

Matematični adventni koledar 2021



MARTIN MILANIČ, JASNA PREZELJ IN MARTIN RAIČ

→ V mesecu decembru se je tudi letos odvijalo tradicionalno spletno tekmovanje Matematični adventni koledar, ki ga organiziramo na UP FAMNIT (Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije) že od leta 2015. Tekmovanje je namenjeno učenkam in učencem zaključnih razredov osnovne šole in vseh letnikov srednje šole, poteka pa tako, da v mesecu decembru na spletu vsake tri dni objavimo novo nalogo, za katero imajo reševalci 24 ur časa. Namen nalog je vzpodbuditi zanimanje za matematiko ter reševalkam in reševalcem pokazati zanimive probleme, ki pa včasih zahtevajo daljši razmislek. Bralce in bralke Preseka vabimo, da preizkusijo svoje močgane in tudi sami rešijo nekaj letošnjih nalog.

8. in 9. razred

1. naloga. Določi števko a , za katero bo število $17 \cdot 16a + 171 \cdot 716$ deljivo z 12.

2. naloga. Rok in Nika igrata naslednjo igro na logičnih izrazih, ki vsebujejo izjavne spremenljivke A , B , C in D . Najprej Rok izbere eno od spremenljivk in jo postavi na resnično, nato Nika izbere eno izmed še neizbranih in jo postavi na neresnično, nato spet Rok izbere eno izmed še neizbranih in jo postavi na resnično, preostala spremenljivka pa se postavi na neresnično. Če je celotni izraz resničen, je zmagal

Rok, če je neresničen, je zmagala Nika. Za vsako formulo se izkaže, da ima eden od igralcev zmagovalno strategijo; če jo igra, zmaga ne glede na to, kako igra njegov nasprotnik. Za vsako od naslednjih formul določi, kdo ima zmagovalno strategijo:

- $A \wedge (B \vee C) \wedge D$,
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge D$,
- $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge D$.

3. naloga. Fantje imajo tabor 240 m oddaljen od ravne glavne ceste, dekleta pa imajo tabor ob glavni cesti 400 m od tabora fantov. Ob glavni cesti želimo postaviti kuhinjo, ki naj bo od obeh taborov enako oddaljena. Kolikšna naj bo ta oddaljenost v metrih?

1. in 2. letnik

1. naloga. Turingov stroj je namišljena naprava, ki ima glavo in raven trak s celicami, ki se razteza levo in desno v neskončnost. Glava se pomika po traku levo in desno, ko miruje, pa je vselej na neki celici. V vsaki celici je lahko zapisana ničla ali enica, glava stroja pa je lahko v treh možnih stanjih, A , B in C . Stroj obratuje tako, da glava najprej prebere vsebino celice, na kateri se nahaja, nakar glede na njeno stanje in prebrano vsebino najprej v celico, na kateri se nahaja, zapiše novo vsebino, nato pa se pomakne za eno celico levo ali desno, preide v novo stanje in nadaljuje z naslednjim korakom. Stanje glave in prebrana vsebina celice pa lahko narekujeta tudi, da se stroj ustavi. Kaj stroj naredi, je natančno določeno s stanjem glave in vsebino celice. Razen primera, ko je glava v stanju C , prebere pa ničlo, je popolnoma znano, kaj stroj naredi, v omenjenem primeru pa je znano le, da se glava pomakne levo (in da se stroj ne ustavi):





	A	B	C
0	1, desno, B	1, levo, B	?, levo, ?
1	STOJ	0, desno, C	1, levo, A

Na začetku so na traku zapisane same ničle, stroj pa je v stanju A. Prvih nekaj korakov stroja je prikazanih spodaj. Dopolni, kaj mora narediti glava, ki v stanju C prebere ničlo, če naj se stroj nekoč ustavi, število pomikov glave pa je največje možno. Prvih nekaj korakov:

```

A
0

      B
1  0

      B
1  1

      C
0  1

      A
0  1

      B
1  1

      C
1  0  0
    
```

2. naloga. Populacijo testiramo s presejalnim testom – hitrim antigenskim testom. V populaciji imamo zdrave in obolele, rezultat testiranja pa je lahko pozitiven ali negativen. Naj bo a delež ljudi v populaciji, ki so bolni in so imeli pozitiven test, b delež ljudi, ki so zdravi in so imeli pozitiven test, c delež ljudi, ki so bolni in so imeli negativni test, ter d delež ljudi, ki so zdravi in so imeli negativni test. Količina $\frac{a}{a+c}$ se imenuje občutljivost, količina $\frac{d}{d+b}$ pa specifičnost. Naj bo občutljivost testa 95%, specifičnost 98% in naj število bolnih pozitivnih predstavlja 40% vseh pozitivnih. Kolikšen je delež obolelih v populaciji?

3. naloga. Naj ima $ABCD$ kvadrat s stranicami AB , BC , CD in DA ploščino 25. Naj bo M tista točka na

stranici AB , pri kateri je dvakratnik dolžine stranice AM enak dolžini stranice BM . Naj bo F presečišče premice skozi D in M s premico skozi B in C . Naj bo E točka na sredi daljice DF . Kolikšna je razdalja med točkama A in E ? Odgovor zapiši zaokrožen na dve decimalki. Uporabi decimalno vejico.

3. in 4. letnik

1. naloga. Določi največje celo število k , pri katerem 3^k deli $10^{3^{2021}} - 1$.

2. naloga. Poišči 10-mestno število s samimi različnimi števki $abcdefghij$, za katerega velja:

- a je deljivo z 1.
- ab je deljivo z 2.
- abc je deljivo s 3.
- $abcd$ je deljivo s 4.
- $abcde$ je deljivo s 5.
- $abcdef$ je deljivo s 6.
- $abcdefg$ je deljivo s 7.
- $abcdefgh$ je deljivo z 8.
- $abcdefghi$ je deljivo z 9.
- $abcdefghij$ je deljivo z 10.

3. naloga. Anja je na tablo napisala vsa števila od 1 do 300. Zanimajo jo vse neurejene trojice teh števil, pri katerih je vsota števil deljiva s 3 in števila niso nujno različna. Koliko takih trojic bi Anja lahko sestavila?



Matematični adventni koledar

2021

www.advent.famnit.upr.si

