

## STRNJENO VZORČENJE

## Uvod

Za razumevanje nove metode strnjenega vzorčenja (snemanja, zajemanja), ki ji v angleščini pravijo **compressed sensing**, **compressive sampling**, si najprej oglejmo nekaj dejstev o digitalizaciji slik, zvoka ... Pri tem bomo spoznali matematična orodja, ki nastopajo tudi v novi metodi zajemanja signalov.

## Stiskanje

Digitalne fotografije v surovi obliki vsebujejo informacijo o intenziteti treh osnovnih barv za vsak piksel posebej. To pomeni množico podatkov. Zato pred posredovanjem fotografij že kamera ali pa naknadno uporabnik fotografijo stisne, navadno v zelo uspešni in razširjeni JPEG format, ki tudi nima problemov s patenti. Večinoma lahko stisnemo za faktor 4 praktično brez izgube podrobnosti. Tudi stisk za faktor 10 daje navadno zelo dobre rezultate. Na slikah imamo namreč pogosto večje površine (kot modro nebo), kjer ni podrobnosti. Tako lahko na sliki najdemo pravokotnike, ki so približno enakomerno obarvani. Tak del slike lahko podamo z mnogo manj podatki. Izvedba tega stiskanja je nekoliko zapletena in matematično zanimiva.

Zaradi enostavnosti privzemimo, da imamo črno-belo sliko. Denimo, da kamera daje 8 bitov informacije o osvetljenosti piksla. Torej imamo  $2^8 = 256$  odtenkov sivine, od povsem črne (0) do povsem bele (255). Razdelimo sliko na pravokotnike velikosti  $8 \times 8$  pikslov. Tak del slike podamo najprej z odstopanji svetlosti pikslov od vrednosti  $2^7 = 128$ . Dobimo matriko velikosti  $8 \times 8$ , ki jo imamo lahko tudi za vektor v  $\mathbb{R}^{64}$ . Na matriki opravimo dvorazsežno *diskretno kosinusno transformacijo*, *DCT*. Gre za razvoj po ortogonalni bazi. V baznih matrikah nastopajo kosinusi, zelo podobno kot pri klasičnem razvoju v Fourierovo vrsto. Enorazsežna DCT deluje na prostoru  $\mathbb{R}^N$  tako, da vektorju  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N-1))$  priredi vektor  $\mathbf{X}$  v istem prostoru po formuli

$$\mathbf{X}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}(j) \cos\left(\frac{\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2}\right)k\right).$$

Formula za dvorazsežno transformacijo je seveda obsežnejša in si jo lahko ogledate na Wikipediji.

DCT je v tesnem sorodu z diskretno Fourierovo transformacijo (DFT), le da so koeficienti pri razvoju po DCT realni.

DFT vsakemu vektorju  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  priredi vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  v istem prostoru, tako da je

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}(j) \exp\left(\frac{-2\pi k j}{N}\right).$$

Za izvedbo DFT pri velikih  $N$  imamo odličen algoritem, imenovan *hitra Fourierova transformacija* – FFT, ki jo mnogi dobro poznate.

Vrnimo se k naši  $8 \times 8$  matriki osvetljenosti pikslov. Dvorazsežna diskretna kosinusna transformacija da novo  $8 \times 8$  DCT matriko iz DCT koeficientov. Koeficient z indeksom  $(0, 0)$  je povprečje vrednosti elementov originalne matrike. Na tej stopnji lahko iz DCT matrike rekonstruiramo originalno matriko.

Ampak koeficienti z majhnima indeksoma so najpomembnejši, ker podajajo dele slike, ki najbolj padejo v oči. Na tipični sliki so elementi DCT matrike z višjimi indeksi majhni v primerjavi z elementi zgoraj levo, saj ni veliko visokofrekvenčnih elementov na sliki. Težko recimo pričakujemo, da bomo na sliki imeli močno komponento z indeksom  $(6, 5)$  v obliki nekakšne modificirane šahovnice s  $7 \times 6$  polji, kot si lahko ogledate v ilustracijah baze za DCT na [1, str. 15]. Na  $8 \times 8$  pikslov velikem delu modrega neba bo po absolutni vrednosti daleč največji element z indeksom  $(0, 0)$ .

