höhe zu verglasen; wie viel kostet die Glaserarbeit, wenn man für das $\square^{m}$ 4 fl. bezahlt?

87. Die vordere Seite eines Hauses, welches 15^{m} lang und 12^{m} hoch ist, soll mit Oelfarbe angestrichen werden; wie viel kostet der Anstrich, wenn man für das $\square^{m}$ 85 kr. rechnet und wenn man für Thüren und Fenster den zehnten Theil in Abzug bringt?

88. Man will ein Zimmer, dessen Wände 28^{m} Länge und 4^{m} Breite haben, tapeziren; wie viel Rollen Tapeten a 12^{m} Länge und $\frac{1}{2}^{m}$ Breite braucht man dazu, und wie viel kosten diese, die Rolle zu 3 fl. 75 kr. gerechnet?

89. Ein Hausgang von 14^{m} 3^{dm} Länge und 2^{m} 2^{dm} Breite soll mit Platten belegt werden. Wie viel Platten wird man brauchen, wenn jede 3^{dm} lang und 2^{dm} breit ist, und wie theuer kommt der Boden, wenn jede Platte sammt Einlegen auf $1\frac{2}{5}$ fl. kommt?

90. Jemand besitzt einen rechtwinkligen Garten, welcher 64^{m} 5^{dm} lang und 41^{m} 2^{dm} breit ist. Er will an dessen Umfange ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 3^{m} 4^{dm} haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

91. Durch die Mitte eines rechteckigen Gartens von $32{\cdot}4^{m}$ Länge und $20{\cdot}7^{m}$ Breite geht ein $1{\cdot}6^{m}$ breiter Weg; wie viel Gartengrund bleibt übrig?

92. Jemand hat einen Garten von 42^{m} Länge und 26^{m} Breite; wenn er nun in der Mitte einen viereckigen Weiher, welcher 10^{m} 4^{dm} lang und 5^{m} 2^{dm} breit ist, anlegt, wie viel Gartenfläche bleibt noch übrig?

93. Es soll ein Dach, das $6{\cdot}4^{m}$ lang und $4{\cdot}4^{m}$ breit ist, mit Blech gedeckt werden; eine Blechtafel ist 42^{cm} lang und 32^{cm} breit. Wie viele Tafeln braucht man, wenn dieselben durch eine 2^{cm} breite Naht zusammengelöthet werden?

94. Ein anderes Dach ist $31{\cdot}7^{m}$ lang und 4^{m} hoch; wie viel Dachziegel braucht man zur Bedeckung desselben, wenn die Ziegel 24^{cm} lang und 19^{cm} breit sind, und jeder Ziegel die anliegenden Ziegel 35^{mm} nach der Breite und 42^{mm} nach der Länge bedeckt?

95. Ein Speisetisch von 2^{m} 3^{dm} Länge und 1^{m} 1^{dm} Breite soll mit Wachstuch überzogen werden; wie viel $\square^{m}$ sind dazu erforderlich, wenn das Wachstuch auf allen Seiten des Tisches, damit es befestigt werden könne, 3^{cm} überstehen muß?

96. Ein Cassentisch, der $1{\cdot}4^{m}$ lang und $1{\cdot}2^{m}$ breit ist, soll eine Steinplatte bekommen, die 7^{cm} Holzrand stehen läßt; wie viel kostet dieselbe, wenn das $\square^{m}$ mit $28\frac{1}{2}$ fl. bezahlt wird?

97. Eine Tischplatte von 12^{dm} Länge und 9^{dm} Breite enthält in der Mitte als Verzierung einen Rhombus, dessen Diagonalen 4^{dm} und

3^{dm} sind; um wie viel ist die Tischfläche größer als der Inhalt dieses Rhombus?

§. 121. Ausmessung des Dreieckes.

98. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten $2^m\ 4^{dm}$, $2^m\ 7^{dm}$ und 3^m sind?

99. Wie groß ist der Umfang eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a) $1{\cdot}5^m$, b) $7^m\ 5^{dm}\ 8^{cm}$ ist?

100. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist $2^m\ 6^{dm}$, jeder Schenkel $2^m\ 1^{dm}$; wie groß ist der Umfang?

101. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang $5^m\ 7^{dm}\ 6^{cm}$ beträgt?

102. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes ist $4^m\ 89^{cm}$, die Grundlinie $1^m\ 25^{cm}$; wie groß ist jeder Schenkel?

103. Suche die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Umfang $5^m\ 8^{dm}$ und dessen jeder Schenkel $1^m\ 9^{dm}$ mißt.

104. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie $5^m\ 4^{dm}$, dessen Höhe $3^m\ 5^{dm}$ ist?

105. In einem Dreiecke ist
a) die Grundlinie $1^m\ 8^{dm}$, die Höhe $1^m\ 6^{dm}$;
b) „ „ $2{\cdot}345^m$ „ „ $1{\cdot}724^m$;
c) „ „ $25\frac{2}{5}{}^m$ „ „ $14\frac{1}{2}{}^m$;
d) „ „ $1^m\ 5^{dm}$ „ „ $9^{dm}\ 8^{cm}$;
wie groß ist der Flächeninhalt?

106. Ein Dreieck ist $18^m\ 4^{dm}$ hoch und hat $272\ \square^m\ 32\ \square^{dm}$ Inhalt; wie groß ist die Grundlinie?

107. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist $8\ \square^m\ 58\ \square^{dm}$, die Grundlinie $3^m\ 2^{dm}\ 5^{cm}$; wie groß ist die Höhe?

108. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind $5^m\ 4^{dm}\ 1^{cm}$ und $4^m\ 5^{dm}\ 8^{cm}$; wie groß ist der Inhalt?

109. Suche den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten sind: a) $7{\cdot}9^m$ und $3{\cdot}9^m$; b) $49^m\ 5^{dm}$ und $37^m\ 8^{cm}$.

110. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist $27\square^m\ 56\square^{dm}\ 25\square^{cm}$, eine Kathete $5^m\ 25^{cm}$; wie groß ist die andere Kathete?

111. Die Seiten eines Dreieckes sind 344^{cm}, 183^{cm}, 450^{cm}, und die Höhe, welche der ersten Seite entspricht, beträgt $167{\cdot}5^{cm}$; wie groß sind die Höhen in Bezug auf die beiden anderen Seiten?

112. Wie groß ist die Summe zweier Dreiecke, wenn die Höhe eines jeden $17^m\ 4^{dm}$, die Grundlinie des ersten $28^m\ 5^{dm}$ und die des zweiten $24^m\ 1^{dm}$ beträgt?

113. Die Grundlinie eines Dreieckes ist 6^m, die Höhe $3^m\ 2^{cm}$; wie viel beträgt die Höhe eines doppelt so großen Dreieckes, dessen Grundlinie 8^m ist?

114. Welche Höhe hat ein Dreieck von 12^m Grundlinie, das an Inhalt einem Rechtecke von $15{\cdot}2^m$ Grundlinie und $8{\cdot}4^m$ Höhe gleich kommt?

115. Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie 16^m und dessen Höhe $12{\cdot}5^m$ ist, hat mit einem Dreiecke gleichen Flächeninhalt; wie groß ist die Grundlinie des Dreieckes, wenn dessen Höhe 20^m beträgt?

116. Wie groß ist die Höhe eines Dreieckes von 8^m 1^{dm} Grundlinie, das den gleichen Inhalt hat, wie ein Quadrat von 5^m 4^{dm} Seitenlänge?

117. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das an Flächeninhalt einem Dreiecke von 21^{dm} Grundlinie und $4{\cdot}4^{dm}$ Höhe gleich kommt?

---

118. Eine dreieckige Fläche, deren Grundlinie $17\frac{1}{2}^{dm}$ und deren Höhe $12\frac{2}{5}^{dm}$ ist, soll mit Sturzblech beschlagen werden; wie viel $\square^{dm}$ Sturzblech braucht man dazu?

119. Eine Wiese hat die Form eines Dreieckes von 172^m 4^{dm} Grundlinie und 31^m 5^{dm} Höhe; wie viel Ar hält sie?

120. Ein Acker hat die Form eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 103^m und $67{\cdot}6^m$ sind; wie viel ist er werth, wenn ein Ar zu 11 fl. gerechnet wird?

121. Ein Stück Land von der Form eines Dreieckes hat 972 Ar Inhalt und 28^m 8^{dm} Höhe; wie groß ist die Grundlinie des Dreieckes?

122. Was kostet eine dreieckige Blechplatte von $4{\cdot}6^m$ Grundlinie und $3{\cdot}2^m$ Höhe, wenn das Quadratmeter 14 Kilogramm wiegt und das Kilogramm 64 kr. kostet?

123. Ein dreieckiges Feld von 50^m 4^{dm} 8^{cm} Grundlinie hat mit einem quadratischen von 32^m 4^{dm} 2^{cm} Seitenlänge gleichen Inhalt; wie groß ist die Höhe des ersten Feldes?

124. Ein dreieckiges Stück Ackerland von $67\frac{1}{2}^m$ Länge und 28^m Höhe soll gegen ein rechteckiges von gleicher Güte, das 17^m 5^{dm} Breite hat, vertauscht werden; wie lang muß dieses sein?

125. Die Grundlinie eines Dachgiebels ist $11{\cdot}2^m$, seine Höhe $4{\cdot}5^m$; wie groß ist seine Fläche?

126. Ein Thurmdach besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken, in deren jedem die Grundlinie 2^m 2^{dm} und die Höhe 5^m 4^{dm} beträgt; wie viel $\square^m$ Blech braucht man zu dessen Bedeckung?

127. Zwei Dachgiebel, deren jeder 12^m 4^{dm} zur Grundlinie und 18^m 8^{dm} zur Höhe hat, sollen mit Ziegeln gedeckt werden, die 3^{dm} lang und 2^{dm} breit sind und sowohl mit ihrer Längen- als mit ihrer Breitenseite $0{\cdot}4^{dm}$ über einander liegen; wie viel Dachziegel sind erforderlich, wenn wegen des Bruches 4% hinzugerechnet werden?

§. 122. Ausmessung des Trapezes und des Trapezoids.

128. In einem Vierecke (Trapeze oder Trapezoide) betragen die Seiten nach der Reihe 13^m 5^{dm}, 12^m 4^{dm}, 27^m 3^{dm}, 19^m 2^{dm}; wie groß ist der Umfang?

129. Ein Trapez hat $5^m\ 4^{dm}$ Höhe, die parallelen Seiten sind $6^m\ 8^{dm}$ und $4^m\ 2^{dm}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

130. Suche den Flächeninhalt eines Trapezes, wenn gegeben sind:
 a) die Parallelseiten $3^m\ 4^{dm}$ und $7^m\ 2^{dm}$, die Höhe $4^m\ 2^{dm}$;
 b) „ „ $12{\cdot}745^m$ und $8{\cdot}655^m$, die Höhe $9{\cdot}8^m$.

131. In einem Trapeze, dessen Inhalt 567 $\square^{dm}$ beträgt, sind die Parallelseiten $3^m\ 6^{dm}$ und $2^m\ 7^{dm}$; wie weit stehen sie von einander ab?

132. Wie groß ist die Höhe eines Trapezes, dessen Inhalt 63 $\square^{dm}$ und dessen Parallelseiten $6{\cdot}2^{dm}$ und $3{\cdot}8^{dm}$ sind?

133. Ein Trapez mißt $124{\cdot}8\ \square^m$, die Höhe beträgt $6{\cdot}4^m$, eine der beiden parallelen Seiten $12{\cdot}8^m$; wie groß ist die zweite Parallelseite?

134. In einem Trapezoide ist die durch zwei Eckpuncte gezogene Diagonale $5{\cdot}24^m$ lang, ihre Abstände von den beiden anderen Eckpuncten sind $3{\cdot}56^m$ und $2{\cdot}35^m$; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

135. Die Diagonalen eines Viereckes stehen senkrecht auf einander; wie groß ist der Flächeninhalt desselben, wenn die Entfernungen der vier Eckpuncte von dem Durchschnittspuncte der Diagonalen folgeweise $4^m\ 2^{dm}$, $3^m\ 8^{dm}$, $1^m\ 5^{dm}$ und $5^m\ 5^{dm}$ betragen?

136. Wie groß ist die Länge eines $5^m\ 2^{dm}$ breiten Rechteckes, das denselben Flächeninhalt hat, wie ein Trapez, dessen Höhe $6^m\ 3^{dm}$ und dessen Parallelseiten 11^m und $9^m\ 4^{dm}$ betragen?

137. Die Parallelseiten eines Trapezes sind $7{\cdot}5^m$ und $5{\cdot}3^m$, die Höhe $6{\cdot}4^m$; wie groß ist die Seite eines Quadrates, das an Flächeninhalt diesem Trapeze gleichkommt?

---

138. Ein Bauplatz bildet ein Trapez, dessen Parallelseiten $35^m\ 2^{dm}$ und $33^m\ 5^{dm}$ betragen, und welches $21^m\ 4^{dm}$ zur Höhe hat; wie groß ist dessen Flächenraum?

139. Ein anderer trapezförmiger Bauplatz ist an der einen der parallelen Seiten $23\frac{1}{2}^m$, an der andern $21\frac{2}{5}^m$ lang, und mißt 417 $\square^m$ 57 $\square^{dm}$; wie groß ist dessen Breite?

140. Wie groß ist die Fläche eines trapezförmigen Feldes, dessen Parallelseiten $14^m\ 3^{dm}$ und $10^m\ 5^{dm}$ lang sind, und den Abstand $63^m\ 4^{dm}$ haben?

141. Ein Brett ist $4^m\ 2^{dm}$ lang und an einem Ende 4^{dm}, am andern 3^{dm} breit; wie groß ist eine der Brettflächen?

142. Ein anderes Brett ist 5^m lang und an einem Ende 24^{cm} breit; wie breit ist es am andern Ende, wenn es 1 $\square^m$ 15 $\square^{dm}$ mißt?

143. Eine Mauer ist an dem einen Ende $5{\cdot}4^m$, an dem andern $4{\cdot}8^m$ hoch, die Länge beträgt $24{\cdot}5^m$; wie groß ist eine der Mauerflächen?

144. Ein Acker hat die Form eines Trapezoides, worin eine Diagonale $67^m\ 6^{dm}$, die Höhe eines Dreieckes $16^m\ 4^{dm}$, die Höhe des anderen $25^m\ 1^{dm}$ beträgt; wie groß ist der Flächenraum?

145. Ein trapezförmiges Stück Land ist 238^{m} lang, an dem einen Ende 26^{m}, an dem andern 22·5^{m} breit; wie viel Ar beträgt seine Fläche?

146. Eine Wiese hat die Form eines Trapezes, dessen Parallelseiten 168·42^{m} und 109·3^{m} sind und dessen Inhalt 1·5 Hektar beträgt; wie groß ist der Abstand der Parallelseiten?

147. Ein Hofraum von der Form eines Trapezes, dessen Parallelseiten 20^{m} 4^{dm} und 18^{m} 5^{dm} sind und 15^{m} von einander abstehen, soll mit Steinplatten, deren jede 5 □^{dm} hat, gepflastert werden; wie viel solche Platten sind zur Pflasterung nöthig?

148. Ein Steinhauer soll eine Platte von der Form eines Trapezes liefern; die beiden Parallelseiten sind 1·9^{m} und 1·2^{m}, ihr Abstand 1·1^{m}; wie theuer kommt die Platte, wenn das □^{m} zu 15 fl. 54 kr. gerechnet wird?

149. Ein trapezförmiger Garten, der 9·6^{m} breit und an dem einen Ende 20·75^{m}, an dem andern 14·25^{m} lang ist, wurde für 480 fl. gekauft; wie hoch kam 1 □^{m} zu stehen?

150. Ein Ackerstück, das 109^{m} lang, an dem einen Ende 56·2^{m} und an dem andern 46·8^{m} breit ist, soll mit Roggen besäet werden; wie viel Roggen ist zur Ansaat erforderlich, wenn man auf 32 Ar 1 Hektoliter rechnet?

151. Eine Dachfläche hat die Form eines Trapezes; wie viel kostet ihre Bedeckung, wenn die parallelen Seiten 15^{m} 8^{dm} und 11^{m} 6^{dm} lang sind, und 6^{m} 2^{dm} von einander abstehen, und 1 □^{m} Bedeckung auf 1 fl. 12 kr. zu stehen kommt?

152. Ein Dach hat zwei Dreiecksflächen, deren jede 3·6^{m} hoch ist, und zwei eben so hohe trapezförmige Flächen; die Grundlinie eines jeden Dreieckes ist 8^{m}, die Parallelseiten jedes Trapezes betragen 18^{m} und 10^{m}; wie viel Ziegel braucht man zur Bedeckung dieses Daches unter den in der 94. Aufgabe gegebenen Bedingungen?

§. 123. Ausmessung des regelmäßigen und des unregelmäßigen Vieleckes.

153. Die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes ist 4^{m} 7^{dm}; wie groß ist der Umfang?

154. Ein Quadrat hat 3^{m} 6^{dm} zur Seite; wie groß muß die Seite eines regelmäßigen Sechseckes sein, damit dieses mit dem Quadrate gleichen Umfang habe?

155. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achteckes, dessen Seite 1·667^{m} ist?

156. Ein Fünfeck besteht aus drei Dreiecken, deren Grundlinien 215^{m}, 182·5^{m} und 72^{m}, und deren Höhen in derselben Ordnung 22^{m}, 34^{m} und 16·8^{m} sind; wie groß ist der Flächeninhalt?

157. Zeichne ein unregelmäßiges Siebeneck, ferner ein damit congruentes Vieleck, ziehe in dem ersten die nach §. 117, a, in dem zweiten die nach 117, b zur Bestimmung des Flächeninhaltes

erforderlichen Linien, miß diese nach einem gezeichneten Maßstabe und berechne sodann den Inhalt nach den in §. 117 angegebenen Methoden.

158. Es soll eine sechsseitige regelmäßige Laube ausgesteckt werden, deren Seite 3^m lang ist; wie groß ist der dazu erforderliche Raum?

159. Ein Fußboden bildet ein regelmäßiges Zwölfeck, jede Seite desselben ist $3 \cdot 1^m$; wie groß ist die Bodenfläche?

160. In einem regelmäßigen achteckigen Saale, dessen Seite $4 \cdot 9^m$ mißt, soll ein neuer Boden gelegt werden; wie hoch belaufen sich die Kosten dieser Arbeit, wenn man das Quadratmeter mit 5 fl. 45 kr. bezahlt?

161. Ein Garten hat die Form eines Sechseckes und kann in folgende vier Dreiecke zerlegt werden:

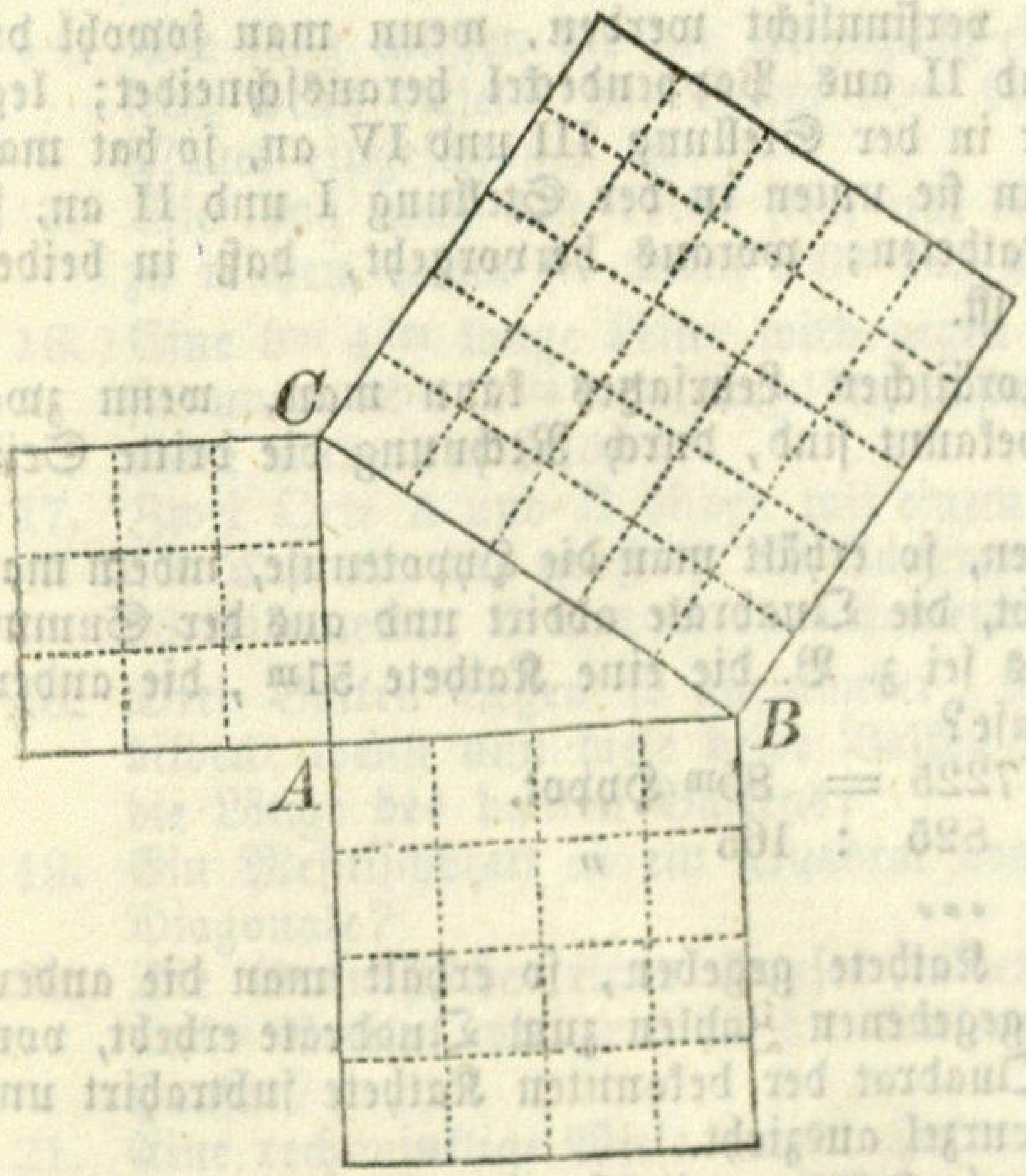
im Dreieck A	ist die Grundlinie	$36 \cdot 6^m$,	die Höhe $6 \cdot 6^m$,
" " B	" " "	$42 \cdot 4^m$,	" " 20^m,
" " C	" " "	$42 \cdot 4^m$,	" " 22^m,
" " D	" " "	$28 \cdot 4^m$,	" " $9 \cdot 8^m$,

Wie viel Ar beträgt der Flächeninhalt dieses Gartens?

