

III
M. 38787
h.

to
no
in
the

38787, III, M. h.

Aritmetika in algebra

za

srednje in višje gimnazijske
razrede.

Spisal

Bl. Matek,

c. kr. gimnazijski profesor v Mariboru.

I. del.

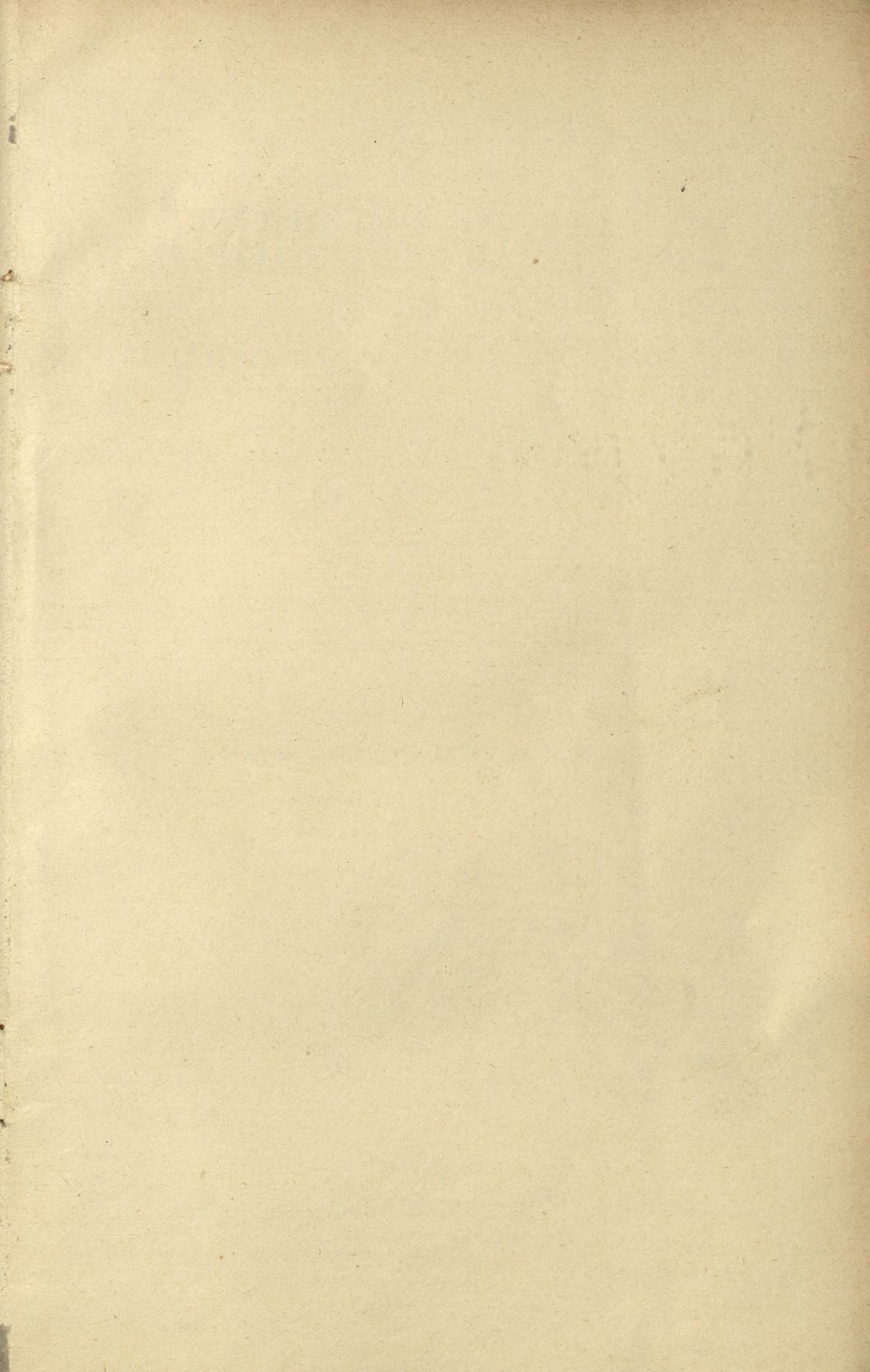
Cena mehko vezani knjigi K 2.20.

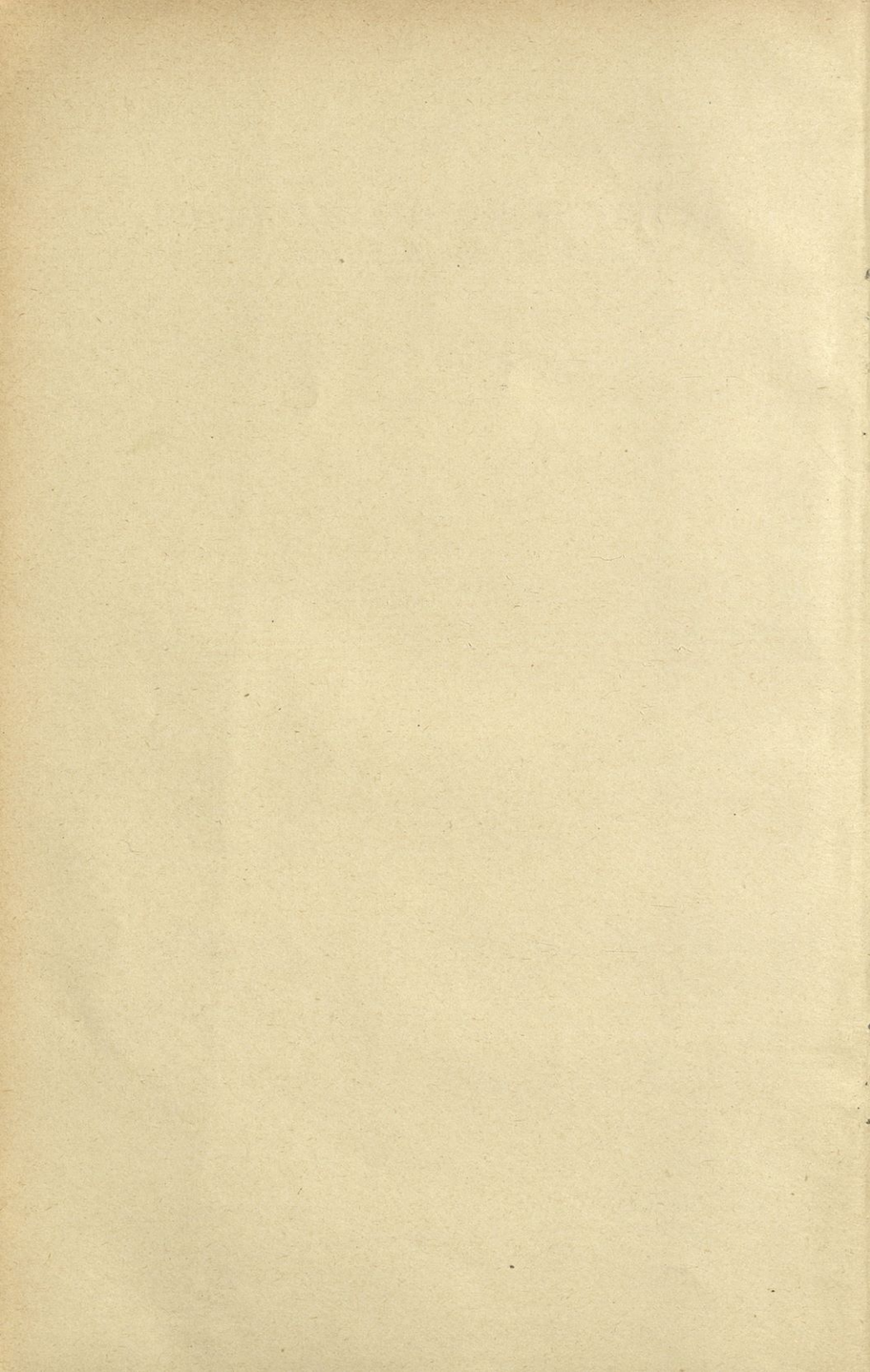


1909.

Založila „Katoliška Bukvarna“ v Ljubljani.

Natisnila „Katoliška Tiskarna“.





Aritmetika in algebra

za
srednje in višje gimnazijske
razrede.

Spisal

Bl. Matek,

c. kr. gimnazijski profesor v Mariboru.

Cena mehko vezani knjigi K 2.20.



1909.

Založila „Katoliška Bukvarna“ v Ljubljani.

Natisnila „Katoliška Tiskarna“.

Arithmetic in algebra

Arithmetic in algebra

Arithmetic in algebra

Arithmetic in algebra



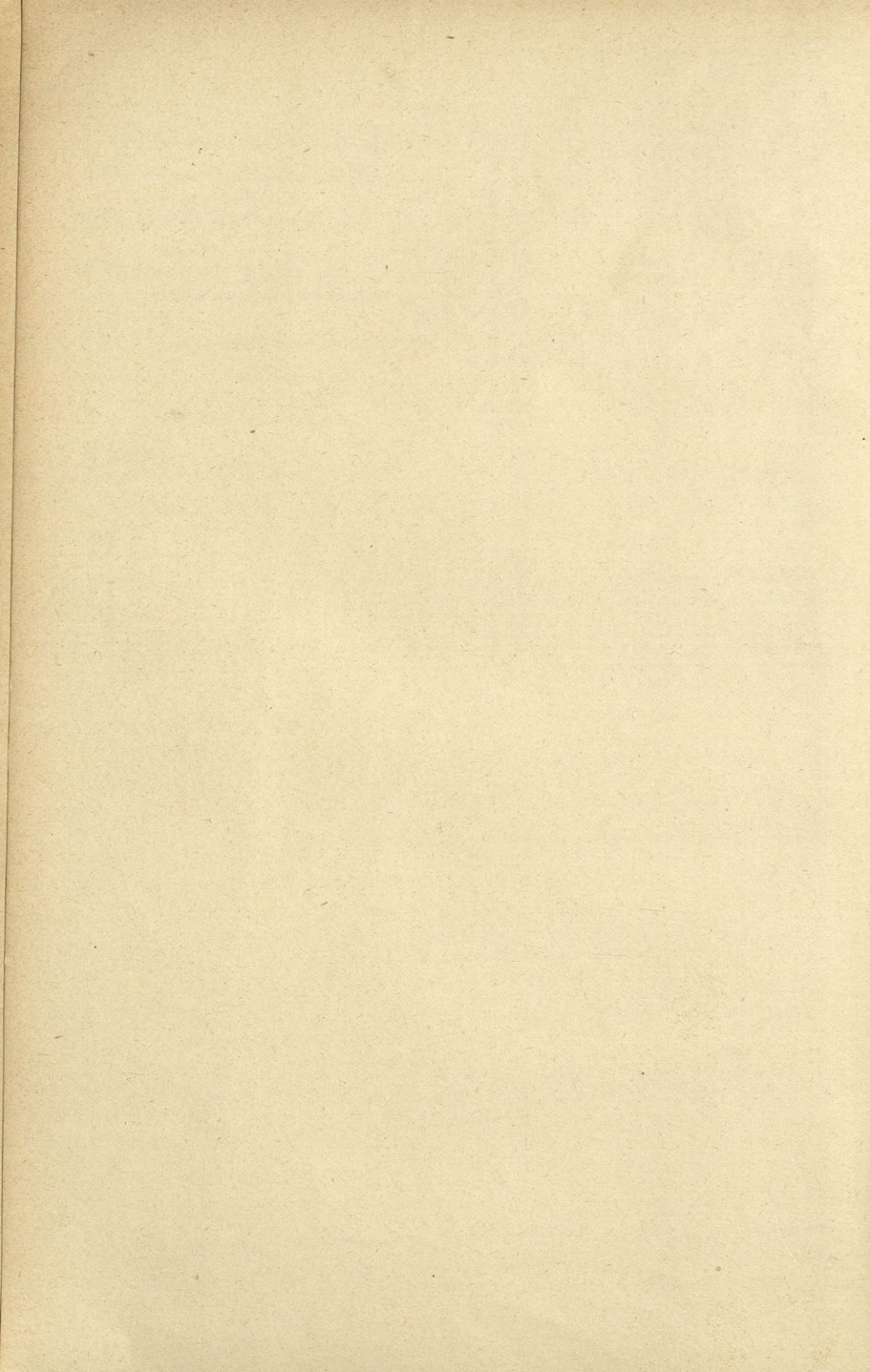
IN= 30002723

Arithmetic in algebra

Vsebina.

	Stran		Stran
Uvod.		II. Računanje z ulomlje-	
§ 1. Pojasnila	1	nimi števili.	
I. Osnovni računski načini		A. Navadni ulomki.	
s celimi števili.		§ 16. Občna pojasnila in pretvar-	
A. Računska načina prve stopnje.		janje navadnih ulomkov	54
§ 2. Seštevanje	4	§ 17. Seštevanje in odštevanje na-	
§ 3. Odštevanje	7	vadnih ulomkov	57
§ 4. Algebrajska števila	11	§ 18. Množenje in deljenje navad-	
§ 5. Seštevanje algebrajskih števil	13	nih ulomkov	58
§ 6. Odštevanje algebrajskih števil	16	B. Decimalni ulomki.	
§ 7. Seštevanje in odštevanje		§ 19. Občna pojasnila in računa-	
enačb in neenačb	17	nje z decimalnimi ulomki	63
B. Računska načina druge stopnje.		§ 20. Pretvarjanje navadnih ulom-	
§ 8. Množenje	21	kov v decimalne in deci-	
§ 9. Deljenje	29	malnih v navadne	67
§ 10. Množenje in deljenje enačb		C. Računanje z nepopolnimi števili.	
in neenačb	35	§ 21. Občna pojasnila o nepopol-	
C. Lastnosti celih števil.		nih številih	69
§ 11. Številni sestavi	38	§ 22. Seštevanje in odštevanje ne-	
§ 12. Občna pojasnila in znamenja		popolnih števil	72
o deljivosti	42	§ 23. Množenje nepopolnih števil	73
§ 13. Razstavljanje sestavljenih		§ 24. Deljenje nepopolnih števil	76
števil in številnih izrazov		III. Razmerja in sorazmerja.	
v prafaktorje	45	§ 25. Razmerja	79
§ 14. Največja skupna mera	48	§ 26. Sorazmerje	80
§ 15. Najmanjši skupni mnogo-		§ 27. Sorazmerne količine in upo-	
kratnik	51	rabne naloge	86

	Stran		Stran
IV. Enačbe prve stopnje.		K § 10	VIII
§ 28. Občna pojasnila in urejevanje enačb	91	" § 11	IX
§ 29. Razreševanje enačb prve stopnje	93	" § 12	X
§ 30. Določanje točkine lege in načrtavanja linearne funkcije	99	" § 13	X
§ 31. Uporaba enačb prve stopnje	105	" § 14	XI
		" § 15	XII
		" § 16	XII
		" § 17	XIV
		" § 18	XV
		" § 19	XX
		" § 20	XX
		" § 21	XXI
		" § 22	XXI
		" § 23	XXI
		" § 24	XXII
		" § 25	XXIII
		" § 26	XXIII
		" § 27	XXV
		" § 28	XXVIII
		" § 29	XXVIII
		" § 30	XXXIII
		" § 31	XXXIII
Vadbe in naloge.			
K § 1	I		
" § 2	I		
" § 3	II		
" § 4	III		
" § 5	III		
" § 6	III		
" § 7	IV		
" § 8	V		
" § 9	VI		



Uvod.

§ 1. Pojasnila.

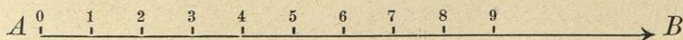
Stvari vsakdanjega življenja in tudi našega mišljenja so ali iste vrste ali raznih vrst. Stvari iste vrste moreš zameniti drugo za drugo ali popolnoma ali vsaj deloma; stvari raznih vrst pa se ne dado tako zamenjavati.

Ako imamo množino stvari iste vrste, pravimo vsaki stvari enota; izraz za vse stvari te množine se zove število. S številom določamo, koliko istovrstnih stvari imamo v mislih. Enote sestavljajo število.

Kadar pridenemo enoti enoto, z dobljenim številom spojimo enoto in to ponavljamo, tedaj štejemo. Vrsti števil, ki jo dobimo pri štetju, pravimo naravna številna vrsta. V govoru izražamo števila naravne številne vrste s posebnimi imeni (s števniki) in v pismu jih predočujemo s posebnimi znaki (s številkami).

Ako se pri štetju ne oziramo na to, katere vrste je enota, dobimo neimenovana števila; če pa pri štetju povemo tudi vrsto enote, dobimo imenovana števila.

Naravno številno vrsto predočimo s sliko, ako načrtamo na poluomejeni premici ali na polutraku AB od



krajišča A enake daljice drugo poleg druge. Vsaka taka daljica predstavlja enoto; dve daljici skupaj predočujeta število „dve“, tri daljice skupaj dado število „tri“ i. t. d.

Števila, ki izražajo določeno množino enot, se imenujejo posebna števila; pišejo se z arabskimi številkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Števila, ki izražajo nedoločeno množino enot, se imenujejo občna števila; pišejo se navadno z latinskimi črkami. Črka je znak vsakršne množine enot; če se ista črka ponavlja v enem

Istovrstne in raznovrstne stvari = gleichartige und ungleichartige Dinge.

Enota = die Einheit. Število = die Zahl.

Štetni. Naravna številna vrsta = die natürliche Zahlenreihe.

Števniki = das Zahlwort. Številka = die Ziffer. Imenovana in neimenovana števila = benannte und unbenannte Zahlen.

Predočevanje naravne številne vrste s sliko.

Posebno število = besondere Zahl. Občno število = allgemeine Zahl.

in istem računu, pomeni vsakikrat istotoliko enot, kolikor jih je pomenila prvokrat. Različne črke zaznamujejo različna števila. Glavni razložek med posebnim in občnim številom je ta, da posebno število zavzema določeno, občno število pa nedoločeno mesto v naravni številni vrsti.

Računati. Znesek
= das Resultat.

Kadar spajamo števila med seboj po določenih pravilih, tedaj računamo. Število, ki ga najdemo pri računanju, se zove znesek ali rezultat.

Aritmetika = die
Arithmetik.
Posebna in občna
aritmetika = be-
sondere und all-
gemeine Arith-
metik. Algebra =
die Algebra.
Številni izraz =
der Zahlenaus-
druck. Oklepaj =
die Klammer.

Nauk o številih in njih medsebojnih zvezah je aritmetika. Če se aritmetika peča le s posebnimi števili, se zove posebna aritmetika; če pa se aritmetika peča z občnimi števili, se imenuje občna aritmetika. Občna aritmetika se zove tudi algebra.

Vsakemu znaku, ki ga rabimo za število, pravimo številni izraz. Ako spojimo dva ali več enostavnih številnih izrazov v celoto, stvorimo sestavljene številne izraze. Kadar spajamo sestavljene številne izraze med seboj, devamo jih v oklepaje. Oklepaji so raznovrstni: okrogli $()$, oglati $[]$ in zaviti $\{\}$. Kadar je treba okleniti oklepaj, rabimo raznovrstne oklepaje.

Zameniti = sub-
stituieren.

Ako postavimo v številne izraze namesto občnih števil posebna števila ter izvršimo s temi števili nakazane računске načine, pravimo, da zamenimo.

Enaki številni
izrazi.

Ako pomenita številna izraza a in b isto število, pravimo, da sta izraza enaka, v znakih $a = b$.

Enačba = die
Gleichung. Enač-
bena dela = Teile
der Gleichung.

Dva izenačena številna izraza tvorita enačbo ter se zoveta enačbena dela. Vsako enačbo utegnemo čitati ali od leve proti desni ali pa obratno od desne proti levi.

Neenaki številni
izrazi.

Neenačba = die
Ungleichung.

Ako ima izraz a več enot nego izraz b , pravimo, da je a večji ko b , v znakih $a > b$. Če pa ima a manj enot nego b , je a manjši ko b , v znakih $a < b$.

Enačaj = das
Gleichheits-
zeichen.

Neenačaj = das
Ungleichheits-
zeichen.

Znak = se imenuje enačaj; znak $>$ ali $<$ se pa zove neenačaj. V votlino neenačaja pišemo večji izraz, pred vrh neenačaja pa manjšega.

Količina = die
Größe.

Vsaka stvar, ki je sestavljena iz enakih delov ali iz delov iste vrste ali se da vsaj tako misliti, se imenuje količina. Bistvena lastnost vsake količine je, da jo moremo povečati in zmanjšati.

Števila smemo smatrati za količine; zakaj vsako število ima lastnosti, ki se pripisavajo količinam. Razen številnih količin imamo še prostorske količine (teles, ploskve, črte), fizikalne količine i. t. d. Nauk o številnih količinah je aritmetika, nauk o prostorskih količinah geometrija, nauk o številnih in prostorskih količinah sploh pa matematika. Aritmetika in geometrija sta dela matematike.

Mathematika =
die Mathematik.

Podlaga vseh matematičnih izrekov so osnovne resnice, to so resnice, ki so same po sebi razumljive. Matematične osnovne resnice so te-le:

Osnovna resnica
= der Grundsatz
oder das Axiom.

1. Enake količine smeš povsod zameniti med seboj.

Mathematische
osnovne resnice.

2. Ako izpremeniš enake količine na isti način, najdeš enake količine.

3. Vsaka celota je tolika, kolikršni so vsi deli te celote skupaj; torej je vsaka celota večja ko del te celote.

Na podlagi matematičnih osnovnih resnic in s pomočjo določenih pojasnil uči algebra pravila, po katerih se mora računati (računske zakone), izvaja lastnosti številnih izrazov in kaže na nalogah, kako se uporabljajo računski zakoni in lastnosti številnih izrazov.

Kaj uči algebra.
Računski zakon
= das Rechen-
gesetz.

Primerjaj uvod v geometriji!

I. Osnovni računski načini s celimi števili.

A. Računska načina prve stopnje.

§ 2. Seštevanje.

Seštevati = addieren.
Seštevanec = der Summand.
Vsota = die Summe.

Dve ali več določenih števil sešteti se pravi, poiskati novo število, ki ima toliko enot, kolikor jih imajo določena števila skupaj. Števila, ki se seštevajo, se imenujejo seštevanci ali sumandi; število pa, katerega iščeš, se zove vsota. Znak seštevanja je stoječi križ $+$, ki se čita „več“ ali „plus“; stavi se med sumande.

Kako izvršiš seštevanje dveh števil. Nakazano seštevanje. Nakazana in izračunana vsota.

Številni a in b sešteješ, ako poiščeš v naravni številni vrsti prvi sumand a ter šteješ za toliko enot dalje (naprej), kolikor jih ima drugi sumand b . Število $a + b$, do katerega prideš na ta način, je vsota, koju iščeš. Številni izraz

$$a + b$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba številu a prišteti število b (nakazano seštevanje); isti izraz pomeni tudi vsoto števil a in b (nakazana vsota). Razen nakazane vsote imamo še izračunano vsoto (navadno pri posebnih številih), t. j. vsota, v kateri so enote sumandov spojene v celoto; v izračunani vsoti ne poznaš več sumandov. N. pr. 17 je izračunana vsota števil 8 in 9, oziroma 10 in 7, 12 in 5 i. t. d. Ako je treba računati z nakazano vsoto, jo oklenemo; oklepaj rabimo tudi, če hočemo vsoto dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Kako izvršiš seštevanje treh ali več števil.

Tri ali več števil sešteješ, ako prišteješ vsoti prvih dveh sumandov tretji sumand, dobljeni vsoti četrti sumand i. t. d. Številni izraz

$$a + b + c + d$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba vsoti števil a in b prišteti število c in tej vsoti prišteti število d ;

isti izraz pomeni tudi vsoto števil a , b , c in d . Kar smo poprej omenili glede na rabo in pomen oklepaja, velja tudi tukaj. Kdaj torej pišemo $(a + b + c + d)$?

Sumandi so deli vsote; torej morajo sumandi in vsota biti ali neimenovana števila ali pa števila istega imena, oziroma iste vrste.

Kdaj je vsota imenovano, kdaj neimenovano število.

Ako so vsi sumandi enaki, se da vsota prav kratko zaznamovati. N. pr. vsoto

Glavna količina = die Hauptgröße.
Koefficient = der Koeffizient.

$$a + a + a + a + a$$

zaznamujemo krajše s $5a$, t. j. enaki sumand a zapišemo samo enkrat, pred njega pa postavimo število 5, ki pove, kolikokrat se mora sešteti število a . Istotako zaznamujemo tudi vsoto

$$a + a + a + \dots (m \text{ krat})$$

krajše z ma . V izrazih $5a$ in ma imenujemo a glavno količino, 5 (oziroma m) pa koefficient. Koefficient 1 se ne piše; torej pomeni a toliko kakor $1a$.

Glavna količina v številnem izrazu se mora tolikokrat sešteti, kakor pove koefficient, ki stoji pred glavno količino. Številni izrazi, ki imajo enake glavne količine, se imenujejo istoimenski; številni izrazi z različnimi glavnimi količinami so pa raznoimenski. Tako sta n. pr. izraza $6a$ in $8a$ istoimenska, izraza $3a$ in $4b$ pa raznoimenska.

Istoimenski in raznoimenski številni izrazi = gleichnamige und ungleichnamige Zahlenausdrücke.

V izrazu $ma + na$ se mora glavna količina a sešteti m krat in n krat, t. j. skupaj $(m + n)$ krat, v znakih

$$ma + na = (m + n)a.$$

Istoimenske izraze torej sešteješ, ako sešteješ njih koefficiente in pridržiš skupno glavno količino.

Kako seštevaš istoimenske, kako raznoimenske izraze.

Raznoimenske izraze sešteješ, ako nakažeš seštevanje. N. pr.

$$4a + 5b + 6c.$$

Zakon o zame-
njavi sumandov
= das Kommuta-
tionsgesetz der
Addition.

V vsaki izmed vsot

$$a + b \text{ in } b + a$$

se nahaja toliko enot kakor v sumandih a in b skupaj;
torej je

$$a + b = b + a.$$

Če imamo tri ali več sumandov, velja isto. Zato smemo reči:

Isti sumandi dajo v vsakem redu isto vsoto.

Zakona o združe-
vanju sumandov
= die Assozia-
tionsgesetze der
Addition.

V vsaki izmed vsot

$$(a + b) + c, (a + c) + b, a + (b + c)$$

je toliko enot, kolikor jih imajo števila a , b in c skupaj.
Torej je

$$\left. \begin{aligned} (a + b) + c &= (a + c) + b = a + (b + c), \\ a + (b + c) &= (a + b) + c. \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Vsoti prišteješ število, ako ga prišteješ samo enemu sumandu. N. pr.

$$(2a + 3b) + 4a = 6a + 3b,$$

$$(2a + 3b) + 5b = 2a + 8b.$$

Številu prišteješ vsoto, ako mu prišteješ njene sumande drugega za drugim. N. pr.

$$6a + (7a + 8b) = 13a + 8b,$$

$$9b + (10a + 11b) = 20b + 10a.$$

Zadnji dve pravili sta prav pogostoma spojeni v enem in istem računu. N. pr.

$$(4a + 7b + 2c) + (5a + 3b + c) = 9a + 10b + 3c.$$

Povej, kako se je izvršilo navedeno seštevanje!

Razreševanje
oklepajev.

Ako se v računu nahaja oklepaj v oklepaju, izvršiš najprej seštevanje, ki ga nakazuje notranji oklepaj, in potem zaporedoma seštevanja, ki jih nakazujejo naslednji oklepaji. Tako izgine iz računa oklepaj za oklepajem. N. pr.

$$\begin{aligned} [(5a + 4b) + (2a + b)] + [(3a + 6b) + (a + 7b)] &= \\ = [7a + 5b] + [4a + 13b] &= 11a + 18b. \end{aligned}$$

§ 3. Odštevanje.

Naloge kakor

$$b + ? = a \quad \text{ali} \quad ? + b = a$$

se rešujejo po drugem računskem načinu, ki se zove odštevanje. Kaj poznamo in česa iščemo v navedenih nalogah?

Odštevati se pravi iz vsote dveh števil (a) in iz enega sumanda (b) poiskati drugega. Določena vsota se imenuje zmanjševanec ali minuend, določeni sumand se zove odštevaneč ali subtrahend in sumandu, ki ga iščeš, se pravi razlika (ostanek, diferenca). Znak odštevanja je vodoravna črta —, ki se čita „manj“ ali „minus“; stavi se med minuend in subtrahend. Pred znakom odštevanja stoji minuend, za znakom odštevanja pa subtrahend.

Odštevati = subtrahieren. Zmanjševanec = der Minuend. Odštevaneč = der Subtrahend. Razlika = die Differenz.

Od števila a odšteješ število b na dva načina. Z ozirom na prvo zgoraj navedeno nalogo je treba od števila b za toliko enot dalje šteti v naravni številni vrsti, da prideš do števila a ; število, ki pove, za koliko enot si moral šteti naprej, je razlika. Razlika določa torej razdaljo v naravni številni vrsti od subtrahenda b do minuenda a . — Z ozirom na drugo zgoraj navedeno nalogo najdeš razliko, ako šteješ v naravni številni vrsti od števila a za b enot nazaj. Število, do katerega prideš na ta način, je razlika. Da moraš v prvem in drugem slučaju dobiti isti rezultat, je zaradi zakona o zamenjavi sumandov jasno.

Kako izvršiš odštevanje.

Številni izraz

$$a - b$$

Nakazano odštevanje. Nakazana in izračunana razlika.

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba od števila a odšteti število b (nakazano odštevanje); isti izraz pomeni tudi razliko števil a in b (nakazana razlika). Razen nakazane razlike imamo še izračunano razliko (navadno pri posebnih številih); v izračunani razliki ne poznaš niti minuenda niti subtrahenda. N. pr. 5 je izračunana razlika števil 9 in 4, oziroma 12 in 7 i. t. d. Ako je treba računati z nakazano razliko, jo oklenemo; oklepaj služi tudi, če hočemo nakazano razliko dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Števila pri odštevanju so ali neimenovana števila ali pa števila istega imena, oziroma iste vrste. Zakaj?

Razlikina lastnost.

Ako sešteješ razliko in subtrahend, dobiš minuend za vsoto, v znakih

$$(a - b) + b = a.$$

Kdaj se število ne izpremeni.

Število se ne izpremeni, ako mu prišteješ in odšteješ (oziroma odšteješ in prišteješ) eno in isto število, v znakih

$$a = (a + b) - b = (a - b) + b.$$

Zakaj jasno je, da se število a ne more izpremeniti, ako šteješ v naravni številni vrsti od števila a za b enot naprej in potem za istotoliko enot nazaj, ali ako šteješ od števila a za b enot nazaj in potem za istotoliko enot naprej.

Kako odštevaš istoimenske, kako raznoimenske izraze.

V izrazu $ma - na$ se mora glavna količina a sešteti m krat in potem od te vsote odvzeti n krat; torej ostane glavna količina še $(m - n)$ krat kakor sumand, v znakih

$$ma - na = (m - n) a.$$

Istoimenske izraze odštevaš, ako odšteješ njih koeficiente in pridržiš skupno glavno količino. O resničnosti tega pravila se tudi prepričaš, ako prišteješ razliki subtrahend.

Raznoimenske izraze odštevaš, ako nakažeš odštevanje. N. pr.

$$ma - nb.$$

Računski zakoni.

Od vsote odšteješ število, ako ga odšteješ od enega sumanda, v znakih

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c). \dots I.$$

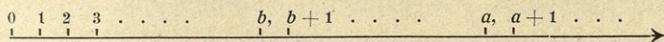
Zakaj jasno je, da zmanjšaš vsoto $a + b$ za c enot, ako zmanjšaš sumand a ali pa sumand b za c enot. N. pr.

$$\begin{aligned} (5a + 8b) - 3a &= 2a + 8b, \\ (5a + 8b) - 5b &= 5a + 3b. \end{aligned}$$

V enačbi pod I. se nahaja tudi pravilo :

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš seštevanje in odštevanje določenih števil, v znakih $(a + b) - c = (a - c) + b$.

Razlika $a - b$ pomeni razdaljo v naravni številni vrsti od subtrahenda b do minuenda a . Primerjaj sliko !



Če se minuend a poveča, oziroma zmanjša za nekoliko enot, se mora tudi razdalja od b do a povečati, oziroma zmanjšati za istotoliko enot. Če se subtrahend b poveča, oziroma zmanjša za nekoliko enot, se razdalja med b in a zmanjša, oziroma poveča za istotoliko enot. Če se minuend a in subtrahend b obenem povečata ali zmanjšata za istotoliko enot, mora razdalja med b in a ostati ista. Torej smemo reči :

Razliki prišteješ število, ako ga prišteješ minuendu ali pa odšteješ od subtrahenda, v znakih

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c) \dots \text{II.}$$

Zakaj razliko $a - b$ povečaš za c enot, ako povečaš minuend a za c enot ali pa zmanjšaš subtrahend b za c enot. N. pr.

$$(12a - 15b) + 4a = 16a - 15b,$$

$$(12a - 15b) + 6b = 12a - 9b.$$

Od razlike odšteješ število, ako ga odšteješ od minuenda ali pa prišteješ subtrahendu, v znakih

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c) \dots \text{III.}$$

Zakaj razliko $a - b$ zmanjšaš za c enot, ako zmanjšaš minuend a za c enot ali pa povečaš subtrahend b za c enot. N. pr.

$$(23a - 17b) - 14a = 9a - 17b,$$

$$(23a - 17b) - 8b = 23a - 25b.$$

Razlika dveh števil se ne izpremeni, ako prišteješ, oziroma odšteješ od minuenda in subtrahenda eno in isto število, v znakih

$$a - b = (a + m) - (b + m),$$

$$a - b = (a - m) - (b - m).$$

Zakaj razlika $a - b$ ostane neizpremenjena, če povečaš ali zmanjšaš minuend a in subtrahend b obenem za m enot.

V enačbah pod II. in III. se nahajata tudi pravili:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš odštevanje določenih števil, v znakih

$$(a - b) - c = (a - c) - b.$$

Od števila odšteješ dve ali več števil, ako odšteješ od minuenda vsoto vseh subtrahendov, v znakih

$$(a - b) - c = a - (b + c).$$

Ako obrnemo enačbe pod I., II. in III., t. j. ako zamenimo prvi in drugi enačbeni del med seboj, najdemo pravila:

$$\left. \begin{aligned} a + (b - c) &= (a + b) - c, \\ a - (b - c) &= (a - b) + c, \\ a - (b + c) &= (a - b) - c. \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Številu prišteješ razliko, ako mu prišteješ minuend in odšteješ subtrahend. N. pr.

$$4x + (9x - 5y) = 13x - 5y.$$

Številu odšteješ razliko, ako mu odšteješ minuend in prišteješ subtrahend. N. pr.

$$9x - (4x - 3y) = 5x + 3y.$$

Številu odšteješ vsoto, ako mu odšteješ zaporedoma sumand za sumandom. N. pr.

$$7x - (4x + 5y) = 3x - 5y.$$

§ 4. Algebrajska števila.

Razlika $a - b$ pomeni neko število v naravni številni vrsti, dokler je minuend a večji od subtrahenda b . Ko pa postane minuend a enak ali manjši od subtrahenda b , ne moremo razlike $a - b$ določiti s pomočjo naravne številne vrste; kajti ta vrsta se začne s številom 1. Zaraditega je treba naravno številno vrsto podaljšati in obenem prvotni pomen števila primerno razširiti in sicer tako, da ostanejo računski zakoni veljavni tudi za ta slučaj.

Razlikin pomen.

Ako je minuend enak subtrahendu, nima razlika $a - a$ nobene enote, v znakih

Ničla = die Null.
Pomen ničle in njene lastnosti.

$$a - a = 0.$$

Taki razliki pravimo ničla. Ničla pomeni torej, da nimamo nobene takšne enote, ki bi bila podlaga računu. Iz tega pomena izvajamo, da se mora ničla nahajati v naravni številni vrsti pred številom 1, in da se število ne izpremeni, ako mu prišteješ, oziroma odšteješ ničlo.

Ako je subtrahend b za c enot večji od minuenda a (torej $b = a + c$), najdeš vrednost razlike $a - b$ po že znanih računskih zakonih tako-le:

Negativno število = die negative Zahl. Pomen negativnega števila.

$$a - b = a - (a + c) = (a - a) - c = 0 - c = -c.$$

Takšno razliko kakor $0 - c$ ali krajše $-c$ imenujemo negativno število. Negativno število je torej razlika z minuendom 0, ali pa število, ki ima pred seboj znak odštevanja. Ta znak se zove predznak števila in se čita „minus“. Negativno število je manjše od ničle.

Ako damo številu c zaporedoma vrednosti 1, 2, 3, 4 i. t. d., najdemo vrsto negativnih števil

$$-1, -2, -3, -4, -5 \text{ i. t. d.},$$

ki tvorijo podaljšek naravne številne vrste.

Števila naravne številne vrste nimajo nobenega predznaka, dokler se ne oziramo na podaljšek te vrste. Takim številom pravimo absolutna števila. Če pa se oziramo na negativna števila, dobivajo števila naravne številne

Absolutno število = die absolute Zahl. Pozitivno število = die positive Zahl.

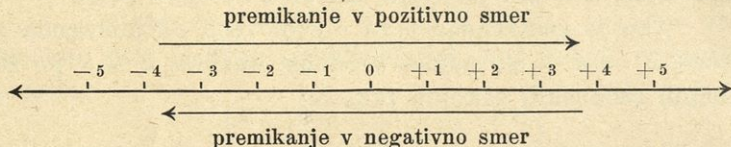
Relativno ali algebrajsko število
= die relative
oder algebraische
Zahl.

vrste predznak $+$ (čitaj: plus) in se imenujejo potem pozitivna števila. Pozitivna in negativna števila imajo skupno ime relativna ali algebrajska števila.

Enota absolutnih števil je 1 in se imenuje prvotna ali absolutna enota; enota pozitivnih števil je $+1$ in se zove pozitivna enota; enota negativnih števil je -1 in se imenuje negativna enota. Absolutna števila so sestavljena iz ene ali več absolutnih enot, pozitivna iz ene ali več pozitivnih enot, negativna pa iz ene ali več negativnih enot. Ali je različna pozitivna enota od absolutne?

Podaljšana številna vrsta = die erweiterte
Zahlenreihe.

Ako spojimo naravno številno vrsto s podaljškom te vrste, stvorimo neomejeno številno vrsto, ki jo hočemo imenovati podaljšano številno vrsto. To številno vrsto predočujemo na neomejeni premi črti ali na traku, na katerem načrtamo od določene točke enake daljice na vsako stran. Dotična točka predočuje ničlo, vsaka daljica pa enoto; daljice na desno od ničle predstavljajo pozitivne enote, daljice na levo od ničle pa negativne enote. Ena,



dve, tri ali več daljic na desno skupaj predočuje pozitivna števila: $+1$, $+2$, $+3$ i. t. d.; ena, dve, tri ali več daljic na levo skupaj predstavlja negativna števila: -1 , -2 , -3 i. t. d. Primerjaj sliko!

Premikanje v podaljšani številni vrsti.

V podaljšani številni vrsti ločimo premikanje v pozitivno in negativno smer. Če se premikamo od kakega števila v pozitivno smer, pridevamo dotičnemu številu zaporedoma enoto za enoto ali z dotičnim številom spajamo zaporedoma pozitivne enote. Za kolikor enot se pomaknemo na desno, toliko enot prištejemo dotičnemu številu, ali toliko pozitivnih enot spojimo z dotičnim številom. Ako se pa premikamo od kakega števila v negativno smer, jemljemo od dotičnega števila zaporedoma enoto za enoto ali z dotičnim številom spajamo zaporedoma negativne enote. Za kolikor enot se pomaknemo na levo,

toliko enot odštejemo od dotičnega števila, ali tolako negativnih enot spojimo z dotičnim številom. Primerjaj sliko! Pri premikanju v pozitivno smer postajajo števila vedno večja, pri premikanju v negativno smer pa vedno manjša. Torej je $0 > -1 > -2 > -3$ i. t. d.

Pri vsakem algebraskem številu je treba ločiti predznak in množino enot (absolutno vrednost). Predznak pove, kakšne so enote; absolutna vrednost pa, koliko enot je v številu. N. pr. v številu $-a$ je a negativnih enot.

Predznak = das Vorzeichen.
Absolutna vrednost = der absolute Wert.

Števili $+m = 0 + m$ in $-m = 0 - m$ sta v podaljšani številni vrsti enako oddaljeni od ničle v nasprotno smer. Taki dve števili se imenujeta nasprotni števili. Po dve nasprotni števili imata isto absolutno vrednost, pa različna predznaka. Iz $-m = 0 - m$ izvajamo po pojmu o razliki

Nasprotna števila = entgegengesetzte Zahlen.
Lastnost nasprotnih števil.

$$(-m) + m = 0, \text{ ali tudi } (-m) + (+m) = 0, \text{ t. j.}$$

Vsota dveh nasprotnih števil je $= 0$, ali: dve nasprotni števili se uničujeta pri seštevanju.

Algebraska števila navadno oklepamo, kadar je treba z njimi računati. Ko izvršimo nakazane računske načine, odpadejo oklepaji.

§ 5. Seštevanje algebraskih števil.

Vsota algebraskih števil izraža tolako pozitivnih in negativnih enot, kolikor jih je v sumandih skupaj. Algebraska števila sešteješ, ako spojiš enote vseh sumandov s pomočjo podaljšane številne vrste v celoto.

Kako seštevaš algebraska števila.

Algebraski števili $+a$ in $+b$ sta sestavljeni le iz pozitivnih enot; v vsoti teh števil mora biti $a + b$ pozitivnih enot, v znakih

$$(+a) + (+b) = +(a + b) \dots \dots \dots \text{I.}$$

Algebraski števili $-a$ in $-b$ sta sestavljeni le iz negativnih enot; v vsoti teh števil mora biti $a + b$ negativnih enot, v znakih

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \dots \dots \dots \text{II.}$$

Algebrajski števili $+a$ in $-b$ sta sestavljeni iz nasprotnih (pozitivnih in negativnih) enot. Ako je absolutna vrednost a večja od b , se b pozitivnih in b negativnih enot uničuje; torej ostane za vsoto toliko pozitivnih enot, za kolikor je absolutna vrednost a večja od b , t. j. $a - b$ pozitivnih enot, v znakih

$$(+a) + (-b) = +(a - b), \quad a > b. \quad \dots \text{III.}$$

Algebrajski števili $-a$ in $+b$ sta sestavljeni iz nasprotnih enot. Ako je absolutna vrednost a večja od b , se b negativnih in b pozitivnih enot uničuje; torej ostane za vsoto $a - b$ negativnih enot, v znakih

$$(-a) + (+b) = -(a - b), \quad a > b. \quad \dots \text{IV.}$$

Ako primerjamo v prvem in drugem, oziroma v tretjem in četrtem slučaju sumande in vsoto glede na predznake in absolutne vrednosti, najdemo za porabno računanje te-le pravili:

Dvoje algebrajskih števil z istim predznakom sešteješ, ako sešteješ njuni absolutni vrednosti in pridržiš skupni predznak.

Dvoje algebrajskih števil z različnim predznakom sešteješ, ako odšteješ njuni absolutni vrednosti in pridržiš predznak večje absolutne vrednosti.

Ako je treba sešteti tri, štiri ali več algebrajskih števil, prišteješ vsoti prvih dveh števil tretje število, tej vsoti četrto število i. t. d. Včasih ravnaš pripravneje, ako sešteješ pozitivne in negativne sumande zase ter spojiš dobljeni vsoti v novo celoto. N. pr.

$$\begin{aligned} (-14a) + (+15a) + (-17a) + (-16a) + (+19a) &= \\ &= (-47a) + (+34a) = -13a. \end{aligned}$$

Ako so sumandi raznoimenski, zapišeš jih drugega poleg drugega z njihovimi predznaki vred; pri tem odpadejo oklepaji in znaki seštevanja. Da

zaznamuje dobljeni številni izraz vse pozitivne in negativne sumandske enote, je jasno. N. pr.

$$\begin{aligned} (+2a) + (-3b) + (-5c) + (+4d) &= \\ &= 2a - 3b - 5c + 4d. \end{aligned}$$

V vsoti algebraskih števil se sme predznak $+$ pri prvem členu in za enačajem izpuščati; predznak $-$ se ne sme nikdar izpustiti.

Vsaka vsota algebraskih števil, kakor n. pr.

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = a - b + c - d$$

se imenuje algebraska vsota ali mnogočlenik, posamezni sumandi se zovejo členi. Algebraska vsota dveh členov se zove dvočlenik ali binom, vsota treh členov pa tročlenik ali trinom. Izrazom, ki imajo samo en člen, pravimo enočleniki ali monomi.

V algebraski vsoti ali mnogočleniku

$$a - b + c - d$$

smemo znake $+$ in $-$ smatrati ali za predznake dotičnih členov ali pa tudi za računske znake. Kajti spajanje pozitivnih, oziroma negativnih enot z določenim številom se ujema popolnoma s prištevanjem, oziroma z odštevanjem absolutnih enot od dotičnega števila.

Po istih pravilih, po katerih seštejemo dvoje algebraskih števil, spojimo (skrčimo) v celoto tudi istoimenske izraze v mnogočlenikih.

Ako je treba številu, oziroma mnogočleniku prišteti mnogočlenik, moramo z dotičnim številom, oziroma s prvim mnogočlenikom spojiti vse pozitivne in negativne enote, ki se nahajajo v drugem mnogočleniku. To pa storimo, ako prištejemo (pripisemo) številu, oziroma prvemu mnogočleniku zaporedoma posamezne člene drugega mnogočlenika. Torej je

$$\begin{aligned} 4a - 3b + (-2a - 5b + c) &= \\ &= 4a - 3b - 2a - 5b + c = 2a - 8b + c. \end{aligned}$$

Mnogočlenike sešteješ, ako zapišeš njihove člene drugega poleg drugega z neizpre-

Algebraska
vsota = die alge-
braische Summe.
Mnogočlenik =
das Polynom.
Člen = das Glied.
Dvočlenik = das
Binom. Tročlenik
= das Trinom.
Enočlenik = das
Monom.

Skrčevanje v
mногоčlenikih.

Kako seštevaš
mногоčlenike.

menjenimi predznaki in skrčiš istoimenske izraze. Da smeš oboje naenkrat storiti, se razume samo po sebi. N. pr.

$$(5a - 7b - 9c) + (3a - 4b + 6c) = 8a - 11b - 3c.$$

§ 6. Odštevanje algebraskih števil.

Kako odštevaš
algebrajska
števila.

Algebrajska števila odštevati se pravi, iz vsote dveh algebraskih števil in iz enega sumanda poiskati drugega. Tudi pri algebraskih številih je vsota iz razlike in subtrahenda enaka minuendu. Iz te lastnosti izvajamo za odštevanje algebraskih števil pravilo:

Algebrajsko število odšteješ od algebrajskega števila, ako prišteješ (pripišeš) neizpremenjenemu minuendu subtrahend z nasprotnim predznakom; kajti v vsoti iz razlike in subtrahenda se nahaja minuend in dvoje nasprotnih števil, ki se uničujeta. Torej je:

$$\begin{aligned} (+a) - (+b) &= (+a) + (-b), \\ (+a) - (-b) &= (+a) + (+b), \\ (-a) - (+b) &= (-a) + (-b), \\ (-a) - (-b) &= (-a) + (+b). \end{aligned}$$

Prištej v navedenih primerih razliki subtrahend. Kakšno vsoto najdeš?