Zdaj naredimo *kvantizacijo*. To je enostaven in grob postopek, ki odseka najmanj pomembne informacije in večinoma zmanjša natančnost preostalih podatkov. Obstajajo posebne kvantizacijske matrike, dobljene izkustveno. Elementi kvantizacijske matrike so naravna števila in večinoma naraščajo, ko se gibljemo desno in navzdol po matriki.

V literaturi najdemo standardno kvantizacijsko matriko  $Q$ . Matrika  $Q$  ima vrednost 16 na mestu  $(0, 0)$ , 121 na mestu  $(6, 5)$  in 99 na mestu  $(7, 7)$  – glej [2, str. 4] ali [1, str. 20].

Elemente DCT matrike delimo z istoležnimi elementi kvantizacijske matrike, odvržemo decimalke. Prav tako vse vrednosti nad 255 porežemo na 255. Podobno naredimo z vrednostmi pod  $-255$ . (Angleški izraz za rezanje je *clip*.) Gre za agresivno zmanjšanje in pogosto eliminacijo že tako majhnih visokofrekvenčnih komponent ter zmanjšanje velikosti elementov kvantizirane matrike. Elementi v kvantizirani matriki so do predznaka predstavljeni z največ 8 biti. To je bistven korak na poti do stisnjene JPEG slike. Za-

vrgli smo del informacije na originalni sliki (večinoma nezanimivi del), se zadovoljili s približki nekaterih drugih podatkov in originala ne moremo več natančno rekonstruirati. Na tipični sliki ima kvantizirana matrika mnogo ničel, predvsem v desnem spodnjem delu. Zgoraj omenjena matrika  $Q$  običajno sliko stisne za faktor približno 7. Matriki, v kateri je večina elementov ničelnih, preostali pa nimajo posebne strukture, rečemo *razpršena matrika*. Kvantizirana matrika je torej praviloma razpršena.

V fotoaparatu z velikim senzorjem (APS-C ipd.) nastavitev na *fino* (angleško *fine*) da kvantizacijsko matriko z bistveno manjšimi elementi, velikosti recimo od 1 do 6. To pomeni nižjo kompresijo, nekako za faktor 2. Pri malih tipalih z diagonalo pod 8 mm bo kvantizacijska matrika v načinu *fine* imela elemente recimo od 1 do 15, saj ustrezne optike običajno nimajo zelo dobre ločljivosti.

Pri dekodiranju pomnožimo matriko nazaj z istoležnimi elementi kvantizacijske matrike in opravimo inverzno transformacijo k DCT. Dobimo približek prvotne slike našega kvadrata. Na slikah z mehкими prehodi med svetlimi in temnimi deli slike to deluje sijajno. Algoritem za JPEG stiskanje je računsko nezahteven, hiter in robusten. Manjši problem se pojavi pri slikah z ogromno podrobnostmi, kot so trava, krzno. Boljše kamere tako sliko prepoznajo in bistveno manj stisnejo, se pravi uporabijo drugo kvantizacijsko matriko kot sicer. (Slika z ogromno šuma je tudi težava, vendar pa tu nismo zainteresirani za podrobno reprodukcijo.) Pri poceni kamerah pa lahko kombinacija nekakovostnega zoom objektiva in neprilagodljivega stiskanja travnik spremeni v zeleno plundro. JPEG tudi ni najboljši za reprodukcijo grafičnih podrobnosti. Za manjše risbe in grafike profesionalci raje uporabljajo format PNG.

Za zvok je nastal na podlagi JPEG priljubljeni, za zdaj še patentirani format MP3. Omogoča stiskanje v različnih kakovostih. Zelo dober za kompresijo zvoka je tudi prostokodni format (Ogg) Vorbis.