10. Pythagoräischer Lehrsatz.

§. 124. Schneidet man von den Schenkeln eines rechten Winkels A (Fig. 84) nach einem verjüngten Maßstabe die Stücke $AB = 4^{dm}$ und $AC = 3^{dm}$ ab, und zieht dann die Gerade BC, so findet man, daß diese genau 5^{dm} mißt. Beschreibt man nun in diesem rechtwinkligen Dreiecke BAC sowohl über der Hypotenuse als über den beiden Katheten Quadrate und zerlegt dieselben in Quadratdecimeter, so sieht man, daß in dem Quadrate über der Hypotenuse 25 □^{dm}, in dem Quadrate über der Kathete AB 16 □^{dm} und in dem Quadrate über der andern Kathete AC 9 □^{dm} enthalten sind.

Fig. 84.



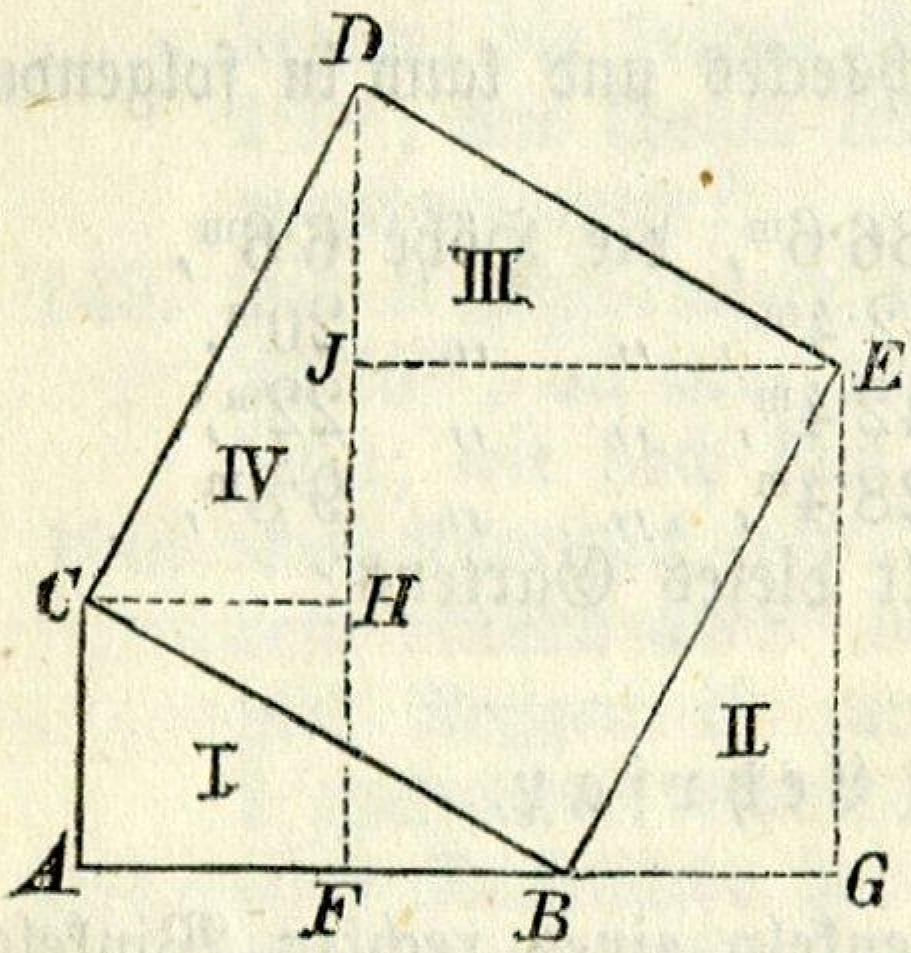
Es ist daher das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes gleich der Summe aus den Quadraten über den beiden Katheten.

Dieser merkwürdige Satz wird nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz genannt.

In dem obigen Dreiecke wurde den Seiten eine bestimmte Länge gegeben. Es läßt sich übrigens anschaulich nachweisen, daß der Pythagoräische Lehrsatz für jedes beliebige rechtwinklige Dreieck BAC (Fig. 85) giltig ist.

Man beschreibe über der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, fälle auf die AB und ihre Verlängerung von den Puncten D und E die Senkrechten DF und EG; ferner fälle man auf die DF die Senkrechten CH und EJ. Aus dieser Construction geht hervor, daß die rechtwinkligen Dreiecke BAC, EGB, EJD und DHC, welche wir folgeweise durch I, II, III und IV bezeichnen wollen, congruent sind; ferner, daß AFHC das Quadrat über der Kathete AC und FGEJ das Quadrat über der Kathete AB vorstellt. Das Quadrat über der Hypotenuse, nämlich BCDE, besteht offenbar aus der Figur BCHJE und den beiden Dreiecken III und IV; nimmt man nun von diesem Quadrate die letztgenannten Dreiecke weg und legt sie unten an die Stelle der Dreiecke I und II an, so verwandelt sich die frühere Quadratfläche in die Figur ACHJEG, welche eben die beiden Quadrate über den Katheten, nämlich FGEJ und AFHC enthält. Es enthält also wirklich das Quadrat über der Hypotenuse eben so viel Flächenraum, als die beiden Quadrate über den Katheten zusammengenommen.

Fig. 85.



Dieser Beweis kann sehr leicht versinnlicht werden, wenn man sowohl die Figur BCHJE als die Dreiecke I und II aus Pappendeckel herausschneidet; legt man die beiden Dreiecke an jene Figur in der Stellung III und IV an, so hat man das Quadrat der Hypotenuse; legt man sie unten in der Stellung I und II an, so erhält man die Quadrate der beiden Katheten; woraus hervorgeht, daß in beiden Fällen derselbe Flächenraum vorhanden ist.

§. 125. Mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch Rechnung die dritte Seite finden.

1. Sind die beiden Katheten gegeben, so erhält man die Hypotenuse, indem man jede Kathete zum Quadrat erhebt, die Quadrate addirt und aus der Summe die Quadratwurzel auszieht. Es sei z. B. die eine Kathete 51^m, die andere 68^m; wie groß ist die Hypotenuse?

$$\begin{array}{rl} 51^2 = & 2601 \\ 68^2 = & \underline{4624} \\ & 7225 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{7225} = 85^m \text{ Hypot.} \\ 825 : 165 \quad " \\ \cdots \end{array}$$

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete gegeben, so erhält man die andere Kathete, indem man die beiden gegebenen Zahlen zum Quadrate erhebt, vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete subtrahirt und aus der Differenz die Quadratwurzel auszieht.

Es sei z. B. die Hypotenuse $2{\cdot}08^m$ und die eine Kathete $0{\cdot}8^m$; wie groß ist die andere Kathete?

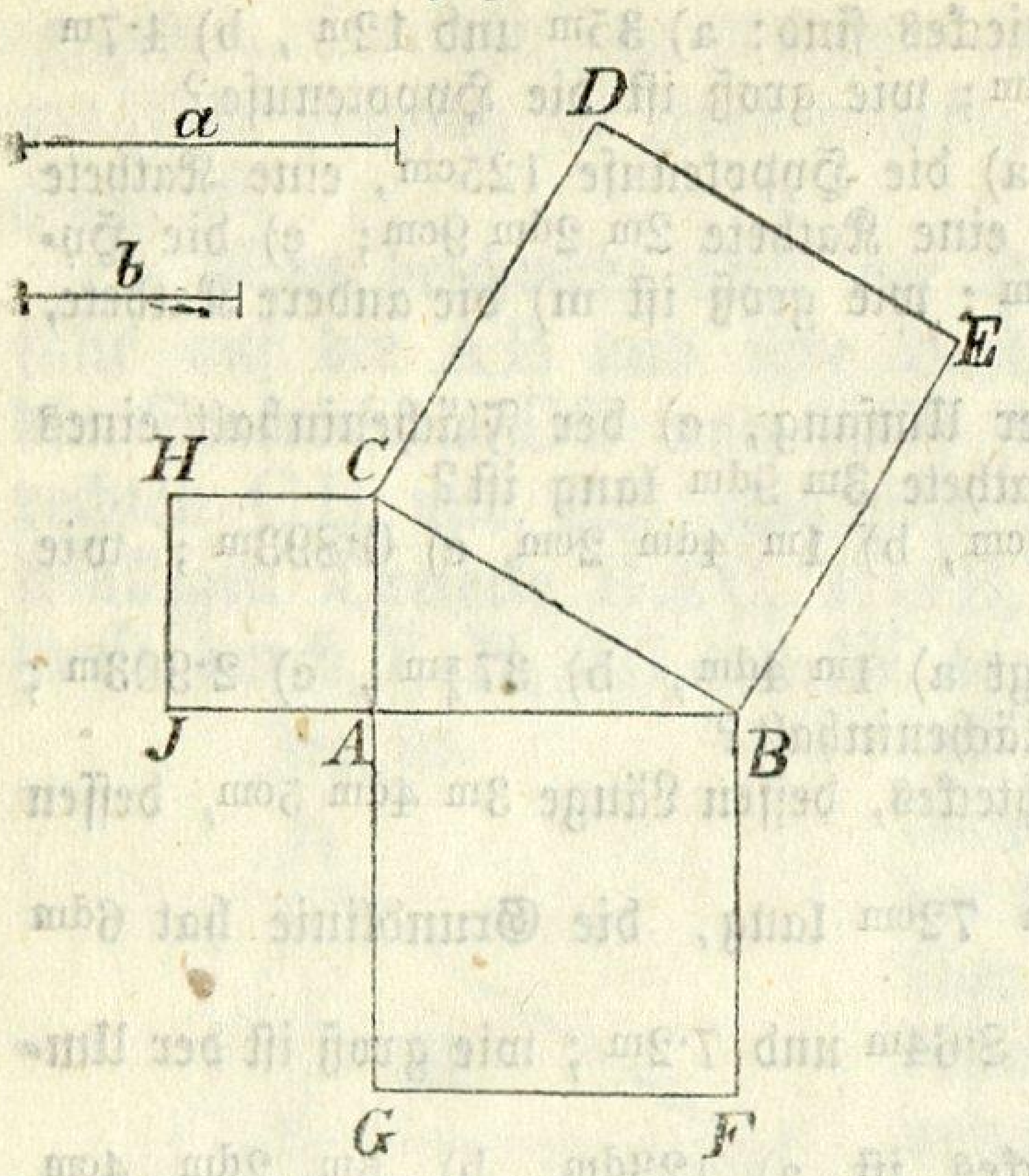
$$\begin{array}{rl} 2{\cdot}08^2 = & 4{\cdot}3264 \\ 0{\cdot}8^2 = & \underline{0{\cdot}64} \\ & 3{\cdot}6864 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{3{\cdot}6864} = 1{\cdot}92^m \text{ die zweite Kathete} \\ 2{\cdot}68 : 29 \\ 764 : 382 \\ \cdots \end{array}$$

§. 126. Aufgaben:

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind: a) 35^m und 12^m, b) $4\cdot7^m$ und $4\cdot1^m$; c) 1^m 4^{dm} 7^{cm} und 1^m 4^{dm}; wie groß ist die Hypotenuse?
2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist: a) die Hypotenuse 125^{cm}, eine Kathete 35^{cm}; b) die Hypotenuse 3^m 4^{dm} 8^{cm}, eine Kathete 2^m 2^{dm} 9^{cm}; c) die Hypotenuse $5\cdot925^m$, eine Kathete $3\cdot0912^m$; wie groß ist m) die andere Kathete, n) der Flächeninhalt?
3. Wie groß ist a) die Hypotenuse, b) der Umfang, c) der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen jede Kathete 3^m 9^{dm} lang ist?
4. Die Seite eines Quadrates ist a) 29^{cm}, b) 1^m 4^{dm} 2^{cm}, c) $0\cdot893^m$; wie groß ist dessen Diagonale?
5. Die Diagonale eines Quadrates beträgt a) 1^m 4^{dm}, b) $37\frac{3}{4}^m$, c) $2\cdot903^m$; wie groß ist m) eine Seite, n) der Flächeninhalt?
6. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes, dessen Länge 3^m 4^{dm} 5^{cm}, dessen Breite 2^m 1^{dm} 8^{cm} beträgt?
7. Die Diagonale eines Rechteckes ist 1^m 72^{cm} lang, die Grundlinie hat 6^{dm} Länge; wie groß ist die Höhe?
8. Die Diagonalen eines Rhombus sind $8\cdot64^m$ und $7\cdot2^m$; wie groß ist der Umfang desselben?
9. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist a) 123^{dm}, b) 5^m 2^{dm} 4^{cm}, c) $1\cdot358^m$; wie groß ist m) die Höhe, n) der Flächeninhalt?
10. Wie groß ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn a) die Grundlinie 62^{dm}, ein Schenkel 57^{dm}, b) die Grundlinie 1^m 2^{dm} 7^{cm}, ein Schenkel 2^m 5^{dm} 2^{cm}, c) die Grundlinie $0\cdot792^m$, ein Schenkel $1\cdot035^m$ beträgt?
11. Suche a) die Höhe, b) den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Grundlinie 108^m 3^{dm} und dessen Schenkel 59^m 4^{dm} ist.
12. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes ist 39^{cm}, die Höhe 28^{cm}; wie groß ist a) die Grundlinie, b) der Flächeninhalt?
13. Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreieckes beträgt $1\cdot08\square^m$, die Grundlinie $1\cdot8^m$; wie groß ist jeder Schenkel?
14. Wie lang müssen die zur Ersteigung einer Festung erforderlichen Sturmleitern sein, wenn dieselbe von einem 10^m breiten Wallgraben und einer 8^m hohen Mauer eingeschlossen ist?
15. Wie lang muß eine Leiter sein, um bis zur Spitze einer $4\cdot3^m$ hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten $2\cdot6^m$ von der Mauer absteht?
16. Eine 9^m 4^{dm} lange Leiter wird gegen eine verticale Wand so aufgestellt, daß sie unten 2^m 2^{dm} von derselben absteht; wie hoch reicht an der Wand das obere Ende der Leiter?
17. Zwei Orte A und B bilden mit einem dritten Orte C ein bei C rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist die Entfernung zwischen A und C, wenn A von B 28 Kilometer, B von C 15 Kilometer entfernt ist?
18. Drei Balken liegen so aneinander, daß zwei derselben einen rechten Winkel bilden; wenn nun diese beide Balken $3\cdot8^m$ und $4\cdot9^m$ lang sind, wie groß ist die Länge des dritten Balkens?
19. Ein Meßtischblatt ist ein Quadrat von 75^{cm} Seitenlänge; wie groß ist die Diagonale?
20. Die Grundfläche eines Hauses bildet ein Rechteck von $18\cdot24^m$ Länge und $12\cdot8^m$ Breite; wie groß ist die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken des Hauses?
21. Eine rechtwinklige Wiese von 1 Hektar Flächeninhalt ist 208^m lang; wie weit sind zwei gegenüberstehende Ecken von einander entfernt?
22. Ein Dachstuhl ist unten 14^m breit und soll 6^m 2^{dm} hoch werden; wie lang müssen die Dachsparren werden?

§. 127. Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Fig. 86.



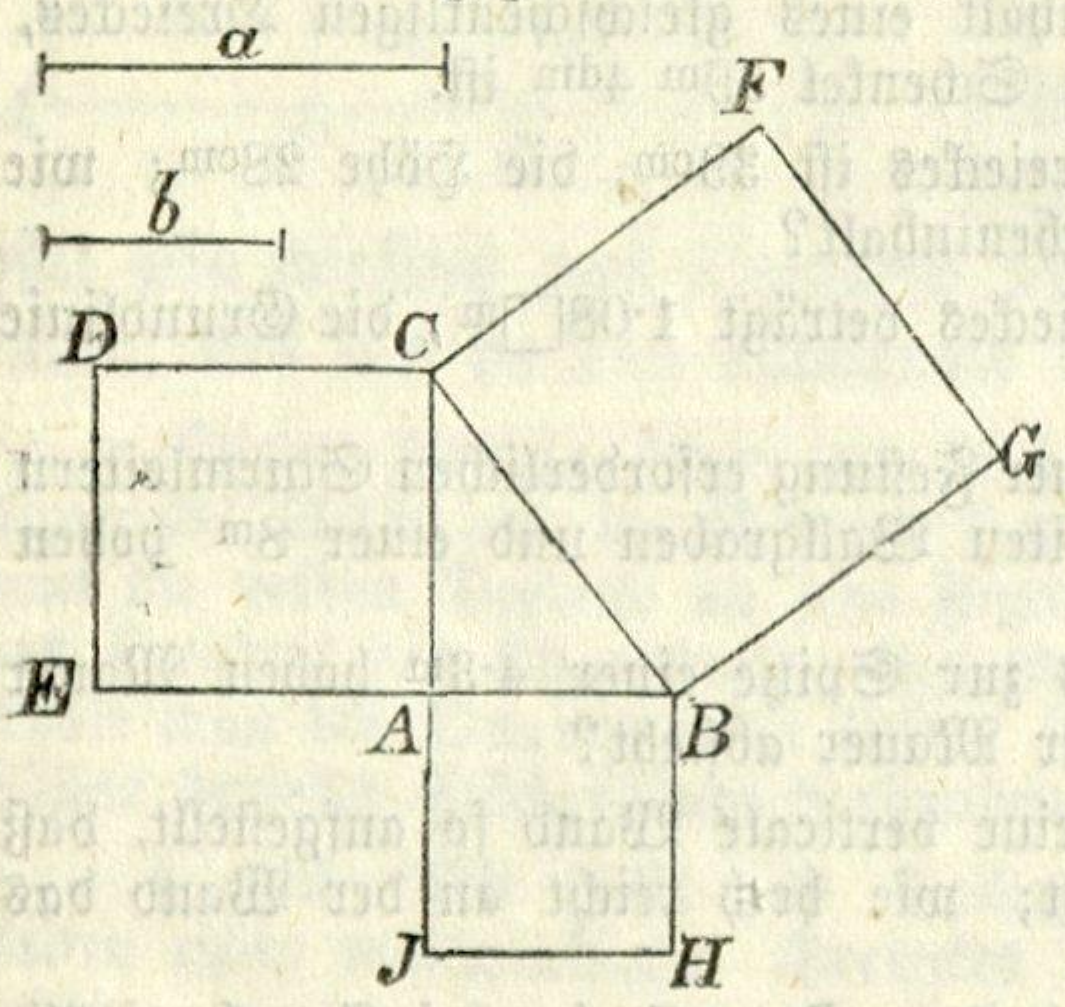
Sind a und b (Fig. 86) die Seiten der beiden gegebenen Quadrate, so darf man nur ein rechtwinkliges Dreieck BAC verzeichnen, in welchem die Seiten a und b als Katheten vorkommen, und über der Hypotenuse BC ein Quadrat BCDE construiren. Dieses Quadrat ist nun so groß als die beiden Quadrate ABFG und ACHJ, deren Seiten a und b sind, zusammengenommen.

1. Zeichne zwei Quadrate, deren Seiten 5^{cm} und 12^{cm} sind, und dann ein Quadrat, welches gleich ist der Summe der beiden ersten Quadrate.

2. Zeichne ein Quadrat, welches gleich ist der Summe dreier Quadrate, deren Seiten gegeben sind.

§. 128. **Ein Quadrat zu beschreiben, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.**

Fig. 87.