Kako odštevaš
mnogočlenike.

Od števila, oziroma od mnogočlenika odšteješ mnogočlenik, ako odšteješ od minuenda toliko pozitivnih in negativnih enot, kolikor se jih nahaja v posameznih subtrahendovih členih, t. j. ako odšteješ od minuenda zaporedoma vsak subtrahendov člen. Z ozirom na zgoraj navedeno pravilo smemo torej reči:

Mnogočlenike odštevaš, ako pripišeš neizpremenjenemu minuendu subtrahendove člene z nasprotnimi predznaki in skrčiš istoimenske izraze. Da smeš oboje naenkrat storiti, se razume samo po sebi. N. pr.

$$\begin{aligned} (6a - 7b + 9c) - [(2a - 5b - 8c) - (-a + 3b - 4c)] &= \\ = (6a - 7b + 9c) - [3a - 8b - 4c] &= 3a + b + 13c. \end{aligned}$$

§ 7. Seštevanje in odštevanje enačb in neenačb.

Ako izenačimo dva številna izraza, ki imata enaki vrednosti, stvorimo enačbo. N. pr. $3x - 8 = 2x + 5$. Izenačena izraza se imenujeta enačbena dela (enačbeni strani). Vsak teh delov utegne biti sestavljen iz členov, ki so spojeni med seboj z znakom seštevanja ali odštevanja. Povej enačbeni strani, enačbene člene in kako so členi združeni med seboj v zgoraj navedeni enačbi!

Enačba = die Gleichung. Enačbena dela = Teile der Gleichung. Enačbeni členi = Glieder der Gleichung.

Važne so tiste enačbe, v katerih se nahajajo znane in neznane količine. Znane količine (znanke) zaznamujemo s posebnimi števili, včasih tudi z začetnimi črkami abecede; neznane količine (neznanke) pa značimo s končnimi črkami x, y, z, u, v .

Neznanka = die Unbekannte. Znanka.

Tisto število, oziroma tisti številni izraz, ki ustreza enačbi (tvori enačbena dela enaka), se imenuje enačbeni koren. Enačbi določiti koren, se pravi enačbo razrešiti.

Enačbeni koren = die Wurzel der Gleichung. Razrešiti = auflösen.

Določeno enačbo razrešimo, ako jo pretvorimo tako, da stoji v enem enačbenem delu neznanka sama s koeficientom $+1$, v drugem delu pa stoje znana števila. Razrešena enačba ima torej obliko $x = a$, kjer pomeni a znano število, oziroma znani številni izraz.

Oblika razrešene enačbe.

Ako izrazimo v znakih, da imata dva številna izraza neenaki vrednosti, stvorimo neenačbo. Tudi v neenačbi ločimo neenačbena dela (neenačbeni strani) in neenačbene člene.

Neenačba = die Ungleichung.

Enačbe in neenačbe seštevamo in odštevamo po naslednjih pravilih:

a) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) enakim številnim izrazom enake izraze, najdeš enake zneske, v znakih

Seštevanje in odštevanje enačb in neenačb.

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \text{sešteto}$$

$$a + c = b + d,$$

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \text{odšteto}$$

$$a - c = b - d.$$

Navedeni izrek sledi iz matematičnih osnovnih resnic.

b) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) neenakim številnim izrazom enake izraze, najdeš v istem zmislu neenake zneske, v znakih

$$\frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} \text{sešteto}}{a + c > b + d,} \qquad \frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} \text{odšteto}}{a - c > b - d.}$$

Dokaz. Ako je število a za f enot večje od števila b , je $a - f = b$ ali pa $a = b + f$. Iz

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d \end{array} \right\} \text{sešteto} \\ \text{sledi} \quad \frac{a + c = (b + d) + f,}{\text{in iz} \quad \left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d \end{array} \right\} \text{odšteto}} \\ \text{sledi} \quad \frac{a - c = (b - d) + f;}{\end{array}$$

torej je po osnovnih resnicah

$$a + c > b + d \quad \text{in} \quad a - c > b - d.$$

c) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) enakim številnim izrazom neenake izraze, najdeš v istem (oziroma nasprotnem) zmislu neenake zneske, v znakih

$$\frac{\left. \begin{array}{l} a = b \\ c > d \end{array} \right\} \text{sešteto}}{a + c > b + d,} \qquad \frac{\left. \begin{array}{l} a = b \\ c > d \end{array} \right\} \text{odšteto}}{a - c < b - d.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Dokaz. Iz} \quad \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d + f \end{array} \right\} \text{sešteto} \\ \text{sledi} \quad \frac{a + c = (b + d) + f,}{\text{in iz} \quad \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d + f \end{array} \right\} \text{odšteto}} \\ \text{sledi} \quad \frac{a - c = (b - d) - f;}{\end{array}$$

torej je po osnovnih resnicah in po pojasnilih o odštevanju absolutnih števil $a + c > b + d$ in $a - c < b - d$.

d) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) neenakim številnim izrazom neenake izraze v istem (oziroma nasprotnem) zmislu, najdeš neenake izraze v zmislu prvih izrazov, v znakih

$$\frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} \text{sešteto}}{a + c > b + d}, \quad \frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array} \right\} \text{odšteto}}{a - c > b - d}.$$

Dokaz. Iz $\left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d + g \end{array} \right\} \text{sešteto}$

sledi $\frac{a + c = (b + d) + (f + g),$

in iz $\left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d - g \end{array} \right\} \text{odšteto}$

sledi $\frac{a - c = (b - d) + (f + g);$

torej je po osnovnih resnicah

$$a + c > b + d \quad \text{in} \quad a - c > b - d.$$

Naloge.

1. Razreši enačbo $3x - 8 = 2x + 5$.

Razreševanje
enačb.

Navedeno enačbo razrešiš, ako odpraviš iz prvega enačbenega dela znani člen 8 in iz drugega dela člen $2x$. Prvo dosežeš, ako prišteješ enačbenima deloma število 8, drugo pa, ako odšteješ od enačbenih delov številni izraz $2x$. Primerjaj naslednjo razrešitev.

Razrešitev:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 2x + 5 \\ 3x &= 2x + 13 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{I. del} &= 39 - 8 = 31, \\ \text{II. del} &= 26 + 5 = 31. \end{aligned}$$

Iz navedenih pojasnil izvajamo za porabno računanje to-le pravilo:

Vsak člen odpraviš iz enega enačbenega dela, ako ga prestaviš v drugi del z nasprotnim predznakom.

Prestavljanje členov = das Transponieren der Glieder.

Preizkus = die
Probe.

Preizkus napraviš, ako zameniš v določeni enačbi neznanko z najdenim korenem ter izračunaš vrednosti prvega in drugega dela. Če se ujemata te vrednosti, si prav razrešil enačbo.

2. Razreši enačbo

$$8 - (4 + 5x) = (5 - 6x) + (-4 + 2x).$$

Ako izvršiš nakazana računskā načina, najdeš

$$4 - 5x = 1 - 4x.$$

Če prestaviš potem člen $5x$ v drugi enačbeni del in člen 1 v prvi del ter skrčiš izraze kolikor mogoče, dobiš

$$3 = x.$$

Preizkus:

$$\text{I. del} = 8 - (4 + 15) = -11,$$

$$\text{II. del} = (5 - 18) + (-4 + 6) = -11.$$

Pretvarjanje ne-
enačb.

3. Določi mejo za x v neenačbi

$$5a - 3 + 2x > 3x - 1 + 4a.$$

V navedeni neenačbi moraš iz prvega dela odpraviti člen $2x$, iz drugega dela pa člena 1 in $4a$. Prvo dosežeš, ako odšteješ od obeh neenačbenih delov številni izraz $2x$, drugo pa, ako prišteješ (oziroma odšteješ) obema deloma število 1 (oziroma izraz $4a$). Razrešitev je ta-le:

$$5a - 3 + 2x > 3x - 1 + 4a$$

$$5a - 3 > x - 1 + 4a$$

$$5a - 2 > x + 4a$$

$$a - 2 > x.$$

Iz navedenega sledi, da se tudi v neenačbah odpravi vsak člen iz enega dela, ako se postavi v drugi del z nasprotnim predznakom.

4. Določi meji za x v neenačbi

$$3x + 6a - 8 < 4x + 5a - 7 < 3x + 6a - 6.$$

V navedeni neenačbi, ki je sestavljena iz treh delov, odpraviš člen $3x$ iz zunanjih delov, ako odšteješ od vseh

treh delov izraz $3x$; iz srednjega neenačbenega dela pa odpraviš člena $5a$ in 7 , ako odšteješ (oziroma prišteješ) vsem trem delom izraz $5a$ (oziroma število 7). Razrešitev je ta-le:

$$3x + 6a - 8 < 4x + 5a - 7 < 3x + 6a - 6$$

$$6a - 8 < x + 5a - 7 < 6a - 6$$

$$a - 8 < x - 7 < a - 6$$

$$a - 1 < x < a + 1.$$

Na katere izreke se opirajo razrešitve navedenih enačb in neenačb?

B. Računska načina druge stopnje.

§ 8. Množenje.

Število množiti s številom se pravi, prvo število postaviti tolikokrat kot sumand, kakor kaže drugo število, v znakih

$$a \times b = a + a + a + \dots b \text{ krat.}$$

Število, ki se seštevata, se imenuje množenec ali multiplikand; število, ki pove, kolikokrat se mora postaviti multiplikand kot sumand, se zove množitelj ali multiplikator; število, ki ga iščeš, je zmnožek ali produkt. Multiplikand in multiplikator imata skupno ime zmnožkova činitelja ali produktova faktorja. Znak množenja je poševni križ $\times$ ali pika na črti $\cdot$ in se čita „pomnoženo“, ali „naj se množi“, ali „krat“; stavi se med faktorja. Multiplikand stoji pred množenskim znakom, multiplikator pa za množenskim znakom. Pri občnih številih se množenski znak navadno izpušča; torej se zapiše faktor poleg faktorja brez vsakega znaka, n. pr. ab . Istotako se tudi ravna, ako je eden izmed faktorjev posebno število, n. pr. $4b$. V tem slučaju se zapiše posebno število pred občno število; posebno število se zove koeficient, občno pa glavna količina.

Navedeno pojasnilo o množenju je prvotno in velja, dokler je multiplikator absolutno celo število. Če pa postane multiplikator negativno ali ulomljeno število, nima

Množiti = multiplizieren. Prvotno pojasnilo o množenju. Množenec = der Multiplikand. Množitelj = der Multiplikator. Zmnožek = das Produkt. Činitelj = der Faktor.

Občno pojasnilo o množenju.

navedeno pojasnilo o množenju nobenega pravega zmisla. Zato je treba še drugega in sicer obče veljavnega pojasnila o množenju. To pojasnilo je:

Število množiti s številom se pravi, produkt določiti iz multiplikanda na isti način, kakor nastane multiplikator iz absolutne enote. N. pr. Število a pomnožiš s številom b , ako določiš produkt iz multiplikanda a istotako, kakor nastane multiplikator b iz absolutne enote. Ker dobiš multiplikator b , ako postaviš absolutno enoto b krat kot sumand, najdeš torej produkt, ako postaviš multiplikand b krat kot sumand. Iz navedenega se vidi, da se ujemata prvotno in občno pojasnilo o množenju.

Katera števila so pri množenju imenovana. Nakazano množenje. Nakazani in izračunani produkt.

Iz pojma o množenju sledi, da utegne multiplikand biti količina, multiplikator pa ne; produkt se ujema z multiplikandom gledé na ime.

Številni izraz ab ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba število a pomnožiti s številom b (nakazano množenje); isti izraz pomeni tudi produkt števil a in b (nakazani produkt). Razen nakazanega produkta imamo še izračunani produkt (navadno pri posebnih številih); v izračunanem produktu ne poznaš niti multiplikanda niti multiplikatorja. N. pr. 24 je izračunani produkt števil 3 in 8.

Produkt več števil.

Produkt treh ali več števil je tisti končni produkt, katerega najdeš, ako pomnožiš produkt prvih dveh števil s tretjim, novi produkt s četrnim številom i. t. d. Številni izraz $abcd$ ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba produkt števil a in b pomnožiti s številom c in ta produkt pomnožiti s številom d ; isti izraz pomeni tudi produkt števil a, b, c in d .

Nakazani produkt dveh, treh ali več števil oklenemo, ako ga hočemo zaznamovati kakor določeno število.

Vzmnož = die Potenz.

Produkte enakih faktorjev imenujemo vzmnoži ali potence. N. pr.

$aa, bbb, cccc, dddd$ i. t. d.,
ali krajše:

$$a^2, b^3, c^4, d^5 \text{ i. t. d.}$$

Kakor kažejo navedeni primeri, zaznamujemo potence na okrajšani način tako, da postavimo ponavljajoči se faktor

(osnovno število ali potenčno podlogo) samo enkrat ter mu pripišemo na desni zgoraj število (potenčni eksponent), ki naznanja, kolikokrat se mora podloga postaviti kot faktor. V potenci c^4 je c osnovno število ali podloga, 4 pa potenčni eksponent. Druga potenca se imenuje kvadrat, tretja potenca pa kub dotične podloge. Izraze a^2 , b^3 , c^4 čitaš tako-le: a na drugo (potenco), ali: a na kvadrat; b na tretjo (potenco), ali: b na kub; c na četrto (potenco).

Osnovno število = die Grundzahl.
Podloga = die Basis.
Potenčni eksponent = der Potenzexponent.
Kvadrat = das Quadrat. Kub = der Kubus.

Po pojmu o potencah najdemo:

$$\left. \begin{aligned} a^3 \cdot a^4 &= \underbrace{aaa}_{m \text{ krat}} \cdot \underbrace{aaaa}_{n \text{ krat}} = a^{3+4} = a^7. \\ a^m \cdot a^n &= \underbrace{aaa \dots a}_{m \text{ krat}} \cdot \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ krat}} = a^{m+n}. \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Kako množiš potence.

Potence iste podloge množiš, ako pridržiš skupno podlogo ter sešteješ potenčne eksponente.

$$a^m \cdot a = \underbrace{aaa \dots a}_{m \text{ krat}} \cdot a = a^{m+1}.$$

Ako se nahaja podloga sama kakor faktor, ravnaš z njo istotako, kakor bi imela eksponent 1. Torej pomeni a^1 toliko kakor a , t. j. prva potenca vsakega števila je enaka dotičnemu številu.

Pomen prve potence.

Ako so faktorji algebrajska števila, moraš pri določevanju produkta gledati na predznak in na absolutno vrednost. Ker so pozitivna števila istega pomena kakor absolutna, množiš torej algebrajsko število $+a$ (oziroma $-a$) s pozitivnim številom $+b$, ako postaviš neizpremenjeni multiplikand $+a$ (oziroma $-a$) tolikokrat kot sumand, kakor kaže multiplikator $+b$, v znakih

Kako množiš algebrajska števila.

$$\begin{aligned} (+a) \cdot (+b) &= (+a) + (+a) + \dots b \text{ krat} = +ab \dots \text{ I.} \\ (-a) \cdot (+b) &= (-a) + (-a) + \dots b \text{ krat} = -ab \dots \text{ II.} \end{aligned}$$

Da je v prvem slučaju produkt pozitiven, v drugem pa negativen, je jasno. — Če je pa multiplikator negativen, ne moreš produkta določiti po prvotnem pojasnilu o množenju. Algebrajsko število $+a$ (oziroma $-a$) množiš torej z negativnim številom $-b$, ako izvajáš produkt iz

Kako se množi,
če je multipli-
kator = 1, ozi-
roma = 0.

Določeno število enkrat, oziroma ničkrat postaviti kot sumand, je brez zmisla. Pomen in rezultat takih množitvev določimo po že znanih računskih zakonih, ako smatramo namreč te zakone vobče za veljavne, torej tudi v navedenih slučajih. Po zakonu o zamenjavi faktorjev in po pojmu o množenju najdemo:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot 1 &= 1 \cdot a = 1 + 1 \dots a \text{ krat} = a, \\ a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0 + 0 \dots a \text{ krat} = 0. \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Število se ne izpremeni, ako ga pomnožiš z 1.

Produkt je = 0, ako je eden izmed faktorjev = 0.

Zakoni o delskih
produktih = die
Distributions-
gesetze der Mul-
tiplikation.

Po pojmu o množenju in z ozirom na zakon o zamenjavi sumandov je

$$\begin{aligned} (a + b + c)m &= (a + b + c) + (a + b + c) + \dots m \text{ krat} = \\ &= am + bm + cm, \text{ t. j.} \end{aligned}$$

Vsoto pomnožiš s številom, ako pomnožiš vsak sumand z dotičnim številom ter sešteješ delske produkte.

Po ravno navedenem pravilu najdemo z ozirom na zakon o zamenjavi faktorjev:

$$m(a + b + c) = (a + b + c)m = am + bm + cm, \text{ t. j.}$$

Število pomnožiš z vsoto, ako pomnožiš število z vsakim sumandom ter sešteješ delske produkte.

Ako obrnemo navedena zakona, najdemo:

$$am + bm + cm = (a + b + c)m, \text{ t. j.}$$

Produkte s skupnim faktorjem sešteješ, ako sešteješ neskupne faktorje vseh produktov ter pomnožiš to vsoto s skupnim faktorjem.

Z ozirom na zgoraj navedena računska zakona o delskih produktih najdemo dalje:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)(m+n+p)}{x} &= xm + xn + xp = \\ &= (a+b+c)m + (a+b+c)n + \\ &\quad + (a+b+c)p = \\ &= \begin{cases} am + bm + cm \\ an + bn + cn \\ ap + bp + cp. \end{cases} \end{aligned}$$

V končnem produktu je vsak multiplikandov člen pomnožen z vsakim multiplikatorjevim členom. Torej smemo reči:

Vsoto pomnožiš z vsoto, ako pomnožiš vsak multiplikandov člen z vsakim multiplikatorjevim členom ter sešteješ delske produkte.

Ker veljajo pravila o množenju vsot za vsako vsoto, torej tudi za algebrajske vsote ali mnogočlenike, smemo iz navedenega izvajati:

Kako se množijo mnogočleniki.

Mnogočlenik pomnožiš s številom, ako pomnožiš vsak člen z dotičnim številom ter algebrajsko sešteješ delske produkte (t. j. zapišeš jih drugega poleg drugega z neizpremenjenimi predznaki).

Število pomnožiš z mnogočlenikom, ako pomnožiš število z vsakim členom ter algebrajsko sešteješ delske produkte.

Mnogočlenik pomnožiš z mnogočlenikom, ako pomnožiš vsak multiplikandov člen z vsakim multiplikatorjevim členom ter algebrajsko sešteješ delske produkte. V končnem produktu skrčiš izraze, kolikor je mogoče. Da to lažje izvršiš, urediš pred množenjem oba mnogočlenika na isti način ter pišeš med množenjem istoimenske izraze drugega pod drugega. Mnogočlenik urediš po padajočih (pojemaajočih) potencah, ako postaviš na prvo mesto najvišjo potenco in potem nižje in nižje potence; če pa postaviš na prvo mesto člen brez potence ali z najmanjšo potenco in potem višje in višje potence, urediš mnogočlenik po rastočih potencah.

Tako je n. pr. mnogočlenik $5a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - 4b^3$ urejen po padajočih potencah z ozirom na podlogo a in po rastočih potencah z ozirom na podlogo b . N. pr.

$$\begin{array}{r}
 (8x^3 - 11x^2 + 3x - 13)(3x^2 - x - 9) \\
 \hline
 24x^5 - 33x^4 + 9x^3 - 39x^2 \\
 \quad - 8x^4 + 11x^3 - 3x^2 + 13x \\
 \quad \quad - 72x^3 + 99x^2 - 27x + 117 \\
 \hline
 24x^5 - 41x^4 - 52x^3 + 57x^2 - 14x + 117.
 \end{array}$$

Kvadrat in kub
binoma.

S pomočjo pojma o potencah in zadnjega zakona najdemo:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = \left. \begin{aligned} &= a^2 + b^2 + 2ab. \end{aligned} \right\} \\
 (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 = \left. \begin{aligned} &= a^2 + b^2 - 2ab. \end{aligned} \right\} \\
 (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2. \\
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = \left. \begin{aligned} &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned} \right\} \\
 (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)(a - b) = \left. \begin{aligned} &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Kvadrat vsote (razlike) dveh števil je enak vsoti kvadratov teh števil, povečani (zmanjšani) za dvojni produkt obeh števil.

Produkt iz vsote in razlike dveh števil je enak razliki kvadratov obeh števil.

Kub vsakega binoma je algebrajska vsota: 1. iz kuba prvega člena; 2. iz trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z drugim členom; 3. iz trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom drugega člena; 4. iz kuba drugega člena. Pri vsoti so vsi členi pozitivni, pri razliki pa sta drugi in četrti člen negativna.

§ 9. Deljenje.

Naloge kakor

$$b \times ? = a \quad \text{ali} \quad ? \times b = a$$

se rešujejo po četrtem računskem načinu, ki se zove deljenje. Kaj poznamo, česa iščemo v navedenih nalogah?

Deliti se pravi, iz produkta dveh faktorjev in iz enega faktorja poiskati drugega. Produkt dveh faktorjev se imenuje deljenec ali dividend; določeni faktor se zove delitelj ali divizor; faktorju, katerega iščeš, se pravi količnik ali kvocijent. Deljenje značita dve piki, stoječi druga nad drugo (:) ali pa vodoravna črta (—). Ako rabimo prvi znak, zapišemo dividend pred znak deljenja, divizor pa za znakom deljenja; če pa rabimo drugi znak, stavimo dividend nad črto, divizor pa pod črto. Zgoraj navedeno nalogo zapišemo torej tako-le:

$$a : b = ? \quad \text{ali pa} \quad \frac{a}{b} = ?$$

(čitaj: a deljeno z b , ali: a naj se deli z b , ali pa tudi: b se nahaja v a).

Število a deliš s številom b na dva načina. Z ozirom na prvo zgoraj navedeno nalogo izvršiš deljenje, ako sešteješ število b tolikokrat, da najdeš število a , t. j. divizor b se mora tolikokrat sešteti, kolikorkrat se da odvzeti od dividenda a . Delitev, ki se izvršuje na ta način, se zove merjenje. Pri merjenju se torej preiskuje, kolikokrat se divizor nahaja v dividendu. Dividend in divizor utegneta biti ali neimenovani števili ali pa količini iste vrste; kvocijent je vselej neimenovano število, ki pove, kolikokrat se divizor nahaja v dividendu. — Z ozirom na drugo zgoraj navedeno nalogo izvršiš deljenje, ako poiščeš takšno število, ki ga moraš b krat sešteti, da najdeš dividend a . Število, katerega iščeš, je torej toliki del dividenda, kakor kaže divizor. Vsaka delitev v tem zmislu se imenuje pravo deljenje ali deljenje v ožjem pomenu besede. Pri pravem deljenju se torej razdeli dividend na toliko enakih delov, kakor kaže divizor. Dividend utegne biti ali neimenovano število ali pa količina,

Deliti v širjem pomenu besede = dividieren. Deljenec = der Dividend. Delitelj = der Divisor. Količnik = der Quotient.

Kako izvršiš delitev. Merjenje = das Messen. Deljenje v ožjem pomenu besede = das Teilen. Količine pri merjenju in pravem deljenju.

divizor je vselej neimenovano število; kvocijent je dividendov del in se ravna gledé na ime po dividendu. — Da moraš v prvem in drugem slučaju dobiti isti rezultat, ne oziraje se na njegov pomen, je zaradi zakona o zamenjavi faktorjev jasno.

Nakazano deljenje. Nakazani in izračunani kvocijent.

Številni izraz

$$a : b \quad \text{ali pa} \quad \frac{a}{b}$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba število a deliti s številom b (nakazano deljenje); isti izraz pomeni tudi kvocijent števil a in b (nakazani kvocijent). Razen nakazanega kvocijenta imamo še izračunani kvocijent (navadno pri posebnih številih); v izračunanem kvocijentu ne poznaš niti dividenda niti divizorja. N. pr. 7 je izračunani kvocijent števil 63 in 9. Ako je treba z nakazanim kvocijentom računati (posebno, kadar ima obliko $a : b$), ga oklenemo; oklepaj rabimo tudi, če hočemo nakazani kvocijent dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Iz navedenih pojasnil o deljenju izvajamo:

1. Ako pomnožiš kvocijent dveh števil z divizorjem, dobiš dividend kot produkt, v znakih

$$(a : b) \cdot b = a \quad \text{ali} \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2. Ako sta dividend in divizor enaka, je kvocijent enak 1, v znakih

$$a : a = 1;$$

kajti $1 \cdot a = a$.

3. Kvocijent je enak dividendu, če je divizor = 1, v znakih

$$a : 1 = a;$$

kajti $a \cdot 1 = a$.

4. Kvocijent je = 0, ako je dividend = 0, v znakih

$$0 : a = 0;$$

kajti $0 \cdot a = 0$.

5. Kvocijent se ne da določiti, ako je divizor = 0. Kajti za kvocijent $0 : 0$ smeš vzeti vsako

število x , ker je $x \cdot 0 = 0$. Kvocijent $a : 0$ pa je nemogoč, ker ni števila, ki bi z ničlo pomnoženo dalo produkt a .

6. Število se ne izpremeni, ako ga zaporedoma pomnožiš in deliš (oziroma deliš in pomnožiš) z enim in istim številom, v znakih

$$a = am : m \quad \text{ali} \quad a = \frac{a}{m} \cdot m;$$

kajti $a \cdot m = am$. Primerjaj 1.!

Ako sta dividend in divizor algebraski števili, moraš pri določevanju kvocijenta gledati na dvoje, prvič na predznak, drugič na absolutno vrednost. Ker mora kvocijent, pomnožen z divizorjem, dati v vsakem slučaju dividend za produkt, morata torej kvocijent in divizor (faktorja) imeti enaka predznaka, če je dividend pozitiven; različna predznaka pa, če je dividend negativen. Torej je

Kako deliš algebraski števila.

$$\begin{aligned} (+a) : (+b) &= +\frac{a}{b}, \\ (-a) : (-b) &= +\frac{a}{b}, \\ (+a) : (-b) &= -\frac{a}{b}, \\ (-a) : (+b) &= -\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Iz navedenih primerov posnamemo za porabno računanje ta-le pravila:

Kvocijent dveh algebraskih števil je pozitiven, ako sta dividend in divizor enako zaznamovana.

Kvocijent dveh algebraskih števil je negativen, ako sta dividend in divizor različno zaznamovana.

Absolutno vrednost kvocijenta izračunaš pri algebraskih številih istotako kakor pri absolutnih številih.

Kvocijent $(a : b)$ pomeni toliki del dividenda a , kakor kaže divizor b . Ako povečaš (zmanjšaš) le dividend a dve-, tri-, ... n krat, mora se očitno tudi kvocijent istotolikokrat povečati (zmanjšati), t. j. ako pomnožiš (deliš)

Kvocijentove izpremembe.

le dividend z določenim številom, pomnožiš (deliš) kvocijent z istim številom in obratno. Ako napraviš iz dividend a dve-, tri-, ... n krat več (manj) enakih delov, morajo ti deli postati istotolikokrat manjši (večji), t. j. ako pomnožiš (deliš) divizor z določenim številom, deliš (pomnožiš) kvocijent z istim številom in obratno. Ako povečaš (zmanjšaš) dividend in divizor obenem istotolikokrat, se mora kvocijent zaporedoma istotolikokrat povečati in zmanjšati (oziroma zmanjšati in povečati), torej ostane neizpremenjen.

Računski zakoni.

Iz navedenih pojasnil izvajamo pravila:

Kvocijent pomnožiš s številom, ako pomnožiš le njegov dividend, ali pa deliš le njegov divizor z dotičnim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m} \dots \dots \dots \text{I.}$$

Kvocijent deliš s številom, ako deliš le njegov dividend, ali pa pomnožiš le njegov divizor z dotičnim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm} \dots \dots \dots \text{II.}$$

Kvocijent se ne izpremeni, ako pomnožiš (deliš) dividend in divizor obenem z istim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}.$$

V enačbah pod I. in II. se nahajata tudi pravili:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš deljenje in množenje določenih števil, v znakih

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$$

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš deljenje določenih števil, v znakih

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b}.$$

Ako obrnemo enačbe pod I. in II., najdemo pravila :

$$\left. \begin{aligned} \frac{am}{b} &= \frac{a}{b} \cdot m, \\ \frac{a}{b:m} &= \frac{a}{b} \cdot m, \\ \frac{a}{bm} &= \frac{a}{b} : m. \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Produkt deliš s številom, ako deliš le en faktor z dotičnim številom.

Število deliš s kvocijentom, ako ga deliš z dividendom in znesek pomnožiš z divizorjem.

Število deliš s produktom, ako ga deliš z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem.

Potence iste podloge deliš, ako pridržiš skupno podlogo ter odšteješ potenčne eksponente, v znakih

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

kajti $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$.

Vsoto deliš s številom, ako deliš vsak sumand s številom ter sešteješ delske kvocijente, v znakih

$$(a + b + c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m};$$

kajti $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \cdot m = a + b + c$.

Zadnje pravilo velja za vsako vsoto, torej tudi za algebrasko vsoto ali mnogočlenik. Zato smemo reči:

Mногоčlenik deliš s številom, ako deliš vsak člen z dotičnim številom ter algebrasko sešteješ delske kvocijente.

Produkt iz divizorja in kvocijenta je v vsakem slučaju enak dividendu. Ako sta divizor in kvocijent urejena mnogočlenika, se mora po pravilih o množenju mnogočlenskih izrazov v dividendu nahajati toliko delskih produktov, kolikor členov ima kvocijent, in prvi dividendov člen je produkt iz prvega divizorjevega in prvega kvocijentovega člena. Prvi kvocijentov člen najdeš torej, ako

deliš prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom. Če pomnožiš potem ves divizor s prvim kvocijentovim členom ter odšteješ ta delski produkt od dividenda, najdeš prvi dividendov ostanek, v katerem se nahaja še toliko delskih produktov, kolikor členov še manjka kvocijentu. Ker je prvi člen urejenega dividendovega ostanka produkt iz prvega divizorjevega in drugega kvocijentovega člena, najdeš torej drugi kvocijentov člen, ako deliš prvi člen dividendovega ostanka s prvim divizorjevim členom. Če pomnožiš potem ves divizor z drugim kvocijentovim členom ter odšteješ ta delski produkt od prvega dividendovega ostanka, najdeš drugi dividendov ostanek, v katerem se nahaja še toliko delskih produktov, kolikor členov še manjka kvocijentu. Iz urejenega drugega dividendovega ostanka izračunaš naslednji kvocijentov člen istotako, kakor si določil drugi kvocijentov člen iz prvega dividendovega ostanka (oziroma prvi kvocijentov člen iz popolnega dividenda) i. t. d. Primerjaj navedeni račun:

$$\begin{array}{r}
 (8a^4 - 26a^3b - a^2b^2 - 9ab^3 - 42b^4) : (2a^2 - 5ab - 7b^2) = \\
 \begin{array}{r}
 8a^4 - 20a^3b - 28a^2b^2 \\
 - \quad + \quad + \\
 \hline
 - \quad 6a^3b + 27a^2b^2 - 9ab^3 \\
 - \quad 6a^3b + 15a^2b^2 + 21ab^3 \\
 + \quad - \quad - \\
 \hline
 \quad \quad 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\
 \quad \quad 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\
 - \quad + \quad + \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}
 \end{array}
 = 4a^2 - 3ab + 6b^2,$$

ali krajše:

$$\begin{array}{r}
 (8a^4 - 26a^3b - a^2b^2 - 9ab^3 - 42b^4) : (2a^2 - 5ab - 7b^2) = \\
 \begin{array}{r}
 - \quad 6a^3b + 27a^2b^2 - 9ab^3 \\
 \quad \quad 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}
 \end{array}
 = 4a^2 - 3ab + 6b^2.$$

Iz navedenega posnamemo za delitev mnohočlenskih izrazov to-le pravilo:

1. Uredi, prej ko začneš deliti, dividend in divizor na isti način.

2. Prvi kvocijentov člen najdeš, ako deliš prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom. Potem pomnožiš ves divizor s prvim kvocijentovim členom ter odšteješ ta delski produkt od dividenda. Tako najdeš prvi dividendov ostanek, katerega je treba istotako urediti, kakor si začetkoma uredil dividend in divizor.

3. Iz prvega dividendovega ostanka izračunaš drugi kvocijentov člen na isti način, kakor si našel iz popolnega dividenda prvi kvocijentov člen.

4. Naslednje kvocijentove člene izračunaš iz naslednjih dividendovih ostankov istotako, kakor si našel drugi kvocijentov člen.

Samo po sebi se razume, da zapišeš v dividendove ostanke samo toliko členov, kolikor jih ravno potrebuješ. Pismeni račun si prav zdatno okrajšaš, ako odšteješ delske produkte kar pri njih izračunanju od dividenda, oziroma od dividendovih ostankov. Primerjaj navedeni račun! Ako prideš pri deljenju do ostanka, katerega prvi člen ima glavno količino v manjši potenci ko prvi divizorjev člen, pretrgaš delitev. V tem slučaju je kvocijent le približno določen; produkt iz divizorja in kvocijenta je za delitveni ostanek manjši od dividenda.

§ 10. Množenje in deljenje enačb in neenačb.

a) Ako množiš (deliš) enake številne izraze z enakimi izrazi, najdeš enake zneske, v znakih

$$\begin{array}{rcl} \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \text{pomnoženo} & & \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \text{deljeno} \\ \hline ac = bd, & & \hline \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \end{array}$$

Navedeni izrek sledi iz matematičnih osnovnih resnic.

b) Ako množiš (deliš) neenake številne izraze z enakimi izrazi, najdeš v istem zmislu neenake zneske, v znakih

$$\frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} \text{pomnoženo}}{ac > bd}, \quad \frac{\left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} \text{deljeno}}{\frac{a}{c} > \frac{b}{d}}.$$

Dokaz. Iz

$$\frac{\left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d \end{array} \right\} \text{pomnoženo}}{\text{sledi } ac = bd + df} \quad \text{in} \quad \frac{\left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d \end{array} \right\} \text{deljeno}}{\frac{a}{c} = \frac{b}{d} + \frac{f}{d}};$$

torej je po osnovnih resnicah

$$ac > bd \quad \text{in} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

c) Ako množiš enake številne izraze z neenakimi izrazi, najdeš v istem zmislu neenake izraze, v znakih: iz $a = b$ in $c > d$ sledi $ac > bd$.

Dokaz je popolnoma sličen dokazu pod b).

d) Ako množiš večji številni izraz z večjim izrazom, najdeš večji izraz, v znakih: iz $a > b$ in $c > d$ sledi $ac > bd$.

$$\begin{array}{l} \text{Dokaz. Iz} \quad \left. \begin{array}{l} a = b + f \\ c = d + g \end{array} \right\} \text{pomnoženo} \\ \hline \text{sledi } ac = bd + (df + bg + fg); \end{array}$$

torej je po osnovnih resnicah $ac > bd$.

e) Ako deliš enake številne izraze z neenakimi izrazi, najdeš v nasprotnem zmislu neenake izraze, v znakih: iz $a = b$ in $c > d$ sledi $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Dokaz. Če bi bil kvocient $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{d}$ in bi ta kvocient pomnožili z neenačbo $c > d$, bi dobili $\frac{a}{c} \cdot c > \frac{b}{d} \cdot d$ ali krajše $a > b$, kar nasprotuje pogoju $a = b$. Torej mora biti $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

f) Ako deliš večji številni izraz z manjšim izrazom, najdeš večji izraz, v znakih: iz $a > b$ in $c < d$ sledi $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Dokaz je popolnoma sličen prejšnjemu.

Naloge.

1. Razreši enačbo:

Razreševanje
oklepajev pri
enačbah.

$$(2x + 1)(x - 3) - (3x - 4)(2x + 5) = 74 - (2x - 3)^2.$$

Navedeno enačbo razrešiš, ako izvršiš najprej nakazane računske načine v vsakem enačbenem delu, potem prestaviš člene z neznanko v en del, znane člene pa v drugi del, in končno deliš oba enačbena dela z neznanim koeficientom.

Razrešitev:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5x - 3) - (6x^2 + 7x - 20) &= 74 - (4x^2 - 12x + 9) \\ -4x^2 - 12x + 17 &= 65 - 4x^2 + 12x \\ -24x &= 48 \\ x &= -2.\end{aligned}$$

Preizkus:

$$\text{I. del} = (-3)(-5) - (-10) \cdot 1 = 15 + 10 = 25,$$

$$\text{II. del} = 74 - (-7)^2 = 74 - 49 = 25.$$

2. Razreši enačbo:

$$\begin{aligned}(12x^4 - 7x^3 - 38x^2 - 7x + 10) : (3x^2 - 4x - 5) &= \\ &= (2x - 3)(2x + 3) + 4.\end{aligned}$$

Navedeno enačbo razrešiš, ako postopaš istotako kakor pri prejšnji enačbi.

Razrešitev:

$$\begin{aligned}4x^2 + 3x - 2 &= 4x^2 - 9 + 4 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1.\end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned}\text{I. del} &= (12 + 7 - 38 + 7 + 10) : (3 + 4 - 5) = \\ &= (-2) : 2 = -1,\end{aligned}$$

$$\text{II. del} = (-5) \cdot 1 + 4 = -5 + 4 = -1.$$

3. Določi tista cela števila, ki ustrezajo neenačbi $5x + 9 < 11x - 21 < 5x - 3$.

Nalogo razrešiš, ako odpraviš iz zunanjih neenačbenih delov člen $5x$, iz srednjega neenačbenega dela pa člen 21, in potem deliš vse tri neenačbene dele z neznankinim koeficientom.

Razrešitev:

$$5x + 9 < 11x - 21 < 5x - 3$$

$$9 < 6x - 21 < -3$$

$$30 < 6x < 18$$

$$5 < x < 3.$$

Z ozirom na pogoj naloge je torej $x = 4$.

Na katere izreke se opirajo razrešitve navedenih enačb in neenačb?

C. Lastnosti celih števil.

§ 11. Številni sestavi.

Številni sestav =
das Zahlen-
system.

Desetiški številni
sestav = das
dekadische
Zahlensystem.

Vsakemu številu se da pridejati enota in z dobljenim številom zopet spojiti enota. Tako postopajoč najdemo neizrečeno veliko števil, ki se imenujejo cela števila. Če hočemo ta števila izraziti v govoru in predočiti pismeno, je treba za vsako število posebnega imena in znaka. Pa teh imen in znakov ne sme biti preveč, da si jih moremo zapomniti in da ne postane njih raba pretežavna. Zato so pregledno razvrstili števila po skupinah in so izumili jako enostavna pravila, po katerih je mogoče s primeroma pičlo množico besed in znakov izraziti v govoru in predočiti pismeno vsa potrebna cela števila natanko in določno. Ta pregledna razvrstitev števil se imenuje številni sestav ali sistem. Vsi omikani narodi rabijo desetiški ali dekadični številni sestav. Število 10 urejuje ta sestav.

Dekadične enote
= die dekadischen Einheiten.

V desetiškem številnem sestavu ne štejemo neprestano naprej, temveč prenehamo s štetjem večkrat. Ravnamo tako-le. Ko naštejemo deset prvotnih enot

(enic ali dekadičnih enot brez reda), pretrgamo štetje ter začnemo šteti od kraja in štejemo zopet do deset. Če ponavljamo na ta način štetje, nastajajo skupine po deset prvotnih enot. Tem skupinam pravimo dekadične enote prvega reda ali krajše desetice ($10 = 10^1$). Ko naštejemo s prvotnimi enotami deset skupin po deset enot, t. j. deset desetic, pretrgamo zopet štetje ter združimo te skupine (desetice) v novo in večjo celoto, katero imenujemo dekadično enoto drugega reda ali stotico ($100 = 10^2$). Potem začnemo šteti zopet od kraja, in ko naštejemo deset skupin drugega reda, t. j. deset stotic, spojimo te nove skupine v večjo celoto, ki jo imenujemo dekadično enoto tretjega reda ali tisočico ($1000 = 10^3$). Če nadaljujemo štetje na ta način, nastajajo vedno nove in večje skupine, katere imenujemo dekadične enote četrtega, petega, šestega ... reda ali desettisočice, stotisočice, milijonice i. t. d. ($10000 = 10^4$, $100.000 = 10^5$, $1.000.000 = 10^6$, ...).

Iz navedenega spoznamo: deset enic tvori desetico, deset desetic tvori stotico, deset stotic tvori tisočico i. t. d. Deset dekadičnih enot določenega reda tvori torej dekadično enoto naslednjega višjega reda.

Zakon o tvoritvi dekadičnih enot.

Vsako celo število desetiškega sestava je popolnoma določeno, ako povemo, koliko ima enic, desetic, stotic i. t. d.

Kdaj je dekadično število določeno.

Pri pismenem predočevanju celih števil so se dekadičnim enotam odločila posebna mesta, ki se štejejo od desne proti levi. Na prvo mesto pišemo enice, na drugo desetice, na tretje stotice i. t. d. Znano ali določeno množino enot kateregakoli reda zaznamujemo z arabskimi številkami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in z znakom 0, ki pomeni, da na tistem mestu, kjer stoji ničla, ni nobene enote; neznano ali nedoločeno množino enot kateregakoli reda pa zaznamujemo s črkami. Vsaka številka naznanja torej na drugem mestu toliko desetic, na tretjem toliko stotic, na četrtem toliko tisočic i. t. d., kolikor na prvem enic.

Pismeno predočevanje dekadičnih števil.
Načelo o mestni vrednosti števil.

Pri vsaki številki določenega reda moramo ločiti dvojno vrednost in sicer številčno vrednost,

Številčna vrednost = der Ziffernwert.

Mestna vrednost
= der Stellen-
wert.

ki naznanja množino enot, in mestno vrednost, ki pove red enot. Prva vrednost je odvisna od podobe dotične številke in je zaradi tega neizpremenljiva; druga vrednost pa je odvisna od mesta, na katero se zapiše številka, in je zato izpremenljiva.

Oblika dekadič-
nega števila.

Dekadično število N , ki je sestavljeno iz a enic, b desetec, c stotic, d tisočic i. t. d., predočimo pismeno tako-le:

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots,$$

ali pa obratno:

$$N = \dots + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

Vsako posebno dekadično število se da smatrati za mnogočlenik, ki je urejen po padajočih potencah podloge 10. N. pr.

$$7452 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.$$

Število 10 se imenuje podloga desetiškega številnega sestava.

Podloga števil-
nega sestava =
die Basis des
Zahlensystems.

Če uredimo števila naravne številne vrste po kaki drugi podlogi, n. pr. po podlogi 8 (oziroma po podlogi p), storimo številni sestav s podlogo 8 (oziroma s podlogo p). Pri tem postopamo tako-le. Ko naštejemo 8 (p) prvotnih enot, pretrgamo štetje ter začnemo od kraja šteti in štejemo zopet do 8 (p). Če na ta način ponavljamo štetje, nastajajo skupine po 8 (p) prvotnih enot. Tem skupinam pravimo enote prvega reda (8^1 , oziroma p^1). Ko naštejemo s prvotnimi enotami 8 (p) skupin po 8 (p) enot, pretrgamo zopet štetje ter združimo te skupine (enote prvega reda) v novo in večjo celoto, katero imenujemo enoto drugega reda (8^2 , oziroma p^2). Potem začnemo šteti zopet od kraja, in ko naštejemo 8 (p) skupin drugega reda, spojimo te skupine v večjo celoto, ki jo imenujemo enoto tretjega reda (8^3 , oziroma p^3). Če nadaljujemo na ta način štetje, nastajajo vedno nove in večje skupine, ki jih imenujemo enote četrtega, petega, šestega ... reda (8^4 , 8^5 , 8^6 ..., oziroma p^4 , p^5 , p^6 ...).

Enote številnega
sestava vobče.

Vsako celo število številnega sestava s podlogo 8 (p) je popolnoma določeno, ako povemo, koliko ima prvotnih enot (enot brez reda), koliko enot prvega, drugega, tretjega, ... reda.

Pri pismenem predočevanju celih števil številnega sestava s podlogo 8 (p) se odločijo prvotnim in višjim enotam istotako posebna mesta kakor v desetiškem številnem sestavu. Tudi množina enot kateregakoli reda se zaznamuje na isti način. Koliko in katere številke rabimo torej v številnem sestavu s podlogo 8?

Število N številnega sestava s podlogo 8 (p) predočimo tako-le:

$$N = a + b \cdot 8 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8^3 + \dots,$$

oziroma

$$N = a + b \cdot p + c \cdot p^2 + d \cdot p^3 + \dots,$$

kjer pomenijo a prvotne enote, b enote prvega reda, c enote drugega reda i. t. d.

Vsako posebno število številnega sestava s podlogo 8 se da smatrati za mnogočlenik, urejen po padajočih potencah podloge 8. N. pr.

$$6572 [8] = 6 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 2.$$

Vsakemu posebnemu številu, ki ni desetiškega številnega sestava, se mora pripisati podloga dotičnega sestava. Poglej zgoraj navedeni primer!

Pravila, po katerih se izvršujejo osnovni računski načini dekadičnih števil, so znana in se opirajo na računске zakone, ki veljajo o mnogočlenskih izrazih. Popolnoma slično je tudi računanje s števili, ki niso desetiškega sestava.

Naloge.

1. Pretvori število 50432 [8] v desetiški številni sestav!

Po zgoraj navedenih pojasnilih je

$$\begin{aligned} 50432 [8] &= 5 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 = \\ &= 20480 + 256 + 24 + 2 = 20762. \end{aligned}$$

Pismeno predočevanje celih števil v kakem številnem sestavu.

Oblika celega števila v kakem številnem sestavu.

Računanje s celimi števili.

2. Pretvori dekadično število 8734 v številni sestav s podlogo 8!

Nalogo razrešiš, ako izračunaš vrednosti višjih enot številnega sestava [8] ter izmeriš s temi vrednostmi določeno dekadično število.

$$\begin{array}{rcl} 8^1 & = & 8 \\ 8^2 & = & 64 \\ 8^3 & = & 512 \\ 8^4 & = & 4096. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 8734 : 4096 & = & 2 \\ 542 : 512 & = & 1 \\ 30 : 8 & = & 3 \\ 6 : 1 & = & 6. \end{array}$$

Torej je $8734 = 21036 [8]$.

Ako je treba n. pr. določeno število številnega sestava [6] pretvoriti v številni sestav [9], pretvoriš dotično število najprej v desetiški številni sestav in to vrednost potem v številni sestav [9].

§ 12. Občna pojasnila in znamenja o deljivosti.

Deljiv = teilbar.
Mera = das Maß.
Mnogokratnik =
das Vielfache.

Ako delimo celo število A s celim številom m ter najdemo celo število a kot kvocijent, pravimo, da je število A deljivo s številom m , v znakih $A = am$. Število A imenujemo mnogokratnik števila m , število m pa mero števila A .

Praštevilo = die
Primzahl.
Sestavljeno število = die zusammengesetzte
Zahl.

Vsako celo število, ki je deljivo le z 1 in s samim seboj, se imenuje enostavno število ali praštevilo; vsako celo število pa, ki ni le deljivo samo z 1 in samim seboj, temveč še z drugimi števili, se zove sestavljeno število.

Skupna mera =
das gemeinsame
Maß.