## Vzorčenje in digitalizacija

Nekateri študenti na izpitih rišejo grafe funkcij »po točkah«. Večinoma se to ne obnese. Vendar pa je mogoče velik razred funkcij popolnoma rekonstruirati iz njihovih vrednosti na diskretni množici točk. V knjigi [3] najdemo na str. 373 izrek, ki ga ni težko dokazati:

**Izrek 1.** *Naj bo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zvezna in naj bo njena Fourierova transformiranka  $\hat{f}$  enaka 0 zunaj intervala  $[-L, L]$ , kjer je  $L > 0$ . Potem je  $f$  določena*

z vrednostmi (= vzorci) v točkah

$$\left\{ \frac{n}{2L}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

takole:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2L}\right) \frac{\sin(2L\pi t - n\pi)}{2L\pi t - n\pi}. \quad (1)$$

Našo funkcijo  $f$  torej lahko rekonstruiramo iz njenih vrednosti = **vzorcev** v točkah, medsebojno oddaljenih za intervalček  $\Delta t = 1/(2L)$ , ki mu pravimo **Nyquistov interval**. V eni sekundi torej vzorčimo  $2L$ -krat, in to je **Nyquistova frekvenca**.

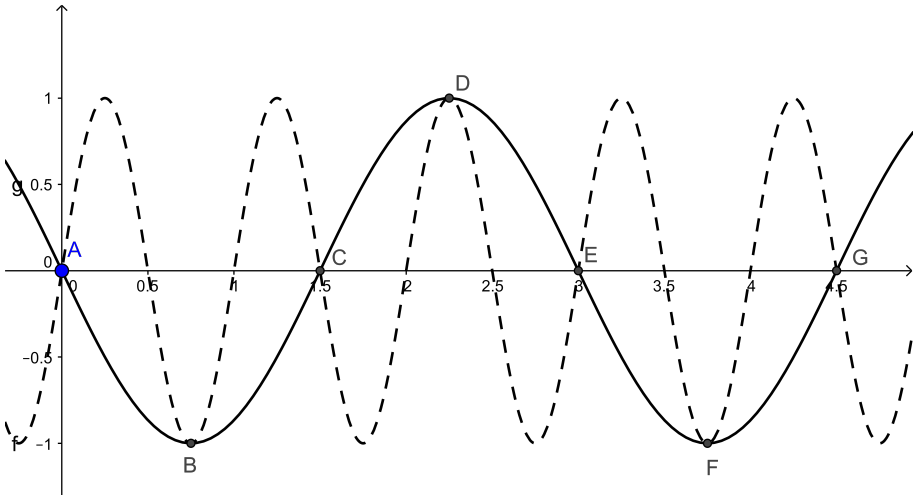
Knjiga pravi, da izrek iz leta 1915 pripada E. T. Whittakerju.

Kakšna je Fourierova transformiranka dušenega kosinusnega vala  $f(t) = \exp(-bt^2) \cos(2\pi\nu t)$  s krožno frekvenco  $\omega = 2\pi\nu$ ? Če je  $b$  majhen (tako da je val opazen dalj časa), je lahko izračunati, da ima  $\hat{f}$  dva ozka vrhova v  $\pm\nu$  in je bolj ali manj koncentrirana okrog teh dveh točk. Čim manjši je  $b$ , tem bolj izraziti sta ti konici. Če je  $\nu$  nekoliko manjši od  $L$ , je  $\hat{f}$  praktično enaka nič zunaj intervala  $[-L, L]$ . Ker je  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , približno zadošča pogojem izreka. Tako lažje razumemo znameniti Shannonov izrek (1948), ki poenostavljeno pravi: za vzorčenje signala, ki vsebuje le frekvence pod  $\nu$ , moramo vzorčiti vsaj s frekvenco  $2\nu$ . Podobne rezultate so že prej dokazali drugi matematiki: Kotelnikov leta 1933 ...

Ljudje navadno ne slišimo zvokov nad 20 kHz. Torej moramo za dobro digitalizacijo glasbe najprej odfiltrirati vse zvoke s frekvenco nad 20 kHz in nato vzorčiti s frekvenco več kot 40 kHz. Za CD kakovost vzorčimo s frekvenco 44,1 kHz. To nam omogoča, da iz vzorčenega signala verno rekonstruiramo (sfiltrirani) original. Pri digitalni telefoniji vzorčimo le z 8 kHz, saj so telefoni konstruirani za frekvenčno območje od 300 Hz do 3,4 kHz. To je bolj zasilna rešitev, saj človeški glas sega nekako od 60 Hz do 14 kHz. Gostejše vzorčenje in boljše kakovost zvoka že zdaj ponuja Skype. Uvajajo se tudi nove rešitve kot HD Voice (vzorčenje s 16 kHz).

