Število 41

dr. Marko Razpet

Posamezna naravna števila imajo lahko prav zanimive lastnosti. Dobro znana so nam soda in liha števila, praštevila, sestavljena števila, večkotniška (trikotniška, kvadratna, petkotniška …) števila, središčna večkotniška števila, podolžna števila, uglajena števila itd. Lahko pa imajo zanimive lastnosti tudi števke števila v izbranem številskem sistemu mestnih vrednosti.

Oglejmo si nekaj primerov, v katerih sodeluje praštevilo 41, ki s praštevilom 43 sestavlja praštevilski dvojček.

1. Leonhard Euler (1707–1783) je leta 1772 našel trinom $P(n) = n^2 + n + 41$, ki nam da veliko praštevil, ko vanj vstavljamo po vrsti $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$:

   41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1 033, 1 097, 1 163, 1 231, 1 301, 1 373, 1 447, 1 523, 1 601. To je seznam 40 praštevil, ki je prekinjen s $P(40) = 1\,681 = 41^2$. Na seznamu ni vseh praštevil med 40 in 1 602. Teh je 240. Manjka jih kar 200, na primer 59, 67, 73, 79, 89, 101.

   Preproste polinomske formule za n-to praštevilo ni, je pa Euler vzpodbudil druge matematike, da so začeli resno študirati praštevila.

   Opomba. Za naravno število n izraz $n^2 + n = n(n + 1)$ v $P(n)$ definira tako imenovano n-to podolžno število. Polovica n-tega podolžnega števila je n-to trikotniško število $T_n = n(n + 1)/2$.

2. Število 41 lahko, če se ne oziramo na vrstni red sumandov, na en sam način zapišemo kot vsoto dveh in treh kvadratov, to je
   $$41 = 4^2 + 5^2,\ 41 = 1^2 + 2^2 + 6^2;$$
   z uporabo treh zaporednih faktoriel pa tudi v obliki
   $$41 = 1!^2 + 2!^2 + 3!^2.$$

   Število 41 je hipotenuza primitivnega pitagorejskega trikotnika s katetama 9 in 40, ker je $9^2 + 40^2 = 41^2$. To sledi iz splošnih formul
   $$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2,$$
   s katerimi s primerno izbiro naravnih števil m in n dobimo stranice pitagorejskega trikotnika. Za $m = 5$ in $n = 4$ res dobimo $a = 9$, $b = 40$ in $c = 41$.

3. Število 41 lahko, če se ne oziramo na vrstni red sumandov, na en sam način izrazimo kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil:
   $$41 = 20 + 21.$$

   Naravnim številom, ki se dajo izraziti kot vsota dveh ali več zaporednih naravnih števil, pravimo ***uglajena števila***. Število načinov zapisa vsote, pri čemer se ne oziramo na vrstni red sumandov, meri uglajenost števila. Število 41 je uglajeno število z uglajenostjo 1. Vsa naravna števila razen potenc števila 2 so uglajena. Zaradi tega so najbolj zanimive njihove uglajenosti in postopek, kako dano število zapisati kot vsoto zaporednih naravnih števil.

4. Število 41 lahko na dva načina izrazimo kot vsoto zaporednih praštevil:
   $$41 = 11 + 13 + 17,\ 41 = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13.$$

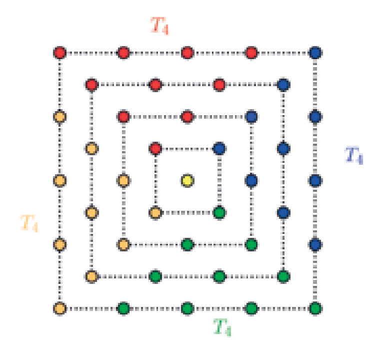
5. Kub števila 41 se da zapisati kot vsoto treh kubov na dva načina:
   $$41^3 = 40^3 + 17^3 + 2^3,\ 41^3 = 33^3 + 32^3 + 6^3.$$

6. Število 41 je vsota treh sumandov oblike $n! + n^n$:
   $$41 = (1! + 1^1) + (2! + 2^2) + (3! + 3^3).$$

7. Števki 4 in 1 v desetiškem zapisu imata nekaj zanimivih lastnosti:
   $$4! + 1! = 5^2,\ 4^2 + 1^2 = 17 \text{ (praštevilo)}.$$

   Število 41 v petiškem sistemu zapišemo kot 131, kar pomeni $1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$, kar je res 41. Ker se 131 prebere naprej in nazaj enako, je v petiškem sistemu 41 ***palindromno število***.

8. Število 41 je za 1 povečan štirikratnik četrtega trikotniškega števila:
   $$41 = 4 \cdot T_4 + 1 = 4 \cdot 4 \cdot 5/2 + 1.$$

   Slika 1: Peto središčno kvadratno število.

   Ker trikotniška števila ponazorimo s številom enakih krožcev, zloženih v trikotnik, lahko 4 take trikotnike z 10 krožci zložimo v kvadrat, ki mu na sredini dodamo še en krožec. Zato je 41 peto središčno kvadratno število. Lahko pa si mislimo tudi pet koncentričnih kvadratnih okvirov z 1, 4, 8, 12 in 16 krožci (slika 1). Vseh krožcev je $1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$.

9. Število 41 je ***kongruentno***. Po definiciji je naravno število k ***kongruentno***, če obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$), ki ima ploščino enako k ($k = ab/2$). Števila a, b, c s k niso natančno določena, celo nešteto jih je. Najmanjše kongruentno število je 5. Pitagorejski trikotnik iz točke 2 ima ploščino $180 = 6^2 \cdot 5$. Če njegove stranice delimo s 6, dobimo pravokotni trikotnik s stranicami $a = 3/2$, $b = 20/3$, $c = 41/6$, za katere je $a^2 + b^2 = c^2$ in $ab/2 = 5$. Zato je 5 kongruentno število.

   Odgovor, kdaj je k kongruentno število, ni preprost. Z veliko truda ugotovimo, da za $a = 40/3$, $b = 123/20$, $c = 881/60$ velja $a^2 + b^2 = c^2$ in $ab/2 = 41$. Torej je 41 tudi kongruentno število.

   Zgodi se lahko, da kongruentnemu številu k ustreza pravokotni trikotnik, katerega stranice se izražajo z okrajšanimi ulomki, ki imajo ogromne števce in imenovalce. ■