Ako sta celi števili A in B deljivi z istim številom m , pravimo, da je m skupna mera števil A in B .

Nekatera občna
znamenja o deljivosti števil.

Skupna mera dveh števil je tudi mera vsote, oziroma razlike teh števil.

Dokaz. Iz pogojnih enačb $A = am$ in $B = bm$ najdemo:

$$\begin{array}{l} A + B = (a + b)m, \\ A - B = (a - b)m, \end{array}$$

t. j. vsota $A + B$, oziroma razlika $A - B$ je mnogokratnik števila m .

Ako ima določeno število kako mero, ima tudi vsak mnogokratnik dotičnega števila isto mero.

Dokaz. Iz pogojne enačbe $A = am$ najdemo

$$Ax = axm,$$

t. j. Ax je mnogokratnik števila m .

Vsaka skupna mera dividenda in divizorja je tudi mera delitvenega ostanka.

Vsaka skupna mera divizorja in delitvenega ostanka je tudi mera dividendova.

Dokaz. Iz pogoja

$$A : B = k + \frac{r}{B}$$

sledi, da je produkt iz kvocijenta k in divizorja B za delitveni ostanek r manjši od dividenda A , t. j. v znakih

$$A - Bk = r \text{ ali pa } A = Bk + r.$$

S pomočjo teh enačb sklepamo: ako imata A in B skupno mero, imata po zgoraj navedenih pravilih tudi Bk in r isto mero; če pa imata B in r skupno mero, imata po istih pravilih tudi Bk in A isto mero.

Dekadično število

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 + \dots$$

je deljivo z n , ako je $\frac{N}{n}$ celo število.

1. Če je $n = 2$ (oziroma 5), najdemo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{2} &= \frac{a}{2} + b \cdot 5 + c \cdot 50 + d \cdot 500 + \dots \\ \frac{N}{5} &= \frac{a}{5} + b \cdot 2 + c \cdot 20 + d \cdot 200 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Dekadično število je deljivo z 2 (5), če so njegove enice deljive z 2 (5).

2. Če je $n = 4$ (oziroma 25), najdemo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{4} &= \frac{a + b \cdot 10}{4} + c \cdot 25 + d \cdot 250 + \dots \\ \frac{N}{25} &= \frac{a + b \cdot 10}{25} + c \cdot 4 + d \cdot 40 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Nekatera posebna znamenja o deljivosti dekadskih števil.

Dekadično število je deljivo s 4 (25), če so njegove enice in desetice kakor število deljive s 4 (25).

3. Če je $n = 8$ (oziroma 125), najdemo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{8} &= \frac{a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2}{8} + d \cdot 125 + \dots \\ \frac{N}{125} &= \frac{a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2}{125} + d \cdot 8 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Dekadično število je deljivo z 8 (125), če so njegove enice, desetice in stotice kakor število deljive z 8 (125).

4. Če je $n = 3$ (oziroma 9), je treba dekadikično število N tako-le pretvoriti:

$$N = a + 9b + b + 99c + c + 999d + d + \dots$$

Potem najdemo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{3} &= \frac{a + b + c + d + \dots}{3} + 3b + 33c + 333d + \dots \\ \frac{N}{9} &= \frac{a + b + c + d + \dots}{9} + b + 11c + 111d + \dots \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Dekadično število je deljivo s 3 (9), ako je njegova številčna vsota (vsota vseh številok dotičnega števila) deljiva s 3 (9).

5. Če je $n = 11$, je treba dekadikično število N tako-le pretvoriti:

$$\begin{aligned} N &= a + 11b - b + 99c + c + 1001d - d + 9999e + \\ &\quad + e + \dots \\ &= a - b + c - d + e \dots + 11b + 99c + 1001d + \\ &\quad + 9999e + \dots \end{aligned}$$

Potem najdemo:

$$\begin{aligned} \frac{N}{11} &= \frac{(a + c + e + \dots) - (b + d + \dots)}{11} + b + 9c + \\ &\quad + 91d + 909e + \dots \quad \text{t. j.} \end{aligned}$$

Dekadično število je deljivo z 11, ako je razlika številčnih vsot lihih in sodih mest

deljiva z 11. N. pr. Pri številu 405691 je številčna vsota lihih mest 7 in številčna vsota sodih mest 18; razlika teh dveh vsot znaša 11 in je deljiva z 11, torej je tudi navedeno število deljivo z 11.

Z 2 deljiva števila se imenujejo soda števila, z 2 nedeljiva števila pa se zovejo liha števila. Soda števila zaznamujemo z $2n$, liha pa z $2n + 1$ ali tudi z $2n - 1$, kjer pomeni n neko število naravne številne vrste.

Sodo število =
gerade Zahl.
Liho število =
ungerade Zahl.

§ 13. Razstavljanje sestavljenih števil in številnih izrazov v prafaktorje.

Vsako sestavljeno število se da le na en način razstaviti v prafaktorje.

Prafaktorji sestavljenega števila.

Dokaz. Ker je sestavljeno število A deljivo ne le z 1 in s samim seboj, temveč tudi še z drugimi števili, moremo ga razstaviti na dva faktorja b in c ($A = bc$), izmed katerih je včasih le eden, včasih sta oba, včasih pa ni nobeden praštevilo. Ako ravnamo z vsakim izmed faktorjev b in c , ki ni praštevilo, istotako kakor s sestavljenim številom A , in ako to ponavljamo, najdemo končno praštevila, katera med seboj pomnožena dajo sestavljeno število A kot produkt (prafaktorji sestavljenega števila). — Sestavljeno število A pa se da le na en način razstaviti na prafaktorje. Kajti če bi število A bilo sestavljeno iz prafaktorjev a, b, c, d in tudi iz prafaktorjev a, β, γ, δ , ki so različni od prejšnjih, bi morala produkta $abcd$ in $a\beta\gamma\delta$ biti enaka in zato tudi oba deljiva z istim številom. Prvi produkt je n. pr. deljiv z a , drugi pa ne more biti deljiv z a , ker so vsi njegovi faktorji različni od a . Isto velja tudi o vsakem drugem faktorju. Število A se torej ne da razstaviti na dva različna načina v prafaktorje.

Če deliš določeno število (n. pr. 509) zaporedoma s praštevili 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... in sicer tako daleč, da postane kvocijent manjši od divizorja, in če se nobena teh delitev ne konča z ostankom 0, je dotično število praštevilo.

Kako določiš praštevila.

Dokaz. Mislimo si dekadično število N , ki je večje od praštevila a , pa manjše ko kvadrat tega praštevila.

Če ni število N deljivo z nobenim praštevilom od 2 do a , utegne biti deljivo s števili, ki so večja od a . Tako najdemo $N = cd$, kjer je vsak izmed faktorjev c in d večji od a , v znakih $c > a$ in $d > a$. Potem mora očitvidno produkt $cd = N$ biti večji od a^2 , kar pa je zaradi zgoraj navedenega pogoja nemogoče. Število N mora torej biti praštevilo.

Naloge.

Kako razstaviš
dekadično število
na prafaktorje.

1. Dekadično število (n. pr. 360360) razstaviš na prafaktorje, ako preiščeš in določiš, katero izmed praštevil 2, 3, 5, 7, 11, 13 i. t. d. in kolikokrat se nahaja v dotičnem dekadičnem številu. V ta namen deliš dekadično število z najmanjšim praštevilom (izvzemi 1), s katerim je deljivo; dobljeni kvocijent deliš zopet z najmanjšim praštevilom, s katerim je deljiv, in tako postopaš dalje, dokler ne prideš do kvocijenta 1. Divizorji vseh teh delitev so prafaktorji dotičnega števila. Poglej navedeni primer!

360360	2
180180	2
90090	2
45045	3
15015	3
5005	5
1001	7
143	11
13	13
1	

Kako razstaviš
enočlenike na
prafaktorje.

2. Pri enočlenskih številnih izrazih predočuje vsaka črka prafaktor; zato je treba razstaviti le koeficient na prafaktorje. N. pr.

$$24 a^2 m x^3 = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 m x^3.$$

Kako razstaviš
mnogočlenike na
prafaktorje.

3. Vsak mnogočlenski izraz, katerega členi imajo skupno mero, se da razstaviti na dva faktorja, izmed katerih je eden skupna mera, drugi pa mnogočlenik, katerega najdeš, ako deliš prvotni mnogočlenski izraz s skupno mero. Vsakega izmed dobljenih faktorjev razstaviš zopet na nove faktorje, če je mogoče. N. pr.

$$\begin{aligned} 12ax^2 - 24bx^2 - 36x^2 &= 12x^2(a - 2b - 3) = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (a - 2b - 3). \end{aligned}$$

Včasih razstaviš najprej po dva in dva člena na faktorje in potem šele ves mnogočlenik. N. pr.

$$2ax - 6bx - 3ay + 9by = 2x(a - 3b) - 3y(a - 3b) = (a - 3b)(2x - 3y).$$

4. Ako ima številni izraz obliko $a^2 - b^2$, sta faktorja vsota in razlika obeh podlog. N. pr.

$$a^4 - y^4 = (a^2 + y^2)(a^2 - y^2) = (a^2 + y^2)(a + y)(a - y).$$

5. Ako ima številni izraz obliko $a^2 \pm 2ab + b^2$, sta faktorja enaka. N. pr.

$$4m^2 + 12mx + 9x^2 = (2m + 3x)^2 = (2m + 3x)(2m + 3x). \\ -b^2 + 6bz^4 - 9z^8 = -(b^2 - 6bz^4 + 9z^8) = \\ = -(b - 3z^4)(b - 3z^4).$$

6. Trinom z obliko $x^2 \pm bxy \pm cy^2$ se da razstaviti na dva faktorja, ako moreš izraziti koeficient b srednjega člena kakor vsoto (oziroma razliko) dveh števil, katerih produkt je $= c$. Iz koeficienta b napraviš vsoto (razliko) dveh števil, če je zadnji člen pozitiven (negativen). Faktorja najdeš po pravilu pod 3. N. pr.

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2 = \\ = x(x - 3y) - 2y(x - 3y) = (x - 3y)(x - 2y). \\ a^2 - 6a - 7 = a^2 - 7a + a - 7 = a(a - 7) + (a - 7) = \\ = (a - 7)(a + 1).$$

7. Izrazi kakor n. pr.

$$a^3 + b^3, a^5 + b^5, \text{ oziroma } x^3 - y^3, x^5 - y^5$$

so deljivi z $a + b$, oziroma $x - y$. Poišči kvocijente ter si jih zapomni!

Vsota (razlika) dveh potenc z enakima lihim eksponentoma je deljiva z vsoto (razliko) podlog.

8. Izrazi kakor n. pr.

$$a^4 - b^4, \quad a^6 - b^6$$

so deljivi z $a + b$ in $a - b$. Poišči kvocijente ter si jih zapomni!

Razlika dveh potenc z enakima sodima eksponentoma je deljiva z vsoto in razliko podlog.

Katera števila so deljiva s 6, 12, 15.

9. Ako se prafaktorji sestavljenih števil 6, 12, 15 i. t. d. nahajajo v določenem številu, mora dotično število biti deljivo s 6, oziroma z 12, 15 i. t. d.

S 6 so torej deljiva tista števila, ki so deljiva z 2 in 3.

Z 12 so deljiva tista števila, ki so deljiva s 4 in 3.

S 15 so deljiva tista števila, ki so deljiva s 3 in 5.

§ 14. Največja skupna mera.

Največja skupna mera = das größte gemeinsame Maß.

Največja skupna mera dveh ali več števil je tisto največje število, katero se nahaja brez ostanka v vseh določenih številih. Tako je n. pr. 15 največja skupna mera števil 30, 45, 75, v znakih

$$M(30, 45, 75) = 15,$$

in $a - b$ največja skupna mera številnih izrazov $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^2 - 2ab + b^2$, v znakih

$$M(a^2 - b^2, a^3 - b^3, a^2 - 2ab + b^2) = a - b.$$

Kako najdeš največjo skupno mero na prvi način.

Jasno je, da se morajo v največji skupni meri dveh ali več števil nahajati le tisti prafaktorji, ki so vsem določenim številom skupni. Ako torej razstaviš določena števila, oziroma številne izraze na prafaktorje ter poiščeš in pomnožiš vse skupne prafaktorje (vsak skupni prafaktor se vzame v najnižji potenci, v kateri se nahaja v kakem številu), najdeš

največjo skupno mero dotičnih števil, oziroma številnih izrazov. N. pr.

$$1. M(168a^2b^3m, 180a^3b^5m^2, 324a^5b^4m^3) = ?$$

$$168a^2b^3m = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^2b^3m,$$

$$180a^3b^5m^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3b^5m^2,$$

$$324a^5b^4m^3 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot a^5b^4m^3;$$

$$\text{torej je } M = 2^2 \cdot 3 \cdot a^2b^3m = 12a^2b^3m.$$

$$2. M(x^2 + 5x - 24, x^2 + 9x + 8, x^3 + 512) = ?$$

$$x^2 + 5x - 24 = x^2 + 8x - 3x - 24 = (x + 8)(x - 3),$$

$$x^2 + 9x + 8 = x^2 + 8x + x + 8 = (x + 8)(x + 1),$$

$$x^3 + 512 = (x + 8)(x^2 - 8x + 64);$$

$$\text{torej je } M = x + 8.$$

Na ta način se določuje največja skupna mera pri manjših številih in številnih izrazih. Včasih se da to izvršiti kar na pamet.

Na drugi način najdeš največjo skupno mero dveh števil (številnih izrazov), ako deliš večje število (večji številni izraz) z manjšim, potem divizor z dobljenim delitvenim ostankom in to ponavljaš tako dolgo, da se ena izmed naslednjih delitev konča z ostankom 0 (verižna delitev). Divizor zadnje delitve je največja skupna mera določenih števil (številnih izrazov). To je v znakih:

$$A : B = k_1 + \frac{r_1}{B},$$

$$B : r_1 = k_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

$$r_1 : r_2 = k_3 + \frac{r_3}{r_2},$$

$$r_2 : r_3 = k_4.$$

Kako najdeš največjo skupno mero na drugi način.
Verižna delitev
= die Ketten-division.

Dokaz. Ker je vsak delitveni ostanek manjši od divizorja in postane v naslednji delitvi divizor; manjšajo se divizorji naslednjih delitev in ena izmed njih se mora torej končati z ostankom 0. Divizor r_3 zadnje delitve je potem mera zadnjega dividenda r_2 . Po izreku, da je vsaka skupna

mera divizorja in delitvenega ostanka tudi dividendova mera, je v zgoraj navedenih delitvah zadnji divizor r_3 zaporedoma mera dividendov r_1 , B in A . Divizor r_3 je torej skupna mera števil B in A . — Če bi pa števili A in B imeli večjo skupno mero nego r_3 , recimo r , bi morale število r po izreku, da je vsaka skupna mera dividenda in divizorja tudi mera delitvenega ostanka, v zgoraj navedenih delitvah biti zaporedoma mera delitvenih ostankov r_1 , r_2 in r_3 . Zadnji slučaj pa je nemogoč, ker je po pogoju $r > r_3$. Iz navedenega je torej jasno, da je zadnji divizor r_3 največja skupna mera števil A in B .

Lastnost skupne mere.

Skupna mera dveh števil se ne izpremeni, ako pomnožiš (deliš) eno izmed določenih števil s faktorjem, ki ni mera drugega števila.

Dokaz. Ker se nahajajo v skupni meri števil A in B le skupni faktorji, je jasno, da se skupna mera ne more izpremeniti, če prideneš (oziroma odvzameš) n. pr. številu A faktor, ki ni mera števila B .

Največjo skupno mero treh ali več števil $A, B, C \dots$ najdeš s pomočjo verižne delitve, ako poiščeš najprej največjo skupno mero M_1 števil A in B , potem največjo skupno mero M_2 najdene mere M_1 in tretjega števila C i. t. d.

Medsebojna praštevila = relative Primzahlen.

Števila, ki nimajo razen 1 nobene skupne mere, se imenujejo medsebojna ali relativna praštevila. Tako so n. pr. števila 4, 9, 25, oziroma številni izrazi $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ medsebojna praštevila.

Naloge.

1. $M(2502, 1807) = ?$

$$2502 : 1807 = 1$$

$$695$$

$$1807 : 695 = 2$$

$$417$$

$$695 : 417 = 1$$

$$278$$

$$417 : 278 = 1$$

$$139$$

$$278 : 139 = 2,$$

$$0$$

ali krajše :

2502	1807	1
695	417	2
278	139	1
0		1
		2

$$M = 139.$$

$$2. \quad M(10x^2 - 34xy + 12y^2, 2x^2 - 3xy - 9y^2) = ?$$

$$(10x^2 - 34xy + 12y^2) : (2x^2 - 3xy - 9y^2) = 5 \\ - 19xy + 57y^2 = - 19y(x - 3y),^*$$

$$(2x^2 - 3xy - 9y^2) : (x - 3y) = 2x + 3y, \\ 3xy - 9y^2$$

0

$$M = x - 3y.$$

$$3. \quad M(3x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 8x + 3, 2x^3 - 9x^2 + 9x - 7) = ?$$

Da bode mogoče, prvi številni izraz deliti z drugim, se pomnoži prvi izraz s faktorjem 2 (oziroma s faktorjem $4 = 2^2$, ker se namreč prvi divizorjev člen nahaja v dveh dividendovih členih). To se sme storiti, ker je 2 (oziroma 4) relativno praštevilo z ozirom na divizor.

$$(12x^4 - 32x^3 + 44x^2 - 32x + 12) : (2x^3 - 9x^2 + 9x - 7) = \\ 22x^3 - 10x^2 + 10x + 12 \qquad \qquad \qquad = 6x + 11$$

$$89x^2 - 89x + 89 = 89(x^2 - x + 1),$$

$$(2x^2 - 9x^2 + 9x - 7) : (x^2 - x + 1) = 2x - 7, \\ - 7x^2 + 7x - 7$$

0

$$M = x^2 - x + 1.$$

§ 15. Najmanjši skupni mnogokratnik.

Najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil je tisto najmanjše število, v katerem se nahajajo vsa določena števila brez ostanka. Tako so n. pr. 120, 240, 360 i. t. d. skupni mnogokratniki števil 8, 12 in 15; najmanjši izmed vseh teh mnogokratnikov pa je 120, v znakih

Najmanjši skupni mnogokratnik = das kleinste gemeinsame Vielfache.

$$mn(8, 12, 15) = 120.$$

V najmanjšem skupnem mnogokratniku dveh ali več števil se mora nahajati vsak prafaktor določenih števil in sicer tolikokrat, kolikorkrat se nahaja v tistem izmed določenih števil, v katerem je največkrat. Z ozirom na to lastnost najdeš določenim številom najmanjši

Kako najdeš najmanjši skupni mnogokratnik na prvi način.

* Iz tega delitvenega ostanka se sme za daljnji račun izpustiti faktor $- 19y$, ker ta faktor ni mera divizorja.

skupni mnogokratnik, ako razstaviš vsa določena števila zaporedoma na prafaktorje ter zbereš in pomnožiš vse različne prafaktorje, vsakega v največji potenci, v kateri se nahaja v kakem izmed določenih števil. N. pr.

$$1. \quad mn (15a^2b, 18ab^2x, 20abx^3, 24x^2y, 30xy^2) = ?$$

$$mn = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^2b^2x^3y^2 = 360a^2b^2x^3y^2.$$

Pri navedeni nalogi razstaviš najprej vse koeficiente zaporedoma na prafaktorje in potem vzameš od prvega koeficienta vse prafaktorje, od vsakega naslednjega pa le tiste, ki jih še nisi vzel v poštev. Primerjaj izvršitev!

$$2. \quad mn (x^2 - y^2, x^2 - xy - 2y^2, x^2 + 2xy - 3y^2) = ?$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y),$$

$$x^2 - xy - 2y^2 = x^2 - 2xy + xy - 2y^2 =$$

$$= (x - 2y)(x + y),$$

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = x^2 + 3xy - xy - 3y^2 =$$

$$= (x + 3y)(x - y);$$

$$mn = (x + y)(x - y)(x - 2y)(x + 3y) =$$

$$= x^4 + x^3y - 7x^2y^2 - xy^3 + 6y^4.$$

Na ta način se išče najmanjši skupni mnogokratnik pri manjših številih in številnih izrazih, ki se dado lahko razstaviti na prafaktorje.

Kako najdeš najmanjši skupni mnogokratnik na drugi način.

Najmanjši skupni mnogokratnik dveh številnih izrazov najdeš, ako deliš enega izmed teh izrazov z največjo skupno mero ter pomnožiš dobljeni kvocijent z drugim izrazom.

Dokaz. Mislimo si dve števili A in B , ki imata največjo skupno mero M , torej

$$A = aM \quad \text{in} \quad B = bM;$$

števili a in b nimata potem nobenega skupnega faktorja. Jasno je, da se v najmanjšem skupnem mnogokratniku števil A in B morajo nahajati faktorji a , b in M . Najmanjši skupni mnogokratnik števil A in B je torej $= abM$.

Ako postavimo v ta izraz vrednosti za a in b , najdemo za najmanjši skupni mnogokratnik izraz

$$mn = \frac{A}{M} \cdot \frac{B}{M} \cdot M,$$

ali krajše

$$mn = \frac{AB}{M} = \frac{A}{M} \cdot B = \frac{B}{M} \cdot A.$$

Najmanjši skupni mnogokratnik treh ali več številnih izrazov najdeš, ako poiščeš najprej najmanjši skupni mnogokratnik prvega in drugega številnega izraza, potem najmanjši skupni mnogokratnik najdenega mnogokratnika in tretjega številnega izraza i. t. d.

Naloge.

1. mn (1781, 2329) = ?

2329	1781	1	1781 : 137 = 13	2329 $\times$ 13
548	137	3	411	6987
0		4	0	30277

$$mn = 30277.$$

2. mn ($6x^2 - 5xy - 6y^2$, $10x^2 - 9xy - 9y^2$) = ?

$$\begin{aligned}
 & (10x^2 - 9xy - 9y^2) : (6x^2 - 5xy - 6y^2), \\
 & (30x^2 - 27xy - 27y^2) : (6x^2 - 5xy - 6y^2) = 5 \\
 & \quad - 2xy + 3y^2 = -y(2x - 3y), \\
 & (6x^2 - 5xy - 6y^2) : (2x - 3y) = 3x + 2y, \\
 & \quad 4xy - 6y^2 \\
 & \quad \quad \quad 0 \qquad \qquad M = 2x - 3y;
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (10x^2 - 9xy - 9y^2)(3x + 2y) \\
 30x^3 - 27x^2y - 27xy^2 \\
 \underline{20x^2y - 18xy^2 - 18y^3} \\
 30x^3 - 7x^2y - 45xy^2 - 18y^3 = mn.
 \end{array}$$

II. Računanje z ulomljenimi števili.

A. Navadni ulomki.

§ 16. Občna pojasnila in pretvarjanje navadnih ulomkov.

Pomen nakazane-
nega kvocijenta.

Kvocijent $\frac{a}{b}$ se da določiti s številom naravne, oziroma podaljšane številne vrste le tedaj, kadar je dividend a mnogokratnik divizorja b . Če pa dividend a ni mnogokratnik divizorja b , moreš kvocijent $\frac{a}{b}$ samo omejiti z dvema zaporednima celima številoma. Tako je n. pr.

$$4 < \frac{35}{8} < 5 \quad \text{in} \quad -2 > -\frac{18}{7} > -3.$$

Deljiva enota.

Da bode kvocijent $\frac{a}{b}$ imel v vsakem slučaju določen pomen, je treba številni pojem primerno razširiti. To se zgodi s pomočjo deljive enote. Številni izraz $\frac{a}{b}$ se da namreč po že znanih računskih zakonih tako-le pretvoriti:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Kvocijent $\frac{a}{b}$ pomeni torej tisto število, ki ga najdemo, ako razdelimo enoto na b enakih delov ter vzamemo enega teh delov a krat.

Ulomek = der
Bruch,
Števec = der
Zähler.
Imenovalec =
der Nenner.

Števila, ki nastajajo na ta način, se imenujejo ulomljena števila ali ulomki; $\frac{1}{b}$ je ulomljena enota. V ulomku $\frac{a}{b}$ se zove a števec, b pa imenovalec. Imenovalec pravi, na koliko enakih delov je treba razdeliti enoto; števec naznanja, koliko enakih enotnih delov se vzame v poštrev. Imenovalec torej imenuje enotni del, števec pa šteje enotne dele.

Pravi ulomek =
der echte Bruch.
Nepravi ulomek
= der unechte
Bruch.

Ulomek, katerega števec je manjši od imenovalca, se imenuje pravi ulomek; ulomek pa, katerega števec je večji od imenovalca, se zove nepravi ulomek. Vrednost pravega ulomka je manjša od enote, vrednost nepravega ulomka pa večja od enote. Vsota iz celega šte-

vila in pravega ulomka je mešano število, n. pr. $5 + \frac{3}{4}$ ali krajše $5\frac{3}{4}$. Mešano število
= die gemischte
Zahl.

Ulomljena števila predočiš na sliki, ako razdeliš daljico, ki predstavlja enoto, na toliko enakih delov, kakor kaže imenovalec, ter načrtaš take dele na traku od tiste točke, ki predočuje ničlo, na vsako stran. Pridejana slika kaže vrsto ulomljenih števil z imenovalcem 3. Predočevanje
ulomljenih števil.

$$\frac{-6}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, \frac{+1}{3}, \frac{+2}{3}, \frac{+3}{3}, \frac{+4}{3}, \frac{+5}{3}, \frac{+6}{3}$$

Prvotna cela števila imajo v tej številni vrsti obliko: $\frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \dots$, t. j. obliko nepravih ulomkov. Čim večji je ulomkov imenovalec, tem manjša je razdalja med dvema zaporednima ulomkoma. Z ulomki se vrsta celih števil razširi, ker nova števila stopijo med dve zaporedni celi števili.

Ako pomnožiš števec ulomka $\frac{a}{b}$ z m , vzameš m krat toliko enotnih delov v poštev; ulomek postane torej m krat večji. Če pomnožiš imenovalec ulomka $\frac{a}{b}$ z m , napraviš iz enote m krat toliko enakih delov; ker so ti deli m krat manjši, je torej jasno, da je ulomkova vrednost postala m krat manjša. Ako pa pomnožiš števec in imenovalec ulomka $\frac{a}{b}$ z m , so enotni deli sicer m krat manjši, pa zato jih vzameš m krat toliko v poštev; ulomkova vrednost se torej ne more izpremeniti, v znakih

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Če obrneš to enačbo, spoznaš, da ulomkova vrednost ostane neizpremenjena, ako deliš števec in imenovalec z enim in istim številom.

Iz navedenega izvajamo:

Ulomkova vrednost se ne izpremeni, ako pomnožiš, oziroma deliš števec in imenovalec z enim in istim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Oblične izpre-
membe ulomkov
= Formverände-
rungen der
Brüche.

Razširjanje ulomkov = das Erweitern der Brüche.

Ulomek razširiš, ako pomnožiš števec in imenovalc z enim in istim številom. S pomočjo razširjanja moreš pretvoriti vsako celo število na ulomek z določenim imenovalcem in vsak ulomek na drugega, katerega imenovalc je mnogokratnik prvega imenovalca.

Okrajšanje ulomkov = das Abkürzen der Brüche.

Ulomek okrajšaš, ako deliš števec in imenovalc z enim in istim številom (s skupno mero). S pomočjo okrajšanja moreš vsak ulomek izraziti v najpriprostejši obliki, t. j. tako, da sta števec in imenovalc medsebojni praštevili.

Primerjanje ulomkov.

Ako hočeš ulomke primerjati med seboj po njihovi kolikosti, jih je treba pretvoriti (razširiti) na ulomke s skupnim imenovalcem (skupni mnogokratnik določenih imenovalcev). Iz kolikosti števecv spoznaš potem, kateri ulomek je večji, kateri pa manjši.

Naloge.

1. Pretvori ulomke:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}, \quad \frac{x+4}{x^2-x-6}, \quad \frac{x^2+4}{x^2-9}$$

na najmanjši skupni imenovalc!

$$mn (x^2-5x+6, x^2-x-6, x^2-9) = \\ = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) = x^4-13x^2+36;$$

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^4-13x^2+36} = \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^4-13x^2+36},$$

$$\frac{x+4}{x^2-x-6} = \frac{(x+4)(x-2)(x+3)}{x^4-13x^2+36} = \frac{x^3+5x^2-2x-24}{x^4-13x^2+36},$$

$$\frac{x^2+4}{x^2-9} = \frac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x^4-13x^2+36} = \frac{x^4-16}{x^4-13x^2+36}.$$

Števec razširjenega ulomka najdeš, ako pomnožiš števec prvotnega ulomka s številom, ki pove, kolikokrat se nahaja prvotni imenovalc v skupnem imenovalcu.

2. Okrajšaj sledeče ulomke:

$$\frac{555}{600}, \quad \frac{2363}{2919}, \quad \frac{x^2 + x - 30}{x^2 + 15x + 54}!$$

$$\frac{555}{600} \stackrel{15}{=} \frac{37}{40}, \quad \frac{2363}{2919} \stackrel{139}{=} \frac{17}{21},$$

$$\frac{x^2 + x - 30}{x^2 + 15x + 54} = \frac{(x+6)(x-5)}{(x+6)(x+9)} = \frac{x-5}{x+9}.$$

3. Kolika je vrednost ulomka

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 20} \quad \text{za } x = 4?$$

Ker dobi navedeni ulomek za $x = 4$ nedoločeno obliko $\frac{0}{0}$, je treba ulomek najprej okrajšati. Potem je:

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 20} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5} = \frac{7}{9}.$$

§ 17. Seštevanje in odštevanje navadnih ulomkov.

Po pojasnilih prejšnjega paragrafa smeš z ulomki enakih imenovalcev ravnati kakor s števili ene in iste ulomljene enote, katero določa skupni imenovalec. Iz tega sledi:

Ulomke enakih imenovalcev seštevaš (oziroma odštevaš), ako sešteješ (odšteješ) njih števec, skupni imenovalec pa pridržiš kakor imenovalec, v znakih

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}.$$

Ako imajo ulomki različne imenovalce, pretvoriš jih na ulomke s skupnim imenovalcem in potem sešteješ, oziroma odšteješ.

Naloge.

$$1. \quad \frac{x-1}{x^2+5x+6} - \frac{x+5}{x^2-x-12} + \frac{x+7}{x^2-2x-8} =$$

$$= \frac{x^2-5x+4}{x^3+x^2-14x-24} - \frac{x^2+7x+10}{x^3+x^2-14x-24} +$$

$$+ \frac{x^2+10x+21}{x^3+x^2-14x-24} = \frac{x^2-2x+15}{x^3+x^2-14x-24}.$$

Kako seštevaš in odštevaš ulomke.

$$2. \left(\frac{a}{4} - \frac{2b}{3}\right) + \left(\frac{3a}{5} - \frac{5b}{6}\right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{7b}{12}\right) = \\ = \frac{a}{4} + \frac{3a}{5} - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} - \frac{5b}{6} + \frac{7b}{12} = \frac{7a}{20} - \frac{11b}{12}.$$

$$3. 3x - 2 - \frac{10x^2 - 3}{3x + 2} + \frac{x^2 + 2}{3x - 2} = \\ = \frac{27x^3 - 18x^2 - 12x + 8}{9x^2 - 4} - \frac{30x^3 - 20x^2 - 9x + 6}{9x^2 - 4} + \\ + \frac{3x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{9x^2 - 4} = \frac{4x^2 + 3x + 6}{9x^2 - 4}.$$

Pri drugi nalogi se izvrši najprej seštevanje, oziroma odštevanje dvočlenskih izrazov in obenem se uredijo členi po glavni količini. — Pri tretji nalogi pa je treba številni izraz $3x - 2$, ki ima obliko celega števila, pretvoriti na ulomek z imenovalcem $9x^2 - 4$. Števec tega ulomka najdeš, ako pomnožiš številni izraz $3x - 2$ s skupnim imenovalcem.

§ 18. Množenje in deljenje navadnih ulomkov.

Kako množiš
ulomek s celim
številom.

Ulomek množiš s celim številom, ako pomnožiš števec s celim številom, ali pa deliš imenovalec s celim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b : m}.$$

Dokaz. Po prvotnem pojasnilu o množenju je

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots m \text{ krat} = \frac{am}{b},$$

ali če deliš števec in imenovalec navedenega rezultata z m , najdeš

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b : m}.$$

Na drugi način izvršiš množenje, kadar je imenovalec deljiv s celim številom.

Ker pride pri množenju na prvi način multiplikator kakor faktor v števec, smeš celo število in imenovalec deliti s skupno mero, prej ko izvršiš množenje.

Ulomek deliš s celim številom, ako deliš števec s celim številom, ali pa pomnožiš imenovallec s celim številom, v znakih

Kako deliš ulomek s celim številom.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b} = \frac{a}{bm}.$$

Dokaz. Kvocijent, pomnožen z divizorjem, mora dati v vsakem slučaju dividend za produkt. V prvem slučaju je

$$\frac{a : m}{b} \cdot m = \frac{(a : m) \cdot m}{b} = \frac{a}{b}$$

in v drugem

$$\frac{a}{bm} \cdot m = \frac{a}{bm : m} = \frac{a}{b}.$$

Na prvi način izvršiš deljenje, kadar je števec deljiv s celim številom.

Če imata števec in celo število skupno mero, smeš oba deliti s to skupno mero; kajti kvocijent se ne izpremeni, ako deliš dividend in divizor z enim in istim številom.

Ulomek množiš z ulomkom, ako pomnožiš števec s števcem in imenovallec z imenovalcem ter postaviš prvi produkt kakor števec, drugega pa kakor imenovallec.

Kako množiš ulomek z ulomkom.

Dokaz. Po občnem pojasnilu o množenju izvršiš nalogo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d},$$

ako deliš multiplikand $\frac{a}{b}$ z imenovalcem d in znesek pomnožiš s števcem c , ali ako izvršiš omenjena računska načina v obratnem redu. Po prejšnjih pravilih najdeš potem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ker pride pri množenju ulomkov števec kakor faktor v števec in imenovallec kakor faktor v imenovallec, smeš pred množenjem en števec in en imenovallec deliti s skupno mero.

Kako množiš celo
število z ulom-
kom.

Kakor množiš ulomek z ulomkom, množiš tudi celo število z ulomkom; kajti vsako celo število si smeš misliti kakor ulomek z imenovalcem 1.

Obratni ulomek
= der reziproke
(umgekehrte)
Bruch.

Ako zameniš števec in imenovalec določenega ulomka med seboj, najdeš nov ulomek, ki se imenuje obratni ulomek z ozirom na prvega. Tako je n. pr. vsak izmed ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{b}{a}$ obratni ulomek z ozirom na drugega; števili a in $\frac{1}{a}$ sta tudi obratni števili.

Lastnost dveh
obratnih števil.

Produkt dveh obratnih števil je enak enoti; kajti

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1 \text{ in } a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Kako deliš ulo-
mek z ulomkom.

Ulomek deliš z ulomkom, ako pomnožiš dividend z obratnim divizorjem, v znakih

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Ulomek tudi deliš z ulomkom, ako deliš števec s števcem in imenovalec z imenovalcem ter postaviš prvi kvocijent kakor števec, drugega pa kakor imenovalec, v znakih

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}.$$

Dokaz. Kvocijent, pomnožen z divizorjem, mora dati v vsakem slučaju dividend za produkt. V prvem slučaju je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

in v drugem

$$\frac{a : c}{b : d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a : c) \cdot c}{(b : d) \cdot d} = \frac{a}{b}.$$

Na drugi način izvršiš deljenje, kadar sta deljiva števec s števcem in imenovalec z imenovalcem.

Kako deliš celo
število z ulom-
kom.

Kakor deliš ulomek z ulomkom na prvi način, deliš tudi celo število z ulomkom, v znakih

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

Ulomkova vrednost je $= 0$, ako je števec $= 0$, ali pa imenovalc neizrečeno velik.

Kdaj je ulomkova vrednost $= 0$.

Dokaz. Po pojasnilu o ulomku in po računskem zakonu o množenju z 0 je $\frac{0}{b} = \frac{1}{b} \cdot 0 = 0$. — Ako razdelimo enoto na mnogo enakih delov in vsakega teh delov razdelimo zopet na mnogo enakih delov ter ponavljamo tako deljenje zelo velikokrat, se manjšajo posamezni deli in bližajo po svojih vrednostih ničli. Ko postane število enotnih delov neizrečeno veliko, so ti deli enaki ničli in zato je

$$\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Ulomkova vrednost je neizrečeno velika, če je števec neizrečeno velik, ali pa imenovalc $= 0$.

Kdaj je ulomkova vrednost $= \infty$

Dokaz. Če seštejemo ulomljeno enoto $\frac{1}{b}$ neizrečeno velikokrat, je očitvidno, da mora ulomkova vrednost postati neizrečeno velika, v znakih $\frac{1}{b} \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$. — Jasno je, da morata obratni vrednosti dveh enakih številnih izrazov biti enaki. Če vzamemo pri številnih izrazih v enačbi $0 = \frac{a}{\infty}$ obratni vrednosti, najdemo $\frac{1}{0} = \frac{\infty}{a} = \infty$; torej je tudi $\frac{a}{0} = \infty$.

Naloge.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 8} \cdot \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 2x - 3} = \\ & = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)(x + 4)} \cdot \frac{(x + 4)(x - 5)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - x - 2}. \end{aligned}$$

Da moreš številne izraze okrajšati kolikor mogoče, je treba jih razstaviti na prafaktorje.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4ab}{a^2+b^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) = \\ & = \left(\frac{4ab}{a^2-b^2} - \frac{4ab}{a^2+b^2} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \\ & = \frac{8ab^3}{a^4-b^4} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{8ab^3}{a^4-2a^2b^2+b^4}. \end{aligned}$$

V navedeni nalogi se nahajajo v glavnem števcu in glavnem imenovalcu zopet ulomki. Taki ulomki se imenujejo dvojni ulomki. Dvojne ulomke odpraviš, ako pomnožiš glavni števec in glavni imenovalec z najmanjšim skupnim mnogokratnikom tistih imenovalcev, ki se nahajajo v glavnem števcu in imenovalcu.

Dvojni ulomek =
der Doppelbruch.

5. V enačbi

$$\frac{5x-4}{2x-2} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{7x+1}{3x-3} - \frac{9x-6}{4x-4}$$

Odpravljanje
ulomkov v
enačbah.

odpraviš ulomke, ako pomnožiš vsak enačbeni člen z najmanjšim skupnim imenovalcem. Nadaljno razreševanje izvršiš po že znanih pravilih.

Razrešitev:

$$\frac{5x-4}{2x-2} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{7x+1}{3x-3} - \frac{9x-6}{4x-4} \quad | \times 12(x-1)$$

$$30x - 24 - 24x + 36 = 28x + 4 - 27x + 18$$

$$6x + 12 = x + 22$$

$$5x = 10$$

$$x = 2.$$

Preizkus:

$$\text{I. del} = \frac{6}{2} - \frac{1}{1} = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{II. del} = \frac{15}{3} - \frac{12}{4} = 5 - 3 = 2.$$

Ako se nahajajo v enačbi ulomki in oklepaji, razrešiš navadno najprej oklepaje in potem odpraviš ulomke.

B. Decimalni ulomki.

§ 19. Občna pojasnila in računanje z decimalnimi ulomki.

Ako razdelimo enoto na 10, oziroma na 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 ... enakih delov, stvorimo ulomljene enote: desetino ($\frac{1}{10}$), stotino ($\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$), tisočino ($\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$), desettisočino ($\frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$), sto-

Desetinka = die
Dezimale.
Desetina = das
Zehntel.
Stotina = das
Hundertel.
Tisočina = das
Tausendtel.
Desettisočina =
das Zehn-
tausendtel.

Stotisočina =
das Hundert-
tausendtel.
Milijonina = das
Milliontel.

Desetinski ulo-
mek = der De-
zimalbruch.
Navadni ulomek
= der gemeine
Bruch.

Tvorjenje dese-
tink.

Dekadične enote
nižjih redov =
die niederen de-
kadischen Ein-
heiten.
Dekadične enote
višjih redov =
die höheren de-
kadischen Ein-
heiten.
Celote = die
Ganzen.

Pismeno pred-
očevanje desetins-
kih ulomkov.

tisočino ($\frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5}$), milijonino ($\frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6}$) i. t. d., ki se imenujejo desetinke ali decimalke. Ako vzamemo te ulomljene enote večkrat (n. pr. a krat) v poštev,

dobimo ulomljena števila $\frac{a}{10}, \frac{a}{10^2}, \frac{a}{10^3}, \frac{a}{10^4}, \frac{a}{10^5}, \frac{a}{10^6} \dots$, katerim je imenovalce 10 ali pa kaka potenca od 10. Taka ulomljena števila se zovejo desetinski ali decimalni ulomki; vsak drugi ulomek pa je navaden ulomek.

Desetinski ulomki so pravi, oziroma nepravi, če je njih vrednost manjša, oziroma večja od enote.

Desetinke tvorimo tudi tako-le. Ako razdelimo enoto na 10 enakih delov, stvorimo desetino; ako razdelimo desetino na deset enakih delov, stvorimo stotino; ako razdelimo stotino na 10 enakih delov, stvorimo tisočino i. t. d. Vsaka naslednja desetinka je torej deseti del prejšnje desetinke.

Ako primerjamo tvorjenje desetink tvorjenju dekadčnih enot (desetic, stotic, tisočic i. t. d.), spoznamo, da je podlaga vsaki izmed teh tvoritev isti zakon; kajti enica je deseti del desetice, desetica deseti del stotice, stotica deseti del tisočice i. t. d. Vsaka dekadčna enota je torej deseti del sledeče višje dekadčne enote.

Iz navedenega sledi, da se desetinke dado smatrati za naravni podaljšek dekadčnega številnega sestava. Po tem pravimo desetinkam tudi dekadčne enote nižjih redov, deseticam, stoticam, tisočicam i. t. d. pa dekadčne enote višjih redov; enice so prvotne enote. Enice in dekadčne enote višjih redov se zovejo s skupnim imenom celote.

Desetinske ulomke pišemo ali v obliki navadnih ulomkov, n. pr. $\frac{a}{10^m}$, kjer pove potenčni eksponent m število desetink, ali pa v obliki celih števil. V zadnjem slučaju predočimo množino desetinskih enot z arabskimi številkami in z ničlo, red teh enot pa na ta način, da zapišemo dotično številko na določeno mesto, in sicer desetine na prvo mesto za enicami, stotine na drugo, tisočine na tretje, desetisočine na četrto, stotisočine na peto, milijonine na

šesto mesto i. t. d. Celote loči od desetink pika (desetinska ali decimalna pika), ki jo postavimo za enicami na desni strani zgoraj. Če manjka celot, zapišemo na njih mesto ničlo.

Desetinska pika
= der Dezimal-
punkt.

Kakor pri celotah ločimo tudi pri desetinkah dvojno vrednost in sicer številčno vrednost, ki določa množino desetinskih enot, in mestno vrednost, ki pove red desetinskih enot. Katera teh vrednosti je izpremenljiva in zakaj?

Številčna in
mestna vrednost
desetinskih enot.

Vsako število, v katerem se nahajajo desetinke, se imenuje desetinsko ali decimalno število.

Desetinsko šte-
vilo = die De-
zimalzahl.

Jasno je, da se vrednost desetinskega, oziroma celega števila ne izpremeni, ako mu pripišeš na desni eno ali več ničel kakor decimalke. N. pr. $8 \cdot 7 = 8 \cdot 7000$, $34 = 34 \cdot 00$.

Z decimalnimi števili računaš vobče istotako kakor s celimi števili. Seštevati (odštevati) začneš pri desetinkah najnižjega reda, in ko si seštel (odštel) zaporedoma desetinke vseh redov, postaviš v vsoti (razliki) desetinsko piko ter sešteješ (odšteješ) celote.

Seštevanje in od-
števovanje desetins-
kih števil.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš

Množenje dese-
tinskih števil.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}, \quad \text{t. j.}$$

Desetinska števila množiš istotako kakor cela števila; med množenjem se ne oziraš na desetinsko piko; v končnem produktu odšteješ (odbiješ) toliko decimalk, kolikor jih je v obeh faktorjih skupaj.

Ako pomakneš v desetinskem številu desetinsko piko za eno, dve, tri ali več mest proti desni, se vrednost vsake številke poveča 10 krat, oziroma 100 krat, 1000 krat i. t. d. Če pa pomakneš v desetinskem številu desetinsko piko za eno, dve, tri ali več mest proti levi, se vrednost vsake številke zmanjša 10 krat, oziroma 100 krat, 1000 krat i. t. d. Iz navedenega sledi:

Množenje in de-
ljenje desetinskih
števil z dekadich-
nimi enotami viš-
jih in nižjih
redov.

Desetinsko število množiš (deliš) z dekadichnimi enotami višjih redov (10, 100, 1000 i. t. d.), ako pomakneš desetinsko piko za toliko mest

proti desni (levi), kolikor ničel se nahaja v dotični dekadični enoti. Če manjka kje kake številke, jo nadomestiš z ničlo.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \frac{1}{10^m} &= \frac{a}{10^m}, \\ a : \frac{1}{10^m} &= a \cdot 10^m, \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Število (celo ali desetinsko) množiš (deliš) z dekadičnimi enotami nižjih redov (0·1, 0·01, 0·001 i. t. d.) istotako, kakor deliš (množiš) število z dekadičnimi enotami višjih redov, ali:

Število množiš (deliš) z dekadičnimi enotami nižjih redov, ako pomakneš desetinsko piko za toliko mest proti levi (desni), kolikor ničel se nahaja pred veljavno številko v dotični dekadični enoti.

Deljenje desetinskih števil.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} &= \frac{a : b}{10^{m-n}} \\ \text{in } \frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} &= \frac{a \cdot 10^n}{10^m} : b, \end{aligned} \right\} \text{ t. j.}$$

Desetinska števila deliš istotako kakor cela števila; med deljenjem se ne brigaš za desetinsko piko; v kvocijentu postaviš desetinsko piko po tem-le pravilu:

Mestna vrednost prve kvocijentove številke.

Mestna vrednost prve kvocijentove številke se ujema z mestno vrednostjo tistega dividendovega dela (tiste dividendove številke), v katerem (kateri) se nahajajo divizorjeve celote. Če pa nima divizor celot, pomakneš v mislih desetinsko piko v dividendu in divizorju obenem za toliko mest proti desni, da dobi divizor celote, in potem postopaš po zgoraj navedenem pravilu.

§ 20. Pretvarjanje navadnih ulomkov v decimalne in decimalnih v navadne.

Če hočeš navaden ulomek $\frac{a}{b}$, katerega števec in imenoalec sta medsebojni praštevili, pretvoriti v decimalnega, moraš ulomek $\frac{a}{b}$ razširiti tako, da postane iz imenovalca kaka potenca od 10, v znakih

Kako pretvoriš navaden ulomek v decimalnega.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^m} = \frac{a \cdot 10^m : b}{10^m}, \quad \text{t. j.}$$

Števec decimalnega ulomka najdeš, ako pripišeš števcu navadnega ulomka toliko ničel, kolikor jih je treba, in potem deliš ta produkt z imenovalcem navadnega ulomka. Imenoalec decimalnega ulomka je toliko potenca od 10, kolikor ničel si moral pripisati števcu navadnega ulomka. — Če pa pišeš decimalni ulomek v obliki celega števila, pretvoriš navadni ulomek v decimalnega, ako deliš števec z imenovalcem ter izračunaš kvocijent v obliki desetinskega števila. V to svrhu je treba števcu pripisati v mislih toliko ničel kakor decimalke, kolikor se jih potrebuje. Prej kó vzameš prvo decimalko (ki je v tem slučaju ničla) v račun, postaviš v kvocijentu desetinsko piko. Če manjka celot, zapišeš na njih mesto ničlo.