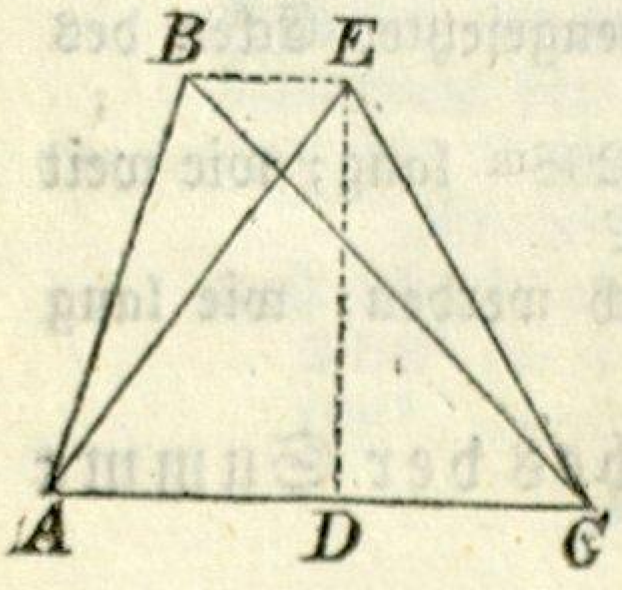
Sind a und b (Fig. 87) die Seiten der beiden gegebenen Quadrate, so verzeichne man in A einen rechten Winkel, mache AB gleich der Seite b des kleineren Quadrates und beschreibe aus B mit dem Halbmesser a einen Bogen, welcher den Schenkel AC in C schneidet; das über AC beschriebene Quadrat ACDE ist nun die Differenz der beiden Quadrate BCFG und ABHJ, deren Seiten a und b gegeben sind.

Beschreibe zwei Quadrate mit den Seiten 8^{dm} und 9^{dm}, und dann ein Quadrat, welches der Differenz der früheren Quadrate gleich ist.

11. Verwandlung der geradlinigen Figuren.

§. 129. **Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 88) in ein gleichschenkliges zu verwandeln.**

Fig. 88.

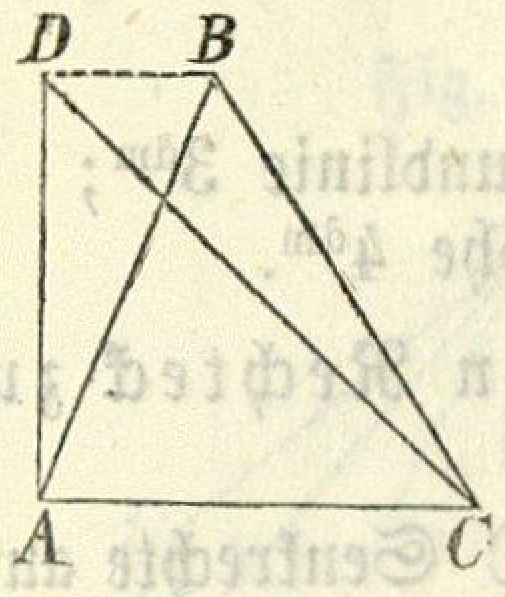


Man ziehe durch B eine Parallele mit AC, so müssen alle Dreiecke, die AC zur Grundlinie haben und deren Spitze in jener Parallelen liegt, gleichen Flächeninhalt haben.

Um nun unter diesen Dreiecken das gleichschenklige zu erhalten, halbire man die Grundlinie in D, errichte in diesem Puncte auf AC eine Senkrechte

DE und ziehe AE und CE, so ist das Dreieck ACE gleichschenklig und dem gegebenen Dreiecke ACB gleich.

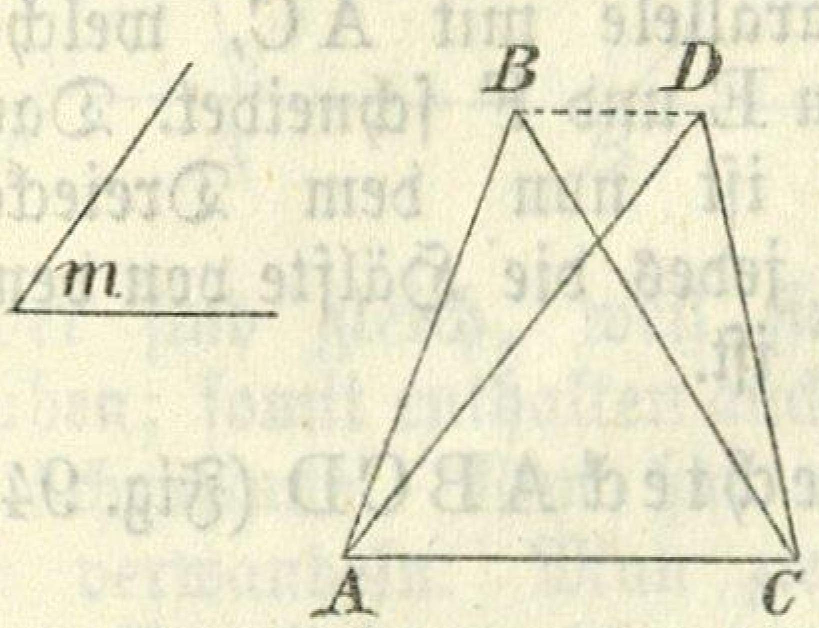
Fig. 89.



§. 130. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 89) in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Man errichte in A auf AC eine Senkrechte und ziehe durch B mit AC eine Parallele, welche jene Senkrechte in D durchschneidet. Zieht man die CD, so ist CAD das verlangte rechtwinklige Dreieck.

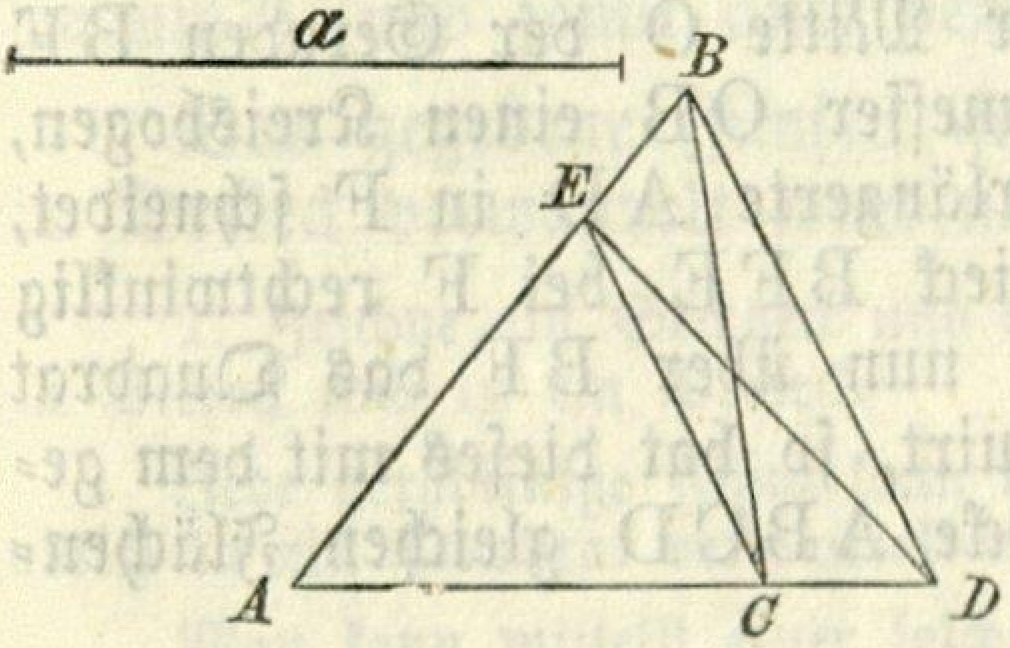
Fig. 90.



§. 131. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 90) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

Man ziehe durch B eine mit AC parallele Gerade, construire in A den Winkel CAD = m, dessen Schenkel jene Parallele in D durchschneidet. Zieht man CD, so ist ACD das verlangte Dreieck.

Fig. 91.

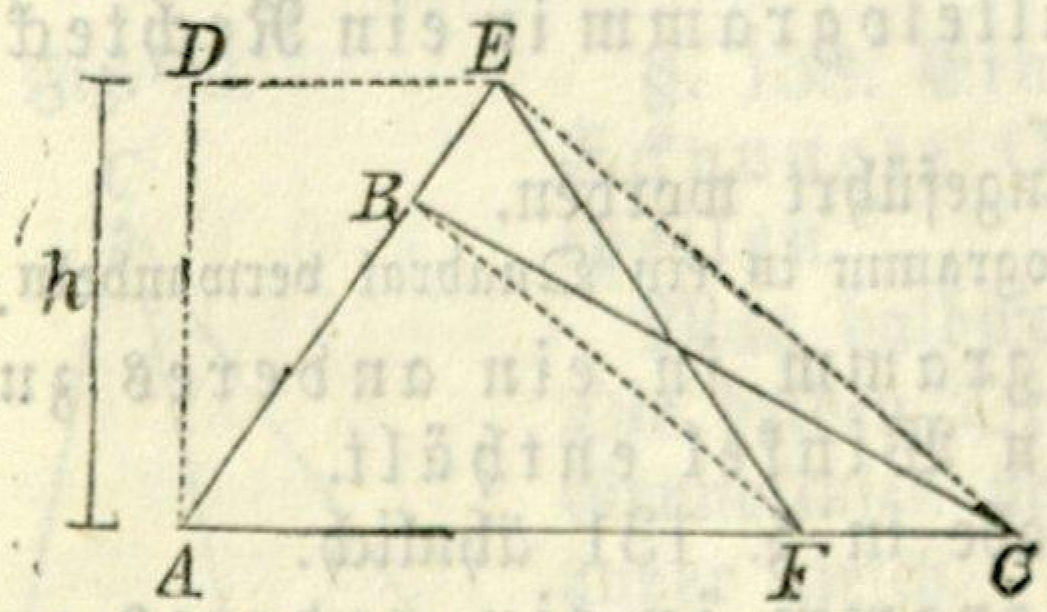


§. 132. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 91) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Man trage a auf AC von A aus bis D auf und ziehe die BD; ferner ziehe man CE || BD und verbinde D und E durch die Gerade DE. Die beiden Dreiecke CED und CEB haben dieselbe Grundlinie CE und gleiche Höhe, sind also gleich. Setzt man zu ACE das Dreieck CED hinzu, so erhält man ADE; addirt man aber zu ACE das Dreieck CEB, so hat man ACB; es ist daher das Dreieck ADE, welches die Grundlinie a hat, dem gegebenen Dreiecke ABC gleich.

§. 133. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 92) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 92.



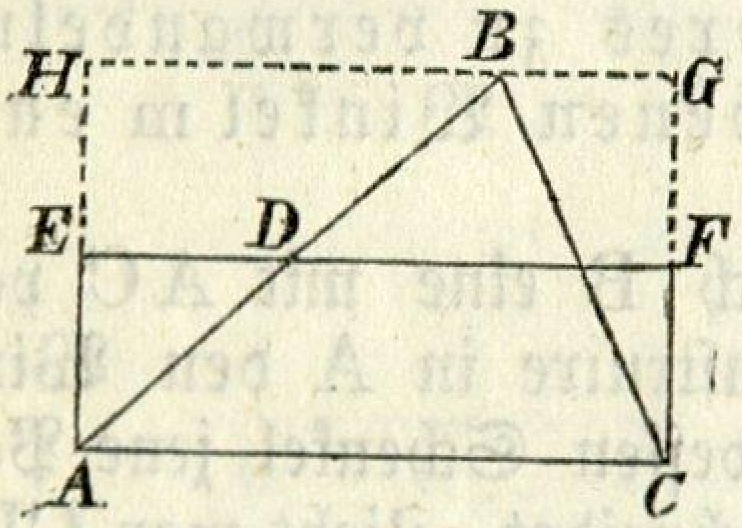
Man errichte in A auf AC eine Senkrechte, schneide davon AD = h ab, ziehe durch D mit AC eine Parallele, welche die verlängerte Seite AB in E trifft. Zieht man nun CE, ferner BF || EC und endlich die EF, so ist AFE das verlangte Dreieck.

Zeichne einen verjüngten Maßstab, construire dann ein Dreieck mit den Seiten 4^{dm}, 6^{dm} und 8^{dm}, und verwandle dasselbe

a) in ein gleichschenkliges Dreieck über der Grundlinie 5^{dm};
b) in ein rechtwinkliges Dreieck über der Kathete 4^{dm};
c) in ein Dreieck mit dem Winkel 58^0;
d) in ein Dreieck mit der Grundlinie 7^{dm};
e) in ein Dreieck mit der Höhe 5^{dm};
f) in ein Dreieck mit dem Winkel 50^0 und der Grundlinie 3^{dm};
g) in ein Dreieck mit dem Winkel 72^0 und der Höhe 4^{dm}.

§. 134. Ein Dreieck ABC (Fig. 93) in ein Rechteck zu verwandeln.

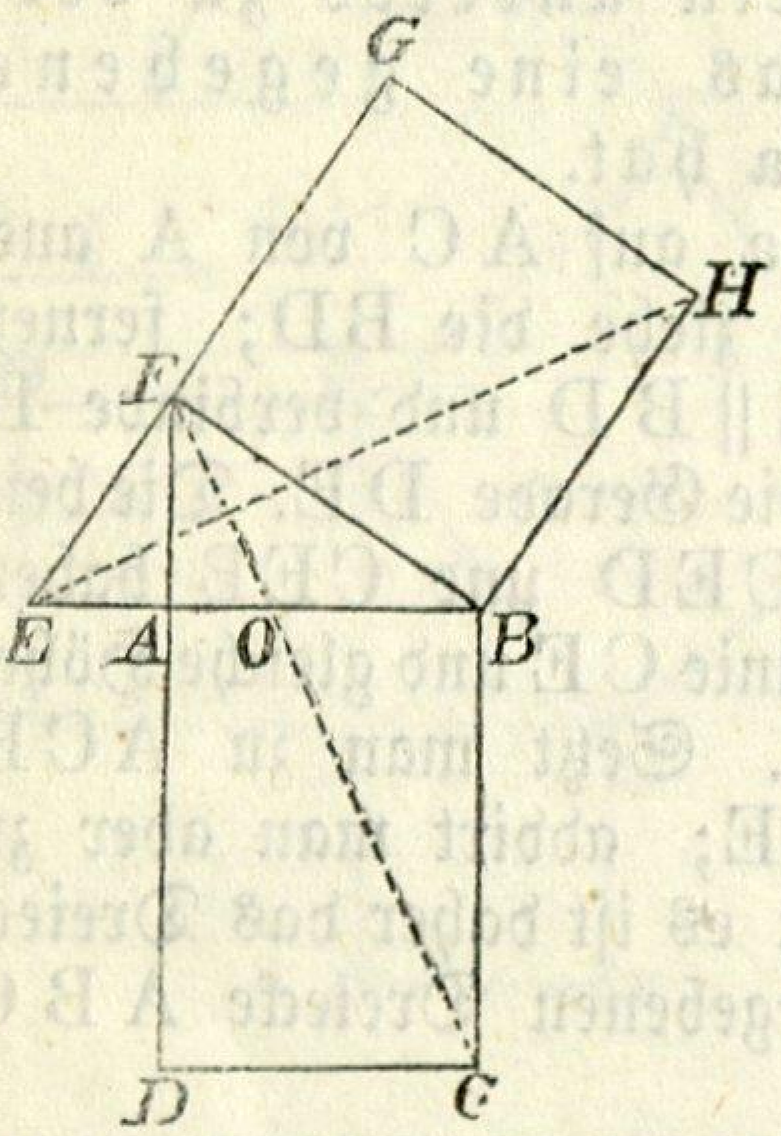
Fig. 93.



Man errichte in A und C Senkrechte auf AB, halbire die Seite AB in D und ziehe durch D eine Parallele mit AC, welche jene Senkrechten in E und F schneidet. Das Rechteck ACFE ist nun dem Dreiecke ABC gleich, weil jedes die Hälfte von dem Rechtecke ACGH ist.

§. 135. Ein Rechteck ABCD (Fig. 94) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 94.



Man verlängere die Seiten AB und AD über A hinaus, mache BE = BC und beschreibe aus der Mitte O der Geraden BE mit dem Halbmesser OB einen Kreisbogen, welcher die verlängerte AD in F schneidet, so ist das Dreieck BFE bei F rechtwinklig (§. 74). Wird nun über BF das Quadrat BFGH construirt, so hat dieses mit dem gegebenen Rechtecke ABCD gleichen Flächeninhalt.

Um dieses einzusehen, ziehe man die Geraden EH und FC; das Dreieck EBH ist dann die Hälfte des Quadrates BFGH, und CBF die Hälfte der Rechteckes ABCD. Die Dreiecke EBH und CBF sind aber congruent und haben somit gleichen Flächeninhalt; folglich müssen auch die zwei doppelt so großen Figuren, nämlich das Quadrat BFGH und das Rechteck ABCD, einander gleich sein.

§. 136. 1. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Auflösung ist schon §. 110 angeführt worden.

Es läßt sich daher auch jedes Parallelogramm in ein Quadrat verwandeln.

2. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel enthält.

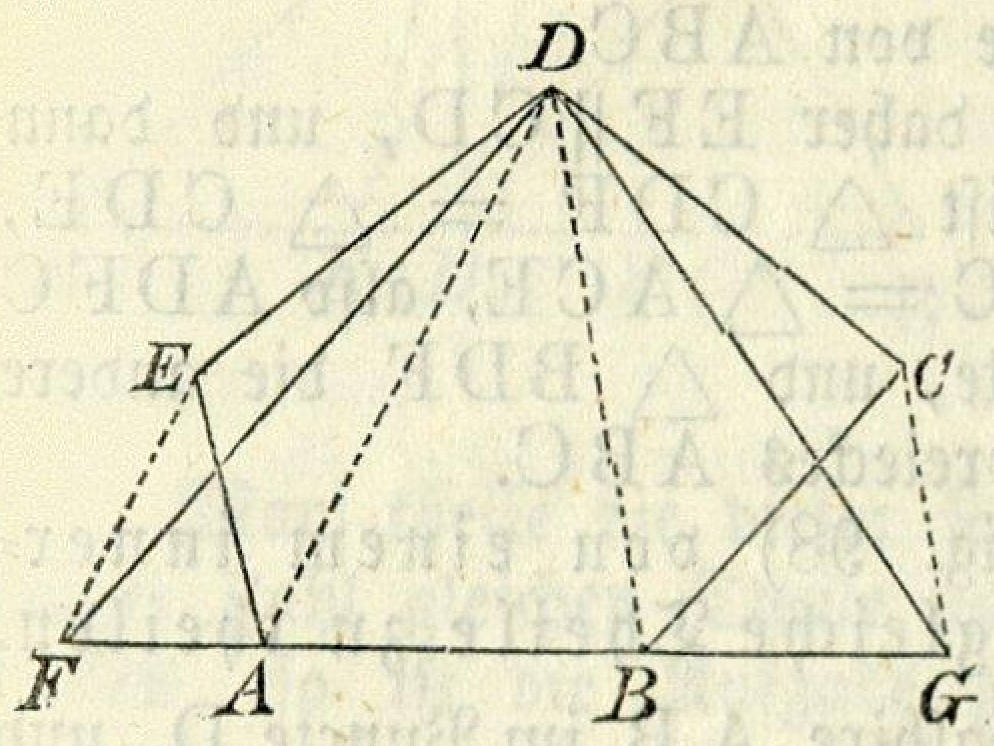
Die Auflösung ist jener der Aufgabe in §. 131 ähnlich.

3. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Die Verwandlung kann mit Rücksicht auf §. 132 ausgeführt werden.

§. 137. **Eine beliebige geradlinige Figur ABCDE (Fig. 95) in ein Dreieck zu verwandeln.**

Fig. 95.



Man ziehe eine Diagnale AD, und damit durch E eine Paralle, welche die Verlängerung der AB in F schneidet. Zieht man nun die DF, so ist das Viereck BCDF gleich dem Fünfecke ABCDE; denn beide unterscheiden sich nur dadurch, daß das Viereck BCDF nebst ABCD das Dreieck ADF, das Fünfeck ABCDE aber nebst ABCD das Dreieck ADE enthält; die Dreiecke ADF und ADE aber sind gleich, weil sie dieselbe Grundlinie AD und gleiche Höhe haben; somit enthalten auch die Figuren BCDF und ABCDE gleichen Flächenraum. Nun hat man nur das Viereck BCDF in ein Dreieck zu verwandeln. Man zieht die Diagonale BD, dann damit durch C eine Parallele, welche die verlängerte AB in G schneidet, und endlich die Gerade DG; so ist das Dreieck FGD dem Vierecke BCDF gleich (warum?), und somit auch dem Fünfecke ABCDE.

Das gegebene Fünfeck ist also zuerst in ein Viereck, und dieses in ein Dreieck verwandelt worden.