## Aliasing

Če vzorčimo s premajhno frekvenco, lahko pride do problemov, ki jih opišemo z angleško besedo *aliasing*. Pri tem se lahko sinusoida v originalu reproducira po digitalizaciji kot sinusoida s povsem drugo frekvenco. Originalna sinusoida dobi torej svoje drugo življenje – svoj alias, ki pa nam



**Slika 1.** Funkciji  $f(x) = \sin(2\pi x)$  (prekinjena črta) in  $g(x) = -\sin((2/3)\pi x)$  (polna črta) se ujemata v točkah  $\{\frac{3k}{4}; k \in \mathbb{Z}\}$ .

dela le težave. Pomislite recimo na funkcijo  $x \mapsto \sin(2\pi x)$ . Tu je  $\nu = 1$ . Denimo, da jo vzorčimo s korakom 0,5. Če začnemo v  $x = 0$ , so vsi vzorci enaki 0. Rekonstrukcija signala iz teh vzorcev nam da napačen rezultat – funkcijo, ki je identično enaka 0. Če našo sinusoido vzorčimo s korakom  $3/4$  in začnemo v 0, vzorci ustrezajo tudi funkciji  $x \mapsto -\sin((2/3)\pi x)$ , kot vidimo na sliki 1. Pri rekonstrukciji vzorčenega signala bomo v tem primeru dobili alias prvotnega signala v obliki funkcije z eno tretjino frekvence originala in z drugačno fazo, se pravi spet povsem napačen rezultat. Za pravilno rekonstrukcijo moramo vzorčiti s korakom, manjšim od 0,5.

Kaj pa, če ne bi vzorčili v enakomernih presledkih, ampak v slučajno izbranih točkah? V tem primeru tudi pri vzorčenju s korakom, daljšim od 0,5, skoraj gotovo ne bi prišli do gornjih napačnih rezultatov.

V digitalni fotografiji se problemom z aliasingom poskušajo izogniti z anti-aliasing (AA) filtri pred senzorjem. Ti zameglijo (sfiltrirajo) preveč drobne detajle, a obenem malce zmanjšajo kakovost slike. Efekte aliasinga v fotografiji navadno označimo s francosko besedo **moiré**, ki jo izgovorimo kot muaré.

### Strnjeno vzorčenje

Vzorčenje s slučajnim korakom je ena od idej za t. i. strnjeno vzorčenje, angleško **compressed sensing**, **compressed sampling**. Začetek tega sega

v sedemdeseta leta prejšnjega stoletja, kot lepo opisuje poljudno napisani vir [4]. Geologi, ki so iskali nafto, so eksperimentalno ugotovili, da lahko dobijo želeno sliko zemeljskih slojev z mnogo manj seizmičnimi meritvami, kot bi jih bilo treba po teoriji. To je bila seveda super novica, saj je povzročanje mini potresov z eksplozivi moteče. Razložili so si zadevo s tem, da so posamezni sloji precej homogeni. Zanimale so jih le meje med sloji, ki so na instrumentih dajale špice, in pa prisotnost sloja, ki bi lahko vseboval nafto. Skratka, zanimalo jih je le majhno število pomembnih informacij. V devetdesetih letih so metode geologov začeli preučevati matematiki, med njimi David Donoho z Univerze Stanford.

Magnetna resonanca (MR) je odlična, ampak draga metoda za slikanje mehkih tkiv. Francoski matematik Emmanuel Candès s Caltecha in njegov mentor pri doktoratu Donoho sta oba začela ugotavljati, da lahko dobita dobre MR slike vzorcev tudi s precej manj posnetki, kot jih predvideva teorija, če vzorčita nekoliko drugače. Kot pri običajnih fotografijah tudi pri MR navadno ni vse na sliki zanimivo.