Navadni ulomek $\frac{a}{b}$ se da v decimalnega popolnoma natanko pretvoriti le tedaj, kadar je številni izraz $a \cdot 10^m$ deljiv z b . Ker sta a in b medsebojni praštevili, se morajo vsi prafaktorji števila b nahajati v dekadični enoti 10^m , ki je sestavljena samo iz prafaktorjev 2 in 5. Če je torej imenoalec b navadnega ulomka sestavljen le iz prafaktorjev 2 in 5, najdeš iz navadnega ulomka $\frac{a}{b}$ končen decimalni ulomek.

Končen decimalni ulomek =
endlicher
Dezimalbruch.

Če pa sestavljajo imenoalec b prafaktorji, ki so različni od 2 in 5, ali pa prafaktorji 2 in 5 in vrh tega še tudi drugi prafaktorji, se zgoraj navedena delitev ne more nikdar končati z ostankom 0. Po nekoliko delitvah (vsaj po b delitvah) se morajo ostanki ponavljati in istotako tudi številke v kvocijentu (brezkončen decimalni

Brezkončen decimalni ulomek =
unendlicher
Dezimalbruch.

ulomek). V takih slučajih pretrgaš delitev, ko si določil dovolj decimalk. Izračunani decimalni ulomek je le približno enak navadnemu ulomku.

Povraten decimalni ulomek =
periodischer
Dezimalbruch.
Povračaj = die
Periode.

Decimalni ulomek, v katerem se ponavlja ena ali več števil, se imenuje povraten ali periodičen decimalni ulomek; vrsta ponavljajočih se števil se zove povračaj ali perioda. Periodo zapišemo navadno le enkrat ter zaznamujemo nje prvo in zadnjo številko tako, da nad vsako postavimo piko.

Čisto in nečisto
povraten decimalni ulomek =
rein und gemischt
periodischer
Dezimalbruch.

Tisti decimalni ulomek, v katerem se ponavljajo vse desetinke, se imenuje čisto periodičen decimalni ulomek; decimalni ulomek pa, v katerem se ponavljajo le nekatere desetinke, se zove nečisto periodičen decimalni ulomek. Tako je n. pr. $\frac{59}{111} = 0\cdot\dot{5}3\dot{1}$ čisto periodičen, $\frac{19}{300} = 0\cdot06\dot{3}$ pa nečisto periodičen decimalni ulomek.

Občna oblika čisto periodičnega decimalnega ulomka je

$$\frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \dots$$

kjer pomeni b periodo in n število desetink, ki se nahajajo v periodi. Občna oblika nečisto periodičnega decimalnega ulomka je

$$\frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \dots$$

kjer pomeni a pred periodo stoječe desetinke, m število teh desetink, b periodo in n število desetink v periodi

Kako pretvoriš
končen decimalni
ulomek v navad-
nega.

Končen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga zapišeš v obliki navadnega ulomka in potem okrajšaš, če je mogoče. N. pr.

$$0\cdot632 = \frac{632}{1000} = \frac{79}{125}$$

Kako pretvoriš
čisto povraten
decimalni ulomek
v navadnega.

Čisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga pomnožiš s tako dekadično enoto, da pomakneš

desetinsko piko za vso periodo proti desni, in od tega pomnoženega ulomka odšteješ prvotnega. N. pr.

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 0.\dot{3}7\dot{5} = 0.375375375\dots \\
 1000x & = & 375.375375375\dots \\
 \hline
 999x & = & 375 \\
 x & = & \frac{375}{999} = \frac{125}{333}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} x & = & 0.\dot{3}7\dot{5} \\ 1000x & = & 375.375375375\dots \\ 999x & = & 375 \end{array}} \right\} \text{odšteto}$$

Iz navedenega izvajamo pravilo:

Čisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako vzameš periodo za števec, za imenovalec pa toliko 9, kolikor številčk ima perioda.

Nečisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga pomnožiš s tako dekadično enoto, da postane čisto periodičen, in potem postopaš kakor poprej. N. pr.

$$\begin{aligned}
 x &= 0.12\dot{3}\dot{6} \\
 100x &= 12.\dot{3}\dot{6} = 12\frac{36}{99} = 12\frac{4}{11} \\
 x &= 12\frac{4}{11} : 100 = \frac{136}{1100} = \frac{34}{275}
 \end{aligned}$$

Kako pretvoriš nečisto povraten decimalni ulomek v navadnega.

C. Računanje z nepopolnimi števili.

§ 21. Občna pojasnila o nepopolnih številih.

Dekadično število se imenuje popolno, če so znane vse njegove številke. Dekadično število se zove nepopolno, če so od določenega mesta naprej neznane vse naslednje številke ali pa se izpuštile iz kateregakoli razloga.

Nepopolno število, ki je določeno najmanj do desetink, zaznamujemo na ta način, da mu pridenemo na desni dve piki; nepopolno število pa, pri katerem niso določena vsa celotna mesta, zaznamujemo tako, da mu pripišemo toliko zmanjšanih ničel, kolikor je celotnih mest nedoločenih. N. pr. Cesta do *A* do *B* je približno 8564 *m* dolga, v znakih 8564..*m*; trgovec *C* kupi približno 27.6 stotov blaga, v

Popolno število = die vollständige Zahl.
Nepopolno število = die unvollständige Zahl.
Kako zaznamujemo nepopolna števila.

§ 22. Seštevanje in odštevanje nepopolnih števil.

a)	9·614..	b)	3·56..	c)	17·3 046
	8·578..		7·12 9..		8·1 27..
	4·126..		2·93 7..		7·6 28
	0·326..		4·85 ..		6·5 94..
	3·567..		0·96 8..		4·0 638..
	2·841..		1·4		5·1 47..
	29·05..		20·8..		48·9..

Kako določiš
vsoto nepopolnih
števil tako na-
tanko, kakor je
mogoče.
Popravek = die
Korrektur.

Pri nalogi *a)* so vsi sumandi približno določeni na tri decimalke (na tisočine). Pogrešek v vsakem sumandu znaša pol tisočine ali manj; v vsoti bode pogrešek znašal 6krat pol tisočine = 3 tisočine ali manj, t. j. manj ko polovica ene stotine (kajti 5 tisočin da šele polovico ene stotine). Iz tega se vidi, da ne moreš končne vsote približno določiti na tisočine, ampak le na stotine. Vsota vseh sumandovih tisočin (zadnjih decimalk) se porabi za popravek, t. j. število, katerega je treba prišteti sumandovim stotinam (naslednjim decimalkam). Ker je 32 tisočin bliže 3 ko 4 stotinam, znaša popravek 3. Potem izvršiš seštevanje kakor pri popolnih številih. — Kar se tiče popravka sploh, si je treba zapomniti, da se jemlje 1 za popravek, ako leži vsota iz zadnjih decimalk med 5 in 15; od 15 do 25 se jemlje 2 za popravek; od 25 do 35 je popravek 3, i. t. d.; od 1 do 5 ni nobenega popravka.

Pri nalogi *b)* je treba najprej nekatere sumande okrajšati tako, da imajo vsi enako veliko decimalk. Pri tem se moraš ravnati po tistem sumandu, ki je nepopolno število in ima najmanj decimalk. Od odbitih števil 8, 7 in 9 (t. j. od njih vsote) moraš vzeti popravek, katerega prišteješ naslednjim decimalkam. Potem izvršiš seštevanje kakor pri nalogi *a)*.

Pri nalogah *a)* in *b)* se je določila vsota tako natanko, kakor je bilo mogoče.

Če hočeš vsoto naloge *c)* določiti tako natanko, kakor se zahteva, n. pr. na desetine, okrajšaš vsak sumand na desetine, vzameš od odbitih števil (t. j. od njih

Kako določiš
vsoto popolnih
ali nepopolnih
števil tako na-
tanko, kakor se
zahteva.

vsote) popravek ter sešteješ okrajšane sumande. Kar se tiče popravka v tem slučaju, ga je treba vzeti dvakrat, t. j. najprej sešteješ tisočine, od dobljene vsote vzameš popravek, ga prišteješ stotinam, in ko sešteješ stotine, vzameš zopet popravek ter ga prišteješ desetnam; kajti drugače se pripeti prav lahko, da ne izračunaš vsote dovolj natanko.

$$\begin{array}{r}
 d) \quad 7 \cdot 428 \cdot \cdot \\
 \underline{5 \cdot 83} \\
 1 \cdot 598 \cdot \cdot
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 e) \quad 4 \cdot 32 \\
 \underline{1 \cdot 457 \cdot \cdot} \\
 2 \cdot 863 \cdot \cdot
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 f) \quad 9 \cdot 65 \cdot \cdot \\
 \underline{3 \cdot 14 \cdot 7} \\
 6 \cdot 50 \cdot \cdot
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 g) \quad 8 \cdot 35 \cdot 6 \cdot \cdot \\
 \underline{6 \cdot 89 \cdot \cdot} \\
 1 \cdot 47 \cdot \cdot
 \end{array}$$

Kako določiš razliko nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

Pri nalogah *d)* in *e)* se odšteva kakor pri popolnih številih. Pri nalogah *f)* in *g)* se mora okrajšati število s premnogimi decimalkami tako, da imata minuend in subtrahend istotoliko decimalk. Od odbitih števil se vzame popravek za tisto število, ki se je okrajšalo. Potem se izvrši odštevanje kakor pri popolnih številih.

§ 23. Množenje nepopolnih števil.

$$\begin{array}{r}
 a) \quad 74 \cdot 392 \cdot \cdot \times 8 \\
 \underline{595 \cdot 14 \cdot \cdot}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 b) \quad 3 \cdot 874 \cdot \cdot \times 65 \cdot 9 \\
 \underline{23244} \\
 1937 \\
 \underline{348} \\
 255 \cdot 3 \cdot \cdot
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 950 \cdot 837 \cdot \cdot \times 24 \cdot 678 \cdot \cdot \\
 \underline{222102} \\
 12339 \\
 197 \\
 7 \\
 \underline{1} \\
 23465 \cdot \cdot
 \end{array}$$

Če pomnožiš v nalogi *a)* 2 tisočini z 8, dobiš produkt 16 tisočin; v tem produktu znaša pogrešek 8 krat pol tisočine = 4 tisočine ali manj. Od tega produkta vzameš popravek, ki ga prišteješ pomnoženim stotinam. Vse drugo napraviš kakor pri popolnih številih.

Kako določiš produkt nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

Pri nalogi *b)* je multiplikand nepopolno, multiplikator pa popolno število. Množitev da tri delске produkte. Prvi delski produkt izračunaš, ako pomnožiš multiplikand s 6, ne oziraje se na decimalno piko. Pri tem delskem produktu ne vzameš nobenega popravka; pogrešek, ki se nahaja v njem, se bode končno popravil pri seštevanju delskih produktov. Da ni treba drugega delskega produkta pomakniti za eno mesto proti desni kakor pri navadnem množenju, okrajšaš multiplikand za eno številko; potem pomnožiš odbito številko 4 s 5, vzameš od tega produkta popravek ter ga prišteješ produktu iz številke 5 in okrajšanega multiplikanda. Tretji delski produkt najdeš, ako okrajšaš multiplikand zopet za eno številko in računaš kakor pri drugem delskem produktu. Pri seštevanju delskih produktov vzameš od vsote zadnjih številok popravek. Mestno vrednost končnega produkta določiš s pomočjo prvega delskega produkta. Pri prvem delskem produktu se pomnoži multiplikand z desetico (t. j. z 10). Ker se v tem slučaju decimalna pika premakne za eno mesto proti desni, ostaneta v multiplikandu še dve decimalki, in toliko decimalk se nahaja v vsakem delskem produktu. Končni produkt mora imeti eno decimalko manj. Zakaj?

Pri nalogi *c)* sta oba faktorja nepopolni števili. Za multiplikand izbereš tisti faktor, ki je nepopolnejši (ki ima manj veljavnih številok); kajti če bi napravil obratno, bi se nahajal pogrešek v vseh številkah zadnjega delskega produkta. Delске produkte izračunaš zaporedoma ravno tako kakor pri nalogi *b)*. Za multiplikatorjevo ničlo moraš v multiplikandu tudi odbiti številko; kajti ničla da tudi svoj delski produkt, samo da se ta produkt ne zapiše, ker je $= 0$. Ko odbiješ multiplikandu zadnjo številko, izračunaš od nje popravek ter ga zapišeš kakor delski produkt. Mestno vrednost končnega produkta določiš na isti način kakor pri nalogi *b)*.

Množitev, ki se izvršuje na ta način kakor v navedenih nalogah, se imenuje okrajšana množitev. Glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo je ta, da se pri navadni množitvi pomnoži celi multiplikand z vsako multiplikatorjevo številko in se delski produkti

Okrajšana množitev = die abgekürzte Multiplikation.

Glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo.

pomaknejo zaporedoma vsak za eno mesto proti desni, pri okrajšani množitvi pa se pri izračunanju drugega in vsakega naslednjega delskega produkta multiplikand okrajša za eno številko in se delski produkti zapišejo drug pod drugega tako, da stoje njih zadnje številke druga pod drugo.

Na okrajšani način moraš množiti, ako je vsaj eden izmed faktorjev nepopolno število. Za multiplikand izbereš vselej nepopolnejši faktor.

Produkti nalog *a)*, *b)* in *c)* so se določili tako natanko, kakor je bilo mogoče. Ako je pa pri okrajšani množitvi mnogo delskih produktov, se včasih pripeti, da zadnja številka končnega produkta ni dovolj natanko določena. Temu se izogneš, ako vzameš pri računanju tretjega in vsakega naslednjega delskega produkta popravek od zadnjih dveh odbitih števil. N. pr. Pri tretjem delskem produktu naloge *b)* bi za ta slučaj računal popravek tako-le: 9krat 4 je 36, popravek 4; 9krat 7 je 63 in 4 da 67, popravek 7.

Na okrajšani način množiš tudi, ako je treba produkt dveh (popolnih ali nepopolnih) števil določiti tako natanko, kakor se zahteva. N. pr.

Kako določiš produkt dveh popolnih ali nepopolnih števil tako natanko, kakor se zahteva.

$$d) 14 \cdot 583 \cdot \times 0 \cdot 6945 \text{ (na 2 decimalki).}$$

$$e) 9 \cdot 4164 \times 5 \cdot 827 \text{ (na 1 decimalko).}$$

$$f) 681357 \times 29435 \text{ (na stotisoče).}$$

Pri nalogi *d)* mora imeti končni produkt 2 decimalki, vsak delski produkt pa 3 decimalke. Če pomnožiš multiplikand s 6 (s prvo veljavno multiplikatorjevo številko), dobiš 4 decimalke, torej eno več, ko jih potrebuješ. Multiplikand smeš zato okrajšati za eno številko pred množenjem. Množitev izvršiš na okrajšani način.

Pri nalogi *e)* mora imeti prvi delski produkt 2 decimalki. Če pa pomnožiš multiplikand s 5, dobiš 4 decimalke, torej 2 več, ko jih potrebuješ. Multiplikand smeš zato okrajšati za dve številki pred množenjem.

Pri nalogi *f)* mora končni produkt imeti vrednost stotisočic, prvi delski produkt pa vrednost desetisočic.

Ta pogoj se ravno ujema z nalogo. Prvi delski produkt izračunaš torej na navadni način, naslednje pa na okrajšani način. — Ako bi hotel pri nalogi *f*) produkt določiti na milijone, smel bi okrajšati multiplikand za toliko števil, kolikor jih ima prvi delski produkt preveč (t. j. 1). Če bi pa hotel produkt naloge *f*) določiti na tisoče, moral bi za prvim delskim produktom izračunati na navadni način še toliko delskih produktov, kolikor števil ima prvi delski produkt premalo (t. j. 2).

§ 24. Deljenje nepopolnih števil.

$$a) 7\cdot68_{00} : 8\cdot\overline{364}.. = 0\cdot9182.. \quad b) 485\cdot7... : \overline{31}\cdot\overline{6} = 15\cdot37..$$

1524

1697

688

117

19

22

2

0

$$c) 6\cdot142\overline{3}... : \overline{263}\cdot\overline{5}.. = 0\cdot02331..$$

872

81

2

(— 1)

Kako določiš kvocijent nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

V nalogi *a*) je dividend popolno, divizor pa nepopolno število. Da se ni treba brigati med računanjem za decimalno piko, določiš najprej mestno vrednost prve kvocijentove številke. V ta namen poiščeš tisti dividendov del, v katerem se nahajajo divizorjeve celote, in mestna vrednost tega dividendovega dela je tudi mestna vrednost prve kvocijentove številke. V naši nalogi pomeni prva kvocijentova številka desetine; kajti 8 se nahaja v 76 in 76 so desetine. Potem prirediš divizorju prvi delski dividend. V našem slučaju je treba dividendu pripisati dve ničli (ali si misliti pripisani). Včasih pa se mora dividendu kaka številka odbiti (če jih ima preveč) in od odbite številke vzeti popravek. Ko si iz prvega delskega dividenda določil prvo kvocijentovo številko, pomnožiš divizor s to številko ter odšteješ produkt od prvega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je drugi delski dividend. (Zakaj ne smeš

pripisati temu ostanku ničle?) Da je moči nadaljevati delitev, okrajšajš divizor za eno številko ter določiš iz drugega delskega dividenda drugo kvocijentovo številko. Potem izračunaš popravek od odbite divizorjeve številke, pomnožiš okrajšani divizor z drugo kvocijentovo številko, temu produktu prišteješ popravek ter odšteješ ta popravljeni produkt od drugega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je tretji delski dividend. Sledeče kvocijentove številke izračunaš istotako, kakor si izračunal drugo. Delitev se konča, ko je treba odbiti zadnjo (veljavno) divizorjevo številko. Pri zadnji kvocijentovi številki moraš gledati na to, da jo določiš približno. To spoznaš iz zadnjega ostanka; ako je ta ostanek manjši, ko polovica zadnjega divizorja, si določil zadnjo kvocijentovo številko približno.

V nalogi b) je dividend nepopolno, divizor pa je popolno število. Mestna vrednost prve kvocijentove številke so desetice; kajti 31 se nahaja v 48 in 48 so desetice. Prvo in drugo kvocijentovo številko izračunaš na navadni način, tretjo in četrto številko pa tako, kakor smo računali pri nalogi a).

V nalogi c) sta dividend in divizor nepopolni števili. Mestna vrednost prve veljavne kvocijentove številke so stotine; kajti 263 se nahaja v 614 in 614 so stotine. Potem prirediš dividend in divizor drugega drugemu tako, da se divizor ravno nahaja v dividendu, ter izračunaš kvocijent istotako kakor pri nalogi a).

Vsako deljenje, ki se izvršuje tako kakor pri navedenih nalogah, se imenuje okrajšano deljenje. Glavni razložek med navadnim in okrajšanim deljenjem je ta, da ostane divizor pri navadnem deljenju neizpremenjen in da se ostankom pripisujejo zaporedoma dividendove številke ali ničle, pri okrajšanem deljenju pa se divizor pri izračunanju vsake naslednje kvocijentove številke okrajša za eno številko in ostanki so zaporedoma drug za drugim delski dividendi. Na okrajšani način se mora prej ali slej deliti, ako je eno izmed določenih števil nepopolno. Primerjaj nalogi a) in b)!

Kvocijenti nalog a), b) in c) so se določili tako natanko, kakor je bilo mogoče.

Okrajšana delitev
= die abgekürzte
Division.

Glavni razložek
med navadno in
okrajšano de-
litvijo.

Kako določiš kvocijent popolnih ali nepopolnih števil tako natanko, kakor se zahteva.

Na okrajšani način se tudi deli, ako je treba kvocijent dveh (popolnih ali nepopolnih) števil določiti tako natanko, kakor se zahteva. N. pr.

d) $74 \cdot 69432 \dots : 8 \cdot 576 \dots$ (na 2 decimalki).

e) $9 \cdot 5867 : 0 \cdot 75465$ (na 1 decimalko).

f) $16 \cdot 67384 : 4 \cdot 327$ (na 5 decimalk).

V nalogi d) ima prva kvocijentova številka mestno vrednost enic. Kvocijent bo imel po vsem tri veljavne številke in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Določeni divizor smeš zato okrajšati za eno številko; potem prirediš okrajšanemu divizorju prvi delski dividend ter izvršiš delitev na okrajšani način.

V nalogi e) ima prva kvocijentova številka mestno vrednost desetice. Primerjaj § 19.! Kvocijent bo imel po vsem tri veljavne številke in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Določeni divizor smeš zato okrajšati za dve številki in potem ravnaš kakor v prejšnji nalogi.

V nalogi f) ima prva kvocijentova številka mestno vrednost enic. Kvocijent bo imel šest veljavnih števil in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Ker pa ima v našem slučaju divizor dve številki premalo, moraš izračunati za prvo kvocijentovo številko še toliko števil na navadni način, kolikor jih ima divizor premalo.

Ker se pri okrajšani delitvi nahaja pogrešek v zadnji številki vsakega delskega dividend, se pripeti včasih (posebno, če je zadnji delski dividend enoštevilen), da zadnja kvocijentova številka ni določena dovolj zanesljivo. Temu se izogneš, ako vzameš v okrajšani divizor eno številko več, ko jih potrebuješ, in vsakokratni popravek izračunaš od zadnjih dveh odbitih števil; pri nalogah pa, katerih ne začneš reševati na okrajšani način takoj, ampak šele pozneje, izračunaš na navadni način eno številko več, ko jih je treba.

III. Razmerja in sorazmerja.

§ 25. Razmerja.

Ako preiskavamo, kolikokrat se v številu A nahaja število B , pravimo, da merimo število A s številom B , ali da iščemo razmerje med številoma A in B , v znakih $A : B$ ali $\frac{A}{B}$ (čitaj : A proti B).

Razmerje = das Verhältnis.

Izraz $A : B$ ali $\frac{A}{B}$ se imenuje razmerje števil A in B ter pomeni, da se število B nahaja nekolikokrat v številu A ; A zovemo prednji, B pa zadnji člen. Številu, ki pove, kolikokrat se nahaja zadnji v prednjem členu, pravimo razmerski količnik.

Prednji člen = das Vorderglied.
Zadnji člen = das Hinterglied.
Količnik = der Quotient.

Vsako delitev v zmyslu merjenja smemo smatrati za razmerje dotičnih dveh števil.

Ako zamenimo v razmerju $A : B$ člena med seboj, najdemo razmerje $B : A$, ki se imenuje obratno razmerje števil A in B .

Obratno razmerje = umgekehrtes oder reziprokes Verhältnis.

Vrednost razmerja sodimo po njegovem količniku; čim večji je količnik, tem večja je vrednost razmerja. Ako imajo razmerja enake količnike, se imenujejo enaka.

Razmerje med dvema neimenovanima številoma zovemo številno, razmerje med dvema istovrstnima količinama pa količinsko razmerje. Kar se tiče tvorjenja in vrednosti količinskih razmerij, primerjaj § 21. v geometriji.

Številno razmerje = Zahlenverhältnis.
Količinsko razmerje = Größenverhältnis.

Ako izpustimo v prednjem in zadnjem členu določenega količinskega razmerja ime, najdemo številno razmerje, ki je enako količinskemu.

Iz pojma o razmerju sledi:

Razmerje ne izpremeni svoje vrednosti, ako pomnožiš ali deliš prednji in zadnji člen z enim in istim številom, v znakih

Oblične izpremembe razmerja = Formveränderungen des Verhältnisses.

$$A : B = mA : mB = \frac{A}{n} : \frac{B}{n}.$$

S pomočjo te lastnosti se da: 1. vsako razmerje, čigar člena sta ulomka, izraziti s celima številoma;

Zaporedno raz-
merje = fort-
laufendes Ver-
hältnis.

2. vsako razmerje, čigar člena imata skupno mero, izraziti z najmanjšima številoma (okrajšati).

Razmerje treh ali več števil najdeš, ako določiš, kolikokrat se njih skupna mera (če ni druge skupne mere, se smatra številna enota za skupno mero) nahaja v vsakem izmed dotičnih števil. Taka razmerja hočemo imenovati zaporedna razmerja; njih oblika je

$$A : B : C : D \text{ i. t. d.}$$

Oblična izpre-
memba zapored-
nega razmerja.

Oblična izprememba, ki velja o vsakem enostavnem razmerju, velja tudi o zaporednem razmerju; torej je

$$A : B : C = mA : mB : mC = \frac{A}{n} : \frac{B}{n} : \frac{C}{n}.$$

Istoležni členi =
korrespondie-
rende oder homo-
loge Glieder.

Členi, ki zavzemajo isto mesto v razmerjih, se zovejo istoležni členi. Tako so n. pr. prednji členi dveh ali več razmerij istoležni.

Sestavljeno raz-
merje = zusam-
mengesetztes
Verhältnis.

Ako pomnožiš istoležne člene dveh ali več enostavnih razmerij med seboj, najdeš sestavljeno razmerje. Tako so n. pr.

$$\left. \begin{array}{l} a : b \\ c : d \\ e : f \end{array} \right\} \text{ enostavna razmerja,}$$

ace : bdf pa je sestavljeno razmerje.

§ 26. Sorazmerje.

Sorazmerje = die
Proportion.
Zunanja in no-
tranja člena =
äußere und
innere Glieder.
Prednja in zadnja
člena sorazmerja
= Vorder- und
Hinterglieder der
Proportion.
Četrta geome-
trijska sorazmer-
nica = die vierte
geometrische
Proportionale.
Istoležni členi.

Ako izenačimo dvoje enakih razmerij, stvorimo so-
razmerje. N. pr. Iz razmerij $a : b = k$ in $c : d = k$ iz-
vajamo $a : b = c : d$ (čitaj: števili a in b sta si kakor
števili c in d , ali krajše: a proti b , kakor c proti d).

Sorazmerje je sestavljeno iz dveh enakih razmerij.
Sorazmerje tvoreča števila se imenujejo členi soraz-
merja in sicer od leve proti desni prvi, drugi, tretji in
četrti člen. Prvi in četrti člen se zoveta zunanja, drugi
in tretji člen pa notranja člena; prvi in tretji člen sta
prednja, drugi in četrti člen pa zadnja člena soraz-
merja; četrtemu členu pravimo četrta geometrijska
sorazmernica prvih treh členov. Členi, ki zavzemajo isto
mesto v dveh ali več sorazmerjih, so istoležni členi.

Vsako sorazmerje, v katerem sta notranja člena enaka, se imenuje stalno sorazmerje, n. pr. $a:b = b:c$. Notranji člen stalnega sorazmerja se zove srednja geometrijska sorazmernica zunanjih členov*, četrti člen pa tretja geometrijska sorazmernica prvega in notranjega člena.

Vsako sorazmerje, katerega členi so neimenovana števila, se imenuje številno sorazmerje; sorazmerju pa, ki je sestavljeno iz dveh količinskih razmerij, se pravi količinsko sorazmerje. V količinskem sorazmerju sta člena vsakega razmerja istoimenska; člena prvega razmerja pa utegneta imeti različno ime od členov drugega razmerja. Ako izpustimo pri vseh členih količinskega sorazmerja imena, stvorimo številno sorazmerje.

Sorazmerje razrešiti se pravi, iz treh znanih členov izračunati neznani člen. Razreševanje številnih sorazmerij se opira na lastnost:

V vsakem številnem sorazmerju je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.

Dokaz. Iz enačbe $a:b = c:d$ izvajamo

$$(a:b)bd = (c:d)bd,$$

$$\text{t. j.} \quad ad = bc.$$

Iz dveh enakih produktov stvariš sorazmerje, ako vzameš faktorja enega produkta za zunanja in faktorja drugega produkta za notranja člena, v znakih: iz $ad = bc$ najdeš $a:b = c:d$.

Zunanji člen številnega sorazmerja najdeš, ako deliš produkt notranjih členov z znanim zunanjim členom.

Notranji člen številnega sorazmerja najdeš, ako deliš produkt zunanjih členov z znanim notranjim členom. Zakaj iz sorazmerja $a:b = c:d$ sledi enačba $ad = bc$ in iz te enačbe najdeš:

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

* Srednja geometrijska sorazmernica dveh števil se imenuje tudi geometrična sredina dotičnih dveh števil. Izraz $\frac{a+b}{2}$ se zove aritmetična sredina števil a in b .

Stalno sorazmerje = stetige Proportion.

Srednja geometrijska sorazmernica = mittlere geometrische Proportionale.

Številno sorazmerje = Zahlenproportion.

Količinsko sorazmerje = Größenproportion.

Razrešiti = auflösen.

Lastnost številnega sorazmerja.

Razreševanje številnega in količinskega sorazmerja.

Ako deliš istoležne člene dveh sorazmerij, najdeš novo (sestavljeno) sorazmerje, v znakih

$$\begin{array}{r} a:b = c:d \quad | \\ a_1:b_1 = c_1:d_1 \quad | \\ \hline \frac{a}{a_1}:\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}:\frac{d}{d_1}. \end{array}$$

Zakaj ako deliš enake izraze z enakimi izrazi, najdeš enake kvocijente.

Naloge.

1. Izrazi naslednji sorazmerji:

a) $17(m+n):x = 102(m^2-n^2):93(m-n),$

b) $1\frac{4}{5}:2\frac{2}{3} = x:3\frac{5}{9}$

z najmanjšimi celimi števili!

Izvršitev:

a) $17(m+n):x = 102(m^2-n^2):93(m-n)$

$$1:x = 6(m-n):93(m-n)$$

$$1:x = 2:31.$$

b) $\frac{9}{5}:\frac{8}{3} = x:3\frac{2}{9}$

$$\frac{9}{5}:24 = x:32$$

$$9:120 = x:32$$

$$9:15 = x:4$$

$$3:5 = x:4.$$

2. Določi iz podatkov: a) $a:b = 3:5$ in $a:c = 2:3$ vrednost razmerja $b:c$; b) $a:b = 4:5$, $c:d = 3:5$ in $c:b = 6:5$ vrednost razmerja $a:d$!

V navedenih nalogah je treba najprej določena razmerja tako urediti, da se prvo razmerje začne s členom, ki je prednji člen zahtevanega razmerja, vsako naslednje razmerje začne s členom, ki se ujema z zadnjim členom prejšnjega razmerja, in zadnje razmerje konča s členom, ki je zadnji člen v zahtevanem razmerju. Potem se pomnožijo istoležni členi urejenih sorazmerij.

$$\text{Izvršitev: } a) \left. \begin{array}{l} b:a = 5:3 \\ a:c = 2:3 \end{array} \right\} \text{pomnoženo}$$

$$b:c = 10:9.$$

$$b) \left. \begin{array}{l} a:b = 4:5 \\ b:c = 5:6 \\ c:d = 3:5 \end{array} \right\} \text{pomnoženo}$$

$$a:d = 2:5.$$

3. Poišči iz podatkov:

$$a) a:b = 3:5, \quad a:c = 2:3, \quad a:d = 4:5;$$

$$b) a:c = 8:3, \quad b:c = 7:6, \quad b:d = 14:15$$

zaporedno sorazmerje!

V nalogi *a)* se ujemajo prvi členi določenih razmerij. Takšno nalogo razrešiš, ako pretvoriš določena sorazmerja tako, da se ujemajo tudi njih tretji členi (najmanjši skupni mnogokratnik teh členov). — V nalogi *b)* poiščeš najprej iz določenih razmerij takšna razmerja, ki se ujemajo v prednjih členih, potem pa postopaš kakor pri nalogi pod *a)*.

$$\text{Izvršitev: } a) \begin{array}{l} a:b = 3:5 = 12:20, \\ a:c = 2:3 = 12:18, \\ a:d = 4:5 = 12:15; \end{array}$$

torej je $a:b:c:d = 12:20:18:15$.

$$b) \left. \begin{array}{l} a:c = 8:3 \\ c:b = 6:7 \end{array} \right\} \text{pomnoženo}$$

$$a:b = 16:7,$$

$$\left. \begin{array}{l} a:c = 8:3 \\ c:b = 6:7 \\ b:d = 14:15 \end{array} \right\} \text{pomnoženo}$$

$$a:d = 32:15,$$

$$\begin{array}{l} a:b = 16:7 = 32:14, \\ a:c = 8:3 = 32:12, \\ a:d = 32:15 = 32:15; \end{array}$$

torej je $a:b:c:d = 32:14:12:15$.

4. Razdeli število 1141 na štiri dele, ki so si kakor 15:40:48:60!

Deli števila 1141 so x, y, z, u . Po pogojih naloge je $x + y + z + u = 1141$ in $x:y:z:u = 15:40:48:60$. Iz zaporednega sorazmerja najdeš

$$\frac{x + y + z + u}{15 + 40 + 48 + 60} = \frac{x}{15} = \frac{y}{40} = \frac{z}{48} = \frac{u}{60},$$

$$\text{t.j. } 7 = \frac{x}{15} = \frac{y}{40} = \frac{z}{48} = \frac{u}{60},$$

in iz te enačbe je

$$x = 105, \quad y = 280, \quad z = 336, \quad u = 420.$$

5. Enačbo

$$(x + 6):(11 - x) = (x + 69):(67 - x)$$

razrešiš, ako izenačiš produkta zunanjih in notranjih členov. Potem najdeš $x = 3$.

§ 27. Sorazmerne količine in uporabne naloge.

Odvisne količine.

Dve količini sta odvisni druga od druge, ako vsaka izprememba ene količine povzroči izpremembo druge količine. N. pr. Določena množina blaga ima določeno ceno; dvakrat (trikrat) toliko istega blaga velja dvakrat (trikrat) toliko denarja. Ali: določeno število delavcev izvrši neko delo v določenem času; dvakrat toliko (enako pridnih) delavcev izvrši isto delo v polovici prvotnega časa.

Premo sorazmerne količine = gerade oder direkt proportionale Größen. Sorazmernostni faktor ali modul = der Proportionalitätsfaktor oder Modulus. Funkcija = die Funktion.

Ako sta količini A in B tako odvisni druga od druge, da se količina A tolikokrat poveča (zmanjša), kolikorkrat se količina B poveča (zmanjša), pravimo, da sta količini A in B premo sorazmerni. Iz tega pojasnila sledi, da mora ostati kvocijent številnih vrednosti izpreminjajočih se količin A in B vedno isti, v znakih $\frac{A}{B} = m$ ali $A = mB$, kjer pomeni m neizpremenljivo število, ki se zove sorazmernostni modul ali faktor. Količini A pravimo funkcija količine B .

Iz enačb $A_1 = mB_1$ in $A_2 = mB_2$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2, \text{ t. j.}$$

Ako sta dve količini premo sorazmerni, je razmerje med dvema številoma prve količine enako razmerju med pripadajočima številoma druge količine.

Kako stvorimo sorazmerje iz premo sorazmernih količin.

Ako pa sta količini A in B tako odvisni druga od druge, da se poveča (zmanjša) količina A tolikokrat, kolikokrat se zmanjša (poveča) količina B , pravimo, da sta količini A in B obratno sorazmerni. Iz tega pojasnila sledi, da mora ostati produkt iz številnih vrednosti izpreminjajočih se količin A in B vedno isti, v znakih $A \cdot B = m$ ali $A = m \cdot \frac{1}{B}$. Količini A pravimo funkcija količine B .

Obratno sorazmerne količine = umgekehrt oder invers proportionale Größen.

Iz enačb $A_1 = m \cdot \frac{1}{B_1}$ in $A_2 = m \cdot \frac{1}{B_2}$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = \frac{1}{B_1} : \frac{1}{B_2} = B_2 : B_1, \text{ t. j.}$$

Ako sta dve količini obratno sorazmerni, je razmerje med dvema številoma prve količine enako obratnemu razmerju med pripadajočima številoma druge količine.

Kako stvorimo sorazmerje iz obratno sorazmernih količin.

Količina A utegne biti odvisna tudi od dveh, treh ali več drugih količin B, C, D i. t. d., s katerimi je posamič premo, oziroma obratno sorazmerna. Da je n. pr. količina A s količinama B in C premo, s količino D pa obratno sorazmerna, izrazimo v znakih $A = m \cdot B \cdot C \cdot \frac{1}{D}$. Količina A je funkcija količin B, C in D .

Iz enačb $A_1 = m \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot \frac{1}{D_1}$ in $A_2 = m \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{D_2}$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = \frac{B_1 C_1}{D_1} : \frac{B_2 C_2}{D_2} = B_1 C_1 D_2 : B_2 C_2 D_1,$$

katero se da predočiti tudi na ta-le način:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \\ \quad \quad \quad C_1 : C_2 \\ \quad \quad \quad D_2 : D_1 \end{array} \right\} \text{pomnoženo.}$$

Tvorjenje sestavljenega sorazmerja iz premo in obratno sorazmernih količin.

Ako je torej določena količna odvisna od več drugih količin, s katerimi je posamič premo, oziroma obratno sorazmerna, je razmerje med dvema številoma prve količine enako sestavljenemu razmerju iz pripadajočih števil ostalih količin. Posamezni deli tega sestavljenega razmerja se tvorijo po prejšnjih pravilih.

Razen navedenih odvisnosti se nahajajo med količinami še različne druge odvisnosti, na katere se tukaj ne bomo ozirali.

Naloge o premo in obratno sorazmernih količinah.

Naloge, v katerih se nahajajo premo ali obratno sorazmerne količine, so sestavljene iz dveh stavkov, iz pogojnega in vprašalnega stavka, ali se vsaj dado razstaviti na taka dva stavka. V pogojnem stavku so določene vse količine, v vprašalnem stavku pa je ena količina nedoločena. Naloge te vrste rešujemo ali s pomočjo sorazmerij ali pa na sklepovni način. V zadnjem slučaju sklepamo vobče iz določene množine na enoto in iz enote na kako drugo določeno množino iste količine. Razrešitev si nekoliko olajšamo, ako napravimo načrt, t.j. kratek podatek dotične naloge v obliki pogojnega in vprašalnega stavka. Primerjaj naslednje naloge!

Naloge.

1. Rokopis ima 162 strani, vsaka po 50 vrst; koliko strani bi imel rokopis, ako bi bilo na vsaki strani po 45 vrst?

162 strani 50 vrst

x „ 45 „

$$a) \quad x = \frac{162 \text{ strani} \times 50}{45} = 180 \text{ strani.}$$

$$b) \quad x : 162 = 50 : 45 \\ x = 180.$$

a) Če razrešiš nalogo na sklepovni način, sklepaš tako-le. Po pogojnem stavku ima rokopis 162 strani; če bi na vsaki strani bila samo 1 vrsta (t.j. 50 krat manj

vrst kakor v pogojnem stavku), bi moral rokopis imeti 50 krat toliko strani kakor v pogojnem stavku. Po vprašalnem stavku pa je na vsaki strani 45 vrst (t. j. 45 krat toliko kakor v prejšnjem slučaju), zato bo moral rokopis imeti 45. del prejšnjih strani. Med sklepom nakažeš vsako množenje, oziroma deljenje. Ker ima nakazani rezultat obliko ulomljenega števila, smeš po en faktor v števcu in imenovalcu deliti s skupno mero.

b) Če hočeš nalogo razrešiti s pomočjo sorazmerja, je treba najprej določiti, kako sta količini odvisni druga od druge. Čim več vrst se nahaja na vsaki strani rokopisa, tem manj strani ima rokopis; količini sta torej obratno sorazmerni. Po zgoraj navedenem pravilu stвориš sorazmerje, katerega je treba razrešiti.

2. Voznik pelje 14 stotov blaga za $10 \cdot 8 \text{ K } 7 \text{ km}$ daleč; kako daleč bo peljal $17\frac{1}{2}$ stota za $16\frac{1}{5} \text{ K}$?

$$\begin{array}{ccccccc} 14 \text{ stotov} & . . . & 10 \cdot 8 \text{ K} & . . . & 7 \text{ km} \\ 17\frac{1}{2} \text{ „} & . . . & 16\frac{1}{5} \text{ „} & . . . & x \text{ „} \end{array}$$

$$a) \quad x = \frac{7 \text{ km} \times 14 \times 16\frac{1}{5}}{10 \cdot 8 \times 17\frac{1}{2}} = \frac{7 \times 14 \times 81 \times 2}{10 \cdot 8 \times 35 \times 5} = 8 \cdot 4 \text{ km.}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} x : 7 = 14 : 17\frac{1}{2} \\ 16\frac{1}{5} : 10 \cdot 8 \end{array} \right\}$$

$$x = 8 \cdot 4.$$

a) Sklepaš zaporedoma najprej na enoto pri vsaki količini pogojnega stavka in potem na tiste množine, ki se nahajajo v vprašalnem stavku. Voznik pelje blago 7 km daleč, 1 stot blaga bi peljal 14 krat tako daleč; za 1 K bi peljal blago le $10 \cdot 8$. del prejšnje daljave. $17\frac{1}{2}$ stota blaga bo peljal $17\frac{1}{2}$. del prejšnje daljave; za $16\frac{1}{5} \text{ K}$ bo peljal blago $16\frac{1}{5}$ krat tako daleč kakor poprej. — V nakazanem rezultatu se nahajajo dvojni ulomki. Te ulomke odpraviš, ako prestaviš vsak imenovalec, ki se nahaja v glavnem števcu, kakor faktor v glavni imenovalec, vsak imenovalec pa, ki se nahaja v glavnem imenovalcu, kakor faktor v glavni števec; kajti ulomek se ne izpremeni, ako pomnožiš njegov števec in imenovalec z enim in istim številom.

b) Čim več je blaga, tem manjšo daljavo se pelje blago za isti denar; prva in tretja količina sta torej obratno sorazmerni. Čim več se plača voznine, tem dalje se pelje isto blago; druga in tretja količina sta premo sorazmerni. Sestavljeno sorazmerje stвориš po zgoraj navedenih pravilih.

3. Koliko časa moraš 1863 K kapitala po 5% izposoditi, da dobiš toliko obresti, kakor jih da 3450 K po 4½% v 9 mesecih?

$$\begin{array}{rcl}
 3450 \text{ K kapitala} & \dots & 4\frac{1}{2}\% \dots \text{v 9 mesecih} \\
 1863 \text{ " " } & \dots & 5\% \dots \text{v } x \text{ " } \\
 \hline
 & & x : 9 = 3450 : 1863 \quad \left. \begin{array}{l} \\ 4\frac{1}{2} : 5 \end{array} \right\} \\
 & & x = 15.
 \end{array}$$

Čim manjši je kapital, tem več časa mora ležati, da nese iste obresti. Čim manjši so procenti, tem več časa mora ležati kapital, da nese iste obresti.

4. Koliko obresti da kapital k naložen po $p\%$ a) v l letih, b) v m mesecih, c) v d dnevih?

$$\begin{array}{rcl}
 \text{a) } 100 \text{ K kapitala} & \dots & \text{v 1 letu} \dots p \text{ kron obresti} \\
 k \text{ " " } & \dots & \text{v } l \text{ letih} \dots o \text{ " " } \\
 \hline
 & & o = \frac{kpl}{100}, \text{ t. j.}
 \end{array}$$

Obresti za leta izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in leti ter deliš produkt s 100.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{b) } 100 \text{ K kapitala} & \dots & \text{v 12 mesecih} \dots p \text{ kron obresti} \\
 k \text{ " " } & \dots & \text{" } m \text{ " } \dots o \text{ " " } \\
 \hline
 & & o = \frac{kpm}{1200}, \text{ t. j.}
 \end{array}$$

Obresti za mesece izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in meseci ter deliš produkt s 1200.

c) 100 K kapitala . . . v 360 dneh . . . p kron obresti
 k „ „ . . . „ d „ . . . o „ „

$$o = \frac{kpd}{36000}, \text{ t. j.}$$

Obresti za dneve izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in dnevi ter deliš produkt s 36000.

5. A , B in C so popravljali okrajno cesto in sicer je pošiljal A po 4 delavce 6 dni, B po 3 delavce 9 dni in C po 4 delavce 8 dni; za to delo dobijo skupaj 207.5 K plačila. Koliko dobi vsak?

Zasluzek se mora med A , B in C razdeliti po razmerju delavcev in po razmerju časa; torej je

$$\begin{array}{r} x:y:z = 4:3:4 \\ \quad \quad \quad 6:9:8 \\ \hline x:y:z = 24:27:32. \end{array}$$

Po pravilih, ki veljajo o zaporednem sorazmerju, najdeš

$$x = 60, y = 67.5, z = 80.$$

IV. Enačbe prve stopnje.

§ 28. Občna pojasnila in urejevanje enačb.

Enačba je izenačena dvojica številnih izrazov, ki sta enake vrednosti. Izenačena izraza se imenujeta enačbena dela (enačbeni strani). Vsak teh delov utegne biti sestavljen iz členov, ki so spojeni med seboj z znakom $+$ ali $-$.

Enačba, v kateri izenačimo številni izraz s samim seboj ali s kako pretvorbo tega izraza, se imenuje istostna ali identična enačba. N. pr. $a + b = a + b$, ali $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Ako postavimo v identični enačbi namesto občnega števila katerokoli posebno število,

Enačba.
Enačbena dela.
Enačbeni členi.

Istostna enačba
= identische
Gleichung.

imata enačbena dela vsakokrat enaki vrednosti. Identični enačbi ustreza (zadostuje) torej vsako posebno število.

Določilna enačba
= Bestimmungs-
gleichung.

Enačba, kateri ne ustreza vsako, ampak le določena števila, se zove določilna enačba. Tako n. pr. zadostuje enačbi $4x + 7 = 19$ število 3 in nobeno drugo; enačbi $x^2 - 4 = 0$ pa zadostujeta števili $+2$ in -2 . V naslednjem se hočemo pečati le z določilnimi enačbami.

Enačbeni koren.
Enačbo razrešiti.

Tisto število (oziroma številni izraz), ki ustreza določilni enačbi, se imenuje enačbeni koren. Enačbi določiti koren, se pravi enačbo razrešiti.

Znanke in ne-
znanke v določil-
nih enačbah.

V določilnih enačbah ločimo znane in neznane količine. Znane količine (znanke) zaznamujemo s posebnimi števili ali pa s prvimi črkami abecede, neznane količine (neznanke) pa z zadnjimi črkami x, y, z, u, v . Ako se nahaja v enačbi več občnih števil, smatramo včasih zdaj to, zdaj drugo občno število za neznanko. To se zgodi posebno pri obrazcih, t. j. pri enačbah, s katerimi izražamo izreke in pravila, po katerih se določuje n. pr. likom obseg in ploščina, telesom površje in prostornina i. t. d.

Razvrstitev
enačb po številu
neznank.
Osnovne resnice
o pretvarjanju
enačb.

Po številu neznank, ki se nahajajo v enačbi, ločimo enačbe z eno, dvema, tremi ... neznankami.

Iz matematičnih osnovnih resnic sledi:

a) Ako prišteješ, oziroma odšteješ enakim številnim izrazom enaka števila, najdeš enake izraze.

b) Ako množiš, oziroma deliš enake številne izraze z enakimi števili, najdeš enake izraze.

S pomočjo teh izrekov se da vsaki enačbi izpremeniti oblika. Važne so tiste izpremembe, po katerih postane oblika enostavna. Na take pretvoritve se hočemo tukaj ozirati.