1. Zeichne ein Sechseck und verwandle es nach und nach in ein Fünfeck, in ein Viereck und in ein Dreieck.

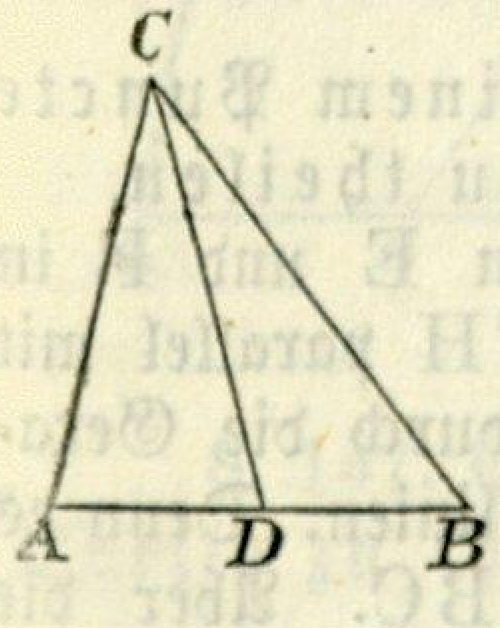
Jede geradlinige Figur kann daher in ein Dreieck, sodann in ein Rechteck und endlich in ein Quadrat verwandelt werden.

Man kann mittelst einer solchen Umwandlung die Fläche eines jeden Vieleckes auf eine sehr einfache Art bestimmen, indem man mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes die Seite eines Quadrates, in welches das Vieleck verwandelt wurde, mißt, und ihre Länge mit sich selbst multiplicirt.

2. Zeichne drei congruente unregelmäßige Achtecke, und bestimme den Flächeninhalt bei dem ersten und zweiten nach den §. 117 angegebenen Methoden, bei dem dritten aber mittelst Verwandlung desselben in ein Quadrat.

12. Theilung der geradlinigen Figuren.

Fig. 96.



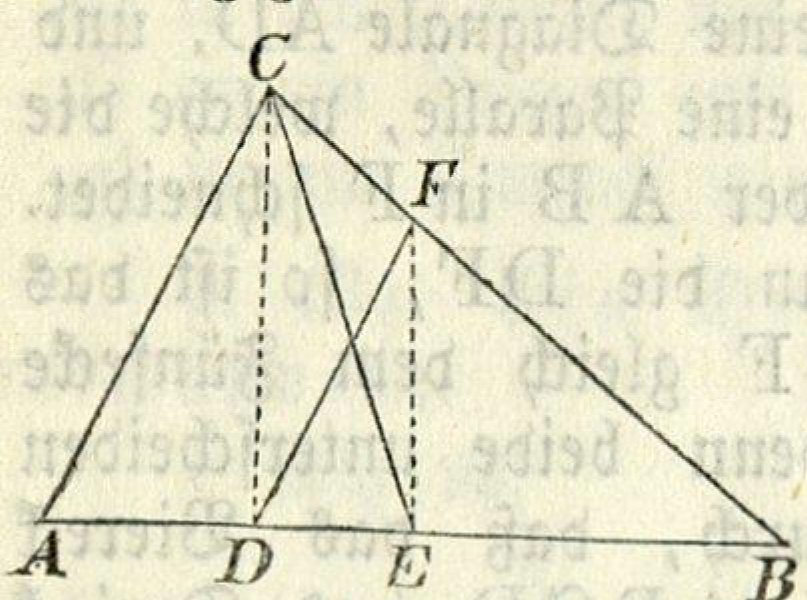
§. 138. **Ein Dreick ABC (Fig. 96) von einem Eckpuncte C aus in zwei gleiche Theile zu theilen.**

Man halbire die Seite AB in D, und ziehe CD. Die beiden Dreiecke ADC und BCD haben gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe, folglich sind sie einander gleich.

Theile ein Dreieck in drei, vier, fünf gleiche Theile.

§. 139. Ein Dreieck ABC (Fig. 97) von einem Puncte einer Seite, z. B. von D aus, in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 97.

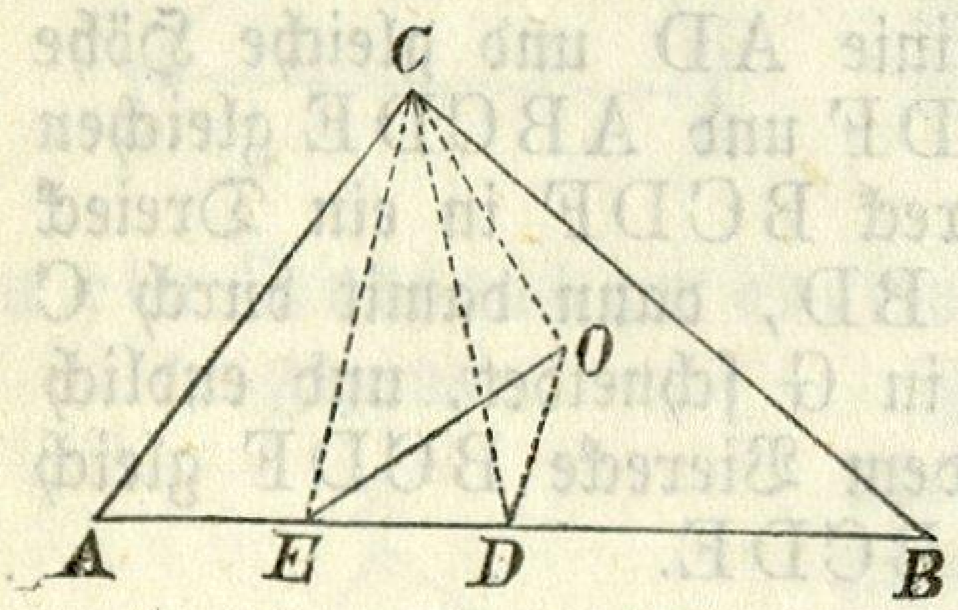


Man halbire die AB in E und ziehe CD und CE, so ist ACD um CDE kleiner als die Hälfte von ABC.

Man ziehe daher EF || CD, und dann die DF, so ist △ CDF = △ CDE, daher ADFC = △ ACE, also ADFC die eine Hälfte, und △ BDF die andere Hälfte des Dreieckes ABC.

§. 140. Ein Dreieck ABC (Fig. 98) von einem innerhalb liegenden Puncte aus in zwei gleiche Theile zu theilen.

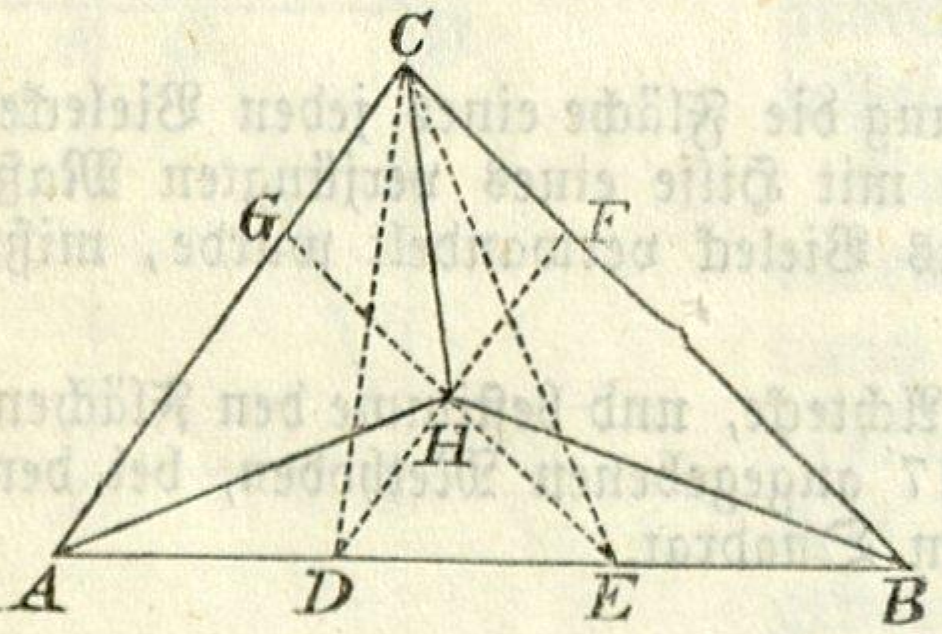
Fig. 98.



Man halbire AB im Puncte D, und ziehe CD. Liegt nun der gegebene Punct in CD, so ist diese Gerade selbst die gesuchte Theilungslinie; liegt aber der gegebene Punct außerhalb der CD, wie z. B. hier der Punct O, so ziehe man OD und damit parallel die CE. Verbindet man O mit C und E, so sind, wie leicht zu zeigen ist, die Vierecke AEOC und BEOC gleich und somit jedes die Hälfte des Dreieckes ABC.

§. 141. Ein Dreieck ABC (Fig. 99) in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den drei Eckpuncten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Puncte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 99.

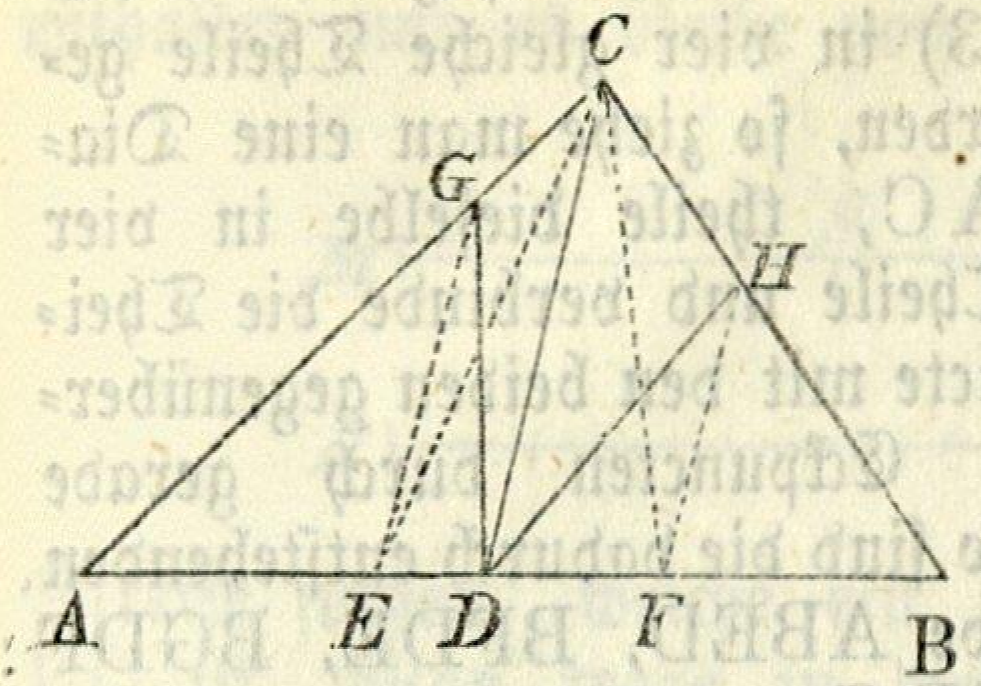


Man theile eine Seite AB in den Puncten D und E in drei gleiche Theile, und ziehe CD und CE, so sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE gleich. Zieht man nun DF || AC und EG || BC, so sind die vom Durchschnittspuncte H aus gezogenen Geraden AH, BH, CH die gesuchten Theilungslinien. Denn es ist △ ACH = △ ACD = $\frac{1}{3}$ △ ABC, ferner △ BCH = △ BCE = $\frac{1}{3}$ △ ABC; daher muß auch der Rest, nämlich das △ ABH ein Drittel von △ ABC sein.

§. 142. Ein Dreieck ABC (Fig. 100) aus einem Puncte D in einer der Seiten in drei gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe CD, theile die AB in den Puncten E und F in drei gleiche Theile, und ziehe die Geraden EG und FH parallel mit CD. Verbindet man nun den Punct D mit G und H durch die Geraden DG und DH, so sind diese die gesuchten Theilungslinien. Denn es ist △ ACE = △ ECF = △ BCF = $\frac{1}{3}$ △ ABC. Aber die

Fig. 100.



Dreiecke ADG und ACE sind gleich groß, eben so die Dreiecke BDH und BCF; es ist daher auch $\triangle$ ADG $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC und $\triangle$ BDH $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC; folglich muß auch der Rest CGDH $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC sein.

§. 143. Ein Parallelogramm in mehrere Theile so zu theilen, daß alle Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen.

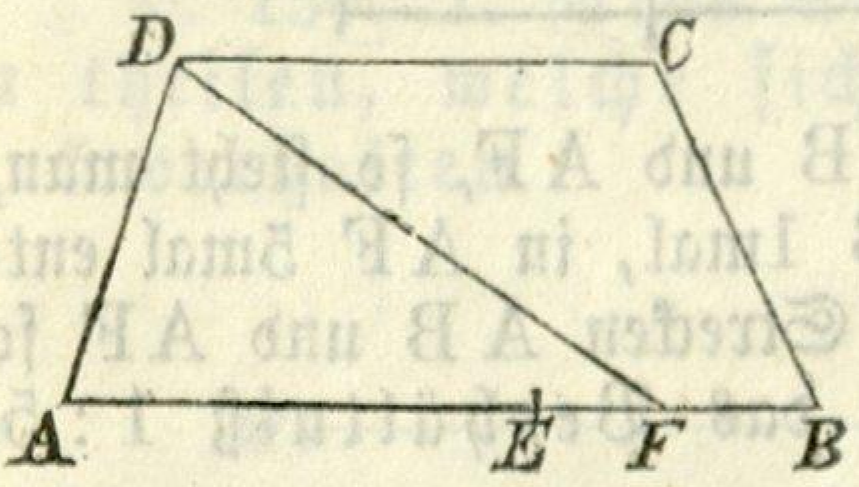
Man theile die dieser Seite anliegenden Gegenseiten in die verlangte Zahl gleicher Theile und ziehe durch die Theilungspuncte gerade Linien, so ist die Aufgabe gelöst; die dadurch entstehenden Parallelogramme haben nämlich gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe und sind daher einander gleich.

§. 144. Ein Trapez in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien die beiden Parallelseiten durchschneiden.

Man theile jede der beiden parallelen Seiten in die verlangte Zahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte gerade Linien, so sind diese die gesuchten Theilungslinien.

§. 145. Ein Trapez ABCD (Fig. 101) von einem Eckpuncte D aus in zwei gleiche Theile zu theilen.

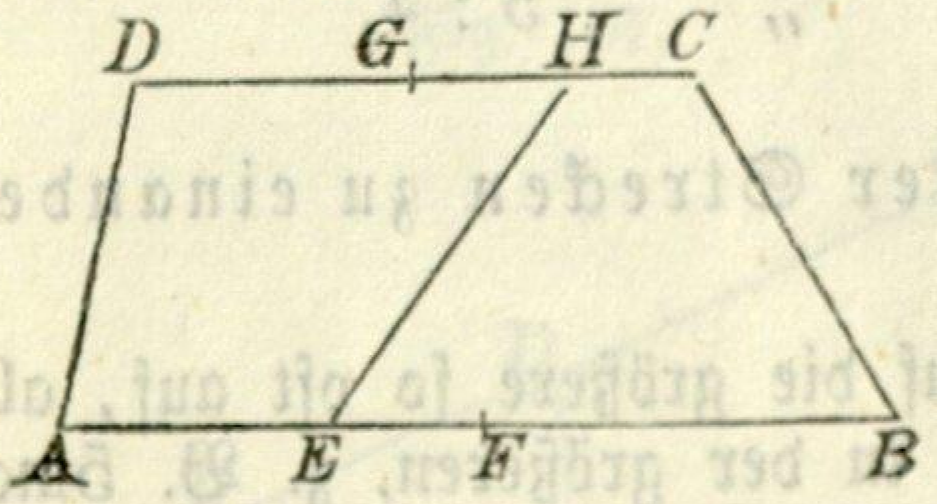
Fig. 101.



Man trage die kleinere Parallelseite CD auf der längeren AB von A bis E auf, halbire den Abstand BE in F, und ziehe DF; so wird dadurch das gegebene Trapez in zwei Theile ADF und BCDF getheilt, welche gleich groß sind (warum?).

§. 146. Ein Trapez ABCD (Fig. 102) aus einem Puncte E in einer der Parallelseiten in zwei gleiche Theile zu theilen.

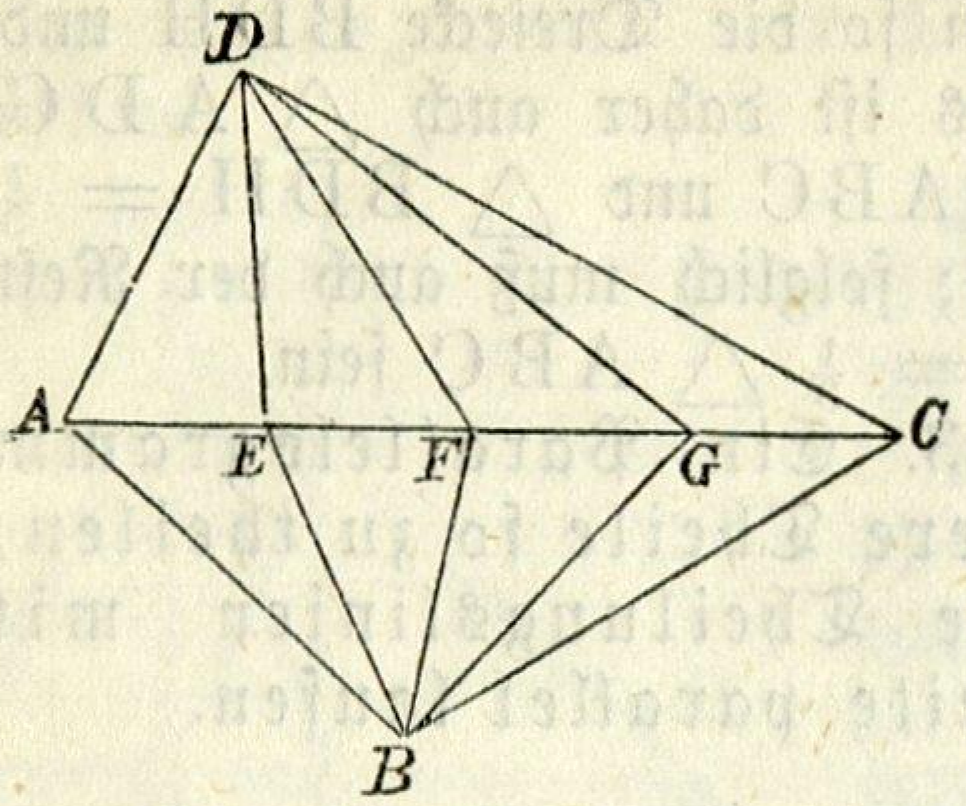
Fig. 102.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in den Puncten F und G, mache GH = EF und ziehe die Gerade EH, so sind die Trapeze AEHD und BEHC, wie sich leicht zeigen läßt, einander gleich, und EH ist daher die gesuchte Theilungslinie.

§. 147. Ein Trapezoid in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Fig. 103.



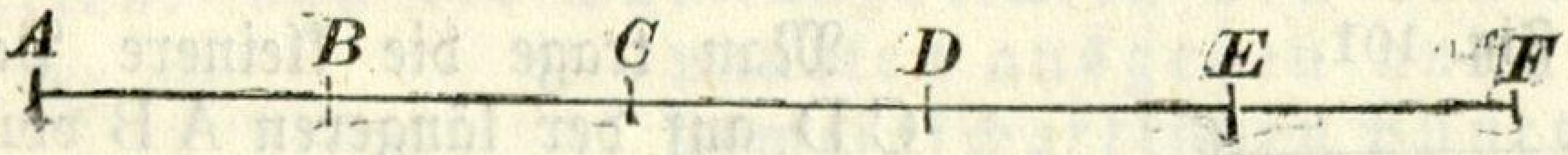
Soll z. B. das Trapezoid ABCD (Fig. 103) in vier gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man eine Diagonale AC, theile dieselbe in vier gleiche Theile und verbinde die Theilungspuncte mit den beiden gegenüberstehenden Eckpuncten durch gerade Linien, so sind die dadurch entstehenden Trapezoide ABED, BFDE, BGDF und BCDG, weil sie aus gleichen Dreiecken zusammengesetzt sind, einander gleich.

VII. Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1. Proportionalität der Strecken.

§. 148. Wenn sich eine Strecke auf eine andere Strecke ein oder mehrere Male auftragen läßt, so daß kein Rest übrig bleibt, so nennt man die erstere Strecke ein Maß der zweiten. So ist in der Figur 104, wo AB = BC = CD = DE = EF angenommen wird, AB ein Maß von AB, von AC, von CF, überhaupt von allen daselbst bezeichneten Strecken.

Fig. 104.



Vergleicht man die beiden Strecken AB und AF, so sieht man, daß ihr gemeinschaftliches Maß AB in AB 1mal, in AF 5mal enthalten ist; es verhalten sich also die zwei Strecken AB und AF so wie die Zahlen 1 und 5, oder sie haben das Verhältniß 1 : 5. Ebenso überzeugt man sich, daß

die Strecken AB und AC das Verhältniß 1 : 2,
„ „ AC „ AB „ „ 2 : 1,
„ „ BD „ AF „ „ 2 : 5,
„ „ CF „ AE „ „ 3 : 4,

u. s. w. haben.

