

- ▶ **PET PRIJATELJEV IN DIFONSKA ENAČBE** / dr. Ajda Fošner / Univerza na Primorskem, Fakulteta za management / dr. Maja Fošner / Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko

- ▶ Spodbujanje inovativnosti in ustvarjalnega načina razmišljanja v osnovni in srednji šoli je zagotovo eden od ključnih ciljev pri pouku matematike. V članku je predstavljena matematična naloga, s pomočjo katere se lahko približamo temu cilju.

## 1 Naloga s petimi prijatelji

„Ojoj, spet imamo matematiko na urniku...“ se je po šolskem hodniku drl Matic. Ja, res je. Matematika je še vedno za mnogo učencev tako v osnovni kot tudi v srednji šoli eden od najtežjih predmetov. Pri tem pa je veliko odvisno od učitelja. Kako pouk matematike narediti bolj življenjski, čim bližje našim šolarjem? Kako popestriti pouk matematike? To je najverjetneje ena največjih umetnosti današnjih učiteljev matematike. Tako je namen tega članka predstaviti zanimivo matematično nalogo, ki bo učencem zagotovo zlezla pod kožo. Pri tem se bodo zabavali in hkrati učili novih matematičnih prijemov, ki se jim bodo vtisnili v spomin.

Pa kar začnimo z nalogo.

Med poletnimi počitnicami se je pet prijateljev (Marko, Eva, Jure, Barbara in Cene) odločilo, da bodo skupaj odšli na morje. Priključili so se agenciji, ki je imela na letovanju majhne otroke. Vsak je dobil svojo skupino otrok. Nekega večera so se organizatorji pogovarjali, kako bodo naslednje jutro med pet vodij razdelili kupčke bombonov, s katerimi naj bi le ti za zaključek letovanja razveselili vsak svojo skupino otrok.

Med večernim pogovorom je Marko razmišljal o bombonih, ki bi jih naj dobil za svojo skupino otrok. Prišel je do ideje, da bi bilo najbolje, da svoj del vzame kar takoj. V takem primeru se mu ne bi bilo potrebno prerekati s prijatelji glede vprašanja, kako razdeliti bombone. Ta misel ga je vodila do košare s sladkimi dobrotami. Bombone je razdelil na pet delov. Ugotovil je, da se delitev ne izide, saj en bombon ostane. Odločil se je, da je najbolje, da ta bombon sam poje. Nato je svoj del vzel in se tiho odpravil nazaj v sobo.

Čez nekaj časa je tudi Eva začela premišljevati o svojem deležu bombonov, ki bi ga naj dobila za svojo skupino. Prišla je do enakega zaključka, da je najbolje razdeliti sladkarije takoj in vzeti svoj delež. Tako se je tiho splazila do košare, razdelila bombone na pet delov in ugotovila, da se delitev ne izide, saj ostane en bombon preveč. Tudi ona je ta bombon pojedla, vzela svoj kupček in se odpravila nazaj v sobo.

Tudi Jure, ki ni vedel, kaj počneta njegova prijatelja, je prišel ponoči do enakega zaključka glede bombonov za svojo skupino otrok. Naredil je enako kot prijatelja pred njim. Tiho se je priplazil do košare in poskusil razdeliti bombone na pet delov. Ker je bil en bombon odveč, ga je pojedel kar sam. Nato se je s svojim delom odpravil nazaj v sobo. Podobno sta naredila še Barbara in Cene.

Zjutraj je eden izmed organizatorjev razdelil bombone na pet enakih delov. Tudi tokrat se delitev ni izšla, saj je ostal en bombon preveč. Ta bombon je vzela, ostale pa je izročil petim prijateljem. Le ti so bili ob tem zadovoljni.

*Mogoče že veste, koliko je bilo vseh bombonov? Koliko bombonov pa je dobil vsak od petih prijateljev? Pri tem predpostavimo, da bombonov ni bilo več kot 20000.*