Enačbo urediti =
eine Gleichung
ordnen.

Enačbo urediti se pravi, enačbi dati kolikor mogoče enostavno obliko. Iz zgoraj navedenega in iz razrešenih nalog v §§ 7., 10. in 18. izvajamo za urejevanje enačb sledeča pravila:

1. Izvrši računske načine, katere nakazujejo oklepaji!

2. Odpravi ulomke, t. j. pomnoži vse enačbene člene z najmanjšim skupnim imenovalcem dotičnih ulomkov!

3. Prestavi vse člene desnega enačbenega dela v levi del ter skrči in uredi člene v tem delu po padajočih potencah z ozirom na neznanko! Ako prestaviš člen iz enega enačbenega dela v drugega, mu moraš izpremeniti predznak. Dva člena v različnih enačbenih delih se uničujeta, ako se ujemata v predznaki in številnih vrednostih.

4. Deli vse enačbene člene s koeficientom neznanke v najvišji potenci! Vobče smemo reči, da smeš vse enačbene člene deliti z njih skupno mero, če se v tej skupni meri ne nahaja neznanka sama.

Urejene enačbe z eno neznanko imajo torej takšne-le oblike:

$$x + a = 0; \quad x^2 + ax + b = 0; \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0; \\ \text{i. t. d.}$$

Če ima enačba dve ali več neznank, smatramo jo za urejeno, če ima obliko kakor n. pr.

$$ax + by = c, \quad ax^2 + by^2 + cxy + dx + cy = f, \quad \text{i. t. d.,}$$

kjer pomenijo $a, b, c \dots$ cela števila.

Enačbe, ki se dajo pretvoriti na eno izmed zgoraj navedenih oblik, se imenujejo algebrske; vse druge enačbe pa so transcendentne.

Največji potenčni eksponent, katerega ima neznanka urejene enačbe, ali če je več neznank, največja vsota potenčnih eksponentov, katere imajo neznanke urejene enačbe v enem in istem členu, določa stopnjo dotične enačbe. Enačbe kakor n. pr. $x + a = 0$, $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$ i. t. d. so enačbe prve stopnje.

Algebrske in transcendentne enačbe = algebraische und transzendente Gleichungen.

Stopnja določilne enačbe = der Grad der Bestimmungsgleichung.

§ 29. Razreševanje enačb prve stopnje.

I. Urejena enačba prve stopnje z eno neznanko ima obliko $x + a = 0$. Iz tega sledi $x = -a$. Ker pomeni izraz $-a$ neko določeno število, ima torej enačba prve stopnje z eno neznanko samo en koren.

Kako se razrešuje enačbe prve stopnje z eno neznanko.

Iz nalog in pojasnil v §§ 7., 10. in 18. posnamemo za razreševanje enačb prve stopnje z eno neznanko ta-le pravila:

1. Izvrši računske načine, katere naka-
zujejo oklepaji!

2. Odpravi ulomke!

3. Prestavi člene z neznanko v en enač-
beni del in znana števila v drugi del ter skrči
istoimenske izraze kolikor mogoče!

4. Deli oba enačbena dela s koeficientom
neznanke!

Preizkus.

Preizkus napraviš, ako zameniš v določeni enačbi
neznanko z najdenim korenem ter izračunaš vrednosti
prvega in drugega dela. Če se ujemata te vrednosti, si prav
razrešil enačbo.

II. Urejena enačba prve stopnje z dvema neznankama
ima obliko

$$ax + by = c.$$

Ako poiščeš iz te enačbe vrednost za x , oziroma
za y , najdeš

$$x = \frac{c - by}{a} \quad \text{in} \quad y = \frac{c - ax}{b},$$

t. j. vsaki posebni številni vrednosti za y (oziroma za x)
pripada določena vrednost za x (oziroma za y). Enačba
prve stopnje z dvema neznankama ima torej brez števila
razrešitev.

Iztrebiti = eli-
minieren.

Ako imamo dve enačbi prve stopnje z dvema ne-
znankama, ima sicer vsaka enačba za-se brez števila raz-
rešitev, obe enačbi skupaj pa le eno razrešitev; zakaj iz
določenih enačb se da ena neznanka iztrebiti, t. j. iz
določenih enačb se da izvesti nova enačba, ki ima le eno
neznanko. Ako razrešiš to novo enačbo, najdeš koren ene
neznanke. Drugi neznanki določiš koren, ako zameniš v
eni izmed določenih enačb dotično neznanko z najdenim
korenem ter razrešiš to enačbo.

Iz določenih enačb utegneš eno neznanko iztrebiti
na štiri načine.

a) Primerjalni način. Razreši obe enačbi z ozirom na eno in isto neznanko ter izenači dobljeni vrednosti! N. pr.

Primerjalni način
= die Komparationsmethode.

$$2x + 5y = 26$$

$$3x - 2y = 1$$

$$x = \frac{26 - 5y}{2},$$

$$x = \frac{1 + 2y}{3},$$

$$\frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3}$$

$$78 - 15y = 2 + 4y$$

$$-19y = -76$$

$$y = 4.$$

$$x = \frac{1 + 8}{3} = 3.$$

b) Zamenjalni način. Določi eni neznanki vrednost iz ene enačbe ter postavi to vrednost v drugo enačbo namesto dotične neznanke! N. pr.

Zamenjalni način
= die Substitutionsmethode.

$$x + 2y = 8$$

$$6x - 5y = 14$$

$$x = 8 - 2y,$$

$$6(8 - 2y) - 5y = 14$$

$$48 - 17y = 14$$

$$-17y = -34$$

$$y = 2.$$

$$x = 8 - 4 = 4.$$

c) Način enakih koeficientov. Napravi eni in isti neznanki enaka koeficienta (najmanjši skupni mnogokratnik prvotnih koeficientov) v obeh enačbah ter seštej pretvorjeni enačbi, oziroma odštej eno od druge! Koeficienta napraviš enaka, ako pomnožiš vsako enačbo s primernim faktorjem. Pretvorjeni enačbi sešteješ, ako sta enaka koeficienta različno zaznamovana, drugače pa odšteješ enačbo od enačbe. N. pr.

Način enakih
koeficientov =
Methode der gleichen
Koeffizienten.

$$7x + 6y = 27 \quad \times 3$$

$$13x + 9y = 48 \quad \times 2$$

$$21x + 18y = 81$$

$$26x + 18y = 96$$

$$-5x = -15$$

$$x = 3.$$

$$21 + 6y = 27$$

$$6y = 6$$

$$y = 1.$$

d) Način nedoločenih koeficientov. Pomnoži eno enačbo z nedoločenim številom m ter jo prištej drugi

Način
nedoločenih
koeficientov =

enačbi! Ako izbereš v novi enačbi vrednost za m tako, da postane koeficient neznanke y enak ničli, dobiš enačbo, iz katere določiš koren za x ; če pa izbereš vrednost za m tako, da postane koeficient neznanke x enak ničli, dobiš enačbo, iz katere določiš koren za y . N. pr. Iz enačb

$$3x + 4y = 24$$

$$5x - 3y = 11$$

najdeš na navedeni način

$$(3m + 5)x + (4m - 3)y = 24m + 11.$$

Ako je $4m - 3 = 0$, torej $m = \frac{3}{4}$, najdeš

$$(3 \cdot \frac{3}{4} + 5)x = 24 \cdot \frac{3}{4} + 11$$

$$\frac{29}{4}x = 29$$

$$x = 4.$$

Če je pa $3m + 5 = 0$, torej $m = -\frac{5}{3}$, najdeš

$$(-\frac{20}{3} - 3)y = -40 + 11$$

$$-\frac{29}{3}y = -29$$

$$y = 3.$$

Kateri izmed navedenih načinov je pri določeni nalogi najprimernejši, spoznaš iz koeficientov, katera imata neznanki v urejenih enačbah. Drugi in tretji način se rabita največkrat.

Včasih moraš obratni vrednosti neznank ali kaki drugi številni zvezi smatrati za neznanki. Tako n. pr. je treba v enačbah

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y-1} = 13 \text{ in } \frac{5}{x} - \frac{2}{y-1} = 4$$

številna izraza $\frac{1}{x} = z$ in $\frac{1}{y-1} = u$ smatrati za neznanki.

Vrednosti teh izrazov najdeš tako-le:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{6}{y-1} &= 26 \\ \frac{15}{x} - \frac{6}{y-1} &= 12 \end{aligned} \right\} \text{sešteto}$$

$$\frac{19}{x} = 38$$

$$\frac{1}{x} = 2.$$

$$4 + \frac{3}{y-1} = 13$$

$$\frac{3}{y-1} = 9$$

$$\frac{1}{y-1} = 3.$$

ali pa:

$$4z + 6u = 26$$

$$15z - 6u = 12$$

$$19z = 38$$

$$z = 2.$$

$$4 + 3u = 13$$

$$3u = 9$$

$$u = 3.$$

Iz vrednosti $\frac{1}{x} = 2$ in $\frac{1}{y-1} = 3$ določiš $x = \frac{1}{2}$ in $y = 1\frac{1}{3}$.

Ako razrešiš enačbi

$$ax + by = c \quad \text{in} \quad a_1x + b_1y = c_1,$$

najdeš korena

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} \quad \text{in} \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Vrednosti za x in y sta določeni števili, ako je imenovalec $ab_1 - a_1b$ različen od ničle. Če je pa $ab_1 - a_1b = 0$, torej $a_1 = \frac{ab_1}{b}$, najdeš, če postaviš vrednost za a_1 v drugo zgoraj navedeno enačbo

$$\frac{ab_1}{b}x + b_1y = c_1$$

$$\text{ali} \quad ax + by = \frac{bc_1}{b_1}.$$

Ako je $\frac{bc_1}{b_1} = c$, je druga navedena enačba identična s prvo (se da izvesti iz prve) in enačbena korena dobita v tem slučaju nedoločeno obliko $\frac{0}{0}$; če je pa izraz $\frac{bc_1}{b_1}$ različen od c , si nasprotujeta navedeni enačbi, ker je namreč $ax + by = c$ in $ax + by = \frac{bc_1}{b_1}$.

Iz navedenega izvajamo:

Dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama imata eno razrešitev (eno skupno dvojico

Kdaj imata dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama samo eno razrešitev.

korenov), če nista odvisni druga od druge ali če si nista nasprotni.

Kako se razrešujejo enačbe prve stopnje s tremi neznankami.

III. Urejena enačba prve stopnje s tremi neznankami ima obliko

$$ax + by + cz = d.$$

Vsaka taka enačba ima brez števila razrešitev; zakaj dvema neznankama smeš izbrati katerakoli korena, tretji neznanki pa izračunaš koren iz določene enačbe. Tudi dve enačbi s tremi neznankami imata brez števila razrešitev, ker smeš eni neznanki izbrati katerikoli koren. Naloga postane popolnoma določena, ako imaš tri enačbe s tremi neznankami. V tem slučaju najdeš vsaki neznanki le en koren, če niso enačbe odvisne, oziroma nasprotno druga drugi.

Tri enačbe s tremi neznankami razrešiš tako-le. Ako iztrebiš iz določenih enačb eno neznanko, dobiš dve novi enačbi z dvema neznankama, katerima najdeš skupno korensko dvojico po prejšnjih pravilih. Ako zameniš potem v eni izmed prvotnih enačb dotični neznanki z najdenima korenoma, dobiš enačbo, iz katere izračunaš koren tretje neznanke. Kar se tiče iztrebljevanja ene neznanke iz treh enačb, služijo nam isti načini, po katerih smo se ravnali pri razreševanju enačb z dvema neznankama. Primerjaj razrešene naloge!

Ako je treba razrešiti štiri ali več enačb s štirimi ali več neznankami, postopaš slično.

Naloge.

$$a) \quad 2x + 3z = 26$$

$$3x - 4y = 6$$

$$5y - 6z = 18$$

$$x = \frac{26 - 3z}{2}$$

$$x = \frac{6 + 4y}{3}$$

$$\frac{6 + 4y}{3} = \frac{26 - 3z}{2}$$

$$12 + 8y = 78 - 9z$$

$$8y + 9z = 66$$

$$8y + 9z = 66 \quad | \times 2$$

$$5y - 6z = 18 \quad | \times 3$$

$$16y + 18z = 132$$

$$15y - 18z = 54$$

$$31y = 186$$

$$y = 6.$$

$$30 - 6z = 18$$

$$z = 2.$$

$$2x + 6 = 26$$

$$x = 10.$$

$$\begin{array}{rcl}
 b) & 3x - 4y + 5z = 10 & -38 + 11z = -5 \\
 & 6x + y + 7z = 29 & 11z = 33 \\
 & x + 5y - 2z = 5 & z = 3. \\
 \hline
 & x = 5 - 5y + 2z & x = 5 - 10 + 6 = 1. \\
 & 3(5 - 5y + 2z) - 4y + 5z = 10 & \\
 & 6(5 - 5y + 2z) + y + 7z = 29 & \\
 \hline
 & -19y + 11z = -5 & \times 19 \\
 & -29y + 19z = -1 & \times 11 \\
 \hline
 & -361y + 209z = -95 & \\
 & -319y + 209z = -11 & \\
 \hline
 & -42y = -84 & \\
 & y = 2. &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 c) & 2x + 3y + 4z = 5 & \times 6 \\
 & 6x - 7y + 8z = 9 & \times 3 \\
 & 10x + 11y + 12z = 13 & \times 2 \\
 \hline
 & 12x + 18y + 24z = 30 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 & 18x - 21y + 24z = 27 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 & 20x + 22y + 24z = 26 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\
 \hline
 & -6x + 39y = 3 & \\
 & -2x - 43y = 1 & \times 3 \\
 \hline
 & -6x + 39y = 3 & \\
 & -6x - 129y = 3 & \\
 \hline
 & 168y = 0 & \\
 & y = 0. &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 & -6x = 3 & \\
 & x = -\frac{1}{2}. & \\
 & -1 + 4z = 5 & \\
 & 4z = 6 & \\
 & z = \frac{3}{2}. &
 \end{array}$$

§ 30. Določanje točkine lege in načrtavanje linearne funkcije.

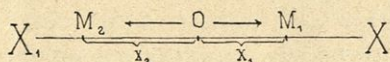
I. V vsaki premici z določeno točko O ločimo z ozirom na to točko dvojno smer: 1. smer od točke O na desno (oziroma navzgor) imenujemo pozitivno smer ter jo zaznamujemo z znakom $+$, 2. smer od točke O na levo (oziroma navzdol) pa zovemo negativno smer in jo zaznamujemo z znakom $-$.

Določanje točkine lege v premici.

Odsečnica in os
odsečnic.

Lego točk $M_1, M_2 \dots$ v premici X_1X (slika I.) z ozirom na točko O določimo popolnoma natanko, ako povemo, kakšno lego imajo daljice $OM_1, OM_2 \dots$ z ozirom

Slika I.



na točko O in kolika so njih merska števila. Daljice $OM_1, OM_2 \dots$ se imenujejo odsečnice ali abscise točk $M_1, M_2 \dots$,

premica X_1X se zove os odsečnic ali abscis in točka O je njih izhodišče ali začetek.

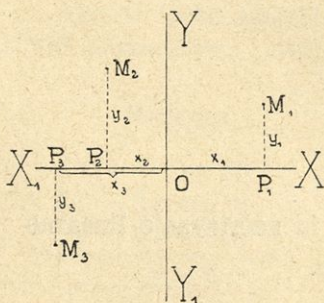
Zaznamovanje
odsečnic.

Abscise točk $M_1, M_2 \dots$ zaznamujemo z $x_1, x_2 \dots$; v vsakem teh znamenj se nahaja znak o legi in mersko število dotične daljice. Tako n. pr. izrazimo z absciso x_1 dolgost daljice OM_1 in da je ta daljica pozitivna; z absciso x_2 izrazimo dolgost daljice OM_2 in da je ta daljica negativna. Razdalja točk M_1 in M_2 je torej $= x_1 - x_2$ ali pa $= x_2 - x_1$; prva razdalja je pozitivna, druga negativna.

Določanje
točkine lege
v ravnini.
Pravokotno so-
redje = das
rechtwinklige
Koordinaten-
system.

Os odsečnic ali
odsečnična os =
die Abszissen-
achse.
Os rednic ali
rednična os =
die Ordinaten-
achse.
Sorednični osi =
die Koordinaten-
achsen.

Slika II.



os odsečnic ali abscis (odsečnična ali abscisna os), premica Y_1Y pa os rednic ali ordinat (rednična ali ordinatna os); obe premici skupaj se imenujeta sorednični ali koordinatni osi. Abscisna os je v smeri od O proti X (na desno) pozitivna, v smeri od O proti X_1 (na levo) pa negativna. Ordinatna os je v smeri od O

proti Y (navzgor) pozitivna, v smeri od O proti Y_1 (navzdol) pa negativna.

Sorednici = die
Koordinaten.

Ako načrtamo od točke M_1 (slika II.) vzporednico z ordinatno osjo do abscisne osi, dobimo daljici M_1P_1 in OP_1 , ki določujeta lego točke M_1 in se zoveta sorednici

ali koordinati točke M_1 . Daljica $OP_1 = x_1$ je odsečnica ali abscisa, daljica $P_1M_1 = y_1$ pa rednica ali ordinata točke M_1 . Da sta x_1 in y_1 koordinati točke M_1 , zapišemo v znakih tako-le $M_1(x_1, y_1)$. Na isti način najdemo in zaznamujemo tudi koordinate točk $M_2, M_3 \dots$, v znakih $M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3) \dots$.

Presečišče O koordinatnih osi se imenuje koordinatno izhodišče ali koordinatni začetek.

Točkini koordinati sta pozitivni, kadar ležita v smeri pozitivnih delov koordinatnih osi (abscisa na desni od koordinatnega začetka, ordinata pa nad abscisno osjo), sicer pa sta negativni. Tako ima n. pr. točka M_1 pozitivno absciso (x_1) in pozitivno ordinato (y_1); točka M_2 ima negativno absciso (x_2) in pozitivno ordinato (y_2); točka M_3 ima negativno absciso (x_3) in negativno ordinato (y_3) i. t. d.

Koordinate znanih ali določenih točk zaznamujemo navadno na ta način, kakor smo zaznamovali koordinate točk $M_1, M_2, M_3 \dots$; koordinate neznanh ali nedoločenih točk M pa zaznamujemo z x in y , v znakih $M(x, y)$.

Določenima koordinatama x_1 in y_1 poiščeš pripadajočo točko M_1 , ako izbereš daljico za enoto dolgotne mere, načrtaš s pomočjo te enote na abscisni osi absciso x_1 ter postaviš v krajišču te abscise pravokotnico, ki odgovarja po legi in merskem številu ordinati y_1 . Istotako najdeš tudi točke $M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3) \dots$.

Vsako točko določujeta popolnoma natanko njeni koordinati; določenima koordinatama pripada samo ena točka.

II. Količine, ki obdržijo med računanjem ali kakem preiskavanjem vedno iste vrednosti, se imenujejo nepremeljive ali stalne količine (stalnice); količine pa, ki izpreminjajo svoje vrednosti, se zovejo premenljive količine (premenljivke). Stalnice in premenljivke se zaznamujejo kakor znanke in neznanke v enačbah. Medsebojno zvezo med stalnicami in premenljivkami izražajo enačbe.

Premenljivke so neodvisne in odvisne. Neodvisna je premenljivka, če smemo za njo postaviti vsakršno vrednost, ki se strinja z bistvom premenljivke; odvisna pa je premenljivka, ako določa njeno vrednost kaka druga

Odsečnica = die Abszisse.
Rednica = die Ordinate.

Koordinatno izhodišče ali koordinatni začetek = der Koordinatensprung oder Koordinatenanfang.

Predznak koordinat.

Kako poiščeš določenima koordinatama pripadajočo točko.

Stalnica = die Konstante.
Premenljivka = die Variable.

Neodvisna in odvisna premenljivka.

Funkcija = die
Funktion.
Linearna funkcija
= lineare Funk-
tion.

premenljivka. Tako n. pr. pripada v enačbi $y = 2x - 3$ vsaki posebni vrednosti premenljivke x popolnoma določena vrednost premenljivke y ; x je torej neodvisna, y pa odvisna premenljivka. Vsaka odvisna premenljivka se zove tudi funkcija, t. j. v navedenem primeru vrednost izraza $2x - 3$, katerega smo zaznamovali z y . Funkcija se imenuje linearna ali prve stopnje, če se nahaja premenljivka le v prvi potenci. Tako je n. pr. številni izraz $ax + b$ ali $y = ax + b$ cela linearna funkcija premenljivke x . Da je y funkcija premenljivke x , zapišemo kratko tako le: $y = f(x)$ ali $y = \varphi(x)$ ali $y = F(x)$ i. t. d.

Razvita in neraz-
vita funkcija =
explizite und
implizite Funk-
tion.

Včasih nima linearna funkcija take razvite oblike kakor $y = ax + b$, ampak se nahaja kakor neznanka v enačbi, iz katere je treba funkcijsko vrednost šele določiti. Tako smemo n. pr. v enačbi $2x + 3y - 5 = 0$ neznanko y smatrati za x -ovo funkcijo. Take funkcije se zovejo nerazvite funkcije.

Funkcijska črta
= die Funktions-
linie.

Vsaka enačba prve stopnje s premenljivkama x in y ima po prejšnjem paragrafu neizrečeno veliko razrešitev; kajti za vsako posebno vrednost neodvisne premenljivke x se da iz enačbe določiti vrednost za odvisno premenljivko y . Dve taki vrednosti za x in y , ki pripadata druga drugi, tvorita dvojico enačbenih korenov. Če si mislimo vsako dvojico enačbenih korenov kakor točkini koordinati z ozirom na določeno soredje, smemo reči, da predočuje vsaka razrešitev dotične enačbe določeno točko. Čim manje se razlikujejo zaporedne vrednosti, ki jih izberemo za x , tem manjša je tudi razlika pripadajočih funkcijskih vrednosti in tem bližje ležijo točke, ki predočujejo te razrešitve. Če preide ena razrešitev nepretrgoma v drugo, najdemo v sliki nepretrgano vrsto točk, ki tvorijo črto (funkcijsko črto). Funkcijska črta je zelo važna, ker s pomočjo te črte najlažje spoznamo in pregledamo funkcijske izpremembe.

Načrtavanje raz-
vite linearne
funkcije.

a) Linearno funkcijo $y = 2x - 3$ predočimo s sliko, ako izberemo za premenljivko x nekatere vrednosti, n. pr.

$$x = \dots - 1, 1, 2, 3 \dots,$$

potem izračunamo pripadajoče funkcijske vrednosti

$$y = \dots - 5, -1, 1, 3 \dots,$$

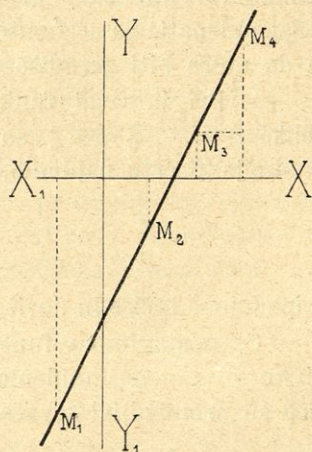
nadalje poiščemo navedenim razrešitvam ustrezajoče točke in sicer tako, kakor smo poprej razložili, in končno narišemo skoz te točke funkcijsko črto (slika III.). Čim več točk se določi, tem lažje in natančneje se da narisati funkcijska črta.

Če postavimo v funkcijo $y = 2x - 3$ za premenljivko $x = -\infty$, najdemo funkcijsko vrednost $y = -\infty$; ako se premenljivka veča in bliža ničli (n. pr. $x = -20, -15, -8 \dots$), se veča tudi funkcija ($y = -43, -33, -19 \dots$); ko je premenljivka $x = 0$, je funkcijska vrednost $= -3$ (to število je drugi člen določene funkcije); ko dobi premenljivka x vrednost, ki je določena po korenu enačbe $2x - 3 = 0$ (torej $x = \frac{3}{2}$), dobi

funkcija vrednost $= 0$; ako se vrednosti premenljivke večajo od $\frac{3}{2}$ naprej (n. pr. $x = 5, 9, 11 \dots$), ostane funkcija pozitivna in dobiva vedno večje in večje vrednosti ($y = 7, 15, 19 \dots$); ko je $x = +\infty$, je tudi $y = +\infty$. Ker smemo po navedenem za premenljivko x postaviti vsako vrednost od $-\infty$ do $+\infty$ in ker ležijo pripadajoče funkcijske vrednosti med istima mejama, raste torej funkcija $2x - 3$ od $-\infty$ do $+\infty$, če raste premenljivka x od $-\infty$ do $+\infty$; ta funkcija dobi vrednost $= 0$ samo v slučaju, ki je določen po korenu enačbe $2x - 3 = 0$. Predznak funkcijskih vrednosti se izpremeni, ko postane funkcija $= 0$. Vse te funkcijske izpremembe vidimo in spoznamo iz slike, če si natančneje ogledamo funkcijsko črto.

Funkcija $y = 2x - 3$ raste enakomerno. Od točke M_1 do M_2 (slika III.) raste premenljivka za 2 enoti, funkcija pa za 4 enote; razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{4}{2} = 2$ (t. j. funkcijski prirastek na enotnem prirastku premenljivke). Od točke M_2 do M_3 , oziroma od točke M_3 do M_4 raste premenljivka po enoti, funkcija pa po 2 enoti; razmerje med funkcijskim

Slika III.



Izpremembe
linearne funkcije.

Kako raste
linearna funkcija.

prirastkom in prirastkom premenljivke je $= 2$. Če si izberemo ponavljajoč druge točke v funkcijski črti, vsakokrat najdemo, da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke $= 2$. (To število se nahaja v funkciji kot koeficient premenljivke.) Iz navedenega smemo torej sklepati, da se funkcijska črta enakomerno vzdiguje in da mora biti zaradi tega prema črta.

Načrtavanje nerazvite linearne funkcije.

b) Pri linearni funkciji $3y + 2x = 5$ ali v razviti obliki $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ so razmere obratne od prejšnjih. Funkcijsko črto najdemo, ako poiščemo n. pr. razrešitvam:

$$x = \dots -5, -2, 4, 10 \dots$$

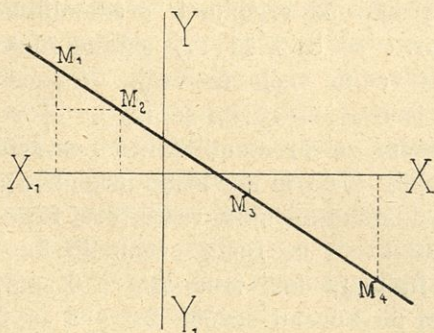
$$y = \dots 5, 3, -1, -5 \dots$$

pripadajoče točke in narišemo skoz te točke črto (slika IV.).

Izpremembe linearne funkcije.

Če postavimo v funkciji $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ za premenljivko $x = -\infty$, najdemo funkcijsko vrednost $y = +\infty$; ako se premenljivka veča in bliža ničli (n. pr. $x = -20, -17, -11 \dots$), se

Slika IV.



manjša funkcija ($y = 15, 13, 9 \dots$); ko je premenljivka $x = 0$, je funkcija $= \frac{5}{3}$ (ta vrednost je drugi člen določene funkcije); ko dobi premenljivka vrednost, ki je določena po korenu enačbe $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$ (torej $x = \frac{5}{2}$) dobi funkcija vrednost $= 0$; ako se

vrednosti premenljivke večajo od $\frac{5}{2}$ naprej ($x = 16, 22, 31 \dots$), ostane funkcija negativna in dobiva vedno manjše in manjše vrednosti ($y = -9, -13, -19 \dots$); ko je $x = +\infty$, je $y = -\infty$. Navedena funkcija se torej manjša od $+\infty$ do $-\infty$, če se veča premenljivka x od $-\infty$ do $+\infty$, in izpremeni svoj predznak v slučaju, ko postane njena vrednost $= 0$.

Kako pojema linearna funkcija.

Funkcija $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ pojema enakomerno. Od točke M_1 do M_2 (slika IV.) raste premenljivka za 3 enote,

funkcija pa se zmanjša za 2 enoti (t. j. negativni prirastek 2 enot); razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$. Od točke M_2 do M_3 , oziroma od točke M_3 do M_4 raste premenljivka po 6 enot, funkcijski zmanjšek pa znaša po 4 enote (t. j. negativni prirastek 4 enot); razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$. Če si izberemo ponavljajoč druge točke v funkcijski črti, vsakokrat najdemo, da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke $= -\frac{2}{3}$. (To število se nahaja v funkciji kot koeficient premenljivke.) Iz navedenega smemo torej sklepati, da pada funkcijska črta enakomerno in da mora biti zaradi tega prema črta.

Iz linearne funkcije v razviti obliki ($y = ax + b$) spoznamo trojno: 1. da funkcija raste (pojema), če je koeficient premenljivke pozitiven (negativen); 2. da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke enako koeficientu premenljivke; 3. da je funkcijska vrednost enaka drugemu funkcijskemu členu, če je premenljivka $x = 0$.

Lastnosti
linearne funkcije.

Dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama imata samo eno skupno razrešitev; zakaj enačbama pripadajoči funkcijski črti (če nista vzporedni) imata samo eno skupno točko. Kako se skupna razrešitev najde s pomočjo računa, izvedeli smo v prejšnjem paragrafu; tukaj hočemo še omeniti, da moremo skupno razrešitev tudi najti s pomočjo slike. Ako poiščemo enačbama ustrezajoči funkcijski črti in narišemo skupni točki teh črt koordinati ter ju izmerimo kolikor mogoče natanko, najdemo (približno) skupno razrešitev obeh določenih enačb. Zakaj je ta razrešitev navadno le približna?

Kako se razrešujejo enačbe prve stopnje s pomočjo funkcijskih črt.

§ 31. Uporaba enačb prve stopnje.

Marsikatero nalogo iz aritmetike, geometrije in vsakdanjega življenja se dá razrešiti s pomočjo določilnih enačb. V to svrho izbereš občno število, n. pr. x , y ali z , kakor znamenje za tisto število, katerega iščeš, ter napraviš s tem številom vse tiste izpremembe, ki se zahtevajo v

Kako se tvorijo enačbe.

nalogi. Na ta način najdeš dva številna izraza, ki sta po pogoju naloge enaka. Ako izenačiš ta izraza, stвориš enačbo, katero je treba razrešiti. Preizkus napraviš, ako preiščeš, ali ustreza najdeni koren vsem pogojem naloge. Včasih se mora najdeni koren (posebno če je izražen z obēnimi števili ali pa negativni) tudi raztolmačiti, t. j. določiti se mora, ali imajo negativni, oziroma ulomljeni koreni v dotičnem slučaju kakšen pomen, ali so brez pomena, in pod katerimi pogoji sploh je naloga mogoča. Kako je treba pri stvarjanju enačbe ravnati v posameznih slučajih, spoznaš iz naslednjih razrešenih nalog.

Naloge.

Razmere med
števili =
Beziehungen
zwischen Zahlen.

1. Pri katerem številu je polovica, tretjina in četrtna skupaj za toliko večja od 163, za kolikor je dotično število, povečano za 1, manjše od 163?

Razrešitev. Število, katerega iščeš, je x ; polovica, tretjina in četrtna tega števila skupaj znaša $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$; za kolikor je ta vsota večja od 163, pove izraz $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 163$; za kolikor je število x , povečano za 1, manjše od 163, pove izraz $163 - (x + 1)$. Zadnja številna izraza sta po pogoju naloge enaka; zato je

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 163 = 163 - (x + 1).$$

Iz te enačbe najdeš $x = 156$. Napravi preizkus!

2. Če povečaš določeno število za 7, najdeš mnogokratnik števila 4; če pa zmanjšaš 74 za dotično število, najdeš istotolik mnogokratnik števila 5. Katero je to število?

Razrešitev. Število, katerega iščeš, je x ; številna izraza $x + 7$ in $74 - x$ sta po pogoju naloge istotolika mnogokratnika števil 4 in 5, v znakih $x + 7 = 4n$ in $74 - x = 5n$. Ako deliš navedeni enačbi drugo z drugo, iztrebiš n in potem najdeš $x = 29$.

3. Določi dve števili z lastnostima: če deliš prvo število z drugim, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 7; če pa deliš vsoto obeh števil z njuno razliko, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 5.

Razrešitev. Števili, kateri iščeš, sta x in y . Delitveni ostanek je treba deliti z divizorjem. Po pogoju naloge je torej

$$\frac{x}{y} = 2 + \frac{7}{y} \text{ in } \frac{x+y}{x-y} = 2 + \frac{5}{x-y}.$$

Iz teh enačb najdeš $x = 31$ in $y = 12$.

4. Izrazi ulomek $\frac{5a+13}{a^2+5a+6}$ kakor vsoto dveh ulomkov!

Razrešitev. Ako razstaviš imenovalec $a^2 + 5a + 6$ določenega ulomka na faktorja, najdeš imenovalca novih ulomkov; števca teh ulomkov sta x in y . Torej je

$$\frac{5a+13}{a^2+5a+6} = \frac{x}{a+2} + \frac{y}{a+3}.$$

Ako odpraviš iz te enačbe ulomke in urediš drugi enačbeni del po isti glavni količini, po kateri je urejen prvi enačbeni del, najdeš pogojno enačbo

$$5a+13 = (x+y)a + (3x+2y),$$

iz katere sledi, da mora biti $x+y=5$ in $3x+2y=13$. Iz zadnjih dveh enačb naješ $x=3$ in $y=2$.

5. Ako odbiješ peterošteviličnemu številu zadnjo številko 4 ter jo postaviš pred ostalo število, najdeš novo število, ki je za 16 večje od dvakratnika prvotnega števila. Katere je to število?

Razrešitev. Peteroštevilično število ima 4 enice, ostali del tega števila pa je x , ki ima mestno vrednost desetice; torej je peteroštevilično število $= 10x + 4$. Če postaviš 4 enice pred x , dobijo 4 mestno vrednost desettisočic, x pa mestno vrednost enic; drugo peteroštevilično število je

torej $= 40000 + x$. Po pogoju naloge je $(40000 + x) - 16 = 2(10x + 4)$. Iz te enačbe najdeš $x = 2104$; prvotno peteroštevilčno število je 21044

6. Četveroštevilčno število ima 3 tisočice in 5 desetic; ako zameniш stotice z enicami, najdeš število, ki je za 396 večje od prvotnega; številčna vsota iz tisočic in desetic je enaka številčni vsoti iz stotic in enic. Katero je to število?

Razrešitev. Četveroštevilčno število ima x enic in y stotic; torej je $= 3000 + 100y + 50 + x$. Če zameniш stotice in enice med seboj, najdeš novo četveroštevilčno število $= 3000 + 100x + 50 + y$. Po pogoju naloge je

$$(3000 + 100x + 50 + y) - 396 = 3000 + 100y + 50 + x$$

in $x + y = 3 + 5$.

Iz teh enačb najdeš $x = 6$ in $y = 2$. Prvotno četveroštevilčno število je $= 3256$.

7. V desnem žepu imam 3krat toliko denarja kakor v levem; če denem 50 K iz desnega žepa v levega, imam v levem žepu 3krat toliko denarja kakor v desnem. Koliko denarja imam v vsakem žepu?

Razrešitev. V desnem žepu imam $3x$, v levem pa x kron; če denem 50 K iz desnega žepa v levega, imam v desnem $(3x - 50)$, v levem pa $(x + 50)$ kron. Ker imam sedaj v levem žepu 3krat toliko denarja kakor v desnem, mora torej tretji del od $(x + 50)$ kron biti enak $(3x - 50)$ kron, v znakih $\frac{x + 50}{3} = 3x - 50$. Iz te enačbe najdeš $x = 25$. V desnem žepu imam 75, v levem 25 kron.

8. A bo čez 10 let $3\frac{1}{2}$ krat toliko star, kakor je bil pred 10 leti; koliko je sedaj star?

Razrešitev. A je sedaj x let star; čez 10 let bo $(x + 10)$ let star; pred 10 leti je bil $(x - 10)$ let star. Po pogoju naloge je $\frac{x + 10}{3\frac{1}{2}} = x - 10$. Iz te enačbe najdeš $x = 18$.

9. Neka družba hoče nabrati v dobrodelen namen določeno vsoto denarja; če da vsaka oseba 8 K, se nabere 50 K več, nego je treba; če pa da vsaka oseba le 5 K, se nabere 25 K premalo. Koliko oseb je v družbi?

Razrešitev. V družbi je x oseb; vsota, katero je treba nabrati, je v prvem slučaju = $(8x - 50)$ kron, v drugem pa je $(5x + 25)$ kron. Ker sta navedena izraza enaka po pogoju naloge, najdeš $x = 25$.

10. Igralec izgubi v prvi igri tretjino svojega denarja in 1 K; v drugi igri izgubi tretjino ostanka in 1 K; v tretji igri izgubi tretjino novega ostanka in 1 K; če mu ostane po tretji igri še 5 K, koliko je imel sprva?

Razrešitev. Igralec ima sprva x kron. V prvi igri izgubi $\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ krono; torej mu ostane $x - \left(\frac{x}{3} + 1\right) = \left(\frac{2x}{3} - 1\right)$ krona. V drugi igri izgubi $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + 1\right]$ krono; torej mu ostane $\left(\frac{2x}{3} - 1\right) - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + 1\right] = \left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right)$ krone. V tretji igri izgubi $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) + 1\right]$ krono; torej mu ostane $\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) + 1\right] = \left(\frac{8x}{27} - \frac{19}{9}\right)$ krone. Zadnji ostanek je po pogoju naloge = 5 K. Iz enačbe $\frac{8x}{27} - \frac{19}{9} = 5$ najdeš $x = 24$.

11. Trgovec proda blago s 14% izgubo za 731 K; a) za koliko je kupil blago? b) za koliko bi moral prodati blago, da bi imel 12% dobička?

Obrestni in odstotni računi =
Zinsen- und
Prozent-
rechnungen.

Razrešitev. Izguba, oziroma dobiček se računa od kupne cene istotako kakor obresti od določenega kapitala.

a) Trgovec je kupil blago za x kron.

Kupna cena — izguba = prodajalna cena, t. j. v znakih $x - \frac{14x}{100} = 731$; iz te enačbe najdeš $x = 850$.

b) Trgovec bi moral prodati blago za y kron.

Kupna cena + dobiček = prodajalna cena, t. j. v znakih $850 + \frac{850 \cdot 12}{100} = y$; iz te enačbe najdeš $y = 952$.

12. Trgovec kupi za 600 K sukna; od tega sukna proda 50 m s 25% dobičkom in ostanek z 8% izgubo ter ima pri prodaji vsega sukna 1 K 50 h dobička. Koliko metrov sukna je kupil?

Razrešitev. Trgovec je kupil x metrov sukna; za 1 meter je plačal $\frac{600}{x}$ K. Prodajal je 50 m sukna z dobičkom, $(x - 50)$ metrov pa v izgubo. Dobček pri 1 m znaša $\frac{\frac{600}{x} \cdot 25}{100} = \frac{150}{x}$ K; dobiček pri 50 m je $= \frac{150}{x} \cdot 50$ K. Izguba pri 1 m znaša $\frac{\frac{600}{x} \cdot 8}{100} = \frac{48}{x}$ K; izguba pri $(x - 50)$ metrih je $= \frac{48}{x} (x - 50)$ K. Po nalognem pogoju je razlika med dobičkom in izgubo $= 1 \cdot 5$ K, t. j. v znakih $\frac{150}{x} \cdot 50 - \frac{48}{x} (x - 50) = 1 \cdot 5$. Iz te enačbe najdeš $x = 200$.

13. Zaradi slabe kupčije se odpusti v tovarni 140 delavcev in ostalim se zniža dnina za 15%; na ta način se doseže, da znaša dnina za vse delavce le polovico prejšnje dnine. Koliko delavcev je bilo sprva v tovarni?

Razrešitev. Sprva je bilo x delavcev v tovarni; vsak delavec je zaslužil na dan y kron; torej je znašala dnina za vse delavce xy kron. Ko so se nekateri delavci odpustili, je znašala dnina za vsakega delavca $y - \frac{15y}{100} = \frac{85y}{100}$ kron, za vse ostale delavce pa $\frac{85y}{100} (x - 140)$ kron. Po nalognem pogoju je zadnja dnina enaka polovici prejšnje dnine, t. j. v znakih $\frac{85y}{100} (x - 140) = \frac{xy}{2}$. Iz te enačbe najdeš $x = 340$.

14. A in B podedujeta skupaj 16000 K; A naloži svojo dedščino za 2% višje nego B in dobi 30 K več letnih obresti ko B . Če bi A naložil svojo dedščino le za 1% višje nego B , bi dobil

5 K manj obresti ko B . Koliko je podedoval vsak in po koliko odstotkov je naložil svoj denar?

Razrešitev. A je podedoval x kron, B pa $(16000 - x)$ kron; A je naložil svoj denar po $y\%$, B pa po $(y - 2)\%$. Razlika med A -evimi in B -evimi letnimi obrestmi je po nalognem pogoju = 30 kron, t. j. v znakih

$$\frac{xy}{100} - \frac{(16000 - x)(y - 2)}{100} = 30.$$

Če bi bil A naložil svoj denar po $(y - 1)\%$, bi bila razlika med B -evimi in A -evimi letnimi obrestmi = 5 kron, v znakih

$$\frac{(16000 - x)(y - 2)}{100} - \frac{x(y - 1)}{100} = 5.$$

Ako sešteješ navedeni enačbi, najdeš $x = 3500$; potem je $y = 2\frac{4}{9}$. A je torej podedoval 3500 K in naložil svoj denar po $2\frac{4}{9}\%$, B pa je podedoval 12500 K in naložil svoj denar po $\frac{4}{9}\%$.

15. A mora plačati čez 7 mesecev 2000 K in čez 11 mesecev 1000 K; plača pa 500 K kakor prvi obrok, 2 meseca pozneje 600 K, 3 mesece pozneje 800 K in 4 mesece pozneje 1100 K. Kdaj je plačal prvi obrok?

Razrešitev. A plača prvi obrok čez x mesecev, drugega čez $(x + 2)$ meseca, tretjega čez $(x + 5)$ in četrtega čez $(x + 9)$ mesecev. Obresti obrokov po $p\%$ v prvem in drugem slučaju morajo biti enake, t. j. v znakih

$$\begin{aligned} \frac{2000 \cdot p \cdot 7}{1200} + \frac{1000 \cdot p \cdot 11}{1200} &= \frac{500 \cdot p \cdot x}{1200} + \frac{600 \cdot p \cdot (x + 2)}{1200} + \\ &+ \frac{800 \cdot p \cdot (x + 5)}{1200} + \frac{1100 \cdot p \cdot (x + 9)}{1200}. \end{aligned}$$

Ta enačba se da okrajšati s $\frac{100 \cdot p}{1200}$; potem najdeš $x = 3 \cdot 3$.

16. A mora plačati čez 1 leto 5000 K; plača pa toliko takoj, da sme ostanek poravnati v

dveh enakih obrokih, in sicer prvi obrok čez 14 mesecev, drugega pa čez 18 mesecev. Koliko plača takoj?

Razrešitev. A plača x kron takoj, $\frac{5000 - x}{2}$ kron čez 14 mesecev in $\frac{5000 - x}{2}$ kron čez 18 mesecev. Kar se plača gotovo, ne da nobenih obresti; torej je

$$\frac{5000 \cdot p \cdot 12}{1200} = \frac{5000 - x}{2} \cdot \frac{p}{1200} \cdot 14 + \frac{5000 - x}{2} \cdot \frac{p}{1200} \cdot 18.$$

Iz te enačbe najdeš $x = 1250$.

17. Menica, ki doteče 24. junija, se proda 1. majnika z 8% diskontom za 913·9 K; na katero vsoto se glasi menica?

Razrešitev. Dolg na menici znaša x kron; od tega dolga se računa diskont (sicer nepravilno) kakor obresti po pravilu za dneve. Dnevi se štejejo po koledarju; dan, katerega se kupi, oziroma proda menica, se ne šteje; od 1. majnika od 24. junija je torej 54 dni. Dolg — diskont = gotovo plačilo, t. j. v znakih $x - \frac{x \cdot 8 \cdot 54}{36000} = 913 \cdot 9$. Iz te enačbe najdeš $x = 925$.

Delitev po do-
ločenih pogojih.
Zmesni računi =
Mischungsrech-
nungen.

18. Razdeli 6300 K med štiri osebe tako, da dobi A tolikokrat po 2 K kakor B po 3 K, C tolikokrat po 5 K kakor B po 4 K in D tolikokrat po 7 K kakor C po 6 K; koliko dobi vsaka oseba?

Razrešitev. Deleži posameznih oseb so zaporedoma x, y, z in u . Po pogojih naloge je $x + y + z + u = 6300$, $x : y = 2 : 3$, $z : y = 5 : 4$ in $u : z = 7 : 6$. Iz teh enačb najdeš $x = 960$, $y = 1440$, $z = 1800$, $u = 2100$. (Zamenjalni način je najpripravnejši.)

19. Trgovec zmeša dve vrsti blaga, kilogram po 1 K 20 h in po 80 h, ter napravi 80 kg po 90 h; koliko mora vzeti blaga od vsake vrste?

Razrešitev. Blago, ki se zmeša, je toliko vredno, kolikor velja zmes. Od prve vrste blaga vzameš x kilogramov, od druge pa $(80 - x)$ kilogramov. Blago prve vrste velja x krat po 120 h, blago druge vrste $(80 - x)$ krat po 80 h, zmes 80 krat po 90 h; torej je $120x + 80(80 - x) = 90 \cdot 80$. Iz te enačbe najdeš $x = 20$. Od prve vrste blaga vzameš 20 kg, od druge pa 60 kg.

20. A zmeša 4 hektolitre 80% in 3 hektolitre 60% špirta ter prilije toliko vode, da postane špirit 50%; koliko vode je prilil?

Razrešitev. Če je n. pr. špirit 80% (80procenten), je v vsakem hektolitr (oziroma litru) 80 delov alkohola. Špirit, ki se zmeša, ima skupaj toliko delov alkohola, kolikor jih je v zmesi; v vodi, ki jo priliješ, ni alkohola. Pri navedeni nalogi se prilije x hektolitrov vode. Iz enačbe $80 \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 50(4 + 3 + x)$, ki pove, koliko delov alkohola je v obojnem špirtu, ki se zmeša, in koliko v zmesi, najdeš $x = 3$.

21. Koliko bakra moraš zlit s 13 kg srebra, ki ima 0.9 čistine, da napraviš srebro s čistino 0.52?

Razrešitev. Ako ima srebro 0.9 čistine, je v vsakem kilogramu (oziroma gramu) 0.9 kg (g) čistega srebra. Kovini, kateri zliješ, imata skupaj toliko čistega srebra, kolikor ga je v zlitini; v bakru, ki ga prideneš, ni čistega srebra. Pri navedeni nalogi vzameš x kilogramov bakra; zlitina tehta $(13 + x)$ kg. Iz enačbe $0.9 \cdot 13 = 0.52(13 + x)$, ki pove, koliko kilogramov čistega srebra je v kovinah, ki ju zliješ, in koliko v zlitini, najdeš $x = 9.5$.

22. Srebrar potrebuje 50 kg srebra po 0.8 čistine. V to svrho zlije 10 kg srebra po 0.85 čistine s srebrom po 0.95 in 0.7 čistine; koliko srebra druge in tretje vrste mu je treba?