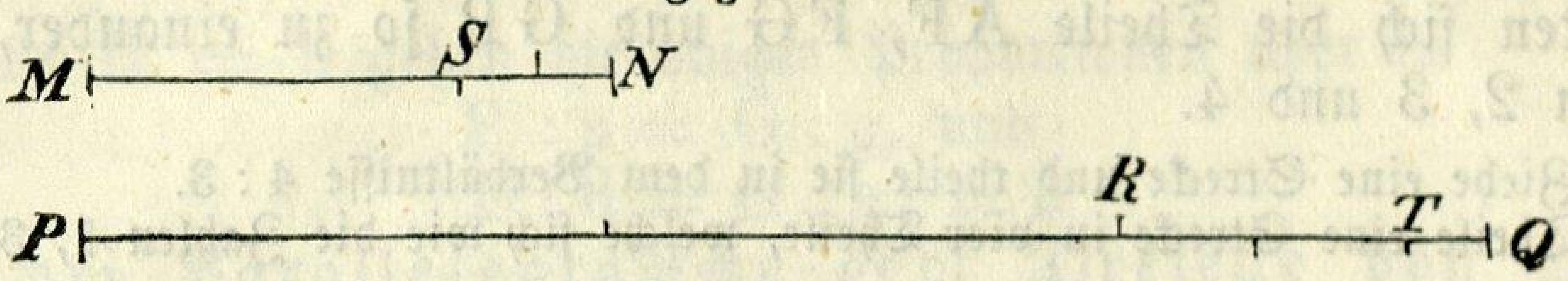
§. 149. Das Verhältniß zweier Strecken zu einander in Zahlen auszudrücken.

Man trage die kleinere Strecke auf die größere so oft auf, als es möglich ist. Wenn die kleinere Strecke in der größeren, z. B. 5mal enthalten ist und kein Rest übrig bleibt, so ist 1 : 5 das Verhältniß zwischen der kleineren und der größeren Strecke.

Schwieriger gestaltet sich die Auffindung des Zahlenverhältnisses, wenn beim Auftragen der kleineren Strecke auf die größere noch ein

Rest übrig bleibt. Es sei z. B. MN (Fig. 105) in der PQ 2mal enthalten und es bleibe noch ein Rest RQ. Hier muß man eine dritte

Fig. 105.



Strecke suchen, welche ein gemeinschaftliches Maß von MN und PQ ist. Man trage zu diesem Zwecke den Rest RQ auf die kleinere Strecke MN auf; es sei RQ in MN 1mal enthalten und es bleibe der Rest SN. Diesen Rest SN trägt man wieder auf den vorigen Rest RQ auf; es sei SN in RQ 2mal enthalten und es bleibe noch das Stück TQ übrig. Dieser Rest TQ wird wieder auf den früheren Rest SN aufgetragen, worin es genau 2mal enthalten sei. TQ ist nun ein gemeinschaftliches Maß der beiden Strecken MN und PQ und man hat

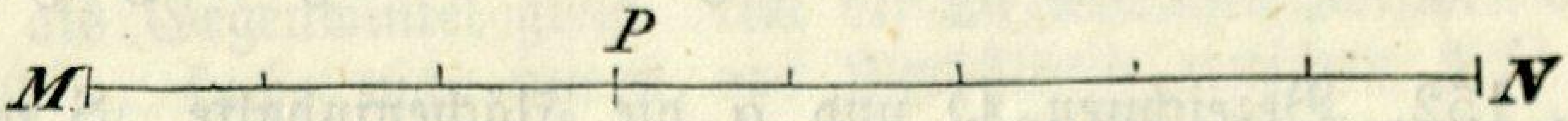
$$
\begin{aligned}
SN &= 2\,TQ,\\
RQ &= 2\,SN + TQ = 5\,TQ,\\
MN &= RQ + SN = 7\,TQ,\\
PQ &= 2\,MN + RQ = 19\,TQ.
\end{aligned}
$$

Das Maß TQ ist also in der Strecke MN 7mal und in der Strecke PQ 19mal enthalten; folglich verhalten sich die Strecken MN und PQ wie die Zahlen 7 und 19, oder es ist 7 : 19 das Verhältniß von MN zu PQ.

Zeichne mehrere Paare von Strecken und suche nach dem eben angegebenen Verfahren das Verhältniß zwischen je zwei Strecken in Zahlen darzustellen.

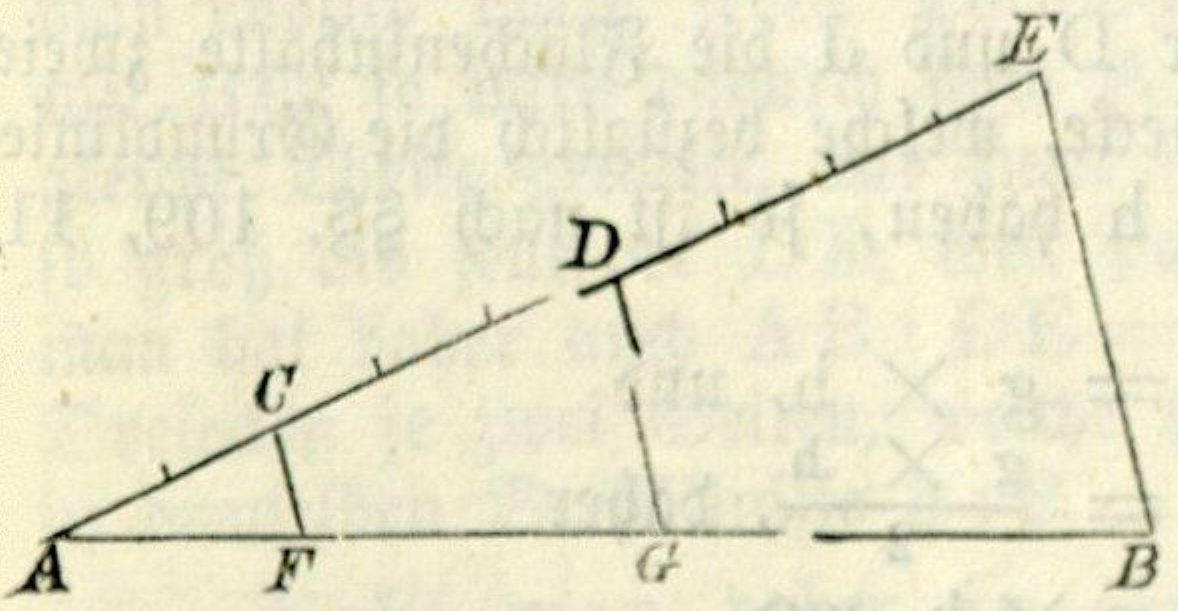
§. 150. 1. **Eine Strecke MN (Fig. 106) in zwei Theile zu theilen, welche sich zu einander wie z. B. die Zahlen 3 : 5 verhalten.**

Fig. 106.



Man theile die MN zuerst in 3 + 5 = 8 gleiche Theile und nehme 3 von diesen für den einen gesuchten Theil MP und 5 für den andern Theil PN.

Fig. 107.



2. **Eine Strecke AB (Fig. 107) in drei Theile zu theilen, welche sich so zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, 3, 4.**

Man ziehe durch A den beliebigen Strahl AX, trage darauf von A bis C 2 gleiche Theile, von C bis D 3 eben so große Theile, von D bis E 4 solche Theile und ziehe die BE. Wenn man nun durch die Puncte C und D mit BE die Parallelen CF und DG zieht, so enthält die AF 2 solche Theile, von denen auf die AB $2 + 3 + 4 = 9$ kommen, FG enthält 3, CB 4 solche Theile, somit verhalten sich die Theile AF, FG und GB so zu einander, wie die Zahlen 2, 3 und 4.

Ziehe eine Strecke und theile sie in dem Verhältnisse 4 : 3.

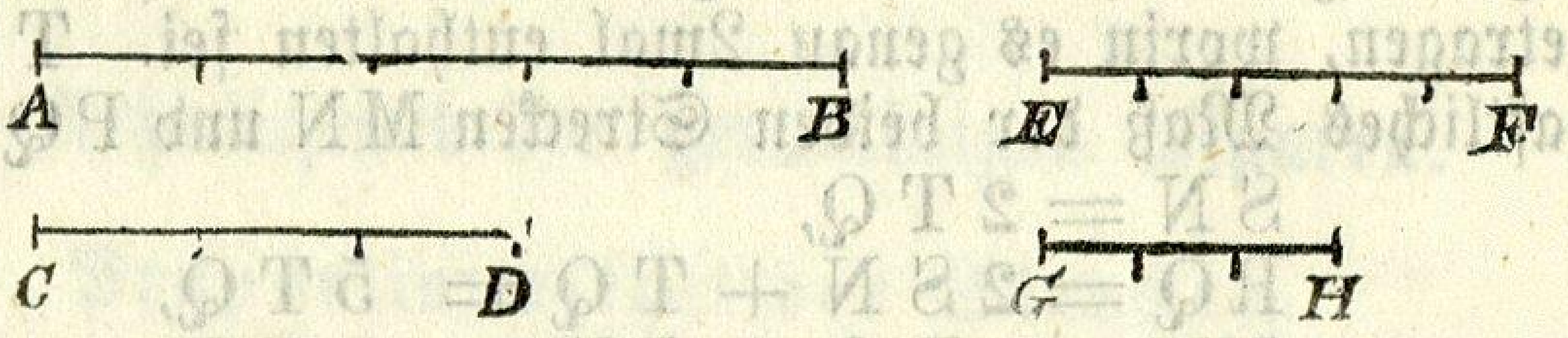
Theile eine Strecke in vier Theile, welche sich wie die Zahlen 1, 3, 4, 6 verhalten.

Zeichne ein Dreieck, dessen Seiten sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten.

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie sich zu einem der beiden Schenkel verhält wie 2 : 3.

§. 151. Die beiden Strecken AB und CD (Fig. 108) haben das Verhältniß 5 : 3, die Strecken EF und GH haben dasselbe Verhältniß

Fig. 108.



5 : 3. Setzt man nun zwischen die beiden gleichen Verhältnisse AB : CD und EF : GH das Gleichheitszeichen, so erhält man die Proportion AB : CD = EF : GH, welche gelesen wird: AB verhält sich zu CD, wie sich EF zu GH verhält.

Man pflegt in diesem Falle zu sagen: die Strecken AB und EF sind den Strecken CD und GH proportional oder proportionirt.

Ist hier CD = EF, so heißt AB : CD = CD : GH eine stetige Proportion; CD ist dann die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und GH.

2. Proportionalität der geradlinigen Figuren.

§. 152. Bezeichnen Q und q die Flächeninhalte, S und s die bezüglichen Seiten zweier Quadrate, so ist nach §. 107

$$Q = S^2 \text{ und } q = s^2, \text{ daher}$$
$$Q : q = S^2 : s^2; \text{ d. h.}$$

Zwei Quadrate verhalten sich zu einander, wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

§. 153. Sind P und p oder D und d die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder zweier Dreiecke, welche bezüglich die Grundlinien G und g und die Höhen H und h haben, so ist nach §§. 109, 111 und 112

$$P = G \times H,\ p = g \times h, \text{ und}$$
$$D = \frac{G \times H}{2},\ d = \frac{g \times h}{2}, \text{ daher}$$
$$P : p = G \times H : g \times h, \text{ und}$$
$$D : d = G \times H : g \times h; \text{ d. h.}$$

Zwei Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Für $H = h$ gehen die obigen Proportionen über in

$$P : p = G : g, \text{ und}$$
$$D : d = G : g; \text{ d. h.}$$

Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

Für $G = g$ folgt eben so

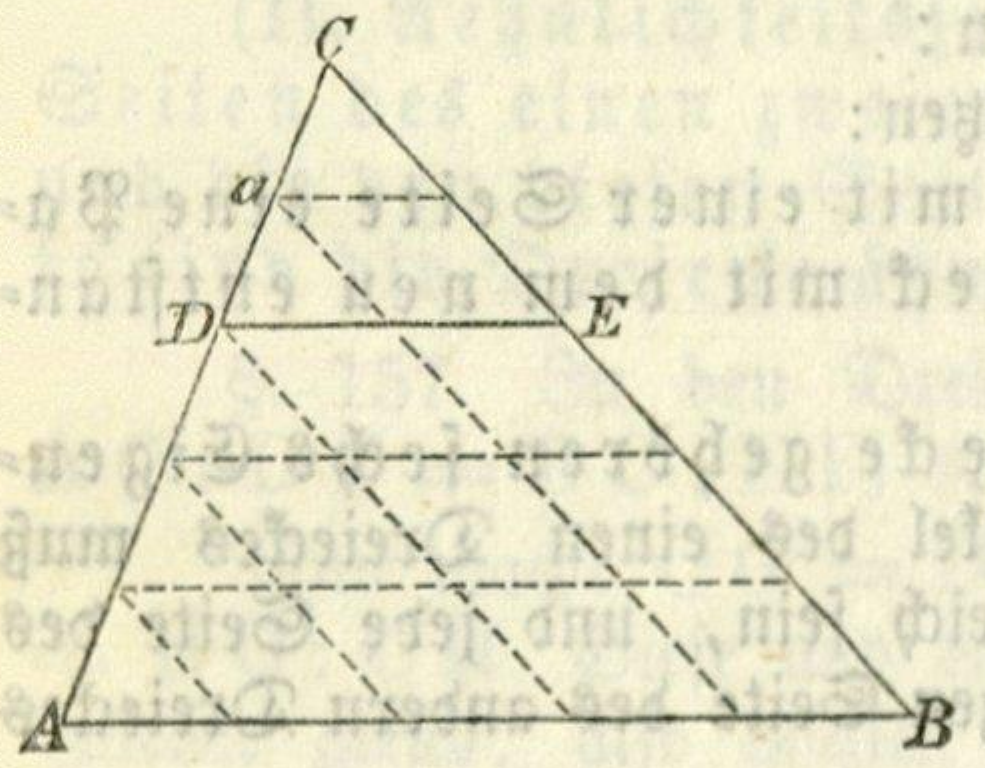
$$P : p = H : h, \text{ und}$$
$$D : d = H : h; \text{ d. h.}$$

Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

3. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 154. Zwei Dreiecke, welche sich nur durch die Größe unterscheiden, in der Gestalt aber übereinstimmen, heißen ähnlich.

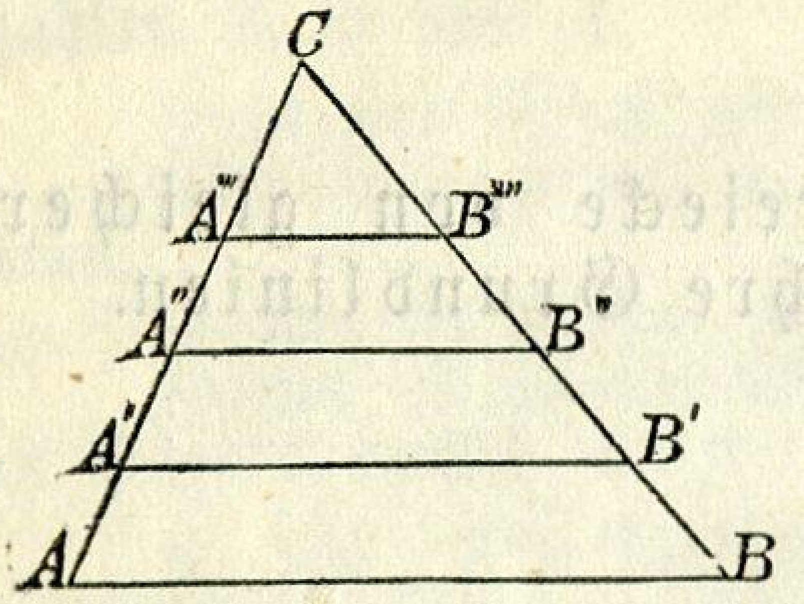
Fig. 109.



Um den Begriff der Aehnlichkeit zweier Dreiecke näher zu bestimmen, ziehe man in dem Dreiecke ABC (Fig. 109) mit der Seite AB eine Parallele DE, und vergleiche die Winkel und Seiten der beiden Dreiecke ABC und DEC mit einander. Man findet zunächst, daß die zwei Dreiecke gleiche Winkel haben; denn der Winkel C ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich; BAC und EDC sind als Gegenwinkel, und eben so ABC und DEC als Gegenwinkel gleich. Um die Beziehungen zwischen den Seiten zu ersehen, suche man zuerst das Verhältniß zwischen AC und DC (§. 149); Ca sei ihr gemeinschaftliches Maß, und zwar sei dieses in AC 5mal, in DC 2mal enthalten, daher $AC : DC = 5 : 2$. Zieht man durch jeden Theilungspunct der AC eine Parallele mit BC, so wird dadurch nach §. 82 auch BC in 5 unter einander gleiche Theile getheilt, von denen EC 2 enthält; daher ist $BC : EC = 5 : 2$. Zieht man endlich durch jeden Theilungspunct der AC auch eine Parallele mit BC, so wird dadurch auch AB in 5 gleiche Theile und DE in 2 gleiche Theile getheilt, und zwar sind die einzelnen Theile der AB eben so groß als jene der DE, weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind; man hat daher auch $AB : DE = 5 : 2$. Es stehen also in den beiden Dreiecken je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, in demselben Verhältnisse 5 : 2.

Zieht man daher in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so hat das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen kleineren Dreiecke gleiche Winkel und proportionale Seiten.

Fig. 110.



Bewegen sich nun im Dreiecke ABC (Fig. 110) die beiden Puncte A und B in den Seiten AC und BC so gegen A hin, daß ihre Verbindungslinie A′ B′, A″ B″, . . . in jeder neuen Lage mit der Seite AB parallel bleibt; so wird hiebei jedes folgende Dreieck A′B′C, A″B″C, . . . kleiner als das vorhergehende, dagegen bleibt die Gestalt derselben stets unverändert. Alle diese Dreiecke stimmen also in der Form vollkommen überein und sind somit ähnlich. Zugleich geht aus dem früher bewiesenen Lehrsatze hervor, daß in je zweien dieser Dreiecke die Winkel wechselseitig gleich sind, und die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, dasselbe Verhältniß zu einander haben. Daraus folgt:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben alle drei Winkel wechselseitig gleich, und die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten proportional sind.

Die Seiten, welche in ähnlichen Dreiecken den gleichen Winkeln gegenüberliegen, heißen homologe Seiten:

Auch folgt aus den zwei letzten Sätzen:

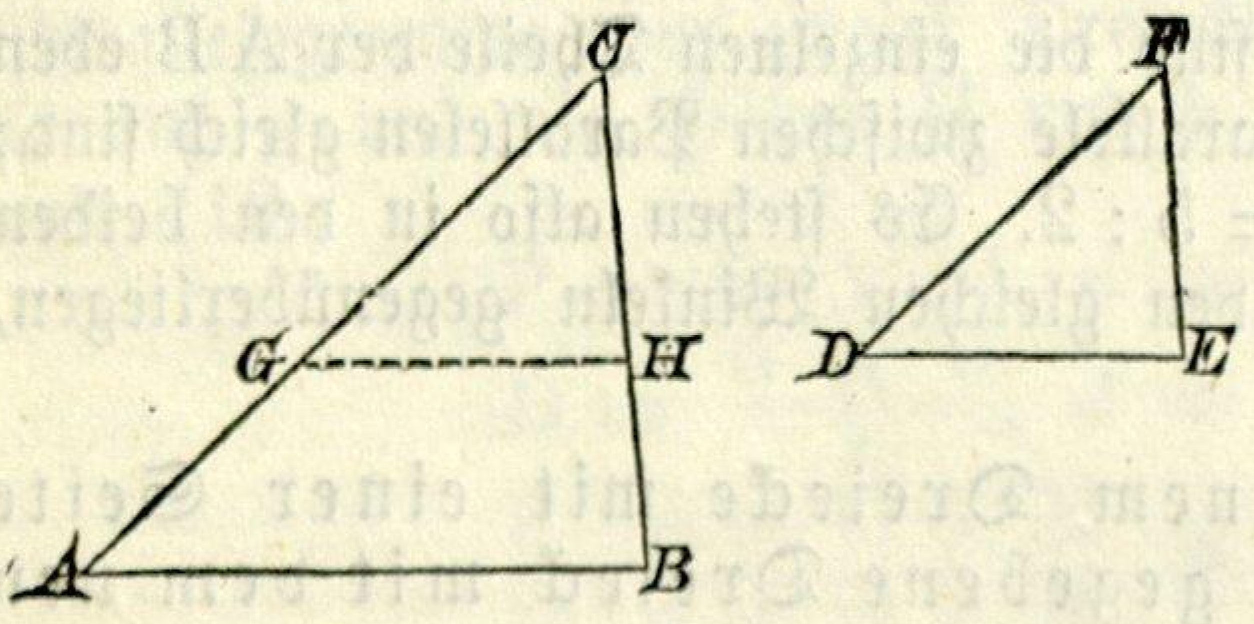
Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen kleineren Dreiecke ähnlich.

Zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke gehören sechs Eigenschaften; nämlich: jeder der drei Winkel des einen Dreieckes muß einem Winkel in dem andern Dreiecke gleich sein, und jede Seite des einen Dreieckes muß mit der ihr homologen Seite des andern Dreieckes dasselbe Verhältniß geben.

Welche sechs Eigenschaften gehören zur Congruenz zweier Dreiecke?