## 2 Rešitev

Označimo s simbolom  $x$  vse bombone. Marko je pojedel en bombon, petino ostalih bombonov pa je vzela za otroke. To pomeni, da je vzela iz danega kupčka  $1 + \frac{x-1}{5}$  bombonov, pri čemer je  $\frac{x-1}{5}$  sladkih dobrot bilo namenjenih otrokom. V košu je ostalo  $4 \cdot \frac{x-1}{5}$  bombonov. Eva je iz tega kupčka en bombon pojedla in vzela petino ostalih bombonov. Torej je vzela  $1 + \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5}$  bombonov. V košari je ostalo  $4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5}$  bombonov. Le te je Jure razdelil na pet enakih delov in prav tako en bombon pojedel. Njegov kupček je bil sestavljen iz  $\frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov namenjenih otrokom, ostalo je  $4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov. Barbara je vzela iz preostalega kupčka  $\frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov, enega pa je pojedla. V košu je ostalo  $4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov. Nazadnje je Cene pridobil  $\frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  sladkih dobrot za svojo skupino varovancev. Drugo jutro je eden izmed organizatorjev letovanja  $4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov, ki so še ostali v košari, razdelil na pet enakih delov, en bombon pa vzela sam. Tako je vsak vodja dobil še dodatno  $\frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5}$  bombonov. Označimo

$$4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1}{5} - 1 = y.$$

Zapisano enakost prevedemo na obliko

$$1024x - 15625y = 11529. \quad (1)$$

To lahko naredimo tudi s pomočjo računalniškega programa kot je, na primer, SWP. Sedaj moramo rešiti linearno diofantsko enačbo (1). Najprej zapišemo Evklidov algoritem za števili 1024 in 15625:

$$\begin{aligned} 15625 &= 15 \cdot 1024 + 265 \\ 1024 &= 3 \cdot 265 + 229 \\ 265 &= 1 \cdot 229 + 36 \\ 229 &= 6 \cdot 36 + 13 \\ 36 &= 2 \cdot 13 + 10 \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je  $D(15625, 1024) = 1$ . Največji skupni delitelj števil 15625 in 1024 lahko izrazimo kot

$$1024 \cdot (-4776) - 15625 \cdot (-313) = 1.$$

To enakost pomnožimo s številom 11529 in dobimo

$$1024 \cdot (-55062504) - 15625 \cdot (-3608577) = 11529.$$

Splošna rešitev diofantske enačbe (1) so pari  $(x, y)$  oblike

$$(-55062504 + 15625k, -3608577 + 1024k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Torej je  $x = -55062504 + 15625k$ . Ker vemo, da je bombonov največ 20000, je  $0 < x \leq 20000$ , oziroma

$$0 < -55062504 + 15625k \leq 20000.$$

Upoštevamo še, da je  $k$  celo število, iz česar sledi, da je  $k = 3525$  in  $x = 15621$ .

*Koliko bombonov je dobil vsak izmed petih prijateljev?*

Ugotovili smo, da je bilo v košari 15621 bombonov. Marko je enega pojedl in preostalo petino  $\frac{15621-1}{5} = 3124$  vzela za svojo skupino otrok. Eva je iz preostanka bombonov enega pojedla ter vzela za svojo skupino  $\frac{4 \cdot 3124 - 1}{5} = 2499$  bombonov. Podobno je Jure pojedl en bombon in vzela  $\frac{4 \cdot 2499 - 1}{5} = 1999$  bombonov. Barbara je za svojo skupino vzela  $\frac{4 \cdot 1999 - 1}{5} = 1599$  bombonov in Cene  $\frac{4 \cdot 1599 - 1}{5} = 1279$ . Zjutraj je organizator iz preostalega kupčka bombonov en bombon pojedl, vsakemu prijatelju pa dal  $\frac{4 \cdot 1279 - 1}{5} = 1023$  bombonov. Marko je torej dobil  $3124 + 1023 = 4147$  bombonov za svojo skupino otrok, Eva  $2499 + 1023 = 3522$  bombonov, Jure  $1999 + 1023 = 3022$  bombonov, Barbara  $1599 + 1023 = 2622$  bombonov, Cene pa  $1279 + 1023 = 2302$  sladkih dobrot.

### 3 Nekaj misli za konec

Zagotovo bi se vsi strinjali s trditvijo, da je matematika nepogrešljivo orodje v službi vsakodnevnega življenja. Matematika še danes velja za kraljico znanosti. Še več, matematika ima s svojimi razsežnostmi kar svoje kraljestvo. Ko pa znamo njeno poslanstvo povezati z vsakodnevnimi problemi in vprašanji, se njena uporabnost samo še širi. In prav je, da učencem v osnovni in srednji šoli pokažemo, kako abstraktna matematična orodja povezati z realnostjo. Tako postane učenje bolj učinkovito, kar pa je tudi naš cilj.

### Literatura

- [1] J. Graselli, *Diofantske enačbe*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana 1984.
- [2] M. Tahan, *Mož, ki je računal*, Zbirka Knjige iz Peglezna, Ljubljana 1998.