Razrešitev. Srebrar vzame x kilogramov srebra druge vrste in $50 - 10 - x = (40 - x)$ kg srebra tretje vrste. Po prejšnjih pojasnilih stвориš enačbo

$$0.8 \cdot 50 = 0.85 \cdot 10 + 0.95x + 0.7(40 - x),$$

iz katere najdeš $x = 14$.

23. Zlata verižica tehta na zraku 196 g, pod vodo pa 12 g manj; koliko zlata in srebra je v verižici, če je specifična teža zlata 19·25 in specifična teža srebra 10·5?

Razrešitev. V verižici je x gramov zlata in y gramov srebra, torej je $x + y = 196$. Ker tehta verižica pod vodo 12 g manj, mora po prirodoslovnem zakonu (Arhimedovem načelu) zavzemati 12 cm^3 prostornine. Vsak kubični centimeter zlata tehta 19·25 g; x gramov zlata zavzema torej toliko kubičnih centimetrov, kolikorkrat se 19·25 g nahaja v x gramih, t. j. $\frac{x}{19\cdot25} cm^3$. Vsak kubični centimeter srebra tehta 10·5 g; y gramov srebra zavzema torej toliko kubičnih centimetrov, kolikorkrat se 10·5 g nahaja v y gramih, t. j. $\frac{y}{10\cdot5} cm^3$. Kovini, ki sestavljata zlato verižico, zavzemata skupaj (približno) toliko prostornine kolikor verižica; zato je $\frac{x}{19\cdot25} + \frac{y}{10\cdot5} = 12$. Iz navedenih enačb najdeš $x = 154$ in $y = 42$.

24. Medninar ima 13 dm^3 rumene medi, ki tehta 105·47 kg; koliko bakra in cinka je v tej zlitini, ako je specifična teža bakra 8·895 in specifična teža cinka 6·862?

Razrešitev. V navedeni zlitini je x kilogramov bakra in y kilogramov cinka. Istotako kakor v prejšnji nalogi stвориš enačbi

$$x + y = 105\cdot47 \text{ in } \frac{x}{8\cdot895} + \frac{y}{6\cdot862} = 13,$$

iz katerih najdeš $x = 71\cdot16$ in $y = 34\cdot31$.

25. Zlatar ima tri zlate palice. Prva palica je sestavljena iz 650 delov zlata, 220 delov srebra in 130 delov bakra, druga palica iz 700 delov zlata, 200 delov srebra in 100 delov bakra; tretja palica iz 800 delov zlata, 150 delov srebra in 50 delov bakra. Koliko delov moraš vzeti od vsake palice, da dobiš zlitino, ki ima 685 delov zlata, 205 delov srebra in 110 delov bakra?

Razrešitev. Vsaka prvih treh palic je sestavljena iz 1000 delov. V 1 delu prve palice se nahaja $\frac{650}{1000} = 0.65$ delov zlata, v 1 delu druge palice je $\frac{700}{1000} = 0.7$ delov zlata, v 1 delu tretje palice je $\frac{800}{1000} = 0.8$ delov zlata. Če vzameš za zlitino od prve palice x delov, od druge palice y delov in od tretje palice z delov, imaš povsem $0.65x + 0.7y + 0.8z$ delov zlata; po pogoju naloge mora ta vsota biti $= 685$ delov zlata, ki se nahaja v zlitini. Na isti način stвориš drugo enačbo za srebro in tretjo enačbo za baker. Potem najdeš $x = 500$, $y = 400$, $z = 100$.

26. Prazen vodnjak se da napolniti po treh cevih; prva cev ga napolni v 10 urah, druga v 12 urah, tretja v 15 urah. V katerem času napolnijo vodnjak vse tri cevi skupaj?

Razrešitev. Vodnjakovo prostornino zaznamujemo s k . Vse tri cevi skupaj napolnijo vodnjak ($= k$) v x urah. V 1 uri napolni prva cev $\frac{k}{10}$, druga $\frac{k}{12}$, tretja $\frac{k}{15}$; v x urah napolni vsaka cev x krat toliko kakor v 1 uri. Torej je $\frac{k}{10} \cdot x + \frac{k}{12} \cdot x + \frac{k}{15} \cdot x = k$. Iz te enačbe najdeš $x = 4$.

27. Delavca A in B dovršita neko delo v 18 dneh, A in C v 12 dneh, B in C v 9 dneh; v katerem času dovršijo isto delo vsi trije delavci skupaj?

Razrešitev. Najprej je treba določiti, v katerem času dovrši vsak delavec sam dotično delo, katero hočemo zaznamovati z d . Delavec A dovrši delo d v x dneh, delavec B v y dneh in delavec C v z dneh; v 1 dnevu dovršijo torej ti delavci $\frac{d}{x}$, $\frac{d}{y}$ in $\frac{d}{z}$. Delavca A in B dovršita v 18 dneh 18krat toliko kakor v 1 dnevu; zato je po nalognem pogoju $\frac{d}{x} \cdot 18 + \frac{d}{y} \cdot 18 = d$. Na isti način stвориš tudi enačbi $\frac{d}{x} \cdot 12 + \frac{d}{z} \cdot 12 = d$ in $\frac{d}{y} \cdot 9 + \frac{d}{z} \cdot 9 = d$. Ako okrajšaš in razrešiš navedene enačbe, najdeš $x = 72$,

$y = 24$ in $z = 14\frac{2}{5}$. — Vsi delavci skupaj dovršijo delo d v t dneh. Istotako kakor pri prejšnji nalogi stвориš enačbo $\frac{d}{72} \cdot t + \frac{d}{24} \cdot t + \frac{d}{14\frac{2}{5}} \cdot t = d$, iz katere najdeš $t = 8$.

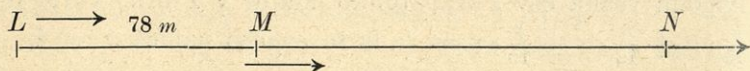
Naloge o premikanju = Bewegungsaufgaben.

Razreševanje nalog o premikanju si jako olajšaš, ako napraviš kratek, pa pregleden načrt položaja. V tem načrtu zaznamuješ in določiš, kje se začneta telesi premikati, kako daleč, kako hitro in koliko časa se premikata. Pot, katero preteče vsako telo v časovni enoti (t. j. v eni sekundi, ali v eni minuti, ali v eni uri i. t. d.), določuje hitrost premikanja. Ako primerjaš poti, kateri pretečeta telesi v določenem času, stвориš enačbo.

28. Dve telesi, ki sta 78 m narazen, pretečeta vsako sekundo oziroma 4 m in $2\frac{1}{2}$ m; kdaj se snideta telesi, ako se začneta pomikati istodobno a) v isto smer, b) v nasprotno smer?

Razrešitev.

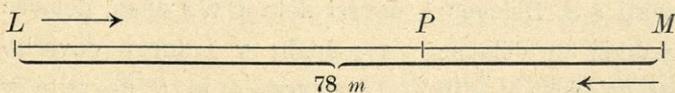
a) Telo A, hitrost: 4 m, čas: x sekund.



Telo B, hitrost: $2\frac{1}{2}$ m, čas: x sekund.

Telo A dohiti telo B v točki N čez x sekund; telo A preteče pot LN, t. j. x krat po 4 m; telo B preteče pot MN, t. j. x krat po $2\frac{1}{2}$ m. Razlika teh poti je po pogoju naloge = 78 m; torej je $4x - 2\frac{1}{2}x = 78$. Iz te enačbe najdeš $x = 52$.

b) Telo A, hitrost: 4 m, čas: y sekund.



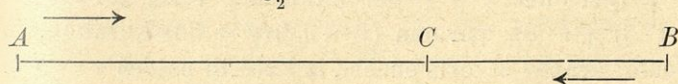
Telo B, hitrost: $2\frac{1}{2}$ m, čas: y sekund.

Telesi se srečata v točki P čez y sekund; telo A preteče pot $LP = 4y$ metrov, telo B pa pot $MP = 2\frac{1}{2}y$ metrov. Po nalognem pogoju je $4y + 2\frac{1}{2}y = 78$; iz te enačbe najdeš $y = 12$.

29. Ob šesti uri gre od kraja A proti kraju B brzovlak, ki porabi za to daljavo $3\frac{1}{2}$ ure; ob sedmi uri gre od kraja B proti A poštni vlak, ki potrebuje za to pot $5\frac{1}{4}$ ure. Kdaj se srečata vlaka?

Razrešitev.

Brzovlak, hitrost: $\frac{AB}{3\frac{1}{2}}$, čas: $(x + 1)$ uro.



Poštni vlak, hitrost: $\frac{AB}{5\frac{1}{4}}$, čas: x ur.

Vlaka se srečata v točki C . Brzovlak preteče pot $AC = \frac{AB}{3\frac{1}{2}}(x + 1)$, poštni vlak pa pot $BC = \frac{AB}{5\frac{1}{4}} \cdot x$. Po nalognem pogoju je $\frac{AB}{3\frac{1}{2}}(x + 1) + \frac{AB}{5\frac{1}{4}}x = AB$; iz te enačbe najdeš $x = 1.5$. Vlaka se srečata ob osmi uri trideseti minuti.

30. Sel ima prehoditi razdaljo od kraja A do kraja B ; ob dvanajsti uri sta si pota, katerega je že prehodil in katerega še ima prehoditi, kakor $2:3$; ko še prehodi 8 km, sta si pota, katerega je že prehodil in katerega še ima prehoditi, kakor $6:5$. Kako daleč je od A do B ?

Razrešitev. Ob dvanajsti uri je sel v točki C ; pot AC je že prehodil, pot BC še ima prehoditi. Po pogoju naloge je $AC:CB = 2:3$. Nekoliko časa pozneje je po pogoju naloge prehodil pot $(AC + 8)$ km, pot $(CB - 8)$ km pa še ima prehoditi; torej je $(AC + 8):(CB - 8) = 6:5$. Iz navedenih sorazmerij najdeš $AC = 22$ km in $CB = 33$ km; pot AB je potem $AC + CB = 55$ km.

31. Kurir prehodi razdaljo od A do B v določenem času; če bi napravil vsako minuto po 3 korake več, bi prehodil dotično razdaljo 8 minut prej; če bi pa napravil vsako minuto po 12 korakov manj, bi prišel v kraj B za 36 minut

pozneje, nego bi moral priti. Koliko korakov napravi kurir vsako minuto in kako daleč je od A do B ? (3 koraki = 2 metra.)

Razrešitev. Kurir napravi vsako minuto po x korakov in prehodi pot od A do B v y minutah; pot AB je torej = xy korakov. Če bi kurir napravil vsako minuto po $x + 3$ (oziroma po $x - 12$) korakov, bi prehodil isto pot v $y - 8$ (oziroma v $y + 36$) minutah; torej je $AB = (x + 3)(y - 8)$, oziroma $(x - 12)(y + 36)$ korakov. Iz navedenih izrazov stвориš enačbi, iz katerih najdeš $x = 132$ in $y = 360$. Pot $AB = 47520$ korakov = 31680 metrov.

32. Kdaj pokrijeta kazalca na uri med šesto in sedmo uro drug drugega? Kdaj tvorita med šesto in sedmo uro pravi kot?

Razrešitev. Kazalo na uri je razdeljeno na 60 enakih delov, ki se imenujejo minutne črte. Hitrejši kazalec preteče v 1 uri vseh 60 minutnih črt, v 1 minuti torej 1 minutno črto; počasnejši kazalec preteče v 1 uri 5 minutnih črt, v 1 minuti torej $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ minutne črte.

a) Ob šesti uri kaže hitrejši kazalec na število 12, počasnejši pa na število 6. Čez x minut pokrijeta kazalca drug drugega; med tem preteče hitrejši kazalec x krat po 1 minutno črto, počasnejši pa x krat po $\frac{1}{12}$ minutne črte. Razlika teh potov znaša toliko minutnih črt, kolikor jih je od števila 12 do števila 6 na urnem kazalu, t. j. 30 minutnih črt. Torej je $x - \frac{x}{12} = 30$; iz te enačbe najdeš $x = 32\frac{8}{11}$. Kazalca pokrijeta drug drugega $32\frac{8}{11}$ minute po šesti uri.

b) Kazalca tvorita y minut po šesti uri pravi kot. Pravi kot obsega 15 minutnih črt na kazalu. Ako prišteješ poti od števila 12 do števila 6 (t. j. 30 minutnim črtam) pot počasnejšega kazalca v y minutah ter odšteješ od te vsote pot hitrejšega kazalca v y minutah, mora razlika znašati 15 minutnih črt, v znakih $(30 + \frac{y}{12}) - y = 15$. Razliko 15 minutnih črt tudi najdeš, ako odšteješ od poti

hitrejšega kazalca v y minutah pot od števila 12 do števila 6 in pot počasnejšega kazalca v y minutah, v znakih $y - \left(30 + \frac{y}{12}\right) = 15$. Iz navedenih enačb najdeš $y = 16\frac{4}{11}$ in $y = 49\frac{1}{11}$. Kazalca tvorita med šesto in sedmo uro torej dvakrat pravi kot, prvokrat $16\frac{4}{11}$ minute in drugokrat $49\frac{1}{11}$ minute po šesti uri.

33. Dve točki se pomičeta po krožnici, ki meri 840 m, v isto smer in se snideta vsakih 35 sekund; če se pa točki pomičeta v nasprotno smer, se srečata vsakih 12 sekund. Kako hitro se pomičeta točki?

Razrešitev. Točka A preteče vsako sekundo x , točka B pa y metrov. V prvem slučaju dohiti točka A točko B ; točka A mora torej preteči vso krožnico in še toliko, kolikor preteče točka B ; razlika teh poti je = dolgosti krožnice, v znakih $35x - 35y = 840$. V drugem slučaju se srečata točki, ko pretečeta skupaj pot 840 m, v znakih $12x + 12y = 840$. Iz teh enačb najdeš $x = 47$ in $y = 23$.

34. Zunanji kot na osnovnici enakokrakega trikotnika in zunanji kot na vrhu sta si kakor 29 : 32; kolik je notranji kot na osnovnici?

Geometrijske
naloge.

Razrešitev. Zunanji kot na osnovnici je sokot notranjega kota β na osnovnici, zunanji kot na vrhu pa je dvakrat tolik kakor notranji kot na osnovnici. Po nalogem pogoju je torej $(180^\circ - \beta) : 2\beta = 29 : 32$; iz tega sorazmerja najdeš $\beta = 64^\circ$.

35. Obsrediščna kota dveh enakih krogovih izsekov, katerima znašata polumera 20 cm in 16 cm, se razlikujeta za 27° ; kolik je manjši teh kotov?

Razrešitev. Če sta dva izseka različnih krogov plosčinsko enaka, sta loka (oziroma pripadajoča obsrediščna kota) obratno sorazmerna s polumeroma; kajti iz pogoja $\frac{l}{r} = \frac{l_1 r_1}{2}$ sledi $l : l_1 = r_1 : r$.

Pri navedeni nalogi je manjši izmed obsrediščnih kotov α in leži v krogu z večjim polumerom. Ker sta si

izsekova ploščina in krožnina kakor pripadajoča obsrediščna kota, veljajo obrazci $p : r^2\pi = (a + 27^\circ) : 360^\circ$ in $p : R^2\pi = a : 360^\circ$. Ako izenačiš vrednosti za p , najdeš $a = 48^\circ$.

36. Izmed dveh pravilnih mnogokotnikov ima prvi dvakrat toliko stranic kakor drugi in notranji kot prvega mnogokotnika je za 10° večji nego notranji kot drugega mnogokotnika. Koliko stranic ima drugi mnogokotnik?

Razrešitev. Notranji kot pravilnega mnogokotnika je določen po obrazcu $\frac{n \cdot 2R - 4R}{n}$, kjer pomeni n število stranic in R pravi kot. Pri navedeni nalogi ima prvi mnogokotnik $2n$, drugi pa n stranic. $n = 18$.

37. Višina pravokotnega trikotnika je za 2.7 dm večja ko manjši hipotenuzni odsek in za 3.2 dm manjša ko večji hipotenuzni odsek; kolika je hipotenuza?

Razrešitev. Hipotenuza je x , njen manjši odsek je y , njen večji odsek pa $x - y$. Po pogoju naloge je $v - 2.7 = y$ in $v + 3.2 = x - y$, kjer pomeni v hipotenuzi pripadajočo višino. S pomočjo geometrijskega izreka $v^2 = y(x - y)$ najdeš $v = 17.28$ in $x = 35.06$.

38. Dva pravokotna trikotnika imata enaki hipotenuzi; ena kateta prvega trikotnika je za 4 m manjša, druga pa za 8 m večja, nego sta kateti drugega trikotnika. Koliki sta kateti prvega trikotnika, ki je za 34 m^2 večji od drugega?

Razrešitev. Kateti prvega trikotnika sta x in y , drugega pa $x + 4$ in $y - 8$. Po pogoju naloge sta kvadrata nad katetama prvega trikotnika skupaj enaka vsoti kvadratov nad katetama drugega trikotnika, v znakih $x^2 + y^2 = (x + 4)^2 + (y - 8)^2$; gledé na trikotnikovi ploščini je $\frac{xy}{2} - 34 = \frac{(x + 4)(y - 8)}{2}$. Iz navedenih enačb najdeš $x = 9\frac{1}{3}$ in $y = 9\frac{2}{3}$.

V. Računski načini tretje stopnje.

A. Vzmnoževanje.

§ 32. Pojasnila o vzmnoževanju.

Ako postavimo določeno število a m krat kot faktor, pravimo, da vzmnožujemo ali potencujemo število a s številom m , v znakih

$$a^m = a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat}) = A.$$

Število a , ki se mora večkrat postaviti kot faktor, se imenuje osnovno število ali podloga; število m , ki pove, kolikokrat je treba podlogo postaviti kot faktor, se zove potenčni eksponent; število A , katerega najdemo pri vzmnoževanju, je vzmnož ali potenca. Vzmnoži ali potence so torej produkti enakih faktorjev. Potence posebnih števil izračunaš, ako pomnožiš podlogo ponavljajoč s samim seboj.

Z ozirom na zgoraj navedeno pojasnilo o vzmnoževanju smemo reči, da podloga (a) utegne biti ali celo ali ulomljeno, absolutno ali algebrasko število, potenčni eksponent (m) pa mora biti absolutno celo število, ki je večje od 1.

Po pojasnilu o vzmnoževanju in z ozirom na pravila pri množenju najdemo:

$$a) 1^m = 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots = 1.$$

Vsaka potenca od 1 je 1.

$$b) 0^m = 0 \cdot 0 \cdot 0 \dots = 0.$$

Vsaka potenca od 0 je 0.

$$c) (+a)^m = (+a) \cdot (+a) \cdot (+a) \dots = +a^m.$$

Vsaka potenca pozitivne podloge je pozitivna.

$$d) (-a)^{2m} = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \dots = +a^{2m}.$$

Soda potenca negativne podloge je pozitivna.

Vzmnožiti,
vzmnoževati =
= potenzieren.
Osnovno število
= die Grundzahl.
Podloga = die
Basis.
Potenčni eksponent
= der Potenzexponent.
Vzmnož = die
Potenz.

Kakšnost podloge in potenčnega eksponenta.

Potence s podlogo 1 in 0 in potence algebraskih števil.

$$e) (-a)^{2m-1} = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \dots = -a^{2m-1}.$$

Liha potenca negativne podloge je negativna.

§ 33. Računski zakoni o potencah.

Seštevanje in odštevanje potenc.

I. Istoimenske potence (potence, ki imajo enake podloge in enake eksponente) seštevaj in odštevaj po istih pravilih, po katerih se istoimenski izrazi sploh seštevajo in odštevajo. N. pr.

$$a^m + 7a^m = 8a^m; \quad ax^m - bx^m = (a - b)x^m.$$

Kako množiš potence z enakimi podlogami.

II. Po pojasnilu o vzmoževanju je:

$a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat}) \cdot a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ krat})$, t. j. podlogo a je treba $(m + n)$ krat postaviti kot faktor; torej je

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Potence iste podloge množiš, ako pridržiš skupno podlogo ter sešteješ potenčne eksponente. N. pr.

$$(2a - b)^{4x-3y} \cdot (2a - b)^{5y-3x} = (2a - b)^{x+2y}.$$

Ako čitaš enačbo $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ v obratnem redu, najdeš:

Kako vzmožiš z vsoto.

Število vzmožiš z vsoto, ako ga vzmožiš z vsakim sumandom ter pomnožiš dobljene potence. N. pr.

$$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x.$$

Kako deliš potence z enakimi podlogami.

III. Po pojasnilu o potencah je:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat})}{a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ krat})}.$$

Ako je $m > n$, se dasta dividend in divizor navedenega kvocijenta n krat zaporedoma deliti s številom a ; potem stoji število a še $(m - n)$ krat kakor faktor. Torej je

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Potence iste podloge deliš, ako skupno podlogo vzmnožiš z diferenco iz dividendovega in divizorjevega eksponenta. N. pr.

$$(a-1)^{n+3} : (1-a)^3 = (a-1)^{n+3} : [-(a-1)]^3 = \\ = (a-1)^{n+3} : -(a-1)^3 = -(a-1)^n.$$

Obratno je:

Število vzmnožiš z razliko, ako vzmnožiš število z minuendom in subtrahendom ter deliš prvo potenco z drugo. N. pr.

Kako vzmnožiš z razliko.

$$3^{2x-3} = 3^{2x} : 3^3 = \frac{1}{27} \cdot 3^{2x}.$$

IV. Po pojasnilu o vzmnoževanju je:

Kako vzmnožiš produkt.

$$(ab)^m = ab \cdot ab \cdot ab \dots (m \text{ krat}),$$

ali če zameniš faktorje med seboj, je

$$(ab)^m = a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat}) \cdot b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ krat});$$

torej $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Produkt vzmnožiš s številom, ako vzmnožiš vsak faktor z dotičnim številom. N. pr.

$$(2ab)^2 \cdot (3ax)^3 = 4a^2b^2 \cdot 27a^3x^3 = 108a^5b^2x^3.$$

Obratno je:

Potence enakih eksponentov množiš, ako vzmnožiš produkt njih podlog s skupnim eksponentom. N. pr.

Kako množiš potence z enakimi eksponenti.

$$(2a+3b)^4 \cdot (2a-3b)^4 = (4a^2-9b^2)^4.$$

V. Po pojasnilu o potencah je:

Kako vzmnožiš kvocijent, oziroma ulomek.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots (m \text{ krat}),$$

ali če izvršiš nakazano množenje, je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat})}{b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ krat})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Kvocijent (ulomek) vzmnožiš s številom, ako vzmnožiš dividend (števec) in divizor (imenovalec) z dotičnim številom. N. pr.

$$\left(\frac{3ax}{4by}\right)^2 \cdot \left(\frac{2bx}{3ay}\right)^3 = \frac{9a^2x^2}{16b^2y^2} \cdot \frac{8b^3x^3}{27a^3y^3} = \frac{bx^5}{6ay^5}.$$

Obratno je:

Kako deliš potence z enakimi eksponenti.

Potence enakih eksponentov deliš, ako vzmnožiš kvocijent njih podlog s skupnim eksponentom. N. pr.

$$(25a^2 - 16b^2)^5 : (5a - 4b)^5 = \left(\frac{25a^2 - 16b^2}{5a - 4b}\right)^5 = (5a + 4b)^5.$$

Kako vzmnožiš potenco.

VI. Po pojasnilu o vzmnoževanju in z ozirom na računski zakon pod II. je:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots (n\text{krat}) = a^{m+m+m+\dots (n\text{krat})} = a^{mn}.$$

Potenco vzmnožiš s številom, ako pomnožiš potenčni eksponent z dotičnim številom. N. pr.

$$\begin{aligned} & (-a^4)^3 \cdot (-a^2)^6 + (-a^5)^3 \cdot (-a^3)^3 = \\ & = (-a^{12}) \cdot a^{12} + (-a^{15}) \cdot (-a^9) = -a^{24} + a^{24} = 0. \end{aligned}$$

Obratno je:

Kako vzmnožiš s produktom.

Število vzmnožiš s produktom, ako vzmnožiš dotično število z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem. N. pr.

$$2^{10} = (2^5)^2 = 32^2 = 1024.$$

Pri vzmnoževanju potenc smeš potenčne eksponente zameniti med seboj; zakaj

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Razširjanje prvotnega pojasnila o potencah.

VII. Po prvotnem pojasnilu o potencah nimajo izrazi a^1 , a^0 in a^{-x} nobenega pravega pomena; zakaj število a enkrat, oziroma ničkrat ali minus x krat postaviti kot faktor, je brez zmisla. Pomen teh izrazov se da določiti s pomočjo računskih zakonov, ki sta izražena v enačbi $a^{m-n} = a^m : a^n$, če smatramo namreč ta zakona veljavna tudi za slučaje $m - n = 1$, $m - n = 0$ in $m - n = -x$. To pa smemo storiti, ker kvocijent a^{m-n} , pomnožen z divizorjem a^n , da vsakokrat dividend a^m za produkt.

Pomen potence a^1 .

Pomen izraza a^1 določiš tako-le:

$$a^1 = a^{m+1-m} = \frac{a^{m+1}}{a^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m+1)\text{krat}}{a \cdot a \cdot a \dots (m\text{krat})}.$$

Dividend in divizor navedenega kvocijenta se dasta m krat zaporedoma deliti s številom a ; če to storiš, dobiš rezultat a . Torej je $a^1 = a$.

Prva potenca vsakega števila ima isto vrednost, katero ima dotično število.

Z ozirom na postanek 0 je $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$. Pomen potence a^0 .

Ako vzmnožiš kako število z 0, je vzmnož vselej enaka 1. Pomen potence z negativnim eksponentom.

Z ozirom na postanek negativnih števil je

$$a^{-x} = a^{m-(m+x)} = \frac{a^m}{a^{m+x}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^x}.$$

Dividend in divizor navedenega kvocijenta se dasta deliti s številom a^m . Torej je $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Vsaka potenca z negativnim eksponentom je enaka obratni vrednosti dotične potence s pozitivnim eksponentom.

Ker je $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, smemo torej reči:

Določeno število vzmnožiš z negativnim številom, ako vzmnožiš obratno vrednost podloge z dotičnim pozitivnim številom. N. pr. Kako vzmnožiš z negativnim celim številom.

$$0.75^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}.$$

Iz enačbe $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ sledi $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Z ozirom na te enačbi smeš torej vsako potenco, ki je faktor celega števca, prestaviti kakor faktor v imenovalce, in vsako potenco, ki je faktor celega imenovalca, prestaviti kakor faktor v števec, ako izpremeniš eksponentov predznak. N. pr.

$$\frac{2^{-1} a^{-2} b^3}{3^{-1} x^2 y^{-3}} = \frac{3b^3 y^3}{2a^2 x^2}.$$

S pomočjo enačb $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ in $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ moreš vsako potenco izraziti kakor potenco s pozitivnim, oziroma negativnim eksponentom. Ker se dajo torej potence z negativnimi eksponenti smatrati kakor neka pretvorba potenc s pozitivnimi eksponenti, je jasno, da se računa s potencami, Kako računaš s potencami negativnih eksponentov.

ki imajo negativne eksponente, po istih računskih zakonih, kateri veljajo za potence s pozitivnimi eksponenti. N. pr.

$$\begin{aligned}(a^{-1}b^{-3})^3 \cdot (a^2b^{-4})^{-2} : (-a^{-4}b^{-5})^4 &= \\ &= a^{-3}b^{-9} \cdot a^{-4}b^8 : a^{-16}b^{-20} = \\ &= a^{-7}b^{-1} : a^{-16}b^{-20} = a^9b^{19}.\end{aligned}$$

§ 34. Kvadrat in kub.

Kako kvadrueš
dvočlenik.

I. Druga potenca se imenuje kvadrat. Določeno število povišati na drugo potenco se pravi kvadrovati.

Kvadrat binoma izračunaš po obrazcu

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

katerega najdeš, ako pomnožiš binom $a + b$ s samim seboj. Navedeni obrazec velja tudi za binom $a - b$ (algebrajsko vsoto); zakaj

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= [a + (-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Kvadrat vsakega binoma je torej algebrajska vsota iz kvadrata prvega člena, iz dvojnega produkta obeh členov in iz kvadrata drugega člena.

Kako kvadrueš
mногоčlenik.

Kvadrat mnogočlenskega izraza najdeš, ako porabiš pravilo za binom ponavljajoč. N. pr. Kvadrat mnogočlenika $a + b + c$ izračunaš, ako smatraš izraz $a + b$ za določeno število in potem računaš po pravilu za binom, v znakih

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + \underbrace{2ab + b^2} + \underbrace{2(a + b)c + c^2}.\end{aligned}$$

Istotako postopaš tudi pri kvadrovanju mnogočlenika $a + b + c + d$ ali kateregakoli drugega mnogočlenika, v znakih

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = \\ &= a^2 + \underbrace{2ab + b^2} + \underbrace{2(a + b)c + c^2} + \underbrace{2(a + b + c)d + d^2}.\end{aligned}$$

Iz navedenega posnamemo za kvadrovanje mnogočlenskih izrazov to-le pravilo:

1. Od prvega člena dobiš kvadrat.

2. Od drugega in vsakega naslednjega člena dobiš dve sestavini in sicer dvojno algebrasko vsoto predstojećih členov, pomnoženo z dotičnim členom, in kvadrat tega člena.

3. Navedene sestavine sešteješ algebrasko.

Ker je $2ab + b^2 = (2a + b)b$,

$$2(a + b)c + c^2 = [2(a + b) + c]c, \text{ i. t. d.,}$$

združiš pri kvadrovanju mnogočlenika sestavine drugega in vsakega naslednjega člena v eno sestavino, ako dvojni algebraski vsoti predstojećih členov prišteješ dotični člen (ga pripišeš z neizpremenjenim predznakom) in dobljeni znesek pomnožiš s tem členom.

Vsako dekadično število je vsota iz določene množine dekadičnih enot. N. pr. 4769 je vsota iz 4 tisočic, 7 stotic, 6 desetec in 9 enic, v znakih

Kako kvadruješ
dekadično
število.

$$4769 = 4T + 7S + 6D + 9E.$$

Kvadrat dekadičnega števila najdeš torej po istem pravilu, po katerem kvadruješ mnogočlenik. Ker se pri dekadičnem številu mestna vrednost vsake naslednje kvadratove sestavine zmanjša za en red, se pri napisavanju pomakne vsaka naslednja sestavina za eno mesto proti desni. Primerjaj navedeno kvadrovanje!

$ \begin{array}{r} 4769^2 \\ \hline 4^2 \dots\dots 16 \\ 2 \cdot 4 \cdot 7 \dots\dots 56 \\ 7^2 \dots\dots 49 \\ 2 \cdot 47 \cdot 6 \dots\dots 564 \\ 6^2 \dots\dots 36 \\ 2 \cdot 476 \cdot 9 \dots\dots 8568 \\ 9^2 \dots\dots 81 \\ \hline 22743361 \end{array} $	ali krajše: $ \begin{array}{r} 4769^2 = 16 \\ \hline 87 \cdot 7 \dots\dots 609 \\ 946 \cdot 6 \dots\dots 5676 \\ 9529 \cdot 9 \dots\dots 85761 \\ \hline 22743361 \end{array} $
--	--

Pravilo za kvadrovanje dekadičnih števil izražamo tako-le:

1. Od prve številke dobiš kvadrat.

2. Od druge in vsake naslednje številke dobiš dve sestavini in sicer dvojni produkt predstojećega števila, pomnožen z dotično številko, in kvadrat te številke.

3. Navedene sestavine pišeš zaporedoma drugo pod drugo, pomakneš vsako naslednjo za eno mesto proti desni ter jih sešteješ.

Kvadratove sestavine dvoštevničnega števila izračunaš in sešteješ obenem, ako izračunaš najprej kvadrat enic, potem dvojni produkt iz enic in desetic in končno kvadrat desetic.

Ako se nahaja v dekadičnem številu kaka ničla, jo preskočiš med kvadrovanjem, naslednjo sestavino pa pomakneš za tri mesta proti desni; zakaj kakor vsaka številka da tudi ničla pri kvadrovanju dve sestavini, ki sta posamič = 0.

Sestavine druge in vsake naslednje številke spojiš v eno sestavino, ako dvojnemu predstoječemu številu prišteješ dotično številko (jo pripišeš) in dobljeno vsoto pomnožiš s to številko. Da se mora v tem slučaju vsaka naslednja kvadratova sestavina pomakniti za dve mesti proti desni, je jasno.

Kako kvadrueš
desetinsko, kako
nepopolno
število.

Desetinsko število kvadrueš istotako kakor celo število. Med kvadrovanjem se ne brigaš za desetinsko piko. V kvadratu odšteješ dvakrat toliko desetink, kolikor jih je v podlogi; zakaj produkt ima toliko decimalk, kolikor jih imata oba faktorja skupaj.

Nepopolno število kvadrueš, ako ga pomnožiš na okrajšani način s samim seboj.

II. Tretja potenca se imenuje kub. Določeno število povišati na tretjo potenco se pravi kubovati.

Kako kubuješ
dvočlenik.

Kub binoma izračunaš po obrazcu

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

katerega najdeš, ako pomnožiš kvadrat binoma $a + b$ s tem binonom. Navedeni obrazec velja tudi za binom $a - b$; zakaj

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Kub vsakega binoma je torej algebrajska vsota: a) iz kuba prvega člena; b) iz trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z drugim členom; c) iz trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom drugega člena; d) iz kuba drugega člena.

Kub mnogočlenskega izraza najdeš, ako porabiš pravilo za binom ponavljajoč. N. pr. Kub mnogočlenika $a + b + c$ izračunaš, ako smatraš izraz $a + b$ za določeno število in potem računaš po pravilu za binom, v znakih

$$\underbrace{(a + b + c)^3}_{= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3} = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 =$$

Kako kubuješ mnogočlenik.

Istotako postopaš tudi pri kubovanju mnogočlenika $a + b + c + d$ ali kateregakoli drugega mnogočlenika, v znakih

$$\begin{aligned} \underbrace{(a + b + c + d)^3}_{= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3} &= (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + \\ &+ 3(a + b + c)d^2 + d^3 = a^3 + \underbrace{3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{+ 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3} + \\ &+ \underbrace{3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3}. \end{aligned}$$

Iz navedenega posnamemo za kubovanje mnogočlen-skih izrazov to-le pravilo:

1. Od prvega člena dobiš kub.

2. Od drugega in vsakega naslednjega člena dobiš tri sestavine in sicer: a) trojni kvadrat predstoječe algebrajske vsote, pomnožen z dotičnim členom; b) trojno predstoječo algebrajsko vsoto, pomnoženo s kvadratom dotičnega člena; c) kub dotičnega člena.

3. Navedene sestavine sešteješ algebrajsko.

Ker je vsako dekadlično število vsota iz določene množine dekadličnih enot, ga kubuješ po pravilu za mnogočlenske izraze. Primerjaj kvadrovanje dekadličnih števil!

Kako kubuješ dekadlično število.

Pravilo za kubovanje dekadličnih števil izražamo navadno tako-le:

1. Od prve številke dobiš kub.

2. Od druge in vsake naslednje številke dobiš tri sestavine, in sicer: a) trojni kvadrat predstoječega števila, pomnožen z dotično številko; b) trojno predstoječe število, pomnoženo s kvadratom dotične številke; c) kub dotične številke.

3. Navedene sestavine pišeš zaporedoma drugo pod drugo, vsako naslednjo pomakneš za eno mesto proti desni ter jih sešteješ.

Ako se nahaja v dekadičnem številu kaka ničla, jo preskočiš med kubovanjem, naslednjo sestavino pa pomakneš za štiri mesta proti desni.

Kako kubuješ desetinsko,	586 ³	
kako nepopolno število.	5 ³	125
	3 · 5 ² · 8	600
	3 · 5 · 8 ²	960
	8 ³	512
	3 · 58 ² · 6 ...	60552
	3 · 58 · 6 ² ...	6264
	6 ³ ...	216
		201230056

Desetinsko število kubuješ istotako kakor celo število. Med kubovanjem se ne brigaš za desetinsko piko; v kubu pa odšteješ trikrat toliko desetink, kolikor jih je v podlogi.

Nepopolno število kubuješ, ako ga postaviš trikrat kakor faktor ter izvršiš množenje na okrajšani način.

§ 35. Vzmnoževanje enačb in neenačb. Razreševanje eksponentnih enačb.

Enako visoke
potence enakih
in neenakih
podlog.

1. Ako vzmnožiš enaka števila z enakimi števili, dobiš enake vzmnoži.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Dokaz.} & \text{Iz} & \left. \begin{array}{l} a = b \\ a = b \\ a = b \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right\} \text{pomnoženo} \\
 & & \hline
 & \text{sledi} & a^m = b^m.
 \end{array}$$

Ako vzmnožiš vse člene določenega sorazmerja z istim številom, dobiš zopet sorazmerje; zakaj iz $a:b = c:d$ najdeš $(a:b)^m = (c:d)^m$ in $a^m:b^m = c^m:d^m$.

2. Enako visoke potence neenakih absolutnih števil so neenake in sicer je tista večja, ki ima večjo podlogo.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Dokaz.} & \text{Iz} & \left. \begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ a > b \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right\} \text{pomnoženo} \\
 & & \hline
 & \text{sledi} & a^m > b^m.
 \end{array}$$

3. Vsaka pozitivna (cela) potenca pravega ulomka je zopet pravi ulomek, ki je tem manjši, čim večji je potenčni eksponent. Potence pravega ulomka.

Dokaz. Ako pomeni a vrednost pravega ulomka, je $1 > a$ in

$$\left. \begin{array}{l} 1 > a \\ a = a \end{array} \right\} \text{pomnoženo,} \quad \left. \begin{array}{l} 1 > a \\ a^2 = a^2 \end{array} \right\} \text{pomnoženo, i. t. d.;}$$

$$\frac{a > a^2}{a^2 > a^3}$$

torej je $1 > a > a^2 > a^3 \dots$ Iz navedenega sledi, da se zaporedne potence pravega ulomka manjšajo in bližajo vrednosti $= 0$, če se potenčni eksponent veča in bliža vrednosti $= \infty$.

4. Vsaka pozitivna (cela) potenca nepravega ulomka je zopet nepravi ulomek, ki je tem večji, čim večji je potenčni eksponent. Potence nepravega ulomka.

Dokaz. Ako pomeni a vrednost nepravega ulomka, je $1 < a$ in

$$\left. \begin{array}{l} 1 < a \\ a = a \end{array} \right\} \text{pomnoženo,} \quad \left. \begin{array}{l} 1 < a \\ a^2 = a^2 \end{array} \right\} \text{pomnoženo, i. t. d.;$$

$$\frac{a < a^2}{a^2 < a^3}$$

torej je $1 < a < a^2 < a^3 \dots$ Iz navedenega sledi, da se zaporedne potence nepravega ulomka večajo in bližajo vrednosti $= \infty$, če se veča potenčni eksponent in bliža vrednosti $= \infty$.

5 Enake potence z enakimi podlogami imajo enake eksponente; zakaj iz $a^x = a^y$ sledi $x = y$. Eksponentna enačba = Exponentialgleichung.

Ta izrek uporabljamo pri razreševanju eksponentnih enačb, to so enačbe, v katerih se neznanka nahaja v eksponentu.

a) Dvočlensko eksponentno enačbo $2^{3x+2} = 32$ razrešiš, ako izraziš oba enačbena dela kakor potenci iste podloge in potem izenačiš potenčna eksponenta.

Razrešitev:

$$\begin{aligned} 2^{3x+2} &= 32 \\ 2^{3x+2} &= 2^5 \\ 3x+2 &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Razreševanje dvočlenskih in mnogočlenskih eksponentnih enačb.

b) Pri razreševanju eksponentne enačbe $6 \cdot 25^{x-1} = 0 \cdot 4^{x-7}$ postopaš istotako kakor pri prejšnji enačbi. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$6 \cdot 25^{x-1} = 0 \cdot 4^{x-7}$$

$$\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2(x-1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+7}$$

$$2x - 2 = -x + 7$$

$$x = 3$$

c) Mnogočlensko eksponentno enačbo $7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^{x+3}$ razrešiš, ako izvršiš nakazana vzmnogževanja, potem prestaviš in skrčiš istoimenske izraze, nadalje pa ravnaš kakor pri prejšnjih enačbah. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^{x+3}$$

$$7 \cdot 7^x - \frac{2^x}{2} = 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^3 \cdot 2^x$$

$$7 \cdot 7^x - 5 \cdot 7^x = 24 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2}$$

$$2 \cdot 7^x = \frac{49}{2} \cdot 2^x$$

$$\frac{7^x}{2^x} = \frac{49}{4}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$x = 2$$

Mnogočlensko eksponentno enačbo tudi razrešiš, ako prestaviš člene tako, da se nahajajo v vsakem enačbenem delu le potence iste podloge, potem razstaviš dotične izraze na faktorje in skrčiš kolikor mogoče, nadalje pa postopaš kakor pri dvočlenskih eksponentnih enačbah. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$9^{2x-3} + 3^{3x+1} = 9^{2x-2} + 3^{3x-1}$$

$$9^{2x-3} - 9^{2x-2} = 3^{3x-1} - 3^{3x+1}$$

$$9^{2x} \left(\frac{1}{729} - \frac{1}{81} \right) = 3^{3x} \left(\frac{1}{3} - 3 \right)$$

$$9^{2x} \left(-\frac{8}{729} \right) = 3^{3x} \left(-\frac{8}{3} \right)$$

$$\frac{9^{2x}}{3^{3x}} = \frac{729}{3}$$

$$\left(\frac{81}{27} \right)^x = 243$$

$$3^x = 3^5$$

$$x = 5$$

B. Korenjenje.

§ 36. Pojasnila o korenjenju.

Ako razstavimo določeno število A na m enakih faktorjev ter določimo enega izmed teh faktorjev (a), pravimo, da korenimo število A s številom m , v znakih $\sqrt[m]{A} = a$ (čitaj: m ti koren iz A je $= a$). Število A , ki se mora razstaviti na enake faktorje, se imenuje radikand ali korenovec; število m , ki pove, na koliko enakih faktorjev je treba razstaviti radikand, se zove korenski eksponent; številu a pa, katerega iščemo, pravimo koren.

Korensko znamenje ($\sqrt{}$) je nastalo iz začetne črke latinske besede „radix“. Drugi koren se zove tudi kvadratni koren, tretji pa kubični koren. Korenski eksponent se piše nad korensko znamenje. Korenski eksponent 2 se izjemoma ne piše; torej pomeni $\sqrt{}$ toliko kakor $\sqrt[2]{}$.

Izraza enačbe $\sqrt[m]{A} = a$ se razlikujeta v tem, da pred- očuje izraz a izračunani, izraz $\sqrt[m]{A}$ pa nakazani koren. Nakazane korene imenujemo tudi korenske izraze. Ako vzmnožimo izračunani ali nakazani koren s

Koreniti = radizieren.

Korenovec = der Radikand.
Korenski eksponent = der Wurzelexponent.

Koren = die Wurzel.

Korensko znamenje.

Bistvena lastnost vsakega korena ali korenskega izraza.

korenskimi eksponentom m , moramo po pojasnilu o korenjenju dobiti radikand za rezultat, v znakih

$$a^m = A \quad \text{ali} \quad (\sqrt[m]{A})^m = A.$$

Ako korenimo potenco A^m s številom m , je koren po zgoraj navedenem pojasnilu enak podlogi A , v znakih $\sqrt[m]{A^m} = A$.

Iz enačb $(\sqrt[m]{A})^m = A$ in $\sqrt[m]{A^m} = A$ izvajamo:

Število se ne izpremeni, ako ga v kateremkoli redu vzmnožiš in koreniš z enim in istim številom.

S pomočjo navedenih pojasnil najdemo:

Prvi koren in korena iz 1 in 0.

1. Prvi koren iz vsakega števila je enak dotičnemu številu, v znakih $\sqrt[1]{A} = A$; zakaj $A^1 = A$.

2. Vsak koren iz enote je enak 1, v znakih $\sqrt[m]{1} = 1$; zakaj $1^m = 1$.

3. Vsak koren iz ničle je enak 0, v znakih $\sqrt[m]{0} = 0$; zakaj $0^m = 0$.

Koreni algebraskih števil.

4. Sodi koren iz pozitivnega radikanda utegne biti pozitiven ali negativen, v znakih $\sqrt[2m]{+A} = \pm a$; zakaj $(\pm a)^{2m} = +A$.

5. Lihi koren iz pozitivnega radikanda je pozitiven, v znakih $\sqrt[2m-1]{+A} = +a$; zakaj $(+a)^{2m-1} = +A$.

6. Lihi koren iz negativnega radikanda je negativen, v znakih $\sqrt[2m-1]{-A} = -a$; zakaj $(-a)^{2m-1} = -A$.

Kakšnost radikanda in korenskega eksponenta.

Z ozirom na navedena pojasnila smemo reči, da utegne radikand A biti ali celo ali ulomljeno, absolutno ali algebrasko število, korenski eksponent m pa mora biti absolutno celo število. Kakšna je absolutna vrednost korena a , bomo spoznali iz naslednjega.

Kakšnost absolutne korenove vrednosti.

Mislimo si, da je radikand A neko absolutno celo število. Ako vzmnožimo števila naravne številne vrste z m ter primerjamo radikand A s to potenčno vrsto, namreč z

$$1, 2^m, 3^m, 4^m, \dots \quad a^m, (a+1)^m, (a+2)^m, \dots,$$

sta dva slučaja mogoča:

1. Radikand A se nahaja v tej potenčni vrsti, n. pr. $A = a^m$; potem je $\sqrt[m]{A} =$ celemu številu a .

2. Radikand A leži med dvema zaporednima potenčama navedene potenčne vrste, n. pr. med a^m in $(a+1)^m$; potem mora $\sqrt[m]{A}$ ležati med zaporednima celima številoma a in $(a+1)$ in zagradelj ne more biti celo število. $\sqrt[m]{A}$ pa v tem slučaju tudi ne more biti ulomek; zakaj če bi $\sqrt[m]{A}$ bil enak ulomku $\frac{p}{q}$, bi morala potenca $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ biti enaka radikandu A . To pa je nemogoče, ker sta števec p in imenovalec q , torej tudi potenci p^m in q^m medsebojni praštevili. — Da je mogoče $\sqrt[m]{A}$ približno izraziti s pomočjo ulomka in sicer s tako natančnostjo, kakoršna se zahteva, uvidimo tako-le. Ako razdelimo enoto na toliko enakih delov (n. pr. na q), da so posamezni deli $\left(\frac{1}{q}\right)$ neizrečeno majhni, in ako zberemo vedno več in več izmed teh delov v ulomljena števila ter jih vzmnožimo z m , najdemo potenčno vrsto

$$\left(\frac{1}{q}\right)^m, \left(\frac{2}{q}\right)^m, \left(\frac{3}{q}\right)^m, \dots, \left(\frac{p}{q}\right)^m, \left(\frac{p+1}{q}\right)^m, \left(\frac{p+2}{q}\right)^m, \dots$$

Vrednost radikanda A leži gotovo med dvema zaporednima potenčama te številne vrste, n. pr. med $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ in $\left(\frac{p+1}{q}\right)^m$; potem leži vrednost $\sqrt[m]{A}$ med ulomkoma $\frac{p}{q}$ in $\frac{p+1}{q}$, katerih razlika $\left(\frac{1}{q}\right)$ je neizrečeno majhna. Vrednost korenskega izraza $\sqrt[m]{A}$ je torej približno enaka ulomku $\frac{p}{q}$ ali pa ulomku $\frac{p+1}{q}$.