So wie man meistens schon aus der Gleichheit dreier Stücke in zwei Dreiecken auf die Congruenz derselben schließen kann, so kann auch schon aus dem Eintreffen einiger von den zur Aehnlichkeit gehörigen Eigenschaften oder auch aus der Angabe anderer Bedingungen, welche jene Eigenschaften zur Folge haben, auf die Aehnlichkeit zweier Dreiecke geschlossen werden. Die Fälle, in denen dieses geschehen kann, sind in dem Nachstehenden enthalten.

Fig. 111.



§. 155. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 111) der Winkel $A = D$, $B = E$, wo dann auch $C = F$ sein muß.

Man macht $CG = DF$, und zieht $GH \parallel AB$, so ist $\triangle GHC \cong \triangle DEF$ (I. Congruenzsatz); aber $\triangle ABC \sim \triangle GHC$, daher auch $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Daraus folgt:

(I. Aehnlichkeitssatz.) Sind in zwei Dreiecken alle drei Winkel einzeln einander gleich, so sind die Dreiecke ähnlich.

Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel einzeln gleich haben, auch die dritten Winkel gleich sein müssen, so folgt, daß man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Aehnlichkeit derselben schließen kann.

Welche Bedingung genügt, damit zwei gleichschenklige Dreiecke; welche, damit zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich seien?

Zwei gleichseitige Dreiecke sind immer ähnlich.

Verzeichne mehrere ähnliche Dreiecke, in denen die beiden Winkel 63° und 72° vorkommen.

§. 156. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 111) $AC : DF = BC : EF$ und der Winkel $C = F$.

Macht man $CG = DF$, und zieht $GH \parallel AB$, so ist $AC : CG = BC : CH$. Da in dieser und der früheren Proportion die ersten drei Glieder gleich sind, so müssen auch die vierten Glieder gleich sein, also $CH : EF$. Dann aber ist $\triangle GHC \cong \triangle DEF$ (II. Congruenzsatz); allein $\triangle ABC \sim \triangle GHC$, folglich auch $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, d. h.

(II. Aehnlichkeitssatz.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich.

§. 157. In den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 111) sei $AC : DF = BC : EF$, $AC > BC$, $DF > EF$, und $B = E$.

Man mache $CG = DF$ und ziehe $GH \parallel AB$, so ist $AC : CG = BC : CH$. Diese und die frühere Proportion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch die vierten Glieder gleich haben, folglich $CH = EF$. Dann aber ist $\triangle GHC \cong \triangle DEF$ (III. Congruenzsatz); allein $\triangle ABC \sim \triangle GHC$, mithin auch $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Daraus folgt:

(III. Aehnlichkeitssatz.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional, und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich.

§. 158. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 111)

$$AC : DF = BC : EF, \text{ und}$$
$$AC : DF = AB : DE.$$

Macht man $CG = DF$ und zieht $GH \parallel AB$, so ist

$$AC : CG = BC : CH, \text{ und}$$
$$AC : CG = AB : GH.$$

In der ersten und dritten der voranstehenden Proportionen sind die ersten drei Glieder gleich, also müssen in denselben auch die vierten

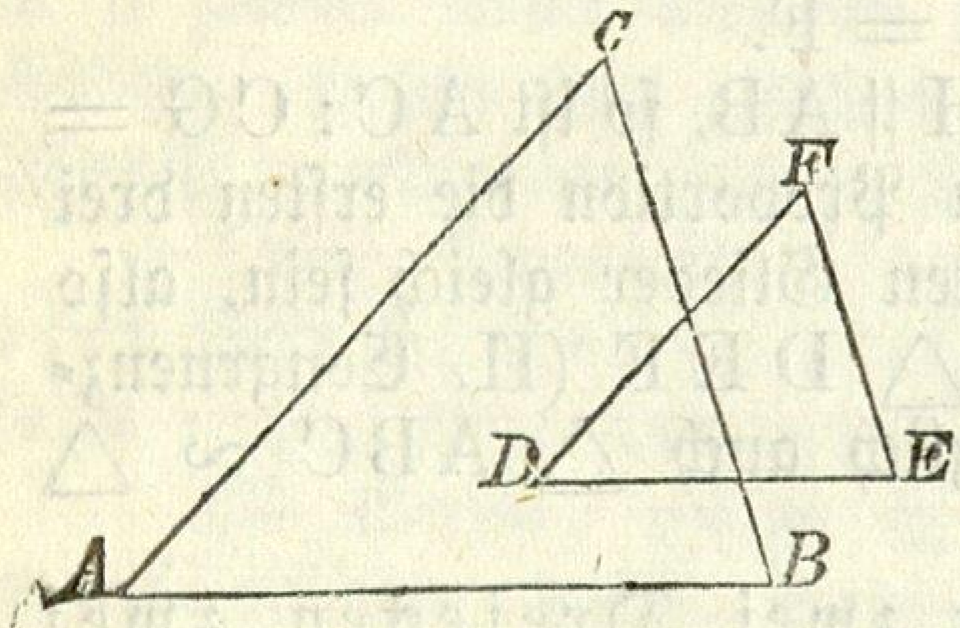
Glieder gleich sein, nämlich CH = EF. Ebenso folgt aus der zweiten und vierten Proportion, daß GH = DE ist. Dann aber ist △ GHC ≅ △ DEF (IV. Congruenzsatz); allein △ ABC ∼ △ GHC, folglich auch △ ABC ∼ △ DEF, d. h.

(IV. Aehnlichkeitssatz.) Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportional, so sind die Dreiecke ähnlich.

§. 159. Aus dem I. Aehnlichkeitssatze lassen sich folgende zwei Sätze ableiten:

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind.

Fig. 112.

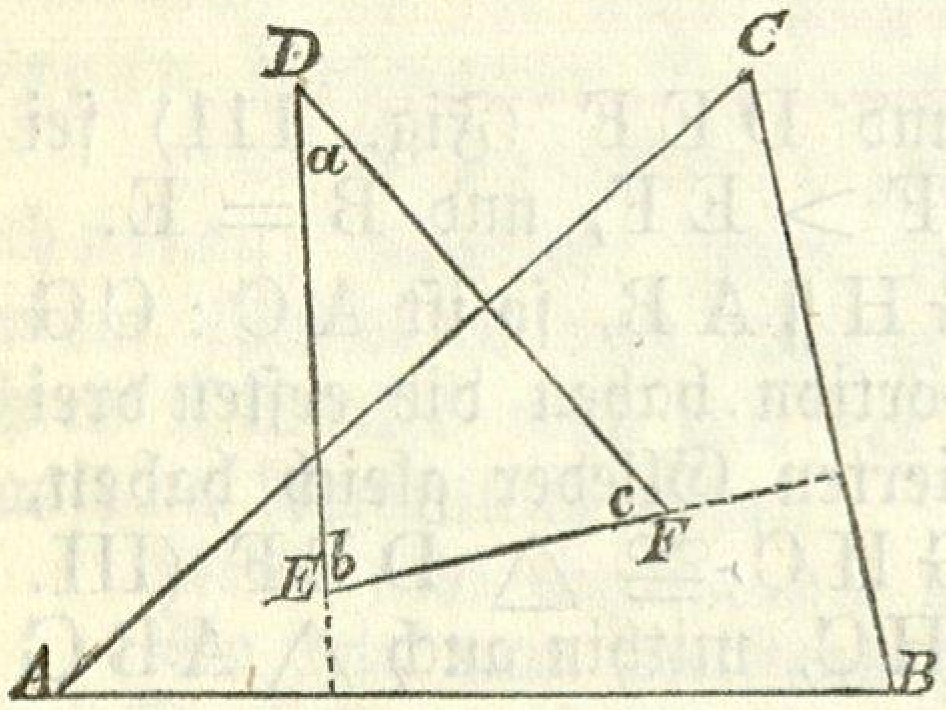


Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 112) die Seite AB ∥ DE, AC ∥ DF und BC ∥ EF.

Da Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite parallel laufen, gleich sind, so ist der Winkel A = D, B = E und C = F; daher ist △ ABC ∼ △ DEF.

Welche Seiten sind in zwei solchen Dreiecken die homologen?

Fig. 113.



2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise auf einander senkrecht stehen.

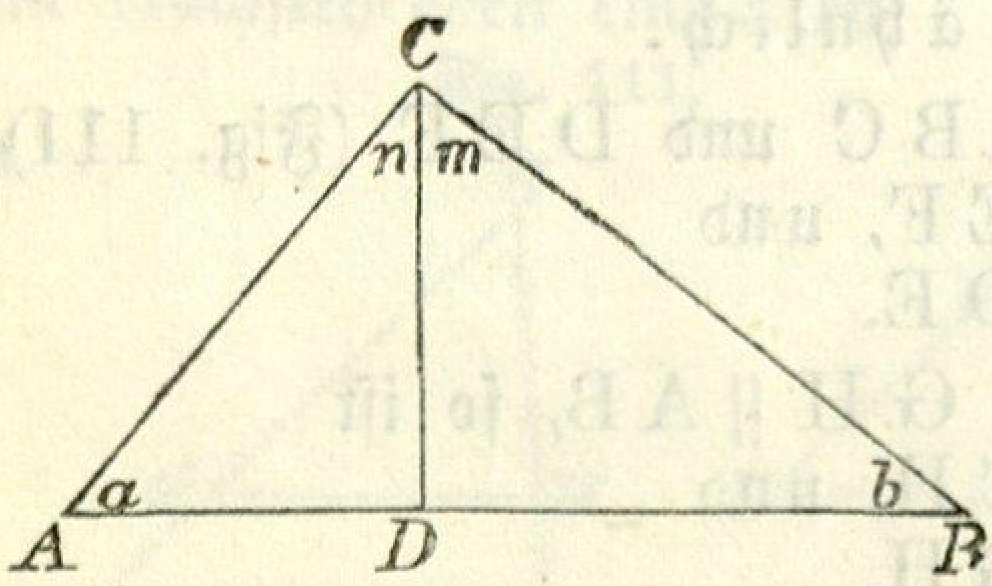
Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 113) die Seite AB ⊥ DE, AC ⊥ DF und BC ⊥ EF.

Nach §. 51 ist hier der Winkel A = a B = b und C = c, folglich △ ABC ∼ △ DEF.

Welche Seiten sind in zwei solchen Dreiecken die homologen?

§. 160. Es sei das Dreieck ABC (Fig. 114) bei C rechtwinklig, und CD ⊥ Hypotenuse AB.

Fig. 114.



1. In den Dreiecken ABC und ACD ist ∡ ACB = ∡ ADC = R und a = a; folglich muß auch b = n, und daher △ ABC ∼ △ ACD sein.

In den Dreiecken ABC und BCD ist ∡ ACB = ∡ BDC = R und b = b; folglich muß auch a = m, und daher △ ABC ∼ △ BCD sein.

Wenn aber △ ABC ∼ △ ACD und △ ABC ∼ △ BCD ist, so ist auch △ ACD ∼ △ BCD.

2. Da in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, proportional sind, so folgt

wegen $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ACD... AB : AC = AC : AD,

" $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ BCD... AB : BC = BC : BD.

3. Ebenso ist

wegen $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ BCD... AD : CD = CD : BD.

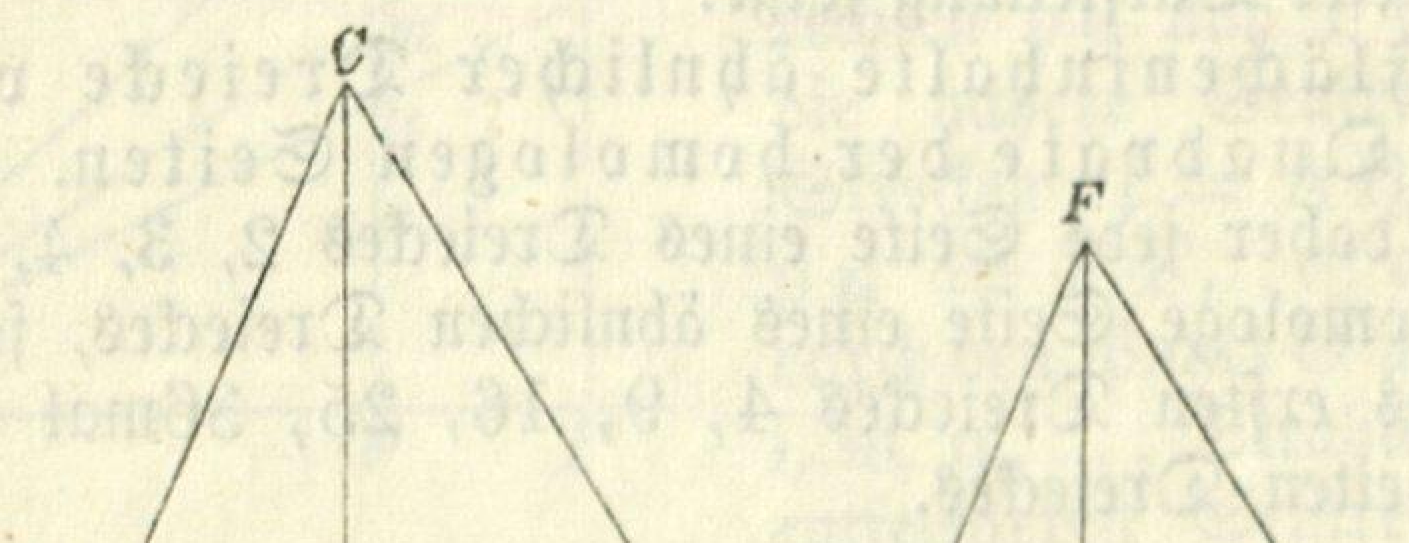
Zieht man also in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so sind

1. *die dadurch entstehenden kleineren Dreiecke sowohl mit dem gegebenen als auch unter einander ähnlich;*
2. *jede Kathete des gegebenen Dreieckes ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben;*
3. *die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.*

4. Haupteigenschaften ähnlicher Dreiecke.

§. 161. Es sei (Fig. 115) das Dreieck ABC $\sim$ DEF; ferner seien AB und DE die Grundlinien, CG und FH die Höhen dieser Dreiecke.

Fig. 115.



Weil nach der Voraussetzung der Winkel A = D und m = n ist, so ist $\triangle$ ACG $\sim$ $\triangle$ DFH, und daher CG : FH = AC : DF. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF ist aber auch AB : DE = AC : DF; daher ist auch CG : FH = AB : DE, d. h.

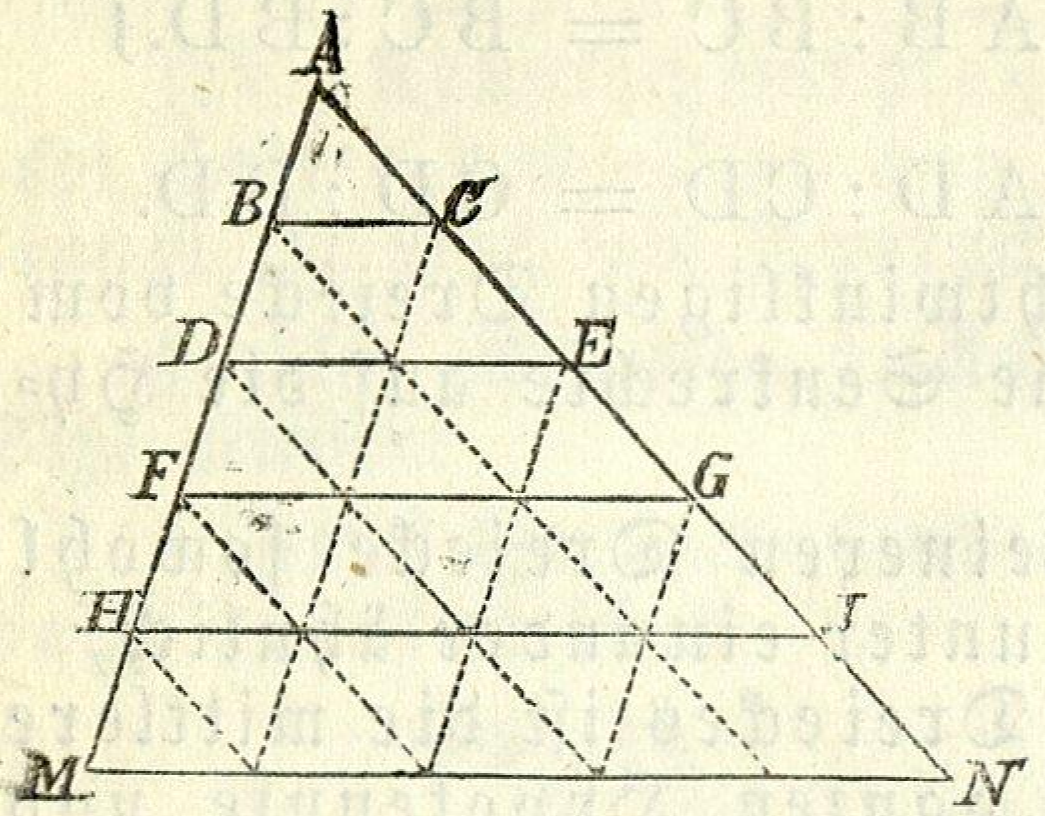
In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen sowie die Grundlinien.

§. 162. Wenn jede Seite eines Dreieckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Dreieckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Dreieckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Dreieckes.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Umfänge so wie je zwei homologe Seiten.

§. 163. Theilt man in dem Dreiecke A M N (Fig. 116) die Seite A M in fünf gleiche Theile, zieht durch jeden Theilungspunct eine Parallele mit M N, wodurch die ähnlichen Dreiecke A B C, A D E, A F G, . . . entstehen, und zieht noch durch jeden Theilungspunct der A M Parallele mit A N, und durch jeden Theilungspunct der A N Parallele mit A M, so erhält man lauter Dreiecke, die mit A B C gleichen Flächeninhalt haben.

Fig. 116.



Das Dreieck A D E enthält nun 4 Dreiecke, deren jedes gleich ABC ist; es verhält sich also der Flächeninhalt des Dreieckes ADE zu jenem des Dreieckes A B C wie 4 : 1. Die homologen Seiten dieser beiden Dreiecke verhalten sich wie 2 : 1, daher ihre Quadrate wie 4 : 1. Es verhalten sich also die Flächenräume dieser zwei Dreiecke gerade so wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Eben so ersieht man aus der vorliegenden Figur, daß in den Dreiecken A F G und A B C sowohl das Verhältniß der Flächenräume als jenes der Quadrate der homologen Seiten 9 : 1 ist.

Für die Dreiecke A H J und A M N ergibt sich 16 : 25 als das Verhältniß zwischen den Flächeninhalten und zugleich als das Verhältniß zwischen den Quadraten von je zwei homologen Seiten.

Aus dieser Darstellung folgt:

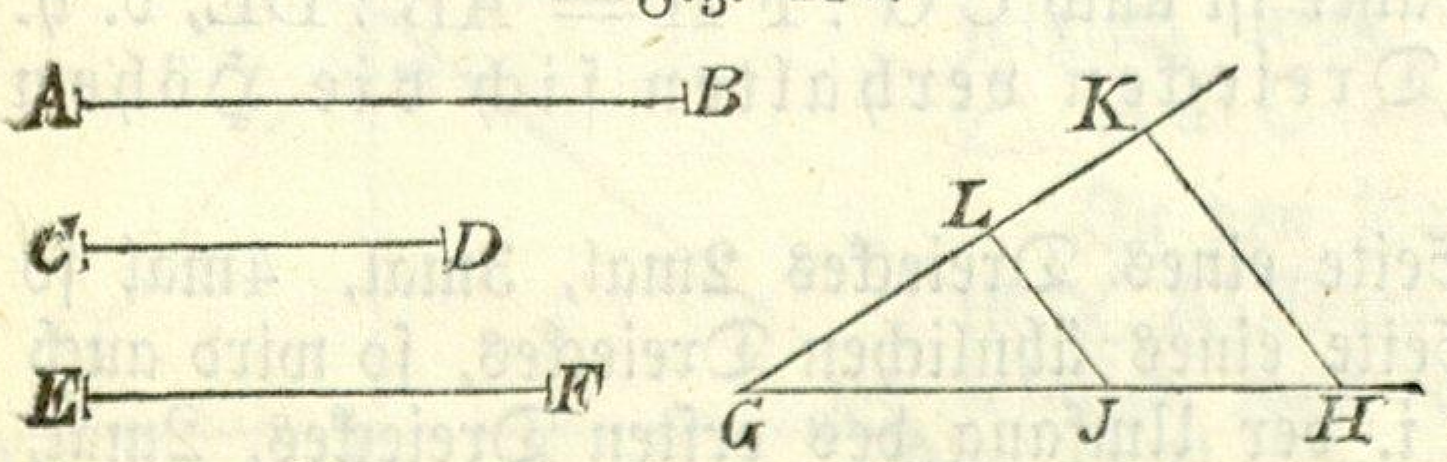
Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich so wie die Quadrate der homologen Seiten.

Wenn daher jede Seite eines Dreieckes 2, 3, 4, 5, 6mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Dreieckes, so wird der Flächeninhalt des ersten Dreieckes 4, 9, 16, 25, 36mal so groß sein als jener des zweiten Dreieckes.