Kot smo videli zgoraj, lahko digitalno sliko ali zvok skoraj zmeraj močno stisnemo z minimalno izgubo kakovosti. Ampak najprej zajamemo čisto vse podatke, da se nato odločimo, kako jih bomo stisnili. Podobno dobri slikarji lahko hitro prepoznajo bistvo portretiranca ali naravne scene in ga podajo z nekaj potezami.

Pri strnjenem vzorčenju želimo že vnaprej zajeti manj podatkov, kot jih zahteva Shannonov pogoj. Metoda deluje le takrat, ko iščemo **majhno** število informacij.

Spomnimo se na naslednji problem. Imamo 9 kovancev, med katerimi jih ima 8 enako maso, eden pa je lažji. Le z dvema tehtanjema s staromodno ravnovesno tehtnico, brez uteži, lahko izločimo lažji kovanec, če se tega lotimo pravilno.

Candès pripoveduje, da je imel na konferencah ob predstavitvi svojih rezultatov težave, ker so nekateri mislili, da malce prireja rezultate. Poskušal je stvari strogo dokazati, pa se mu je po prvih uspehih zataknilo. Naključje je hotelo, da je Candès imel otroka v isti mali šoli kot Terence Tao z UCLA. (Tao je nekaj let kasneje, 2006, dobil Fieldsovo medaljo). Francoz je Tao zaupal svoje probleme, a mu sogovornik sprva ni verjel in mu je obljubil nasprotni primer za njegove trditve. Tega pa ni mogel najti, zato je stvar vzel resneje, začel sodelovati s Candèsom in prispeval manjkajoči dokaz. Z njima je delal Justin Romberg z Georgia Tech. Preprint njihovih rezultatov je izšel leta 2004, obenem pa je Donoho oznanil podobna dognanja.

Na kratko bom povzel Taovo predavanje [5] iz leta 2009. Rekonstruirati želimo signal  $\mathbf{x}$  dolžine  $N$ , kjer je  $N$  **ogromen**, denimo reda velikosti  $10^6$ . Za  $\mathbf{x}$  vemo poleg tega, da je  $s$ -razpršen, kar pomeni, da ima največ  $s$  koordinat od 0 različnih. Tu je  $s$  mnogo manjši kot  $N$ , kar pišemo  $s \ll N$ . Imamo poddoločen sistem  $m$  linearnih enačb za  $\mathbf{x}$  v obliki  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Tu je  $\mathbf{b}$  vektor meritev in  $m < N$ . Vemo, da ima tak sistem poleg našega signala neskončno rešitev.

**Trditev 2.** *Privzemimo, da je vsakih  $2s$  stolpcev matrike  $A$  linearno neodvisnih. Če je signal  $\mathbf{x}$   $s$ -razpršen in zadošča sistemu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , je ta signal edina  $s$ -razpršena rešitev tega sistema.*

*Dokaz.* Denimo, da ima sistem še eno  $s$ -razpršeno rešitev  $\mathbf{x}'$ . Vzemimo vektor  $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Ta vektor ima največ  $2s$  koordinat od 0 različnih. Velja  $A\mathbf{w} = 0$ . Toda produkt na levi je enak  $\mathbf{w}(1)$  krat prvi stolpec matrike  $A + \dots$ , kjer sumacija poteka po neničelnih koordinatah za  $\mathbf{w}$ , torej ima ta linearna kombinacija največ  $2s$  sumandov. Iz predpostavke sledi, da so vsi  $\mathbf{w}(i)$  enaki 0 in tako  $\mathbf{w} = 0$ . ■

Predpostavka trditve pomeni, da je število  $m$  vrstic v matriki  $A$  vsaj  $2s$ , se pravi, da je meritev vsaj  $2s$ .

**Posledica 3.** *Signal  $\mathbf{x}$  je tista rešitev sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , ki ima najmanj neničelnih koordinat.*

To je zelo lep rezultat, žal pa je iskanje najbolj razpršene rešitve numerično izredno zahtevno. V splošnem je to NP-težak problem. Izkazalo pa se je, da namesto tega lahko iščemo rešitev, za katero bo vsota absolutnih vrednosti koordinat (se pravi  $\ell_1$ -norma) vektorja  $\mathbf{x}$  minimalna. Tej metodi iskanja rešitve so naredili angleško ime *basis pursuit*. Gre za konveksno optimizacijo, ki se je lahko lotimo z metodami linearnega programiranja.