Števila, katerih vrednost leži med dvema zaporednima ulomljenima številoma in se da s pomočjo ulomkov le približno določiti, toda tako natanko, kakor želimo, se imenujejo nerazložna ali iracijonalna števila; cela in ulomljena števila pa se zovejo razložna ali racionalna števila. Prva števila se ne dajo popolnoma natanko razložiti na enote ali enotne dele, pri zadnjih številih pa je to mogoče. Primerjaj razmerja nesoizmerljivih količin v geometriji § 21.!

Nerazložno število = irrationale Zahl.

Razložno število = rationale Zahl.

Iz navedenega izvajamo:

Koreni iz absolutnih celih števil so ali cela ali pa nerazložna števila.

Na isti način kakor navedeno lastnost najdemo tudi:

Koreni iz ulomkov so ali ulomki ali pa nerazložna števila.

Nerazložna ali iracijonalna števila ležijo med zaporednimi ulomki in napravijo številno vrsto nepretrgano ali stalno.

Predočevanje
iracijonalnih
števil.

Iracijonalna števila se dajo po primernih slikah predočiti kakor določene daljice. N. pr. Ako načrtaš kvadrat, katerega stranica je $= 1$, predočuje diagonala iracijonalno število $\sqrt{2}$; ali ako načrtaš enakostraničen trikotnik, katerega stranica je $= 2$, predstavlja višina iracijonalno število $\sqrt{3}$; ali ako načrtaš pravokoten trikotnik, katerega kateti merita oziroma 1 in 2 dolgostni enoti, predočuje hipotenuza iracijonalno število $\sqrt{5}$ i. t. d.

§ 37. Računski zakoni o korenskih izrazih.

Seštevanje in
odštevanje
korenskih iz-
razov.

Korenski izrazi, ki se ujemajo v radikandih in v korenskih eksponentih, so istoimenski. Istoimenske korenske izraze seštevaj (oziroma odštevaj), ako sešteješ (oziroma odšteješ) njih koeficiente ter pridržiš skupni korenski izraz. N. pr.

$$a \sqrt[m]{x} \pm b \sqrt[m]{x} = (a \pm b) \sqrt[m]{x}.$$

Ako sta n. pr. števili A in B enaki, je $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{B}$; zakaj ako razstaviš enaka števila na istotoliko enakih delov, morajo vsi ti deli biti enaki med seboj.

Pretvarjanje ko-
remskih izrazov.

I. Recimo, da je $\sqrt[m]{A} = a$; potem je $a^m = A$. Ako vzmnožimo to enačbo s številom p , dobimo $a^{mp} = A^p$; in če korenimo števili zadnje enačbe s številom mp , najdemo $a = \sqrt[mp]{A^p}$, ali če postavimo namesto a njegovo vrednost, je

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}.$$

Ako čitamo zadnjo enačbo od leve proti desni in obratno, najdemo izrek:

Korenski izraz ne izpremeni svoje vrednosti, ako množiš, oziroma deliš korenski in potenčni eksponent z enim in istim številom. Kjer ni potenčnega eksponenta, si je treba misliti eksponent 1.

S pomočjo tega izreka se dajo korenski izrazi, ki imajo različne korenske eksponente, pretvoriti na izraze z enakimi korenskimi eksponenti, in korenski izrazi, katerih korenski in potenčni eksponent imata skupno mero, se dajo pretvoriti na enostavnejšo obliko. N. pr.

a) Izrazi $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[n]{x^n}$ se dajo pretvoriti na izraze $\sqrt[6m]{a^{3m}}$, $\sqrt[6m]{b^{4m}}$, $\sqrt[6m]{x^{6n}}$.

b) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$, $\frac{6m+3n}{\sqrt[6m+3n]{a^{4m+2n}}} = \frac{3(2m+n)}{\sqrt[3(2m+n)]{a^{2(2m+n)}}} =$
 $= \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$.

II. Produkt koreniš s številom, ako koreniš vsak faktor z dotičnim številom ter pomnožiš dobljene korene, v znakih

Kako koreniš produkt.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b};$$

zakaj po pojasnilih o korenjenju in računskih zakonih o potencah najdeš

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab.$$

Ako obrnemo zgoraj navedeno enačbo, najdemo:

Korenske izraze z enakimi korenskimi eksponenti množiš, ako pomnožiš njih radikande ter koreniš ta produkt s skupnim korenskimi eksponentom, v znakih

Kako množiš korenske izraze.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

Če pa imajo korenski izrazi različne korenske eksponente, jih je treba najprej pretvoriti po pravilu pod I. na izraze z enakimi korenskimi eksponenti in potem se izvrši množenje po navedenem pravilu. N. pr.

$$a) \sqrt[3]{54a^4b^5} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^3 \cdot b^2} = 3ab\sqrt[3]{2ab^2};$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{147} + 2\sqrt[3]{128} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} &= \\ &= \sqrt{49 \cdot 3} + 2\sqrt[3]{64 \cdot 2} - 3\sqrt{4 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{8 \cdot 2} - \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \\ &= 7\sqrt{3} + 8\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \sqrt[3]{\sqrt{a^3+b^3} + \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^3+b^3} - \sqrt{a^3}} &= \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{a^3+b^3} + \sqrt{a^3})(\sqrt{a^3+b^3} - \sqrt{a^3})} = \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{a^3+b^3})^2 - (\sqrt{a^3})^2} = \sqrt[3]{a^3+b^3-a^3} = \\ &= \sqrt[3]{b^3} = b; \end{aligned}$$

$$d) \sqrt{\frac{ax}{y}} \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{a^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{ay}{x^2}} = \sqrt[12]{\frac{a^6x^6}{y^6}} \cdot \sqrt[12]{\frac{x^4y^4}{a^8}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^3y^3}{x^6}} = \sqrt[12]{ax^4y};$$

$$\begin{aligned} e) (2x+3y) \cdot \sqrt{\frac{2x-3y}{2x+3y}} &= \sqrt{(2x+3y)^2} \cdot \sqrt{\frac{2x-3y}{2x+3y}} = \\ &= \sqrt{(2x+3y)(2x-3y)} = \sqrt{4x^2-9y^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) (\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{40-8\sqrt{5}} = \\ &= 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Kako koreniš
kvocijent
(ulomek).

III. Kvocijent (ulomek) koreniš s številom, ako koreniš dividend (števec) in divizor (imenovalec) z dotičnim številom ter deliš dobljena korena, v znakih

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

zakaj po pojasnilih o korenjenju in računskih zakonih o potencah najdeš

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}.$$

Obratno najdemo:

Kako deliš ko-
renske izraze.

Korenske izraze z enakimi korenskimi eksponenti deliš, ako deliš njih radikande ter

koreniš ta kvocijent s skupnim korenskimi eksponentom, v znakih

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a:b}.$$

Če pa imajo korenski izrazi različne korenske eksponente, jih je treba najprej pretvoriti po pravilu pod I. na izraze z enakimi korenskimi eksponenti in potem se izvrši deljenje po navedenem pravilu.

IV. Po pojasnilu o vzmoževanju in z ozirom na pravilo pod II. najdemo

Kako zmnožiš korenski izraz.

$$\begin{aligned} (\sqrt[m]{a})^n &= \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots (n \text{ krat}) = \\ &= \sqrt[m]{a \cdot a \cdot a \dots} = \sqrt[m]{a^n}; \end{aligned}$$

torej

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}, \text{ t. j.}$$

Korenski izraz zmnožiš s številom, ako zmnožiš njegov radikand z dotičnim številom.

Iz enačbe $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ izvajamo tudi:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu zmnožiš in koreniš določeno število.

N. pr.

$$a) (\sqrt[3]{\sqrt{25a^2b^4}})^3 = \sqrt[3]{(\sqrt{25a^2b^4})^3} = \sqrt{25a^2b^4} = 5ab^2.$$

$$b) \sqrt{\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)^3} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

$$\begin{aligned} c) (\sqrt{x})^{3y-2} \cdot (\sqrt{x})^{2x-3y} \cdot (\sqrt{x})^{2-x} &= \\ = (\sqrt{x})^{3y-2+2x-3y+2-x} &= (\sqrt{x})^x = a. \end{aligned}$$

$$d) (\sqrt[3]{a^2b})^2 \cdot (\sqrt[3]{ab^2})^4 = \sqrt[3]{a^4b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b^8} = \sqrt[3]{a^8b^{10}} = a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}.$$

V. Po pravilu pod I. najdemo

Kako koreniš potenco.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[1]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}}, \text{ t. j.}$$

Potenco koreniš s številom, ako deliš potenčni eksponent s korenskimi eksponentom.

Korenski izraz se pri tem izpremeni v potenčni izraz $(a^{\frac{n}{m}})$, ki ima po pojasnilih o vz množevanju le tedaj določen pomen, kadar je $\frac{n}{m}$ celo število. N. pr.

$$a) \sqrt[m]{a^{mx+m}} = a^{\frac{mx+m}{m}} = a^{x+1}.$$

$$b) \sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a \cdot b^{3n} \cdot b^2} = a^2 b^3 \sqrt[n]{ab^2}.$$

Kako koreniš
korenski izraz.

VI. Ako razstavimo število a na n enakih faktorjev in potem še vsakega izmed teh faktorjev na m enakih faktorjev, dobimo iz števila a povsem mn enakih faktorjev, t. j. v znakih

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Korenske izraze koreniš, ako pomnožiš korenske eksponente med seboj.

Obratno je:

Kako koreniš
število s pro-
duktom.

Število koreniš s produktom, ako ga koreniš z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem, v znakih

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Po navedenem je torej

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \text{ t. j.}$$

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš korenjenje določenega števila. N. pr.

$$a) \sqrt[6]{\sqrt[6]{81}} = \sqrt[6]{\sqrt[6]{81}} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3}.$$

$$b) \sqrt[6]{\frac{6^3}{5} \sqrt[6]{\frac{25}{27}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{\frac{216}{125} \cdot \frac{25}{27}}} = \sqrt[6]{\frac{8}{5}}.$$

$$c) \sqrt[6]{a^5 \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^9 \sqrt[6]{a^5}}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{20} \cdot a} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[6]{a^{18} \cdot a^5}}} = \sqrt[24]{a^{21} \cdot a^{23}} = \sqrt[24]{a^{44}} = \sqrt[6]{a^{11}} = a^{\frac{11}{6}} \sqrt[6]{a^5}.$$

Pomen korena z
negativnim eks-
ponentom.

VII. Korenski izraz $\sqrt[n]{-a}$ nima po prvotnem pojasnilu o korenjenju nobenega pravega pomena; zakaj radikand a na minus n enakih faktorjev razstaviti, je brez zmisla. Pomen tega korenskega izraza določimo s pomočjo

pravila, ki je izraženo v enačbi $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m \cdot p]{A^p}$, če smatramo namreč to pravilo o pretvarjanju korenskih izrazov veljavno za vsak korenski izraz. Potem najdemo z ozirom na pomen potence z negativnim eksponentom

$$\sqrt[n]{a} = \frac{(-n) \cdot (-1)}{(-1)} \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \text{ t. j.}$$

Določeno število koreniš z negativnim številom, ako koreniš obratno vrednost radikanda z dotičnim pozitivnim številom, v znakih

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Korenski izraz z negativnim eksponentom je enak obratni vrednosti dotičnega korenskega izraza s pozitivnim eksponentom, v znakih

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

S pomočjo pravila o pretvarjanju korenskih izrazov se da tudi določiti pomen potenc in korenov z ulomljenimi eksponenti. Zakaj iz korenskega izraza $\sqrt[m]{a^n}$ najdemo po omenjenem pravilu:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a^n} &= \sqrt[m]{a^{\frac{n}{1}}} = a^{\frac{n}{m}}, \\ \sqrt[m]{a^n} &= \sqrt[\frac{m}{n}]{a^1} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}; \\ \hline \text{torej je } \sqrt[\frac{m}{n}]{a} &= a^{\frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

Iz navedenega izvajamo pravili:

Določeno število zmnožiš z ulomkom, ako ga zmnožiš s števcem in znesek koreniš z imenovalcem, v znakih $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^n}$.

Določeno število koreniš z ulomkom, ako ga zmnožiš z obratnim ulomkom, v znakih

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Kako koreniš
z negativnim
celim številom.

Kako zmnožiš,
kako koreniš z
ulomkom.

Kako računaš s
potencami ulom-
ljenih eksponen-
tov.

Da veljajo za potence z ulomljenimi eksponenti isti računski zakoni kakor za potence s celimi eksponenti, uvidimo iz naslednjega:

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} =$
 $= a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}};$
2. $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}};$
3. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} : \sqrt[ns]{a^{nr}} =$
 $= \sqrt[ns]{a^{ms-nr}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}};$
4. $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m : b^m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$
5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = \sqrt[s]{a^{\frac{mr}{n}}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} =$
 $= \sqrt[ns]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}}.$

Kako računaš s
koreni ulomlje-
nih eksponentov.

S korenskimi izrazi, ki imajo ulomljene eksponente, se računa po istih pravilih kakor s potencami, ki imajo ulomljene eksponente; zakaj

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Če je v potenčnem izrazu eksponent negativno ulomljeno število, je treba negativni predznak spojiti s števcem. N. pr.

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}}.$$

§ 38. Kvadratni in kubični koren.

Kvadratni koren
mногоčlenkega
izraza.

I. Iz pojasnil in pravil § 34. sledi, da najdeš urejenemu mnogočleniku kvadratni koren na ta-le način:

1. V prvem členu urejenega radikanda se nahaja kvadrat prvega korenovega člena. Prvi korenov člen najdeš torej, ako poiščeš prvemu radikandovemu členu kvadratni koren. Kvadrat prvega korenovega člena odšteješ od radikanda.

korenem, dobiš drugo korenovo številko. Potem izračunaš kvadratovi sestavini druge korenove številke ter ju odšteješ od popolnega drugega oddelka. Ostanek spojiš s tretjim oddelkom.

4. Naslednje korenove številke izračunaš istotako, kakor si našel drugo številko.

5. Ko si vzel vse radikandove oddelke v račun, najdeš ostanek = 0, ako je radikand popoln kvadrat.

Kvadratni koren
ulomkov.

Desetinsko število koreniš z 2 na isti način kakor celo število. Zapomniti si je treba samo to, da razdeliš desetinsko število na oddelke od desetinske pike in sicer celote na levo, desetinke pa na desno, in da postaviš v korenu desetinsko piko, prej ko vzameš prvi oddelek desetink v račun. N. pr.

$$\begin{array}{r} \sqrt{9|40\cdot64|89} = 30\cdot67 \\ \underline{40} \quad : 6 \\ 406\underline{4} \quad : 606 \\ 42889 \quad : 6127 \\ \underline{} \end{array}$$

Navadnemu ulomku poiščeš kvadratni koren, ako koreniš števec in imenovalec z 2.

Ako je radikand mešano število, ga pretvoriš na nepravi ulomek in potem postopaš kakor pri ulomku.

Kvadratni koren
nepopolnega
kvadrata.

Ako radikand ni popoln kvadrat, ne moreš kvadratnega korena določiti popolnoma natanko, temveč le približno na toliko decimalk, kolikor jih potrebuješ. Primerjaj § 36.! V to svrho pripišeš radikandu toliko ničel kakor decimalke (ali si jih misliš pripisane)*, kolikor jih je treba, ter računaš z njimi kakor z veljavnimi številkami.

Istotako postopaš tudi pri desetinskih številih, ki niso popolni kvadrati. Pri periodičnih decimalnih ulomkih porabiš namesto ničel tiste številke, ki se ponavljajo.

Navadnemu ulomku, katerega števec in imenovalec nista popolna kvadrata, določiš kvadratni koren, ako razširiš dotični ulomek tako, da postane imenovalec popoln

* Pri računanju ravnaš navadno tako, da pripišeš vsakemu naslednjemu ostanku po dve ničli.

kvadrat, in potem koreniš števec in imenovalec z 2, ali pa ako pretvoriš dotični navadni ulomek v desetinskega in koreniš zadnji ulomek z 2.

Ako računaš kvadratni koren števila, ki ni popoln kvadrat, na več decimalk, postaja račun vedno bolj težaven in dolgočasen. Takšen račun smeš okrajšati tako-le. Ko si določil na navadni način n veljavnih števil kvadratnega korena, deliš zadnji ostanek z dvojnimi že znanim korenem na okrajšani način (pri tem odbiješ takoj divizorju zadnjo številko) in najdeš na ta način še $(n - 1)$ zanesljivo številko kvadratnega korena.

Dokaz. Recimo, da je A radikand, a že izračunani in x še neznani del kvadratnega korena, torej $\sqrt{A} = a + x$. Iz te enačbe najdemo $A = a^2 + 2ax + x^2$, torej $2ax = A - a^2 - x^2$ in $x = \frac{A - a^2}{2a} - \frac{x^2}{2a}$. Ako vzamemo za x vrednost, ki jo izraža kvocijent $\frac{A - a^2}{2a}$, napravimo pogrešek, katerega absolutna vrednost je $= \frac{x^2}{2a}$. Ker se s tem, da premaknemo v radikandu A desetinsko piko za 2, oziroma za 4, 6 ... mest, izpremeni samo mestna, ne pa številčna vrednost korenovih števil, si smemo zaradi lažjega dokaza misliti, da ima korenov del a mestno vrednost enic. Potem je $x < 1$ in tudi $x^2 < 1$. Če se znani korenov del a piše z n številkami, je $a \leq 10^{n-1}$. Iz

$$\left. \begin{array}{l} x^2 < 1 \\ 2a \leq 2 \cdot 10^{n-1} \end{array} \right\} \text{ deljeno}$$

sledi
$$\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}, \text{ t. j.}$$

absolutna vrednost pogreška $\frac{x^2}{2a}$ znaša manj ko $\frac{1}{2}$ od $(n - 1)$. decimalke (čitaj: n manj prve decimalke). Iz kvocijenta $\frac{A - a^2}{2a}$, kjer pomeni $A - a^2$ zadnji ostanek in $2a$ dvojni že znani koren, se da torej $(n - 1)$ decimalka določiti s pomočjo okrajšane delitve.

Ako je treba n. pr. številu 125 določiti kvadratni koren na 5 decimalk, izračunati moraš povsem 7 kore-

novih števil, torej 4 na navadni način, 3 pa s pomočjo okrajšane delitve. Primerjaj izvršeno nalogo!

$$\sqrt{125} = 11.18034..$$

$$\begin{array}{r} 25 : 21 \\ 400 : 221 \\ 17900 : 2228 \\ 76 : 2236 \\ 9 \\ \emptyset \end{array}$$

Kvadratni koren
nepopolnega
števila.

Ako je treba n. pr. nepopolnemu številu 3.1416.. določiti kvadratni koren tako natanko kakor mogoče, moreš na navadni način najti le 3 korenove številke; s pomočjo okrajšane delitve določiš še potem 2 korenovi številki.

Kubični koren
mnogočlenskega
izraza.

II. Iz pojasnil in pravil § 34. sledi, da najdeš urejenemu mnogočleniku kubični koren na ta-le način:

1. Prvi korenov člen najdeš, ako poiščeš prvemu radikandovemu členu kubični koren. Kub prvega korenovega člena odšteješ od radikanda.

2. Drugi korenov člen najdeš, ako deliš prvi člen radikandovega ostanka s trojnim kvadratom že znanega korena. Potem izračunaš kubove sestavine drugega korenovega člena ter jih odšteješ od radikandovega ostanka.

3. Naslednje korenove člene najdeš na isti način, kakor si našel drugi korenov člen. N. pr.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 28x^3 - 9x^2 - 54x - 27} = x^2 - 2x - 3 \\ \underline{x^6} \\ -6x^5 + 3x^4 + 28x^3 - 9x^2 - 54x - 27 : 3x^4 \\ \underline{-6x^5 + 12x^4 - 8x^3} \\ + \quad - \quad + \\ -9x^4 + 36x^3 - 9x^2 - 54x - 27 : 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 \\ \underline{-9x^4 + 36x^3 - 36x^2} \\ + \quad - \quad + \\ 27x^2 - 54x - 27 \\ \underline{-27x^2 + 54x - 27} \\ \emptyset \end{array}$$

Dekadičnemu številu poiščeš kubični koren tako-le:

Kubični koren
dekadičnega šte-
vila.

1. Razdeli določeno število od desne proti levi na oddelke, vsak oddelek po tri številke; prvi oddelek na levi utegne imeti tudi manj števil.

2. Prvo korenovo številko najdeš, ako poiščeš število, katerega kub se nahaja v prvem oddelku. Kub prve korenove številke odšteješ od prvega oddelka in ostanek spojiš z drugim oddelkom.

3. Ako odbiješ popolnemu drugemu oddelku zadnji dve številki ter deliš to, kar ostane, s trojnim kvadratom že znanega korena, dobiš drugo korenovo številko. Potem izračunaš kubove sestavine druge korenove številke ter jih odšteješ od popolnega drugega oddelka. Ostanek spojiš s tretjim oddelkom.

4. Naslednje korenove številke izračunaš istotako, kakor si našel drugo številko.

5. Ko si vzel vse radikandove oddelke v račun, najdeš ostanek = 0, ako je radikand popoln kub.

Desetinsko število koreniš s 3 na isti način kakor celo število. Zapomniti si je treba samo to, da razdeliš desetinsko število na oddelke od desetinske pike in sicer celote na levo, desetinke pa na desno, in da postaviš v korenu desetinsko piko, prej ko vzameš prvi oddelek desetink v račun. N. pr.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{78\,953\,589} = 4\,29 \\
 14\,953 \qquad : 48 \\
 96 \quad \} \\
 488 \quad \} \\
 \hline
 4\,865\,589 \qquad : 5292 \\
 4\,7628 \quad \} \\
 10206 \quad \} \\
 729 \quad \} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ako radikand ni popoln kub, moreš tretji koren določiti le približno. V to svrho pripišeš radikandu toliko ničel kakor decimalke (ali si jih misliš pripisane), kolikor jih potrebuješ, ter računaš z njimi kakor z veljavnimi

Kubični koren
nepopolnega
kuba.

številkami. Ker postaja takšen račun vedno bolj težaven in dolgočasen, smeš ga okrajšati tako-le. Ko si določil na navadni način n veljavnih števil kubičnega korena, deliš zadnji ostanek s trojnim kvadratom že znanega korena na okrajšani način in najdeš tako postopajoč še $(n - 1)$ zanesljivo številko kubičnega korena.

Primerjaj, kar se je zgoraj omenilo pri kvadratnem korenu.

§ 39. Pretvarjanje korenskih izrazov.

Včasih se dado korenski izrazi pretvoriti na obliko, ki je enostavnejša in za uporabno računanje pripravnejša od prvotne. Na take pretvoritve se hočemo tukaj ozirati.

Pretvarjanje
ulomka z iracijon-
alnim imeno-
valcem.

I. Ulomek, katerega imenovalec je iracijonalen monom ali binom, se da pretvoriti na ulomek, kateremu je imenovalec racijonalen. Tu sem spadajoči primeri imajo eno izmed oblik:

$$\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad \frac{s}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad \frac{s}{\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}},$$

kjer pomeni s ulomkov števec.

a) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}}$ stvariš imenovalec racijonalen, ako pomnožiš števec in imenovalec z izrazom $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Potem je:

$$\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{s \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{s \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{s \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

b) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ stvariš imenovalec racijonalen, ako pomnožiš števec in imenovalec z izrazom $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Potem je

$$\frac{s}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{s(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{s(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Istotako postopaš tudi pri naslednjih primerih:

$$\frac{s}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{s(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{s(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b},$$

$$\frac{s}{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{s(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{s(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

Če je imenovalac trinom, se vzameta dva člena skupaj za število in potem se postopa kakor pri binomu. N. pr.

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} &= \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})}{2\sqrt{6} - 1} = \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{6} + 1)}{23} = \\ &= \frac{s(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{6} - 12)}{23}. \end{aligned}$$

Včasih sta slučaja pod a) in b) združena. N. pr.

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} &= \frac{s\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{s\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} = \\ &= \frac{s\sqrt{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}}{a - b}. \end{aligned}$$

c) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}}$ stvariš imenovalac racionalen, ako pomnožiš števec in imenovalac z izrazom, ki ga najdeš pri delitvi $(a \pm b) : \left(\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}\right)$. N. pr.

$$\begin{aligned} \frac{s}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} &= \frac{s(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \\ &= \frac{s(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}. \end{aligned}$$

Pretvarjanje
vsote (razlike)
dveh korenskih
izrazov v en ko-
renski izraz.

II. Iracijonalnemu izrazu

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

daš novo obliko, ako kvadrueš navedeni izraz in dobljenemu znesku poiščeš kvadratni koren.

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{(\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}})^2} = \\ &= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}. \end{aligned}$$

Tako pretvarjanje je primerno, kadar je $a^2 - b$ popoln kvadrat.

Pretvarjanje iracijonalnega korenskega izraza na enostavnejšo obliko.

III. Iracijonalni izraz $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ pretvoriš v slučaju, da je $a^2 - b$ popoln kvadrat, na enostavnejšo obliko tako-le. Če ravnaš z izrazoma $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$ in $\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}}$ tako kakor pod II., dobiš

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}, \\ \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}; \end{aligned}$$

in ako sešteješ, oziroma odšteješ te enačbi, najdeš

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}}{2}.$$

Tako n. pr. sledi iz enačb

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= \sqrt{22 + 2\sqrt{121 - 72}} = \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= \sqrt{22 - 2\sqrt{121 - 72}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\sqrt{11 \pm 6\sqrt{2}} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

§ 40. Korenjenje enačb in neenačb. Razreševanje iracijonalnih in eksponentnih enačb.

Enako visoki koreni enakih in neenakih radi-kandov.

1. Ako koreniš enaka števila z enakimi števili, dobiš enake korene; zakaj ako razstaviš enaka števila na istotoliko enakih delov, morajo vsi ti deli biti enaki med seboj, v znakih

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}, \text{ če je } a = b.$$

Ako koreniš vse člene določenega sorazmerja z istim številom, dobiš zopet sorazmerje; zakaj iz sorazmerja $a:b = c:d$ najdeš $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{c:d}$ in $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

Srednja geometrijska sorazmernica med dvema številoma je enaka kvadratnemu korenu iz produkta dotičnih dveh števil; zakaj iz stalnega sorazmerja $a:b = b:c$ sledi $b^2 = ac$ in $b = \sqrt{ac}$.

2. Ako koreniš neenaka števila ($a > b$) z enakimi števili, so koreni tem večji, čim večja je radikandova vrednost, v znakih $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; zakaj jasno je, da so faktorji, na katere razstaviš radikand, tem večji, čim večji je radikand.

3. Ako koreniš nepravi (pravi) ulomek z neenakimi števili, je koren tem manjši (večji), čim večji je korenski eksponent.

Razno visoki koreni enega in istega ulomka.

Dokaz. a) Ako je radikand večji od enote ($a > 1$), so faktorji, na katere razstaviš radikand, očitno tem manjši, čim več jih napraviš, v znakih $\sqrt[n]{a} > \sqrt[2n]{a}$.

$$b) \text{ Iz } \left. \begin{array}{l} 1 = 1 \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[2n]{a} \end{array} \right\} \text{ deljeno}$$

sledi

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} < \sqrt[2n]{\frac{1}{a}}.$$

4. Enačba, v kateri se nahaja neznanka v radikandu, se zove iracionalna. Tako enačbo razrešiš, ako ji odpraviš korene in potem postopaš kakor pri racionalnih enačbah. V to svrhu prestaviš člene tako, da stoji korenski izraz z neznanko sam v enem enačbenem delu; potem vzmnožiš oba enačbena dela s korenskim eksponentom. Ako se nahaja v enačbi več korenskih izrazov z neznanko, se ponavlja navedeno pretvarjanje. Primerjaj naslednje razrešene enačbe!

Iracionalna enačba = irrationale Gleichung. Razreševanje iracionalnih enačb.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sqrt{2x+3} = 5 & b) \sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1 \\
 2x+3 = 25 & \sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6} \\
 2x = 22 & x+13 = 1 + x+6 + 2\sqrt{x+6} \\
 x = 11. & 6 = 2\sqrt{x+6} \\
 & 3 = \sqrt{x+6} \\
 & 9 = x+6 \\
 & x = 3.
 \end{array}$$

c) Enačbi

$$\begin{array}{l}
 3\sqrt{x+5} - 2\sqrt{y-3} = 5 \\
 5\sqrt{x+5} + 3\sqrt{y-3} = 21
 \end{array}$$

razrešiš, ako določiš najprej vrednosti korenskih izrazov (smatraš ta izraza kakor neznanki) in potem še-le vrednosti neznank.

$$\begin{array}{rcl}
 9\sqrt{x+5} - 6\sqrt{y-3} & = & 15 \\
 10\sqrt{x+5} + 6\sqrt{y-3} & = & 21 \\
 \hline
 19\sqrt{x+5} & = & 36 \\
 \sqrt{x+5} & = & 3 \\
 x+5 & = & 9 \\
 x & = & 4,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 9 - 2\sqrt{y-3} & = & 5 \\
 -2\sqrt{y-3} & = & -4 \\
 \sqrt{y-3} & = & 2 \\
 y-3 & = & 4 \\
 y & = & 7.
 \end{array}$$

Razreševanje
eksponentnih
enačb.

5. Pri razreševanju eksponentnih enačb uporabljaš računske zakone o potencah in korenih in se ravnaš po pojasnilih § 35. N. pr.

$$\begin{array}{l}
 a) \frac{x+5}{2^{x+5}} = \frac{1}{4} \frac{x-5}{\sqrt{8x+5}} \\
 \frac{x-5}{2^{x+5}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{3x+15}{x-5}} \\
 \frac{x-5}{2^{x+5}} = 2^{-2 + \frac{3x+15}{x-5}} \\
 \frac{x-5}{x+5} = -2 + \frac{3x+15}{x-5} \\
 x = -2\frac{1}{2}.
 \end{array}$$

$$b) \quad a^{1-x} \cdot \sqrt{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{x-3}} = 1$$

$$a^{1-x} \cdot a^{\frac{x+1}{2}} \cdot a^{\frac{x-3}{4}} = a^0$$

$$a^{1-x+\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{4}} = a^0$$

$$1-x+\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{4} = 0$$

$$x = 3.$$

$$c) \quad \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^9}} + 3^{2x-4} = \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^{13}}} + 3^{2x-3}$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}} - 2^{3x-\frac{13}{2}} = 3^{2x-3} - 3^{2x-4}$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}} (1 - 2^{-2}) = 3^{2x-3} (1 - 3^{-1})$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}} \cdot \frac{3}{4} = 3^{2x-3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{3x}}{2^{\frac{9}{2}}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^{2x}}{3^3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5} = \frac{2^2}{3^{\frac{10}{2}}}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^x = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$x = \frac{5}{2}.$$

§ 41. Umišljena ali imaginarna in skupna ali kompleksna števila.

I. Sodi koren iz negativnega števila (v znakih $\sqrt[n]{-A}$) se ne da določiti s pomočjo algebraskih celih, ulomljenih in iracijonalnih števil; zakaj ni najti števila, katero zmnoženo s korenskim eksponentom $2n$ bi dalo rezultat $= -A$. Zato moramo sode korene iz negativnih števil smatrati za neko novo vrsto števil. Ta števila se zovejo umišljena ali imaginarna števila, ker nimajo stvarne podlage; cela, ulomljena in iracijonalna števila pa se imenujejo stvarna ali realna števila. V naslednjem se hočemo

Umišljeno število
= imaginäre
Zahl.

Stvarno število
= reelle Zahl.

le na obliki $\sqrt{-A}$ in $\sqrt{-1}$ imaginarnih števil ozirati. Številni izraz $\sqrt{-1}$ se imenuje imaginarna enota in se zaznamuje navadno s črko i .

Pojasnilo imaginarnega števila in imaginarne enote.

Občno pojasnilo o korenih je: Vsak koren ($\sqrt[n]{A}$), vzumnožen s korenskim eksponentom, da radikand za rezultat, v znakih $(\sqrt[n]{A})^n = A$. To pojasnilo velja tudi pri imaginarnih številih; torej je

$$(\sqrt{-A})^2 = -A \text{ in } (\sqrt{-1})^2 = -1, \text{ t. j.}$$

Imaginarno število je tisto, katerega kvadrat je enak negativnemu realnemu številu.

Imaginarna enota je tista, katere kvadrat je enak negativni realni enoti.

Kako se računa z imaginarnimi števili.

Navadna oblika imaginarnega števila pri računanju.

Ker imajo računski zakoni o korenih zgoraj navedeno pojasnilo za podlago, zato veljajo vsi ti zakoni tudi pri imaginarnih številih.

Vsako imaginarno število se da smatrati za produkt iz realnega števila in imaginarne enote; zakaj po računskih zakonih najdemo

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A \cdot (-1)} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{-1} = ai,$$

ker je $a = \sqrt{A}$ in $i = \sqrt{-1}$.

Kadar je treba računati z imaginarnimi števili, se ta števila najprej pretvorijo na obliko ai in potem se z njimi računa kakor z realnimi števili; številni znak i se smatra kakor občno število ali kakor faktor, pri katerem si je treba zapomniti, da je $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1$, i. t. d. N. pr.

$$\begin{aligned} a) \quad & 3\sqrt{-64} - 7\sqrt{-9} + \sqrt{-12\frac{1}{4}} - 2\sqrt{-2\frac{1}{4}} = \\ & = 24i - 21i + \frac{1}{2}i - 3i = \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & (2\sqrt{-27} + \sqrt{-75} - 5\sqrt{-8}) \cdot 2\sqrt{-6} = \\ & = (6i\sqrt{3} + 5i\sqrt{3} - 10i\sqrt{2}) \cdot 2i\sqrt{6} = \\ & = (11i\sqrt{3} - 10i\sqrt{2}) \cdot 2i\sqrt{6} = -66\sqrt{2} + 40\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & (26\sqrt{-20} + 39\sqrt{-35} - 65\sqrt{-45}) : 13\sqrt{-5} = \\
 & = (52i\sqrt{5} + 39i\sqrt{35} - 195i\sqrt{5}) : 13i\sqrt{5} = \\
 & = (39i\sqrt{35} - 143i\sqrt{5}) : 13i\sqrt{5} = 3\sqrt{7} - 11.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad & (-5\sqrt{28}) : (-3\sqrt{-7}) = (-10\sqrt{7}) : (-3i\sqrt{7}) = \\
 & = (-10i\sqrt{7}) : (-3i^2\sqrt{7}) = (-10i\sqrt{7}) : 3\sqrt{7} = -\frac{10}{3}i.
 \end{aligned}$$

II. Vsota iz realnega in imaginarnega števila se imenuje skupno ali kompleksno število, v znakih $a + bi$, kjer pomeni a realni, bi pa imaginarni del kompleksnega števila $a + bi$.

Skupno število
= komplexe
Zahl.

Številni izraz $a + bi$ je obča oblika vsakega mogočega števila; zakaj ta izraz predstavlja za $b = 0$ vsa mogoča realna števila, za $a = 0$ vsa čisto imaginarna števila, za $a = 0$ in $b = 0$ ničlo (začetek štetja) in za slučaj, da sta a in b različna od ničle, vsa kompleksna števila.

Realnim in imaginarnim številom je ničla skupna.

Kompleksni števili $a + bi$ in $a - bi$, ki se razlikujeta le v predznaku imaginarnega dela, se imenujeta spojeno kompleksni.

Spojeno kompleksni števili =
konjugiert komplexe Zahlen.

Dve kompleksni števili $a + bi$ in $c + di$ sta enaki, ako sta njuna realna (a in c) in imaginarna dela (bi in di) med seboj enaka.

Iz zgoraj navedenih pojasnil sledi, da se s kompleksnimi števili računa istotako kakor z realnimi števili; s številnim znakom i se ravna kakor z realnim faktorjem in namesto i^2 se postavi -1 . Račun s kompleksnimi števili je izvršen, če ima rezultat obliko kompleksnega števila. Primerjaj naslednje izvršene račune!

Kako se računa s kompleksnimi števili.

$$a) \quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

$$b) \quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

$$c) \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

$$d) \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

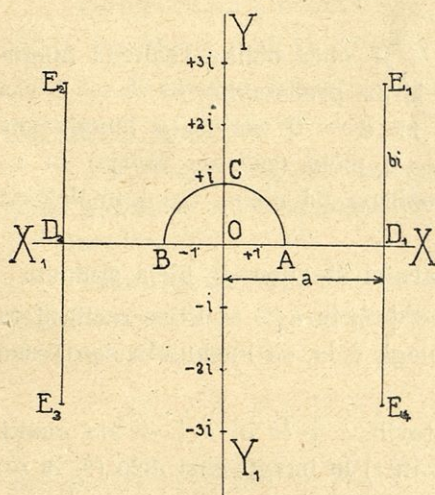
Računski rezultati kompleksnih števil so navadno kompleksna števila. Vsota in produkt dveh spojeno kompleksnih števil sta realni števili. N. pr.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Kako predočujemo s sliko imaginarna in kompleksna števila.

Imaginarna števila in njih zvezo z realnimi števili predočujemo v sliki tako-le. Iz enačbe $i^2 = -1$ sledi sorazmerje $(+1):i = i:(-1)$, t. j. imaginarna enota je srednja geometrijska sorazmernica med pozitivno in negativno (realno) enoto.



Če predstavlja OA pozitivno, OB negativno enoto in ako narišemo nad daljico BA polukrog in $OC \perp BA$, je $OA:OC = OC:OB$, torej $OC = i$. Ako načrtamo daljico OC večkrat na premici YY_1 v smer OY in OY_1 , dobimo v smeri OY pozitivna imaginarna števila $+i, +2i, +3i, \dots$, v smeri OY_1 pa negativna imaginarna števila $-i, -$

$-2i, -3i, \dots$. Vrsta imaginarnih števil stoji torej pravokotno z ozirom na vrsto realnih števil.

Kompleksno število $a + bi$ predočimo v sliki, ako predočimo realni del $a = OD_1$ in imaginarni del $bi = D_1E_1$. Točke sekajočih se premic XX_1 in YY_1 predstavljajo nepretrgani vrsti oziroma realnih in imaginarnih števil in določujejo ravnino, v kateri predstavlja n. pr. točka E_1 kompleksno število $a + bi$. Kakor točka E_1 predočuje tudi vsaka druga točka te ravnine neko kompleksno število, n. pr. točka E_2 predstavlja kompleksno število $-a + bi$, točka E_3 kompleksno število $-a - bi$ in točka E_4 kompleksno število $a - bi$.

Vadbe in naloge.

K § 1.

Ako je a neko število naravne številne vrste, kako se glasi naslednje število? Kako se glasi število, ki je za 2, 3, 5, b enot večje od a ?

K § 2.

1. Kakšen pomen imajo izrazi $x + y + z$, $(x + y) + z$, $x + (y + z)$?

2. Izračunaj na pamet po računskih zakonih:

a) $37 + 52$; b) $86 + 79$; c) $217 + 47 + 58$.

3. Izračunaj na najkrajši način:

a) $73 + 49 + 7$; b) $73 + 49 + 1$; c) $237 + 992 + 8$;
d) $96 + 65 + 4 + 35$; e) $9994 + 893 + 7 + 6$;
f) $115 + 286 + 97 + 3 + 14 + 85$.

4. Pojasni s pomočjo računskih zakonov seštevanje mnogomenskih števil! N. pr.

a) $8^{\circ} 17' + 90^{\circ} 28'$; b) $27^{\circ} 31' 45'' + 54^{\circ} 28' 36''$.

5. $2a + 7a + 13a + 8b$. 6. $3a + 4b + 5a + 8b + 9a + 10b$.

7. $a + 2b + 3c + 4a + 6b + 8c + 5a + 7b + c$.

8. $(2a + 3b + 4c) + 3a$.

9. $[(7m + 8n) + 3m] + 5n$.

10. $9m + (8m + 4n)$.

11. $6n + (4m + 5n + 2p)$.

12. $3a + [7b + (5a + b)]$.

13. $(7a + 8b) + (9a + 6b) + (2a + 4b)$.

14. $\{15a + [5a + (7b + a)]\} + 2b$.

15. $[3x + 4y + 2z] + [6x + 4y + 5z] + [2x + 3y + 7z]$.

16. $[(2a + 3b) + (5a + 2b)] + \{[4a + (5a + b)] + 6b\}$.

17. Zameni $a = 4$ in $b = 5$ v 16. nalogi.

K § 3.

1. Ako je m število naravne številne vrste, kako se glasi potem število, ki je za 1, 5, n enot manjše od m ?

2. Katero število je za $3x$ večje od $2a - 3x$?

Izvrši na različne načine:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 3. $32a - 9a - 14a$. | 4. $304b - 176b - 37b - 58b$. |
| 5. $26a - 25b - b - a$. | 6. $45a - 7x - 37x - 8a$. |
| 7. $27 - (15 + 10)$. | 8. $9a - (6a + 2a)$. |
| 9. $65 + (47 - 36)$. | 10. $17a + (15a - 8a)$. |
| 11. $246 - (146 - 58)$. | 12. $25x - (17x - 15x)$. |

Razreši po računskih zakonih:

- | | |
|---|-------------------------------|
| 13. $(9m + 2n) - 6m$. | 14. $[(3x + 5) + 2x] - 4$. |
| 15. $(7m - 3a) + 2a$. | 16. $(8x - 4y) + 7x$. |
| 17. $[(5z - 7) + 3z] + 4$. | 18. $(3a - 4) - 6$. |
| 19. $(16y - 8x) - 8y$. | 20. $[(5x - 2) - 2x] - 3$. |
| 21. $7a + (3a - 2b)$. | 22. $15m + [(4m - 3) + 2]$. |
| 23. $(6x + 4y) - (3x + 2y)$. | 24. $5m - [(2m + 3a) + 2m]$. |
| 25. $5y - (8z - 3y)$. | 26. $(8a + 4b) - (4a - 5b)$. |
| 27. $(2x - 4) - (x - 1)$. | 28. $3a - [4b - (4a - 5b)]$. |
| 29. $(78a + 52b + 37c) + (48b - 39c) - (58a - 60c)$. | |
| 30. $(7a + 5b) - [4a - (3b + 2a)]$. | |
| 31. $8a - \{4a - [3b - (2a - b)]\}$. | |
| 32. $(8a - 7b) - [(5a - 4b) - (2a - b)]$. | |
| 33. $8a + (7b - 5a) - [(4b - 2a) - b]$. | |
| 34. $8a - (7b - 5a) - [4b - (2a - b)]$. | |
| 35. $(8a + 7b) - [5a - (4b - 2a) - b]$. | |

36. Zameni $a = 4$ in $b = 3$ v nalogah 34. in 35.!

37. Pojasni s pomočjo računskih zakonov odštevanje mno-goimenskih števil. N. pr.

a) $18^{\circ} 47' 53'' - 16^{\circ} 18' 25''$; b) $52^{\circ} 17' 38'' - 45^{\circ} 33' 51''$.

38. Katero število je treba $7a - (3b - 1)$ prišteti, da dobiš $5a + 5b$?

39. Katero število moraš od števila $8x - 4y$ odšteti, da dobiš $2x - (2y + 2)$?

40. Od katerega števila moraš $8a - 4b$ odšteti, da dobiš $2a - (2b + 2)$?

41. Pretvori $3a - (b + c)$ v razliko z minuendom a) $4a$, b) $2a$, c) $3a + b$, d) $3a - 1$, e) $5a - 2$!

K § 4.

1. Kaj dobiš, ako spojiš s številom $+12$ (oziroma -12) osem pozitivnih (negativnih) enot?

2. Do katerega števila prideš v podaljšani številni vrsti, ako šteješ od števila $+5$ (oziroma -5) za 7 enot a) naprej, b) nazaj?

3. Kako se moraš pomikati in za koliko enot, da prideš v podaljšani številni vrsti od števila $+6$ (oziroma -6) do števila $+15$, -14 ?

4. Koliko in kakšne enote moraš spojiti s številom $+3$ (oziroma -3), da dobiš -11 , $+9$?

K § 5.

- $(-27) + (-56) + (+116) + (+89) + (-173)$.
- $(+48a) + (-25b) + (+7a) + (-55a) + (+37b)$.
- $(+3a) + (-7b) + (-13c) + (+9b) + (-8c) + (+11a)$.
- $35a - 46b + 59c + 16b + 21c - 33a - 44c + 28b - 5a$.
- $(-4a + 7b) + (19a - 13b) + (-38a + 20b)$.
- $(13a - 25b + 16c) + (-14a - 19b + 25c) + (29a - 31b - 40c)$.
- $(403x - 621y + 59z - 108) + (-317x + 501y + 69z - 92)$.

K § 6.

- $25 - (-13)$.
- $(-25) - (+13)$.
- $(-25) - (-13)$.
- $7a - (-4a)$.
- $(-5a) - (-3a)$.
- $(-12a) - (+6a)$.
- $(+18) - (-17) - (+25) + (-9) + (-16)$.
- $(-4x) + (-2x) - (-x) + (+9x) - (+8x)$.
- Izračunaj vrednost številnega izraza:

$$x - (x - 2) + (x - 4) - (x + 6) - (x + 8) + (x - 10)$$

za $x = -4$!

10. $(7a - 18b) - (10a + 7b) + (-3a + 5b)$.
 11. $(3x + 2y) - (6x - 8y) - (-2x + 5y) + (-4x + 3y)$.
 12. $2a - [14 - (3 - 7a)] + [9 - (-2 + 8a)]$.
 13. $45 - [18 - (m - 2)] - [15 - (5 - 4m)]$.
 14. $(8x - 6y) + (2x - 4y) - [(4x + 3y) - (8x - 5y) - (-x + 2y)]$.
 15. $(5a - 7b) - [(3a - b) - (-2a + 3b)] - [(7a - 2b) - (3a + b)]$.
 16. $2m - 3n - \{2m - [-2m + 3n - (2m + 2n) - (-2m + 3n)]\}$.
 17. $6x - 7y - \{-6x + 7y - [(6x - 7y) - (-6x + 7y) - 6x]\}$.
 18. $832x - \{417y + [469x - (315y - 178x) + (-305x + 408y)]\}$.
 19. Izračunaj
 a) $A + (B - C - D)$; b) $A - (B - C - D)$;
 c) $A - (B - C) - D$; d) $A + B - (C - D)$
 za: $A = 7x - 8y + 9z$, $B = 6x + 5y - 6z$,
 $C = -12x + 13y - 11z$, $D = 2x - 3y - 4z$,

K § 7.

Razreši naslednje enačbe:

1. $x + 5 = 12$. 2. $x + a = 0$. 3. $x - 5a = a$.
 4. $36 - x = 10$. 5. $6a - x = 4a$. 6. $a - b - x = 0$.
 7. $4 + 3x = 6 + 2x$. 8. $6x - 9 = 9 + 5x$.
 9. $4 - 7x = 10 - 8x$. 10. $9a - 7x = 4a - 6x$.
 11. $30 - (x + 4) = 10$. 12. $(x - 4) - 30 = 10$.
 13. $9 - (5 - 2x) = 3x + 1$. 14. $(5x - 10) - 2x = 2x - 3$.
 15. $20 - (5 - y) = 6y - (20 + 4y)$.
 16. $(5 - x) - (4 - x) = (2x - 6) - (8 + x)$.
 17. $20 + [23 - (11 + y)] = 46$.
 18. $4a - [(3a - 2x) - (4a - x)] = (5a - 6x) - (7a - 8x)$.
 19. Pretvori naslednje neenačbe na najpreprostejšo obliko:
 a) $3x - 7 > 2x + 1$; b) $6x + 8 < 7x + 5$;
 c) $2x - 3a + 5 < 3x - 4a - 2$;
 d) $4a - 5x - 6 > 5a - 6x - 4$.