5. Constructionen, die auf der Aehnlichkeit der Dreiecke beruhen.

§. 164. Zu drei gegebenen Strecken AB, CD und EF (Fig. 117) die vierte Proportionale zu finden.

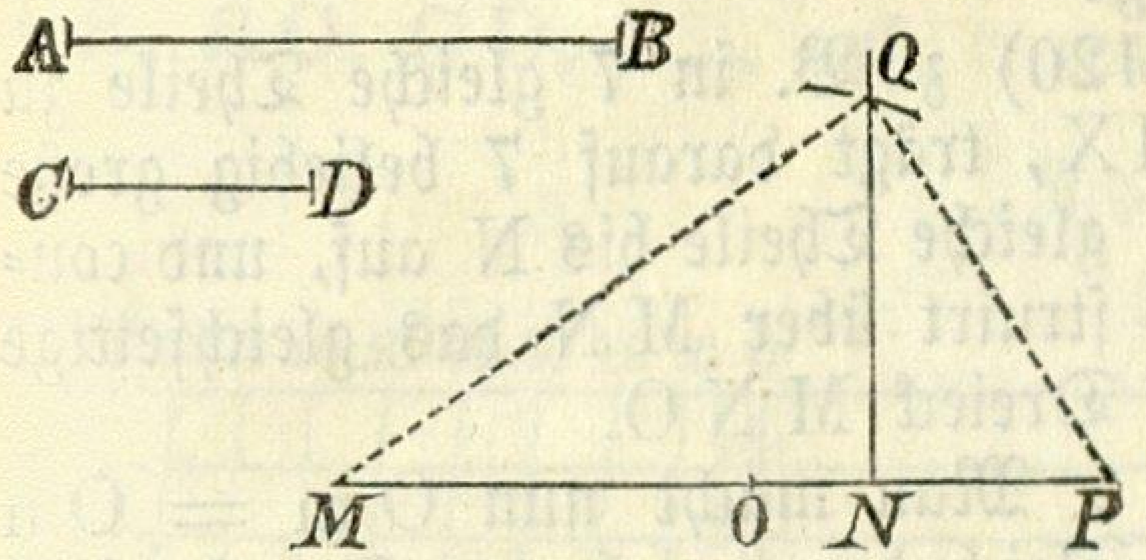
Fig. 117.



Man verzeichne einen beliebigen Winkel G, schneide auf dessen Schenkeln G H = A B, G J = C D, G K = E F ab, ziehe H K und damit parallel die J L; so ist G L die vierte Proportionale zu A B, C D und E F. Denn △ G H K ∾ △ G J L, daher G H : G J = G K : G L, oder A B : C D = E F : G L.

§. 165. **Zwischen zwei gegebenen Strecken AB und CD (Fig. 118) die mittlere Proportionale zu finden.**

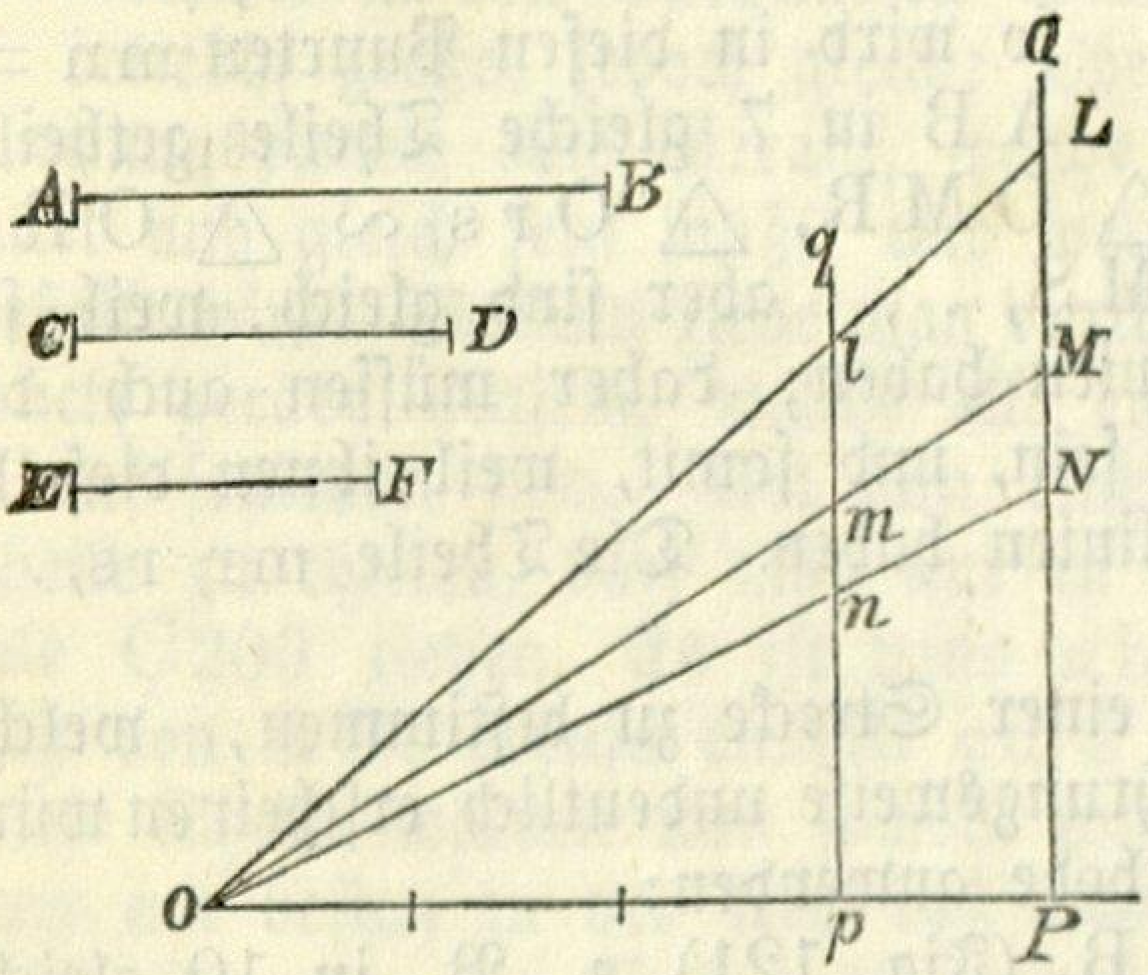
Fig. 118.



Man trage auf eine Gerade MN = AB und NP = CD auf, errichte in N eine Senkrechte auf MP, halbire MP in O und beschreibe aus O mit dem Halbmesser OM = OP einen Kreisbogen, welcher jene Senkrechte in Q schneidet; NQ ist dann die mittlere Proportionale zwischen AB und CD. Denn nach §. 74 ist das Dreieck MQP bei Q rechtwinklig, folglich (nach §. 160, 3) MN : NQ = NQ : NP, oder AB : NQ = NQ : CD.

§. 166. **Mehrere Strecken AB, CD, EF .... (Fig. 119) nach einem gegebenen Verhältnisse zu vergrößern oder zu verkleinern.**

Fig. 119.



Sind die Strecken z. B. in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so ziehe man einen Strahl OP, trage von O aus 3, und ebenfalls von O aus 4 gleiche Theile auf; in den Endpuncten p und P errichte man dann die Senkrechten pq und PQ, trage auf die nähere Senkrechte pq die Strecken pl = AB, pm = CD, pn = EF, ... auf, und ziehe durch den Punct O und die Puncte l, m, n, ... Strahlen, welche die entfernteren Senkrechten in den Puncten L, M, N ... treffen. Die Strecken PL, PM, PN, ... sind dann die gesuchten verhältnißmäßig vergrößerten Linien. Die Richtigkeit dieser Auflösung folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Opl und OPL, Opm und OPM u. s. w.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, so würde man sie auf die entferntere Gerade PQ auftragen; auf der näheren Senkrechten pq erhielte man dann die verhältnißmäßig verkleinerten Strecken.

Zeichne vier ungleiche Strecken und vergrößere dieselben in dem Verhältnisse 2 : 5; sodann verkleinere sie in dem Verhältnisse 10 : 7.

Ist das Verhältniß der Vergrößerung oder der Verkleinerung nicht in Zahlen, sondern durch Linien ausgedrückt, so trägt man auf die Gerade OR von O aus statt der gleichen Theile, welche die Verhältnißzahlen angeben, die Verhältnißlinien auf, und verfährt übrigens wie vorhin.

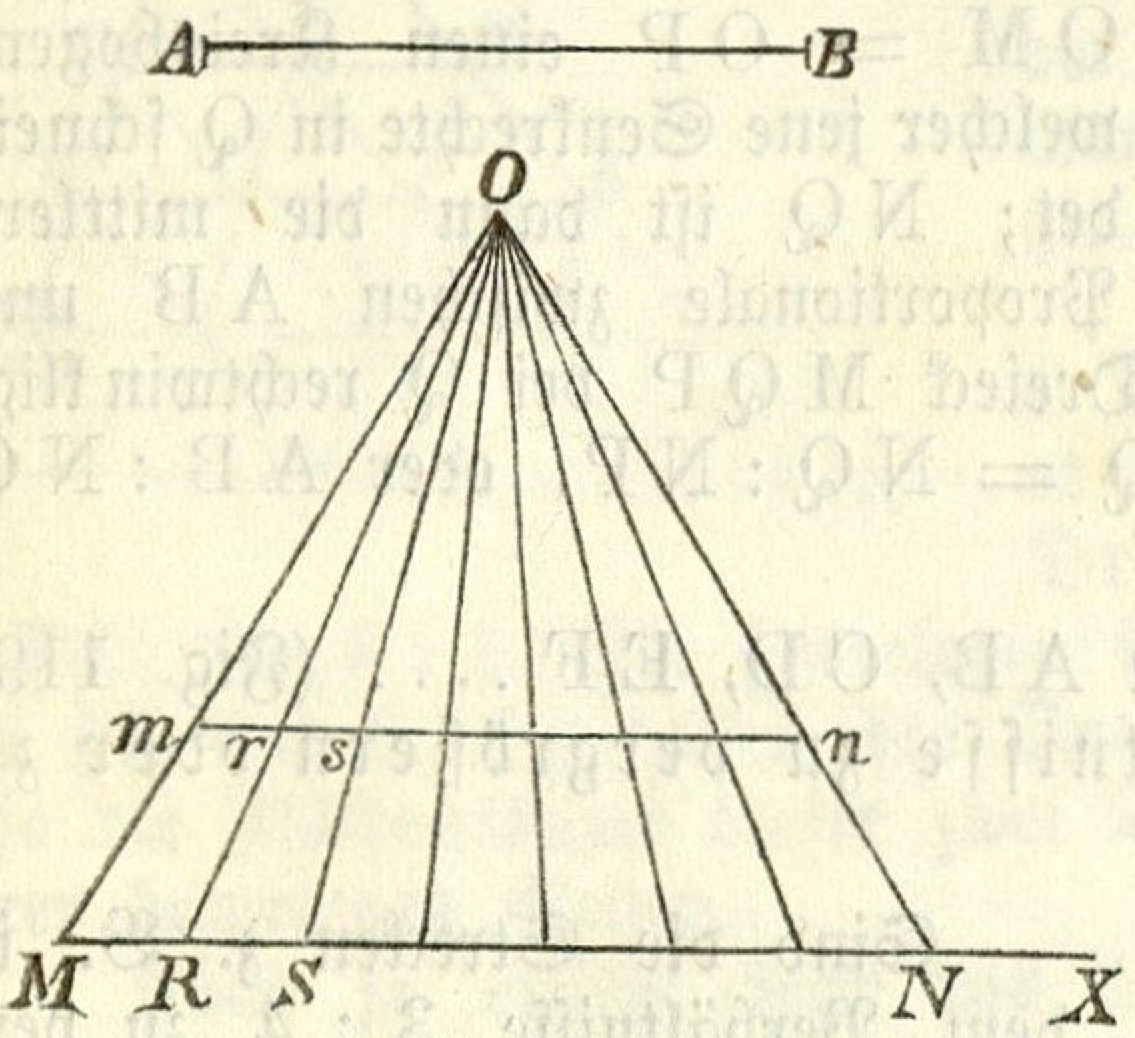
§. 167. **Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.**

a) Eine Auflösung dieser Aufgabe wurde bereits §. 83 gezeigt; dieselbe ist aber, da dabei viele Parallele gezogen werden müssen, mühsam, und kann leicht Fehler veranlassen.

b) Einfacher ist folgende Auflösung:

Ist eine Strecke AB (Fig. 120) z. B. in 7 gleiche Theile zu theilen, so zieht man einen Strahl MX, trägt darauf 7 beliebig große gleiche Theile bis N auf, und construirt über MN das gleichseitige Dreieck MNO.

Fig. 120.

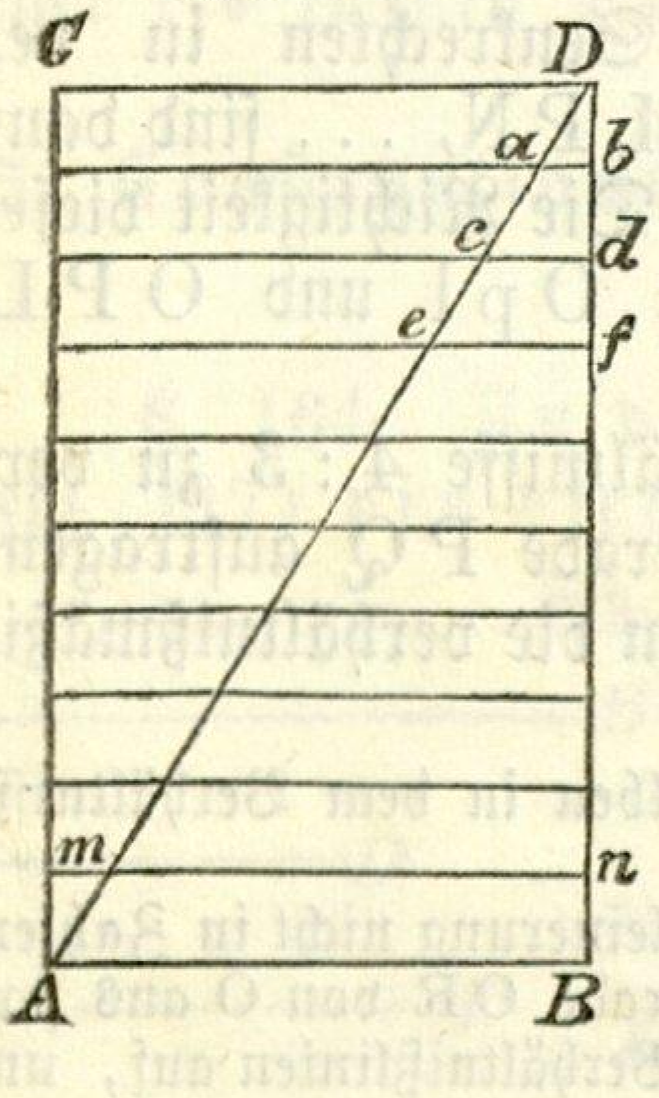


Man macht nun Om = On gleich der gegebenen Strecke AB und zieht mn, so ist auch Omn ein gleichseitiges Dreieck (warum?), und daher die mn gleich der AB und parallel mit MN. Zieht man dann von O zu den Theilungspuncten der MN gerade Linien OR, OS, . . ., welche die mn in den Puncten r, s, . . . schneiden, so wird in diesen Puncten mn = AB in 7 gleiche Theile getheilt.

Denn es ist △ Omr ∾ △ OMR, △ Ors ∾ △ ORS u. s. w.; die Dreiecke OMR, OMS, . . . aber sind gleich, weil sie dieselbe Höhe und gleiche Grundlinien haben; daher müssen auch die Dreiecke Omr, Ors, . . . gleich sein, und somit, weil ihnen dieselbe Höhe zukommt, auch gleiche Grundlinien haben. Die Theile mr, rs, . . . der mn sind also gleich groß.

c) Sind sehr kleine Theile einer Strecke zu bestimmen, welche bei der vorhergehenden Verfahrungsweise undeutlich erscheinen würden, kann man folgende Methode anwenden:

Fig. 121.



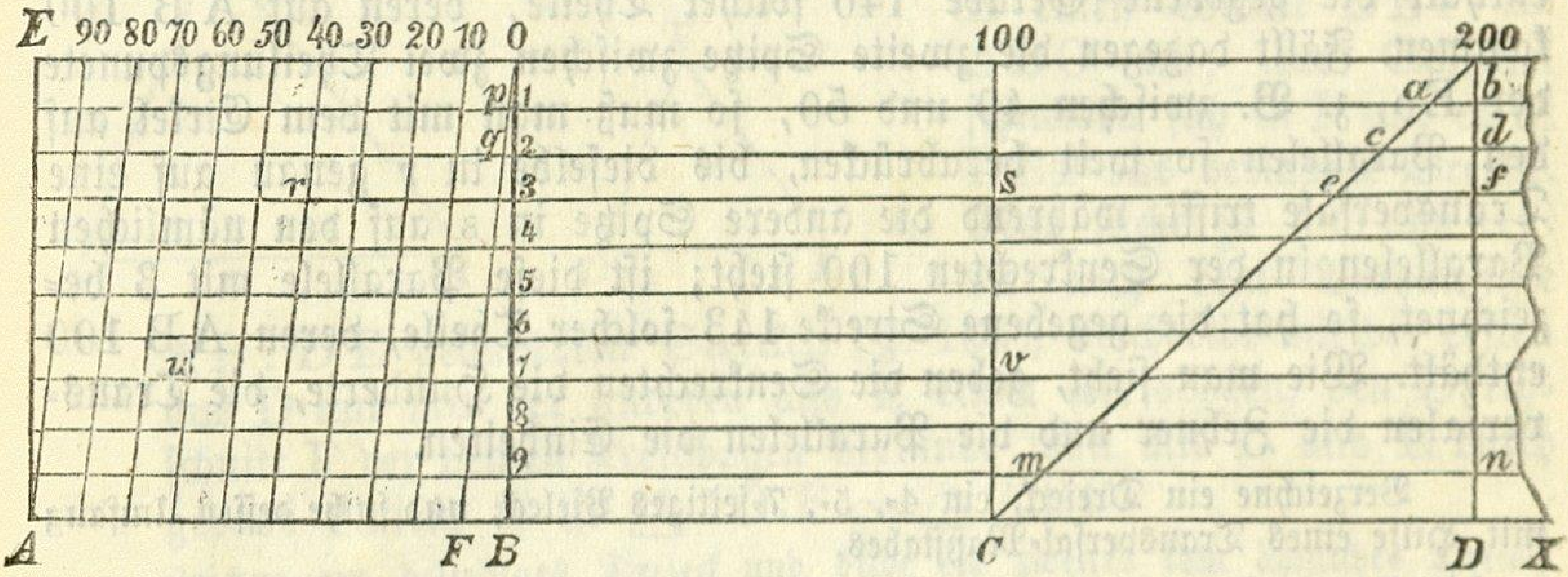
Es sei AB (Fig. 121) z. B. in 10 gleiche Theile zu theilen. Man errichte in A und B auf AB zwei Senkrechte, trage auf jede 10 gleich große Theile bis C und D auf, und ziehe durch je zwei zusammengehörige Theilungspuncte eine Gerade. Zieht man nun in dem Rechtecke ABCD die Diagonale AD, so ist die Aufgabe gelöst. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Dab und DAB muß das Verhältniß ab : AB dem Verhältnisse db : DB gleich sein, nun ist Db der zehnte Theil von DB, also muß auch ab der zehnte Theil von AB sein. Eben so folgt, daß $cd = \frac{2}{10}$ AB, $ef = \frac{3}{10}$ AB, . . . $mn = \frac{9}{10}$ AB ist.

§. 168. Auf dem zuletzt angegebenen Verfahren, eine Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen, beruht die Construction der verjüngten Transversal-Maßstäbe (§. 31).

Einen tausendtheiligen Maßstab, d. i. einen Transversal-Maßstab für das Decimalmaß zu construiren.

Man trage auf einen Strahl A X (Fig. 122) 10 gleiche Theile AB, BC, CD, . . . auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll,

Fig. 122.



und errichte in den Endpuncten Senkrechte. Auf diese trage man wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche Theile auf und ziehe durch die letzten Theilungspuncte eine Gerade, welche der zuerst gezogenen Geraden parallel und gleich sein muß, und welche ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspuncte gerade Linien, welche alle entweder mit der AX parallel oder darauf senkrecht sind. Um nun einen Theil AB wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, darf man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale C200 ziehen. Es ist dann ab der zehnte Theil von CD, daher auch von AB; ebenso enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. f. Diese Theile werden nun sowohl auf AB als auf Eo aufgetragen, und zwar am besten in der Art, daß man zuerst 9 Theile, nämlich mn, von 0 bis 90 und von E bis 10 aufträgt und eben so auf der AB verfährt; dann werden nach der Reihe 8, 7, 6, 5 Theile auf dieselbe Weise aufgetragen. Endlich zieht man noch durch 0 und F, so wie durch je zwei folgende Theilungspuncte Querlinien oder Transversalen und schreibt an die Theilungspuncte die Zahlen so hin, wie man sie in der Figur sieht.