Rezultati teorije so tesno povezani z verjetnostjo. Naslednji izrek so Candès, Romberg in Tao objavili v IEEE Transactions on Information Theory leta 2006:

**Izrek 4.** *Izberimo naključno števila  $k_1, k_2, \dots, k_m$  iz množice  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Obstaja taka konstanta  $C$ , da lahko pri pogoju  $m > Cs \ln N$  z verjetnostjo blizu 1 vsak  $s$ -razpršen vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  rekonstruiramo iz vrednosti diskretnih Fourierovih koeficientov  $\hat{\mathbf{x}}(k_i)$ , kjer  $i$  teče od 1 do  $m$ .*

Normalno bi za rekonstrukcijo potrebovali vseh  $N$  Fourierovih koeficientov. Numerični poskusi sugerirajo, da lahko večinoma rešitev dobimo točno celo pri pogoju, da je meritev vsaj  $4s$ .

Metoda deluje pri precej širokem razredu matrik, ne samo pri matriki za diskretno Fourierovo transformacijo. Tu močno pomaga dejstvo, da je  $N$  ogromen.

Metodo lahko razširimo tudi na primer, da je signal samo približno razpršen; v tem primeru dobimo približno rešitev. Če je meritve pokvaril šum, se pravi, da imamo enačbo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{z}$ , kjer je  $\mathbf{z}$  šum, bo naša metoda dala približek rešitve.

Teorija je zelo zanimiva. Manjši problem je, da je metoda računsko precej zahtevna.

Konec novembra 2016 je Siemens oznanil, da začneja prodajo opreme za magnetno resonančno (MR) slikanje, ki sloni na strnjenem vzorčenju. Namenjena je slikanju delovanja srca. Po reklami v 25 sekundah naredi tisto, za kar so potrebovali prej do 6 minut. Pacient mora samo enkrat zadrževati dih, namesto desetkrat do štirinajstkrat pri prejšnjem postopku. Obdelava podatkov poteka v sami napravi. Skrčitev morda ne gre samo na račun strnjenega vzorčenja, ampak tudi drugih algoritemskih in inženirskih izboljšav. Prve verzije te inovacije so v uporabi že vsaj leto dni v uglednih bolnišnicah, tako da stvar deluje. Siemens obljublja, da bo kmalu ponudil podobne naprave tudi v druge namene.

Strnjeno vzorčenje je lahko uporabno marsikje, kjer so senzorji zelo dragi. Verjetno se bo strnjeno vzorčenje pojavilo tudi pri računalniški tomografiji (CT) in zmanjšalo velike doze sevanja.

## LITERATURA

- [1] A. Bruna, *JPEG*, Catania, 2008, dostopno na [www.dmi.unict.it/~battiato/EI\\_MOBILE0708/JPEG%20\(Bruna\).pdf](http://www.dmi.unict.it/~battiato/EI_MOBILE0708/JPEG%20(Bruna).pdf), ogled: 6. 4. 2017.
- [2] K. Cabeen in P. Gent, *Image compression and the discrete cosine transform*, Math 45, College of the Redwoods, dostopno na [www.math.cuhk.edu.hk/~lmlui/dct.pdf](http://www.math.cuhk.edu.hk/~lmlui/dct.pdf), ogled: 6. 4. 2017.
- [3] G. Bachmann, L. Narici in E. Beckenstein, *Fourier and wavelet analysis*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] D. Mackenzie, *Compressed sensing makes every pixel count*, What's Happening in Mathematical Sciences 7 (2009), 114–127, dostopno na [www.ams.org/samplings/math-history/hap7-pixel.pdf](http://www.ams.org/samplings/math-history/hap7-pixel.pdf), ogled: 6. 4. 2017.
- [5] T. Tao, *Compressed sensing or: the equation  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  revisited*, Mahler lecture 2009, dostopno na [www.math.hkbu.edu.hk/~ttang/UsefulCollections/compressed-sensing1.pdf](http://www.math.hkbu.edu.hk/~ttang/UsefulCollections/compressed-sensing1.pdf), ogled: 6. 4. 2017.

*Peter Legiša*