Die ganze Strecke ADX enthält 1000 Theile; AB ist der zehnte Theil davon und enthält somit 100 Theile; BF ist der zehnte Theil von AB und enthält 10 solche Theile; pl ist nach der Construction der zehnte Theil von BF und enthält daher 1 solchen Theil, wie deren auf die ganze Strecke 1000 kommen: q2 enthält 2 solche Theile u. s. w.

Stellt z. B. die ganze Strecke ADX ein Meter vor, so ist AB ein Decimeter, BF ein Centimeter, pl ein Millimeter.

§. 169. Mit Hilfe der verjüngten Transversal-Maßstäbe lassen sich nun verschiedene Aufgaben lösen.

a) Eine auf dem Papier verzeichnete Strecke zu messen.

Um zu erfahren, wie viele Theile eines Transversal-Maßstabes eine auf dem Papier verzeichnete Strecke enthalte, fasse man dieselbe zwischen die Cirkelspitzen und setze die eine Spitze auf einen der mit 0, 100, 200,... bezeichneten Puncte ein, damit die andere zwischen o und E hineinfalle. Trifft nun die zweite Spitze genau in einen der Theilungspuncte der Eo, z. B. in 40 ein, während die erste in 100 steht, so enthält die gegebene Gerade 140 solcher Theile, deren auf AB 100 kommen. Fällt dagegen die zweite Spitze zwischen zwei Theilungspuncte der Eo, z. B. zwischen 40 und 50, so muß man mit dem Cirkel auf den Parallelen so weit herabrücken, bis dieselbe in r genau auf eine Transversale trifft, während die andere Spitze in s auf den nämlichen Parallelen in der Senkrechten 100 steht; ist diese Parallele mit 3 bezeichnet, so hat die gegebene Strecke 143 solcher Theile, deren AB 100 enthält. Wie man sieht, geben die Senkrechten die Hunderte, die Transversalen die Zehner und die Parallelen die Einheiten.

Verzeichne ein Dreieck, ein 4-, 5-, 7-seitiges Vieleck, und suche dessen Umfang mit Hilfe eines Transversal-Maßstabes.

b) Eine Gerade von gegebener Länge auf dem Papier zu verzeichnen.

Um auf dem Transversal-Maßstabe eine bestimmte Länge, z. B. 200 abzufassen, setzt man die eine Cirkelspitze in den Punct 200 ein und eröffnet die andere Spitze bis o, soll man 260 abfassen, so öffnet man, wenn die eine Spitze in 200 eingestellt ist, die andere bis 60; um 167 abzufassen, sucht man die mit 7 bezeichnete Parallele auf und setzt auf derselben die eine Cirkelspitze in die Senkrechte 100, die andere in die Transversale 60, so daß die Cirkelöffnung uv ist. Die mit dem Cirkel gefaßte Länge wird dann auf der Geraden, die man auf dem Papiere zieht, abgeschnitten.

1. Zeichne ein Dreieck, dessen Seiten 300, 260, 182 Theile des Maßstabes enthalten.
2. Zeichne mit der Seite 138 ein Quadrat.
3. Zeichne mit den Seiten 179 und 85 ein Rechteck.

c) Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man messe die Strecke mit Hilfe des verjüngten Maßstabes und dividire die gefundene Länge durch die verlangte Anzahl der Theile. Nimmt man nun die im Quotienten enthaltene Zahl von demselben Maßstabe mit dem Cirkel ab, so kann diese Länge auf der gegebenen Strecke so oft aufgetragen werden als verlangt wurde.

Ziehe vier gerade Linien und theile auf diese Art die erste in 3, die zweite in 5, die dritte in 7 und die vierte in 10 gleiche Theile.

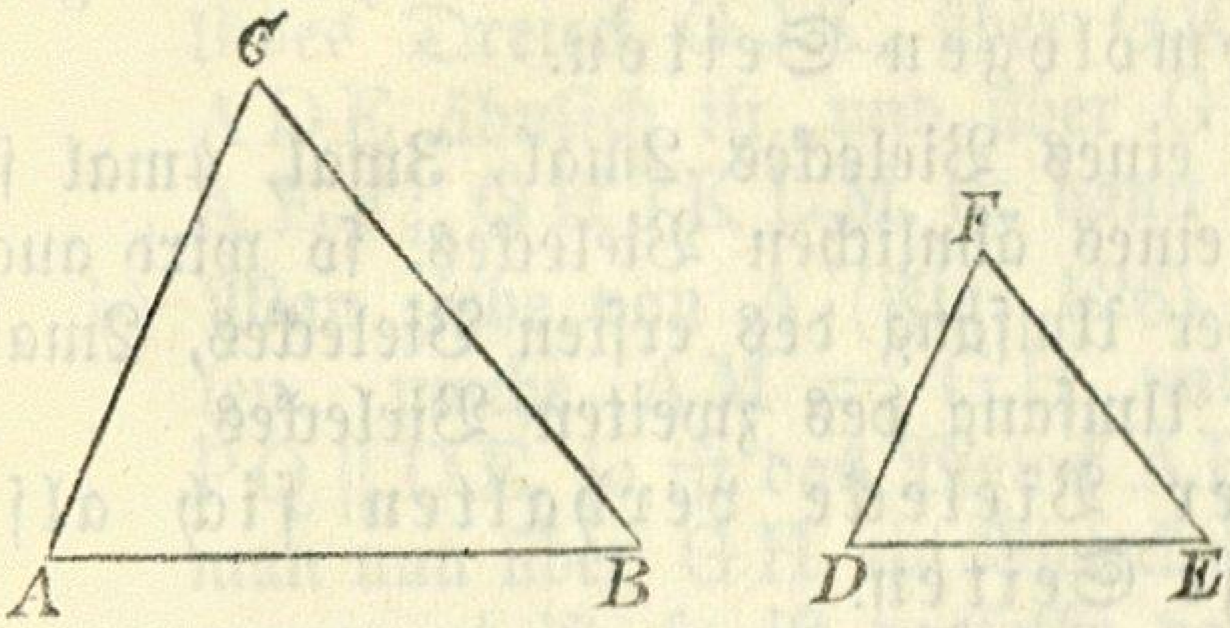
d) Das Verhältniß der Längen zweier Strecken zu finden.

Man untersuche, wie viele Theile des Maßstabes jede der gegebenen Strecken enthält; das Verhältniß dieser zwei Zahlen ist zugleich das Verhältniß zwischen den gegebenen zwei Strecken.

Zeichne zwei Strecken und suche deren Verhältniß sowohl nach dem hier angegebenen Verfahren, als nach der §. 149 auseinander gesetzten Methode.

§. 170. **Ueber einer Geraden DE (Fig. 123) ein Dreieck zu verzeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist.**

Fig. 123.



a) Man trage in D einen Winkel EDF = BAC und in E einen Winkel DEF = ABC auf; ihre Schenkel schneiden sich in F und es ist DEF das verlangte Dreieck.

b) Man suche zu AC und BC die nach dem Verhältnisse AB : DE geänderten Strecken (§. 165), beschreibe mit der ersten aus D und mit der anderen aus E einen Kreisbogen, den Durchschnitt F der beiden Kreisbogen verbinde man mit D und E durch gerade Linien, so ist $\triangle$ DEF $\sim$ $\triangle$ ABC.

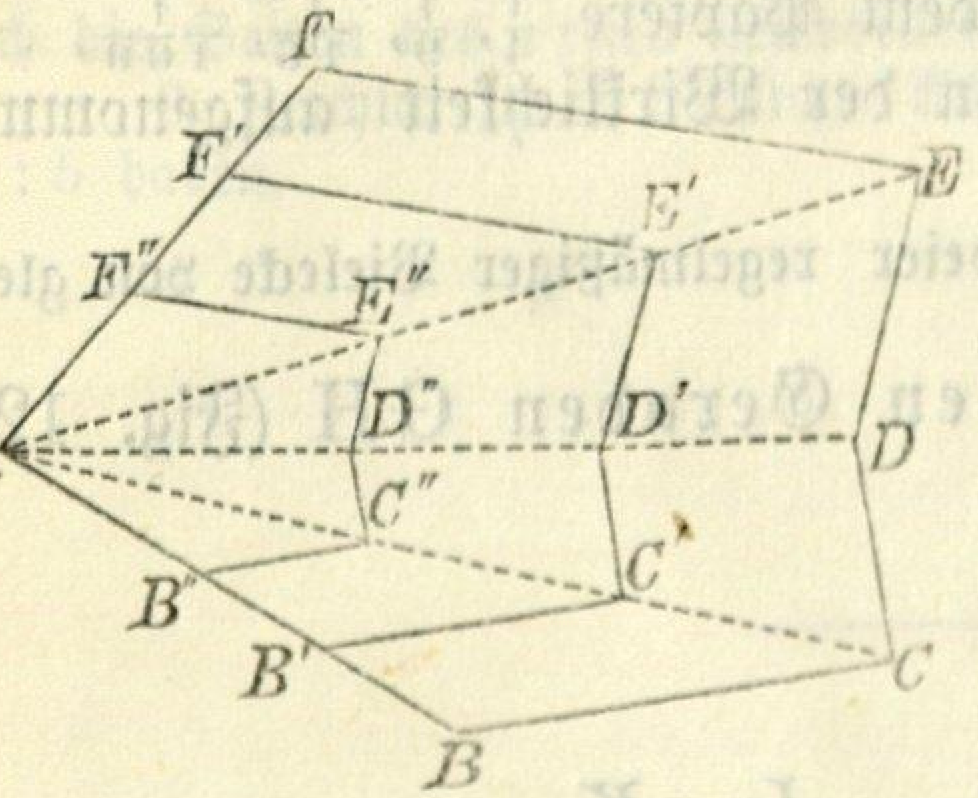
Zeichne ein beliebiges Dreieck und bilde ein zweites ihm ähnliches Dreieck dergestalt, daß sich die homologen Seiten des gegebenen und des andern Dreieckes 1) wie 5 : 3, 2) wie 2 : 5 zu einander verhalten.

6. Aehnlichkeit der Vielecke.

§. 171. Zwei Vielecke heißen **ähnlich**, wenn sie dieselbe Gestalt haben.

Um die Beschaffenheit ähnlicher Vielecke näher zu bestimmen, ziehe man in dem Vielecke ABCDEF (Fig. 124) von A aus die Diagonalen AC, AD, AE, und denke sich, daß sich die Puncte B, C, D, E, F in den Geraden AB, AC, AD, AE, AF so gegen den Punct A hin bewegen, daß die Verbindungslinien B′ C′, C′ D′, . . . B″ C″, C″ D″, . . . in jeder neuen Lage mit den gleichliegenden Seiten BC, CD, . . . parallel bleiben; so erhält man dabei immer kleinere Vielecke AB′ C′ D′ E′ F′, AB″ C″ D″ E″ F″ . . ., welche aber offenbar alle unter einander und mit dem gegebenen Vielecke dieselbe Gestalt haben, also ähnlich sind. Der Winkel A ist allen diesen Vielecken gemeinschaftlich; die übrigen Winkel müssen während der parallelen Bewegung der Seiten ebenfalls ungeändert bleiben, so daß alle diese Vielecke nach der Ordnung gleiche Winkel haben. Auch geht aus §. 154 hervor, daß die Seiten eines jeden neuen Vieleckes mit den gleichliegenden oder homologen Seiten des gegebenen Vieleckes proportional sein müssen.

Fig. 124.



In ähnlichen Vielecken sind die Winkel nach der Ordnung gleich und die homologen Seiten proportional.

Alle regelmäßigen Figuren von einer gleichen Seitenzahl sind ähnlich.

Aus der obigen Darstellung folgt ferner:

a) Aehnliche Vielecke werden durch die homologen Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt.

b) In ähnlichen Vielecken verhalten sich die homologen Diagonalen wie die homologen Seiten.

§. 172. Wenn jede Seite eines Vieleckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Vieleckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Vieleckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Vieleckes.

Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich also gerade so wie zwei homologe Seiten.

Wie verhalten sich die Umfänge zweier regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten?

§. 173. Wenn man zwei ähnliche Vielecke, von denen das erste doppelt so große Seiten hat als das zweite, durch homologe Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so wird jedes Dreieck des ersten Vieleckes (nach §. 162) 4mal so groß sein als das gleichliegende Dreieck des zweiten Vieleckes, daher wird auch die Summe aller Dreiecke des ersten Vieleckes, d. i. dessen Flächeninhalt, 4mal so groß sein als die Summe aller Dreiecke, d. i. der Flächeninhalt des zweiten Vieleckes. Die Flächeninhalte der beiden Vielecke verhalten sich also wie 4 : 1; allein dasselbe Verhältniß haben auch die Quadrate je zweier homologer Vieleckseiten.

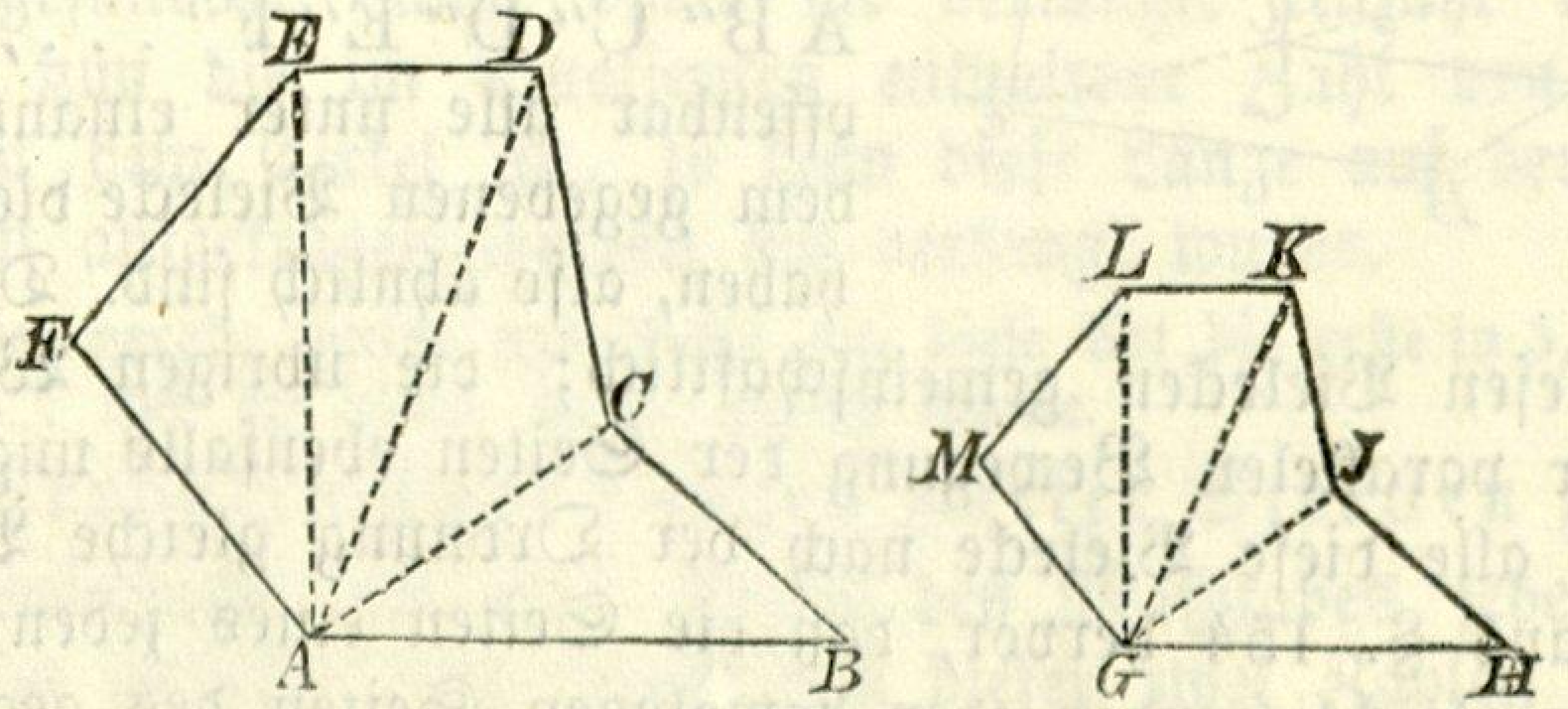
Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie die Quadrate der homologen Seiten.

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf dem Papier verzeichnet, so daß jede Seite auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \ldots$ von der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{100}, \ldots$ von dem Flächeninhalte der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten?

§. 174. **Ueber einer gegebenen Geraden GH (Fig. 125)**

Fig. 125.



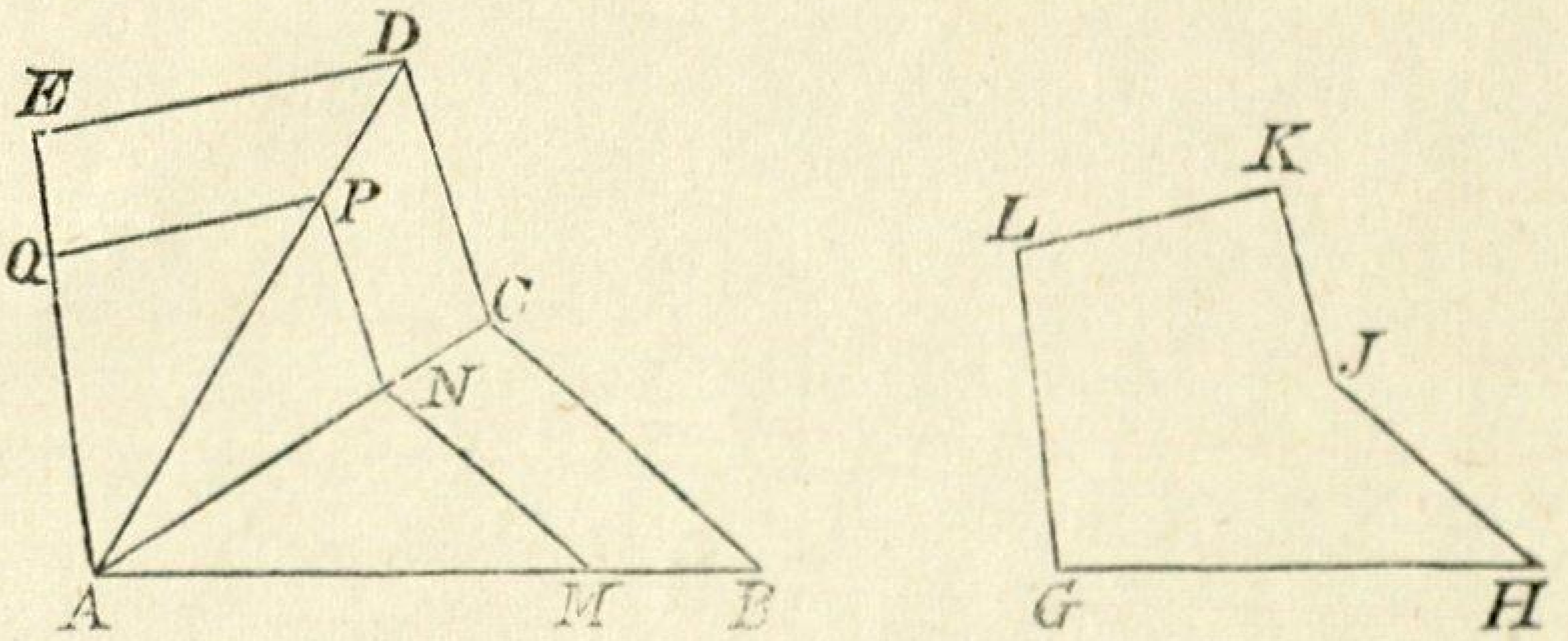
ein Vieleck zu beschreiben, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist.

Diese Aufgabe läßt mehrere Auflösungsarten zu, worunter folgende die einfachsten sein dürften:

a) Man zerlegt das gegebene Vieleck ABCDEF mittelst Diagonalen in Dreiecke, beschreibt über GH ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck GHJ, über GJ ein dem Dreiecke ACD ähnliches Dreieck GJK, über GK das Dreieck GKL, welches mit ADE ähnlich ist, und über GL das Dreieck GLM ähnlich mit AEF; GHJKLM ist dann das verlangte Vieleck.

b) Man ziehe von A (Fig. 126) aus zu allen Eckpuncten Diagonalen, mache AM = GH und ziehe MN || BC, NP || CD, PQ || DE, so ist das Vieleck ABCDE ~ AMNPQ. Verzeichnet man nun über GH ein Vieleck GHJKL, welches mit AMNPQ congruent ist, so ist dasselbe das verlangte Vieleck.

Fig. 126.



Die Puncte N, P, Q könnte man auch dadurch finden, daß man die Strecken AC, AD, AE in dem Verhältnisse AB : GH verkleinert und die so verjüngten Strecken von A bis N, P, Q aufträgt.

1. Zeichne ein Vieleck, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist, wobei aber der Umfang des neuen Vieleckes nur die Hälfte von dem Umfange des gegebenen sein soll.

2. Zeichne ein beliebiges Sechseck und dann ein zweites ihm ähnliches, so daß sich die Seiten des ersten Sechseckes zu jenen des zweiten wie 10 : 3 verhalten.

3. Zeichne zwei ähnliche Achtecke, deren homologe Seiten das Verhältniß 4 : 5 haben.