20. Katera cela števila zadostujejo naslednjim pogojem :

- a) $2x + 3 < 3x + 5 < 6 + 2x$; b) $5x - 6 < 6x - 3 < 5x - 3$;
 c) $4x < 5x + 8 < 4x + 3$; d) $x - 2 < 2x - 1 < x + 1$.

K § 8.

1. $9x^2 \cdot 8a^3 \cdot 3a^4$. 2. $5a^2 \cdot 6b \cdot 7ab$. 3. $9x^2 \cdot 6y \cdot 3xy^2$.
 4. $5xy^2 \cdot 4ax^2 \cdot 2ay$. 5. $(+3) \cdot (+7)$. 6. $(-5) \cdot (+9)$.
 7. $(+1) \cdot (-6)$. 8. $(-4) \cdot (-13)$. 9. $(-15ax^2)(-4ax^2y)$.
 10. $(-4x^2y^3) \cdot 13ax^4y^2$. 11. $2m^2(-3am^2)(-4ab)(+abc^2)$.
 12. $(-a^3x^4)(+4ab^3y^2)(-5b^2x^2y^3)(-6a^2bx^3y^4)$.
13. Izračunaj vrednosti izrazov:
- a) $(a - 2b)(a + b)(a - 4b)(a + 3b)$, ako je $a = b$;
 β) $(31a - 21b)(17a - 28b)(12a - 16b)$,
 ako je $a = 5$ in $b = 7$.
14. $(a^2 - 2ab + b^2)7a^3b$. 15. $5a^4(9a^3 - 7a^2 - 3a + 5)$.
 16. $(5a^2 - 3ab + b^2) \cdot (-3ab)$. 17. $(-2xy^2)(3x^2 - 5xy + 7y^2)$.
 18. $[(2m - 3n)m^2 + (4m - 5n)n^2]7mn^2$.
 19. $[x^2y^3(5x - 7y^4) + 2xy^2(-3x^2y + 5xy^5)]9x^3y$.
 20. $[2ab(-4a + 5b) - 3ab(a - 7b)] \cdot (-6a^2b)$.
 21. $[3xy^2(-x^2 + 2xy - 5y^2) - x^2y(4x^2 - 5xy - y^2)](-2xy^3)$.
 22. $(5x - 2y)(3x - 2y)$. 23. $(2x^2 - 5y)(7x^2 + y)$.
 24. $(3x + 5x^2 + 6x^3)(5 - 2x)$.
 25. $(-2a^2 + 3ab - 4b^2)(-5a + 7b)$.
 26. $(6x - 7y + 8)(6x + 10y - 8)$.
 27. $(5x^2 - x + 4)(2x^2 - 5x - 3)$.
 28. $(5a + 3b)(7a + 5b)(3a + 4b)$.
 29. $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)$.
 30. $(3x + 5)(2x - 3)(x - 1) - (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.
 31. $(2y + 1)(3y + 5)(y + 1) + (y - 1)(y - 2)(-y + 3)$.
 32. $(3a^4 - 2a^3b + 5a^2b^2 - ab^3 + 4b^4)(9a^2 - 6a + 5)$.
 33. $(a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2)(a^3b - 2a^2b^2 + 2ab^3)$.
 34. $(7a + 8n)^2 + (4a - 5n)^2 - (8a - 9n)^2$.
 35. $(9x - 7y)^2 + (11y - 6x)^2 - (14x - 9y)^2$.

36. $(3a + 2b)^3 - (2a - 3b)^3 + (a - 4b)^3$.
 37. $(4x + 5y)^3 + (2x - 7y)^3 - (3x - 8y)^3$.
 38. $(5a - 1)(5a + 1)(25a^2 + 1)$.
 39. $(3a + 4b)(3a - 4b)(9a^2 + 16b^2)$.
 40. $(xy + z)(xy - z)(x^4y^4 + z^4)(x^2y^2 + z^2)$.
 41. $(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)(x + y)$.
 42. $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$.
 43. $(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)(x + y)$.
 44. $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$.
 45. $(x^{m+3} - 2x^{m+2}y + 3x^{m+1}y^2 - 4x^my^3)(x^2 + xy + y^2)$.
 46. $(5a^4x^m - 7a^3bx^{m-1}y^n + 9a^2b^2x^{m-2}y^{2n} - 11ab^3x^{m-3}y^{3n} + 13b^4x^{m-4}y^{4n}) \cdot (3a^2x^3 + 2abx^4y^n + b^2x^5y^{2n})$.
 47. $[x^2 + (a + b)x + (a^2 + b^2)][x^2 - (a - b)x + (a^2 - b^2)]$.
 48. $6x\{x - x[3x - (x - 1)^2] - x(x + 1)(x - 1)\} - x$.
 49. $(a^{4m} + 3a^{3m}b^n + 5a^{2m}b^{2n} + 7a^mb^{3n} + 9b^{4n})(a^m - b^n)$.
 50. Zameni $A = 5x - 3y$, $B = 2x - 1$ in $C = 1 - 2y$ v naslednjih izrazih ter izračunaj njih vrednosti:
 a) $2AB - 3AC - BC$; b) $(A^2 - 2BC)(B - C)$;
 c) $AB - C^2$; d) $(A^2 - B^2)C - (B^2 + C^2)A$.

K § 9.

1. $35abc : 7ac$. 2. $81mn : 27n$.
 3. $48a^3x^5 : 6a^2x^3$. 4. $72x^2y^3 : 8xy^2$.
 5. $63abx^3y^4 : 7ax^3y^4$. 6. $144a^5b^3m : 16a^3b$.
 7. $80a^{m+3}b^{n+2}x^2 : 16a^3b^2x$. 8. $27a^4b^2x^{m+5}y^{2n} : 9abx^4y^n$.
 9. $45a^{m+5}x^{n+6} : 3a^3x^5$. 10. $20a^mb^nx^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$.
 11. $(-24xy) : (-8y)$. 12. $(-27a^5b^3c^4) : 9a^3b^2c$.
 13. $18a^4x^2y^3 : (-2a^2x^2y)$. 14. $(-91a^{2m}b^{3n}) : (-13a^{m+2}b^{2n-2})$.
 15. $(5a^3b^2 : ab^2) \cdot 6a^3b^2$. 16. $(21a^2x^5 : 3ax^4) \cdot (-6a^2b^3x)$.
 17. $[(-18x^2y^3z) : 2xy] \cdot (-8x^2y^2z^3)$. 18. $(25a^2b^3x : 5ab) : b^2x$.
 19. $[21m^3n^2 : (-7m^2)] : (-3mn)$.
 20. $(45a^6b^4x^3 : 15a^2b^3x) \cdot (15a^3b^2 : 3a^2b)$.
 21. $[(-48x^3y^4z^5) : 6xy^2z^3] \cdot [18x^5y^4z^3 : (-3xy^2z^3)]$.

22. $[27a^7b^4x^{m+n+3} : (-3a^3x^n)] : (-3a^3b^2x^3).$
 23. $(24a^{m+2}b^nx^{m+4}y^{n+3} : 4a^mx^4y^3) : 3b^ny^n.$
 24. $[75a^{m+5}b^{n+5}x^{p+4} : (-5a^4b^3x)] : (-3ab^2x^3).$
 25. $\{[85a^5b^7c^9 : (-17a^3b^2c)] : (-5ab^2c^3)\} : (-b^2c^3).$
 26. $\frac{a+b}{c^2-d^2} \cdot (c+d).$
 27. $\frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot (x+y).$
 28. $\frac{5a}{12(a-b)} \cdot 6(a-b).$
 29. $\frac{a^2-b^2}{3(a+b)^2} \cdot 3(a+b).$
 30. $\frac{x+y}{x^2+y^2} \cdot (x-y).$
 31. $\frac{5(x^2+y^2)}{x^2-y^2} \cdot 2(x^2+y^2).$
 32. $42x^2y^5z^4 : \frac{6z^2}{7y}.$
 33. $18a^3c^4d^5 : \frac{3a^3d}{7c^2}.$
 34. $128a^7b^4 : \frac{16a^3b^3}{5x^2}.$
 35. $2m(m+1) : \frac{2m}{m-1}.$
 36. $\frac{15a^3b^2}{4mn} : 5a^2b.$
 37. $\frac{6a^2x^4}{5by} : 3ax^2.$
 38. $\frac{4m^2n^3}{5ab^2} : 3a^2b.$
 39. $\frac{5ab}{3(a+b)} : 2(a-b).$
 40. $b + [(b^2 + c^2) : \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2}] : (a + b).$
 41. $[128a^7b^4 : (16a^3b^2 : 4a^2b)] - [(128a^7b^4 : 16a^3b^2) : 4a^2b].$
 42. $\{(x^2 - y^2) : [(x - y) : (x + y)]\} - \{(x^2 - y^2) : (x - y)\} : (x + y).$
 43. $\frac{15a^2b + 25ab^2}{5ab}.$
 44. $\frac{24a^5b^4x^3 - 16a^3b^2x^2}{8a^2b^2x^2}.$
 45. $\frac{7(a^2 - b^2) + 8(a+b)^2 - 9(a+b)}{a+b}.$
 46. $\frac{90a(x^2 - y^2) + 15b(x - y)^2 - 45(x - y)}{15(x - y)}.$
 47. $(128a^3b^3 + 224a^7b^4 - 288a^6b^5 + 96a^5b^6) : (-8a^4b^2).$
 48. $(125x^3y^4 + 250x^4y^5 - 325x^5y^6 - 400x^6y^7 + 625x^7y^8) : (-25x^3y^4).$
 49. $(3x^4 + 5x^3 + x^2 - 10x - 14) : (3x^2 + 5x + 7).$
 50. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2).$
 51. $(9x^2 - 16y^2) : (3x + 4y).$
 52. $(81m^4x^2 - 64y^2) : (9m^2x - 8y).$
 53. $(27x^3 - 343y^3) : (3x - 7y).$
 54. $(16a^8 - 81b^4) : (2a^2 - 3b).$
 55. $(a^3 - b^3) : (a - b).$
 56. $(a^5 + b^5) : (a + b).$
 57. $(a^4 - b^4) : (a - b).$
 58. $(a^6 - b^6) : (a + b).$
 59. $(5a^5 + 2a^4b - 7a^3b^2 - a^2b^3 + 2ab^4 - b^5) : (5a^2 - 3ab + b^2).$

60. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4) : (-3 + 8x + 6x^2)$.
61. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5) : (-1 + 6x + 9x^2)$.
62. $(4m^6n^4 - 3m^5n^6 - 16m^4n^8 - 27m^3n^{10} - 18m^2n^{12}) :$
 $:(m^3n^2 - 2m^2n^4 - 3mn^6)$.
63. $(113a^2b^2 - 136a^3b + 35a^4 + 12b^4 - 64ab^3) : (5a^3 + 11ab^2 - 18a^2b - 6b^3)$.
64. $(-4x^4 + 9x^5 + 9x^6 + 18x - 14 - 27x^3 - 21x^2) :$
 $:(5x^3 - 10x + x^2 - 14 + 3x^4)$.
65. $(9m^{10} + 2m^6n^4 - 12m^4n^6 - 7m^2n^8 - 4n^{10}) : (3m^6 - 2m^4n^2 + m^2n^4 - 4n^6)$.
66. $(36x^2 - 25y^4 + 10y^2z^3 - z^6) : (6x - 5y^2 + z^3)$.
67. $(2x^5 + 6x^4 - 41x^3 + 47x^2 - 21x + 22) : (x^2 + 5x - 11)$.
68. $(a^9 - 24a^6x^3 + 192a^3x^6 - 512x^9) : (a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8x^3)$.
69. $(-48a^5x^7 - 87a^3x^3 + 12a^{11}x + 147a^7x^5) : (2a^5x - 3a^4x^2 - 5a^3x^3 + 4a^2x^4)$.
70. $x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n} : (x^{2m} - y^{3n})$.
71. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} + x^{2n+2}y^{m+1} - x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2)$.
72. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2)$.
73. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5)$.
74. $[(120 - 326a + 329a^2 - 146a^3 + 24a^4) : (4 - 3a)] :$
 $:(6 - 7a + 2a^2)$.
75. $(12x^4 - 17x^3 + 16x^2 - 7x + 2) : [(-9x^3 + 12x^2 - 7x + 2) :$
 $:(-3x + 2)]$.

K § 10.

- $(2 - x)(3 - x) = (4 + x)(3 - x)$.
- $(2 + x)(2x + 1) + (2 - x)(2x - 1) = 0$.
- $(3x - 6)(7x - 13) = (3x - 2)(7x - 19)$.
- $(x + 2)(x + 3) - 4 = (x + 4)(5 + x) - 10$.
- $(5 - 6x)(2 - 3x) = 3[(4 - 5x) - 6x(1 - x)]$.
- $[3(y - 2) - 5]5 - 4(2y - 6) = y - 19$.
- $5(y + 10) - 4[160 - 3(3y - 2) + 2y] = 2 - y$.
- $3[4(3 - y) - y] - 70 = 5[3 + (2y - 7)] - 7(y + 5) + 3$.
- $3x - \{6x - 3[3x - (4x - 5)]\} = 3$.
- $2x - 2\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} = 0$.

11. $(y + 8)^2 + (y + 3)^2 = (y + 12)^2 + (y - 5)^2$.
12. $(13x + 3)^2 - (5x + 10)^2 = (12x - 3)^2$.
13. $a^2(x - b) - b^2(x - a) = a^2(a - x) - b^2(b - x)$.
14. $x(x - 2a) - (b - x)^2 = 3b^2 - 4a^2$.
15. $(x - a)^2 - (x - b)^2 + 3(a - b)^2 = 0$.
16. $7(y - ab) = (a + b)^2 + 3(y + b^2) + a(3a - b)$.
17. $(3x - 4)^3 - (2x - 3)^3 = 19x^3 - 8x(9x - 10) + 3$.
18. $2(x + 1)^3 + 7(x - 4)^2 + 2(25x - 1) =$
 $= (x + 2)(x + 5)(x + 6) + x^3$.
19. $(16x^2 - 9) : (4x + 3) = 3x + 4$.
20. $(9y^2 - 12y + 4) : (3y - 2) = 5y - 8$.
21. $(8y^3 - 27) : (2y - 3) = (2y - 6)(2y + 1) - 1$.
22. $(6y^4 - 5y^3 + 4y^2 + 11y - 4) : (2y^2 - 3y + 4) =$
 $= 3y^2 - 5y + 13$.
23. $(x^4 - 8x^2 + 16) : (x^2 + 4x + 4) = (x + 2)(x - 2)$.
24. $(8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 2x - 24) : (4x^2 - 5x - 6) =$
 $= 2(x - 3)(x + 4) - 2$.
25. Katera cela števila ustrezajo naslednjim neenačbam :
 - a) $3x + 29 < 6x + 5 < 3x + 23$;
 - b) $8x - 5 < 12x + 15 < 8x + 3$;
 - c) $6 - 9x < 21 - 6x < 15 - 9x$;
 - d) $5x + 12 > 9x - 12 > 5x - 4$.

K § 11.

1. Pretvori števila a) 35624 [7], b) 32045 [6], c) 72085 [9] v dekadična števila!

2. Pretvori dekadična števila a) 9958, b) 14195, c) 68520 v številni sestav [6], oziroma [9]!

3. Pretvori:

- a) 460213 [7] v številni sestav [4];
- b) 510423 [6] „ „ „ [5];
- c) 627534 [8] „ „ „ [9]!

K § 12.

1. Določi, s katerimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25 in 125 so deljiva sledeča števila:

- a) 312, 6225, 17280, 71016, 948656;
 b) 720, 6472, 76450, 484572, 567000;
 c) 534, 8625, 10692, 734520, 350496.

2. Določi praštevila naravne številne vrste od 1 do 100!

K § 13.

1. Določi, ali so naslednja števila praštevila: 763, 829, 1003, 1739!

2. Razstavi na prafaktorje: 2268, 3075, 5376, 3828, $72a^3b^2$, $60ax^2z^4$!

Razstavi na prafaktorje:

3. $18ab - 15ac$. 4. $9x^2 - 24xy$. 5. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$.
 6. $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$. 7. $x^2 + 2x^2 - x - 2$.
 8. $a^3 + 2a^2b - ab - 2b^3$. 9. $x^3 - 5x^2 + 9x - 45$.
 10. $2a^2x - 6abx - a + 3b$.
 11. $10ax - 15bx - 20cx - 12ay + 18by + 24cy$.
 12. $4x^2 - 1$. 13. $9a^2 - 16b^2$. 14. $6x^2 - 54a^2$.
 15. $75a^3b^3 - 3ab$. 16. $27a^3b - 48ab^3$. 17. $(b + c)^2 - a^2$.
 18. $a^2 - (b - c)^2$. 19. $9a^2 - (2a - 3b)^2$. 20. $9b^2 - 12b + 4$.
 21. $9x^2 + 6x + 1$. 22. $16a^2 - 48ab + 36b^2$.
 23. $2a^4 - 4a^3 + 2a^2$. 24. $5x^3 + 10x^2 + 5x$.
 25. $4a^3b - 24a^2b^2 + 36ab^3$. 26. $b^2 + 4ab + 3a^2$.
 27. $x^2 + 19x + 70$. 28. $x^2 - 7x + 12$. 29. $a^2 - 9ab + 20b^2$.
 30. $5b^2 - 6ab + a^2$. 31. $7x^2 + 8xy + y^2$. 32. $x^2 + 4x - 5$.
 33. $a^2 + 5ab - 24b^2$. 34. $x^2 - 2x - 15$. 35. $b^2 - 4bc - 5c^2$.
 36. $3x^2 + 3x - 36$. 37. $4a^2 + 36ab + 80b^2$.
 38. $2x^2 - 12x - 32$. 39. $5x^2 - 15xy + 10y^2$.
 40. $x^3 + 1$. 41. $x^3 - 1$. 42. $x^4 - 1$.
 43. $x^5 + y^5$. 44. $x^5 - y^5$. 45. $x^6 - y^6$.
 46. $1 - 8x^3$. 47. $1 + 27a^3$. 48. $8 + 27x^3$.
 49. $x^6 + y^6$.

K § 14.

Razstavi naslednje številne izraze na prafaktorje ter poišči njih največjo skupno mero:

1. 840, 576.
2. 336, 432, 528.
3. 561, 1155, 13864.
4. 693, 819, 9450.
5. $15 a^3 b$, $54 a^2 b^4$.
6. $12 acx$, $16 abx^2$, $20 a^2 x^2$.
7. $2 ax + 4 bx$, $6 a^2 b + 12 ab^2$, $a^2 - 4 b^2$.
8. $4 a^2 + 4 ab$, $5 ab + 5 b^2$, $8 a^2 b + 8 ab^2$.
9. $a^2 + 3 a - 10$, $a^2 + 8 a + 15$.
10. $a^2 - 10 ab + 16 b^2$, $a^2 + 2 ab - 80 b^2$.
11. $x^2 - 2 xy - 8 y^2$, $x^2 + 2 xy - 3 xy^2 - 6 y^3$.
12. $8 x^5 y^2 - 8 x^3 y^4$, $4 x^4 y^2 - 8 x^3 y^3 + 4 x^2 y^4$.
13. $12 x^3 y^2 - 12 x^2 y^3$, $18 x^4 y^2 - 18 x^2 y^4$, $24 x^3 y - 48 x^2 y^2 + 24 xy^3$.

Poišči največjo skupno mero naslednjih številnih izrazov s pomočjo verižne delitve:

14. 20295, 13735.
15. 14539, 25728.
16. 15548, 18590.
17. 24955, 338625.
18. 1701, 6426, 10521.
19. 78375, 65835, 13432.
20. $2 x^4 - 9 x^3 + 17 x - 48$, $x^4 - 3 x^3 + 7 x - 15$.
21. $m^2 + 6 m + 8$, $m^3 - 3 m^2 - 4 m + 12$.
22. $4 m^3 - 16 m^2 + 23 m - 20$, $6 m^2 - 7 m - 20$.
23. $6 x^3 + 16 x^2 - 22 x + 40$, $9 x^3 - 27 x^2 + 35 x - 25$.
24. $3 x^4 - 8 x^3 + 11 x^2 - 8 x + 3$, $2 x^3 - 9 x^2 + 9 x - 7$.
25. $6 a^3 - a^2 - 22 a + 15$, $21 a^4 + 25 a^3 - 27 a^2 + 21 a - 20$.
26. $12 a^3 - 2 a^2 b - 5 ab^2 - b^3$, $9 a^3 + 5 ab^2 + 2 b^3$.
27. $5 x^3 - 18 x^2 y + 11 xy^2 - 6 y^3$, $7 x^2 - 23 xy + 6 y^2$.
28. $2 a^2 - 2$, $5 a^3 - 4 a - 1$, $6 a^4 - 5 a^2 - 1$.
29. $a^2 + 2 ab - 3 b^2$, $a^2 + 6 ab - 7 b^2$, $a^2 - 5 ab + 4 b^2$.
30. $x^2 + 3 xy + 2 y^2$, $x^2 + xy - 2 y^2$, $2 x^2 + 7 xy + 6 y^2$.

K § 15.

Razstavi naslednje številne izraze na prafaktorje ter jim poišči najmanjši skupni mnogokratnik:

1. 120, 168, 182.
2. 105, 144, 270.
3. 315, 441, 567, 378.
4. 720, 864, 1008, 1296.
5. 2, 14, 21, 49, 90, 91.
6. 4, 5, 6, 10, 25, 28.
7. 26, 35, 42, 52, 56, 60.
8. 16, 24, 32, 36, 40, 72.
9. $12b^2$, $15a^2$, $24ab^2$, $10b^3$, $18ab$.
10. $8x^2$, $54xy$, $64xy^2$, $80y^2$, $81x^2y$.
11. $5x + 10$, $20x^2 - 80$, $6x^2 + 24x + 24$.
12. $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$.
13. $3x^3y - 3x^2y$, $2x^2y^2 + 2xy^2$, $4x^4 - 8x^3 + 4x^2$.
14. $6x^2 - 3x$, $24x^4 - 6x^2$, $12x^5 - 12x^4 + 3x^3$.

Poišči naslednjim številnim izrazom najmanjši skupni mnogokratnik s pomočjo največje skupne mere:

15. 874, 943.
16. 6987, 8083.
17. 816, 765, 697.
18. 259, 3219, 7548,
19. $a^3 - 49a - 120$, $a^2 + 10a + 25$.
20. $6x^3 - 13x^2 - 45x - 25$, $x^3 + 2x^2 - 20x - 25$.
21. $a^3 - a^2b - 5ab^2 - 3b^3$, $a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3$.
22. $5a^4 + 7a^3b - ab^3 + b^4$, $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.
23. $4a^5 + 11a^4 + 8a^3 - 2a^2 - 4a - 1$,
 $3a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1$.
24. $x^3 - y^3$, $x^2 + xy + y^2$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
25. $2x^2 + x - 3$, $10x^2 + 19x + 6$, $4x^2 + 12x + 9$.
26. $8x^2 - 6xy - 5y^2$, $8x^2 - 14xy + 5y^2$, $4x^2 + 7xy - 15y^2$.

K § 16.

Uredi sledeče ulomke po njih kolikosti:

1. $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{29}{36}$.
2. $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{37}{40}$, $\frac{23}{48}$, $\frac{49}{60}$.
3. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{6}{35}$, $\frac{13}{42}$.

Pretvori sledeće ulomke na najmanjši skupni imenovalec:

4. $\frac{a}{b}, \frac{5a}{3b^2m}, \frac{3bc}{4m^2}, \frac{4ac}{5mx}, \frac{5cd}{12b^2m^2}, \frac{7acd}{18bmx}.$
5. $\frac{ab^2}{6x^3}, \frac{3ab}{10xy^2}, \frac{11a^2}{15x^2y}, \frac{7a^2b}{20xy}, \frac{13a}{24y^3}.$
6. $\frac{x}{x-1}, \frac{x^2}{x^3-3x+2}, \frac{x^3}{x-2}.$
7. $\frac{x+y}{x^2-xy}, \frac{x-y}{xy+y^2}, \frac{xy}{x^2-y^2}.$
8. $\frac{x+5}{x^2+x-2}, \frac{x+4}{x^2-4}, \frac{x+3}{x^3-x^2-4x+4}.$
9. $\frac{x}{x-1}, \frac{1}{x+1}, \frac{3x}{x^2-1}, \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}.$
10. $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1+a}{1-a}, \frac{1+a^2}{1-a^2}, \frac{1-2a+a^2}{1+2a+a^2}, \frac{1+2a+a^2}{1-2a+a^2}.$

Okrajšaj sledeće ulomke:

11. $\frac{126}{644}.$
12. $\frac{168}{540}.$
13. $\frac{391}{989}.$
14. $\frac{637}{819}.$
15. $\frac{2079}{7029}.$
16. $\frac{33017}{53293}.$
17. $\frac{12a^2x}{28ax^2}.$
18. $\frac{72mxy^3}{96nx^3y^2}.$
19. $\frac{121a^3b^2c^3}{132a^2b^4c^2}.$
20. $\frac{6a^2+9ab}{10a^2b+15ab^2}.$
21. $\frac{28a+21ab}{7a^2-14ab}.$
22. $\frac{15ax^2-10a^2x}{21bxy-14aby}.$
23. $\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}.$
24. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}.$
25. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}.$
26. $\frac{a^2-8a+15}{a^2-10a+21}.$
27. $\frac{a^2-7ab+12b^2}{a^2+ab-20b^2}.$
28. $\frac{a^2+6a-16}{a^2+5a-24}.$
29. $\frac{(a+b)^2-4c^2}{a^2-(b+2c)^2}.$
30. $\frac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}.$
31. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}.$
32. $\frac{x^3+x^2-3x-3}{x^3+x^2-4x-4}.$
33. $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-7x^2+15x-9}.$
34. $\frac{3x^3-10x^2-18x-35}{3x^3+17x^2+27x+28}.$

Izračunaj:

35. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ za $x = 2$.
36. $\frac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$ za $x = a$.
37. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}$ za $x = -2$.

$$38. \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - x^2 - 21x + 45} \text{ za } x = 3.$$

$$39. \frac{x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 6x + 45}{x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 9x + 54} \text{ za } x = 3.$$

$$40. \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12}{x^4 - 2x^2 - 8} \text{ za } x = -2.$$

K § 17.

$$1. \frac{3a+4}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} - \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}.$$

$$2. \frac{3x-5y}{5} - \frac{2x-3y}{10} - \frac{2y-5x}{15} + \frac{3y-x}{20} + \frac{x-y}{4}.$$

$$3. \left(\frac{5a^2}{4} - \frac{4ab}{3} + \frac{3b^2}{2} \right) - \left(\frac{4a^2}{5} - \frac{3ab}{4} - \frac{2b^2}{3} \right).$$

$$4. \left(\frac{4x}{9} - \frac{5y}{8} \right) + \left(\frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} \right) - \left(\frac{5x}{6} - \frac{7y}{20} \right).$$

$$5. \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}.$$

$$6. \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}.$$

$$7. a - b + \frac{a^2 + b^2}{a+b}.$$

$$8. x + y - \frac{x^2 + y^2}{x+y}.$$

$$9. a^2 + b^2 - \frac{a^4 - 2b^4}{a^2 - b^2}.$$

$$10. x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

$$11. \frac{2x+3y}{12x^2-18xy} - \frac{2x-3y}{12x^2+18xy}. \quad 12. \frac{x^2+5xy-y^2}{x^2+4xy+4y^2} - \frac{x-y}{x+2y}.$$

$$13. \frac{x^2-2xy-4y^2}{x^5-16xy^4} - \frac{x-2y}{x^4+4x^2y^2}.$$

$$14. \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} - \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}.$$

$$15. \frac{x^2-6x-27}{x^2-5x-36} - \frac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}.$$

$$16. \frac{x+2}{x^2+9x+20} + \frac{x^2+x-1}{x^2-2x-24}.$$

$$17. \frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}. \quad 18. \frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}.$$

$$19. \frac{2x-5y}{9x+3y} - \frac{6x+5y}{12x+4y} + \frac{3x+4y}{3x+y}.$$

$$20. \frac{2x+1}{x^2+3x+2} - \frac{3x+1}{x^2+4x+3} + \frac{4x+1}{x^2+5x+6}.$$

21. $\frac{3a+b}{3a^2-ab} - \frac{2a+3b}{12ab-4b^2} + \frac{3b^2-ab-6a^2}{18a^2b-6ab^2}.$
22. $\frac{a-b}{a^2+3ab+2b^2} + \frac{a+b}{a^2+ab-2b^2} - \frac{4ab}{2b^3+ab^2-2a^2b-a^3}.$
23. $\frac{5a-8b}{a+b} + \frac{3a-b}{a-b} - \frac{a-4b}{a+b} + \frac{a+5b}{a-b}.$
24. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{2a}{a^2+2ab+b^2}.$
25. $\frac{a+3}{a^2+3a+2} + \frac{a+1}{a^2+a-2} - \frac{a-1}{a^3+a^2-4a-4} - \frac{a-2}{a^3+2a^2-a-2}.$
26. $1 - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2-a+1}{a^2+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{a^2+a+1}{a^2-1} - \frac{2a-4}{a^4-1}.$
27. $z - \frac{y^2z-5xy^2z+x^3}{y^2-yz} + 2xy - \frac{2xy^2-z^2}{y-z} - 3xz.$
28. $\frac{5x^2}{18x^2-6y} - \frac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2} + \frac{x^2+6y}{6y} - \frac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}.$

K § 18.

1. $\frac{15ab}{16x^2y} \cdot 3a^2b.$
2. $\frac{24a^2b^3}{25x^4y^2} \cdot 5x^3y.$
3. $\frac{2a+5}{a^2-4} \cdot (a+2).$
4. $\frac{c-b}{bc} \cdot (b+c).$
5. $\frac{ab}{a^2-b^2} \cdot (a+b)^2.$
6. $\frac{a-3}{a^2-2a+1} \cdot 3(a-1).$
7. $\frac{x-y}{xy} \cdot (-2xy).$
8. $\left(-\frac{5x}{8y}\right) \cdot 6xy^2.$
9. $250ab^3 \cdot \frac{2x+3}{625ab^2}.$
10. $(x^2-4) \cdot \frac{x-2}{x^2+4x+4}.$
11. $(a^2-4b^2) \cdot \frac{a+2b}{a^2-3ab+2b^2}.$
12. $(1+a) \cdot \left(1+\frac{1-a}{1+a}\right).$
13. $\frac{27a^3b^2}{25x^2y^3} \cdot \frac{15xy^2}{a^2b}.$
14. $\frac{2ab}{cd} \cdot \left(-\frac{3acx}{2dm}\right).$
15. $\left(-\frac{33m^3}{4a^3x^3}\right) \cdot \left(-\frac{6a^4x^2}{11my^2}\right).$
16. $\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ab}.$
17. $\frac{x^2+4x+3}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{x+1}.$
18. $\frac{a^2+3a+2}{a^4-16} \cdot \frac{a^2-4}{a+1}.$
19. $\frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} \cdot \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x-5}.$
20. $\frac{a^2-2a-3}{a^2+2a-3} \cdot \frac{a^2+4a+3}{a^2-4a+3}.$

$$21. \left(1 + \frac{9-x}{x^2-5x-6}\right) \cdot \left(1 - \frac{x+2}{x^2+5x+6}\right).$$

$$22. \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{2n}{n^2-1}\right)(n+1).$$

$$23. \left(\frac{y^2+a^2}{a^3-a^2} - \frac{1}{a-1}\right)(a-1).$$

$$24. \left(\frac{3m}{m-1} - \frac{2m}{m+1} - \frac{m^2}{m^2-1}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right).$$

$$25. \left(\frac{y^2}{x^2+xy} + \frac{x^2}{xy-y^2} - \frac{x^2+y^2}{xy}\right)\left(1 - \frac{2y}{x+y}\right).$$

$$26. \left(a + \frac{ab-2}{a-b}\right)\left(a - \frac{ab-2}{a+b}\right) \cdot \frac{a-b}{a^2-2}.$$

$$27. \left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x}\right)^2.$$

$$28. \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)^2.$$

$$29. \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3.$$

$$30. \left(\frac{x}{2y} - \frac{3y}{x}\right)^3.$$

$$31. \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2+2ab+b^2} - \frac{a}{a+b} + \frac{a^2}{a^2-2ab+b^2}\right)\left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}\right).$$

$$32. \left[\frac{1}{x-y}\left(1 + \frac{2}{x+y}\right) - \frac{1}{x+y}\left(1 + \frac{3}{x-y}\right)\right] \cdot \frac{1}{2y-1}.$$

$$33. \left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{5a}{6} - \frac{2b}{5} + \frac{4b^2}{5a}\right) \cdot \frac{2a}{3b^2}.$$

$$34. \left(\frac{5x^2}{4y^2} - \frac{3x}{2y} - \frac{7}{12} + \frac{3y}{8x} + \frac{2y^2}{3x^2}\right) \cdot 24x^2y^2.$$

$$35. \left(\frac{x}{2y} - \frac{2x^2}{3y^2} + \frac{3x^3}{4y^3} - \frac{4x^4}{5y^4}\right)(x^2 + xy + y^2).$$

$$36. \left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{7x^2}{10} - \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right).$$

$$37. \left(\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{3a}{4b^2} - \frac{3}{5b} + \frac{3}{a}\right)\left(\frac{5a^2}{4b^2} - \frac{4a}{3b} + \frac{3}{2}\right).$$

$$38. \left(\frac{a^2}{2} - \frac{2ax}{3} + \frac{3x^2}{4}\right)\left(\frac{2a^2}{3} + \frac{3ax}{4} - \frac{4x^2}{5}\right).$$

$$39. \frac{105a^2b^3}{7xy^2} : 15ab^2.$$

$$40. \frac{2xy}{x+y} : (x-y).$$

$$41. \frac{57x^3y^2z}{16mn^2} : \frac{19x^2y}{8mn}.$$

$$42. \frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3} : \frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}.$$

$$43. (x+y) : \frac{x+y}{x-y}.$$

$$44. \left(a - \frac{a^2}{a-1}\right) : (a+1).$$

45. $\left(2 - \frac{y}{x+2y}\right) : (2x + 3y)$. 46. $\left(1 + \frac{2ab}{a^2 - 2ab + b^2}\right) : (a^2 + b^2)$.
47. $\left(a + b - \frac{a^2 + b^2}{a+b}\right) : (a+b)$. 48. $(x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.
49. $\left(4x^2 - \frac{1}{y^2}\right) : \left(2x + \frac{1}{y}\right)$. 50. $\frac{6a^2 + 5ab - 6b^2}{2a + 3b} : (3a - 2b)$.
51. $\left(1 - \frac{a-2b}{a+2b}\right) : \left(\frac{a}{a-2b} - \frac{2b}{a+2b}\right)$.
52. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} + 5\right) : \left(\frac{1}{x} + 1\right)$.
53. $\left(a^2 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab}\right) : \left(a + \frac{1}{b}\right)$.
54. $\left(1 - \frac{x-3y}{x+y}\right) : \left(\frac{3x+y}{x-y} - 3\right) : (x^2 - y^2)$.
55. $(x+3) : \left(1 - \frac{x+2}{x^2+5x+6}\right)$.
56. $\left(\frac{x-2}{6} - \frac{x-1}{8}\right) \left(\frac{x+1}{2} - x\right) : \left(2 - \frac{x+1}{3}\right)$.
57. $\frac{8a^3b}{27c} : \left(\frac{6a^2}{b^3} : 4b^2c^2\right)$. 58. $(a^2 - b^2) : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} : (a^3 - b^3)$.
59. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{25} - \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$.
60. $\left(\frac{12a^2x}{5b^3y} - \frac{6ax^2}{7b^2y^2} - \frac{18x^3}{11by^3} + \frac{24x^4}{13ay^4}\right) : 6a^2bx^2y$.
61. $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right)$. 62. $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$.
63. $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.
64. $\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right)$.
65. $\left(\frac{8a^6}{x^3y^3} - \frac{6a^4}{b^2y^2} + \frac{3a^2x^3}{2b^4y} - \frac{x^6}{8b^6}\right) : \left(\frac{4a^4}{x^2y^2} - \frac{2a^2x}{b^2y} + \frac{x^4}{4b^4}\right)$.
66. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right)$.
67. $\left(7a^4 - \frac{46}{3}a^3b + 27a^2b^2 - \frac{56}{3}ab^3 + 10b^4\right) : \left(\frac{a^2}{8} - \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{4}\right)$.

$$68. \left(\frac{16}{25}x^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{3}{8}y - \frac{1}{4} \right) : \left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \right).$$

$$69. \left(\frac{xy}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^3}{12y} - \frac{43x^4}{60y^2} - \frac{x^5}{20y^3} - \frac{4x^6}{5y^4} \right) : \left(\frac{x}{2y} - \frac{2x^2}{3y^2} + \frac{3x^3}{4y^3} - \frac{4x^4}{5y^4} \right).$$

$$70. \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{8}}{1 - \frac{15}{32}}.$$

$$71. \frac{\frac{2xy}{3} - \frac{3y^2}{4}}{\frac{8x}{9} - y}.$$

$$72. \frac{\frac{a^2+b}{a^2} - \frac{a+b^2}{b^2}}{\frac{b-a}{ab}}.$$

$$73. \frac{\frac{am}{a-m} + m}{3m + \frac{am}{a-m}} - \frac{\frac{am}{a-m} + 2a}{\frac{am}{a-m} + 4a}.$$

$$74. \frac{\left(\frac{x+y}{3} - \frac{y}{4} \right) \left(\frac{2}{3} + \frac{y}{3x} \right)}{\left(4x - \frac{y^2}{x} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{x+y}{x} \right)}.$$

$$75. \frac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \frac{4x + \frac{4x^2}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}.$$

$$76. \frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} : \frac{a+b}{a-b}.$$

$$77. \frac{\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}}{\frac{a-b}{a+b}} : \frac{a}{a - \frac{b^2}{a}}.$$

$$78. \frac{\frac{a-b}{a+b} - \frac{a-2b}{3a+4b}}{\frac{2a+3b}{3a+4b}} : \frac{1}{a + \frac{3b}{2}}.$$

$$79. \frac{\frac{a^2}{4} + b}{\frac{a-b}{a+b} - 2} : \left(\frac{3a-4}{3 + \frac{a}{b}} - a \right).$$

Razreši sledeće enačbe:

$$80. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} - 9 = x - \frac{x}{11} + \frac{23}{66}.$$

$$81. \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{7}{4} - \frac{x-1}{4}.$$

$$82. \frac{x}{10} + \frac{x+5}{15} - \frac{5x+4}{18} + \frac{5x-2}{24} = 2.$$

83. $\frac{x-5}{5} - \frac{4-x}{4} + \frac{x-2}{2} = 50 + \frac{3-x}{3}.$
84. $3 - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = \frac{3x}{4} \left(2 - \frac{3}{x}\right) - 34\frac{1}{2}.$
85. $\frac{3x-8}{16} + 7 \left(\frac{x-4}{5} - \frac{x-6}{9}\right) = 4 + \frac{3x-16}{4}.$
86. $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{4}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{5x}{4} + 10\right) = 4.$
87. $\frac{4}{5} (3x - 7) - 22 = \frac{3}{7} \left[\frac{7}{9} (8x - 63) - (2x + 3)\right].$
88. $\frac{x-20}{11} - 3 \left[\frac{x-30}{7} - \frac{x-40}{8} + 2 \left(\frac{x-60}{9} - \frac{x-80}{8}\right)\right] = 5.$
89. $\frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2} + \frac{6}{x^2-4} = 0.$
90. $\frac{7}{x-1} - \frac{3}{x-3} = \frac{10}{x-2}.$
91. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}.$
92. $\frac{x-1}{6x^2+2x} - \frac{3x-6}{18x^2-2} = \frac{5}{42x^2-14x}.$
93. $\frac{3x+1}{12x-8} - \frac{2x-5}{9x-6} = \frac{5x-3}{6x-4} - \frac{1-7x}{18x-12}.$
94. $\frac{5x-2}{x^2-x-2} - \frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{2x-11}{x^2-5x+6}.$
95. $\frac{5y-3a}{4a} - 3 = 2a - \frac{3y+a}{5}.$
96. $\frac{y-m}{m+n} + \frac{y-n}{m-n} = \frac{y+m}{m+n}.$ 97. $\frac{y-a}{y-b} = \frac{2a}{b} - \frac{y+a}{y-b}.$
98. $\frac{a-b}{y-a} + \frac{b-c}{y-b} = \frac{a-b}{b-y} + \frac{c-a}{a-y}.$
99. $\frac{y-a^2}{a+b} - a - \frac{2ab^2}{b^2-a^2} = b - \frac{y-b^2}{a-b}.$
100. $\left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)y - 1 = \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)y.$
101. $a - x \left(a + \frac{2a}{x}\right) = (a-x) \left(a - \frac{2a}{x}\right) - a.$
102. $\frac{1-x}{1-a} - \frac{1+x}{1+a} + \frac{1-x}{1+2a+a^2} = 0.$

$$103. \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{3} = 3.$$

$$104. \frac{\frac{3x^2 - 2}{5} + 6x}{x} = \frac{3x}{5} + 4.$$

$$105. \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{x - 1}.$$

$$106. \frac{\frac{x+1}{3} - 2}{4} = \frac{\frac{2x-7}{3} - 3}{6}.$$

$$107. \frac{2x+1}{x - \frac{1}{3}} - 3 = \frac{3x-1}{x - \frac{1}{3}}.$$

$$108. \frac{a + \frac{x}{a-b}}{a - \frac{x}{a+b}} = \frac{a+b}{a-b}.$$

K § 19.

$$1. 628 \cdot 34 - (75 \cdot 894 + 91 \cdot 34 + 87 \cdot 256 + 156 \cdot 7).$$

$$2. a) 65 \cdot 382 \cdot 74 \cdot 9; \quad b) 0 \cdot 1964 \cdot 0 \cdot 273;$$

$$c) 168 \cdot 0 \cdot 795; \quad d) 3 \cdot 9268 \cdot 478.$$

$$3. a) 26 \cdot 21429 : 283; \quad b) 376 \cdot 094 : 51 \cdot 64;$$

$$c) 32145678 : 378 \cdot 23; \quad d) 2 \cdot 621429 : 0 \cdot 09263.$$

$$4. a) 17 \cdot 64 \cdot 8 \frac{7}{5}; \quad b) 3 \cdot 985 \cdot 6 \frac{3}{4}; \quad c) 20 \cdot 13 : 7 \frac{5}{8};$$

$$d) 418 \cdot 59 : 16 \frac{2}{3}; \quad e) 512 \frac{5}{8} : 13 \cdot 67; \quad f) 604 \frac{4}{15} : 11 \cdot 33.$$

5. Razreši naslednje enačbe:

$$a) \frac{3 \cdot 07x}{16} + \frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{3x}{8} - 0 \cdot 00925;$$

$$b) \frac{8 \cdot 4}{x} - \frac{5 \cdot 4}{3x} + \frac{2}{5x} = \frac{0 \cdot 94}{x} + 27;$$

$$c) (x - 0 \cdot 1)^2 - 3x(x - 2 \cdot 1) = 8 \cdot 8 - (2x + 6 \cdot 8)(x - 0 \cdot 6).$$

K § 20.

Pretvori naslednje navadne ulomke v decimalne:

$$1. \frac{15}{16}, \frac{37}{50}, \frac{67}{80}, \frac{117}{125}.$$

$$2. \frac{29}{33}, \frac{26}{41}, \frac{8}{111}, \frac{1000}{909}.$$

$$3. \frac{13}{14}, \frac{37}{135}, \frac{92}{205}, \frac{3121}{404}.$$

Pretvori naslednje decimalne ulomke v navadne:

4. 0.072 , 0.9518 , 7.750 , 17.525 .
 5. $0.\dot{0}6$, $26.\dot{7}5\dot{2}$, $8.\dot{5}6\dot{7}$, $0.\dot{4}37\dot{8}$.
 6. $0.7\dot{3}$, $15.3\dot{5}1$, $0.79\dot{3}2\dot{4}$, $0.019\dot{2}6$.

7. Izračunaj:

$$\begin{array}{lll} a) 6.\dot{4} \cdot 5.\dot{2}\dot{7}, & 2.\dot{1}\dot{3} \cdot 0.\dot{6}, & 0.8 \cdot 0.4\dot{8}; \\ b) 1.\dot{0}3\dot{7} : 2.\dot{1}\dot{5}, & 2.\dot{4} : 1.\dot{1}\dot{5}, & 1.\dot{0}6 : 0.4\dot{2}\dot{6}. \end{array}$$

K § 21.

Uredi naslednja števila po njih popolnosti: $8.3..$, $17.456..$, $8.12..$, $174.56..$, $82.4..$, $0.75..$, $0.73..$, $10.7823..$, $875.6..$, $0.0092..$!

K § 22.

1. Določi naslednje vsote tako natanko, kakor je mogoče:

$$\begin{array}{l} a) 3.58.. + 6\frac{5}{9} + 13\frac{1}{2} + 23\frac{7}{8} + 4\frac{9}{16}. \\ b) 4\frac{2}{3} + 7\frac{1}{2} + 6.4835.. + 18\frac{4}{15} + 31\frac{3}{4}. \\ c) 9\frac{5}{6} + 4\frac{1}{2} + 16\frac{2}{7} + 20\frac{3}{11} + 47.264... \end{array}$$

2. Določi naslednje vsote na dve decimalki:

$$\begin{array}{l} a) 1\frac{7}{10} + 8.538.. + 34\frac{5}{24} + 3.\dot{6}\dot{5} + 12\frac{4}{13}. \\ b) 7\frac{1}{3} + 5\frac{3}{4} + 9\frac{4}{7} + 11\frac{5}{9} + 15\frac{7}{18}. \\ c) 0.\dot{9}5\dot{6} + 28\frac{8}{15} + 45\frac{9}{32} + 50\frac{23}{40} + 4\frac{5}{11}. \end{array}$$

3. Določi razliko po dveh vsot v nalogah 1. in 2.!

K § 23.

1. Izračunaj naslednje produkte tako natanko, kakor je mogoče:

$$\begin{array}{ll} a) 5.693.. \times 8.24, & b) 974.623.. \times 584, \\ c) 7.645 \times 9.783.., & d) 695 \times 78.642.., \\ e) 76.54.. \times 93.257.., & f) 48.536.. \times 8.724.., \\ g) 3.546.. \times 4.297.. \times 6.825.., & \\ h) 15.2346.. \times 15.2346.. \times 15.2346.. \end{array}$$

2. Izračunaj naslednje produkte tako natanko, kakor se zahteva:

a) $7 \cdot 4619 \times 3 \cdot 258$ (na 2 decimalki).

b) $18 \cdot 5789 \times 52 \cdot 483$ (na celote).

c) $82 \cdot 5134 \dots \times 37 \cdot 089 \dots$ (na 1 decimalko).

d) $1521 \cdot 34 \times 265 \cdot 87$ (na desetice).

e) 73264×8956 (na tisoče).

f) $603 \cdot 3284 \dots \times 0 \cdot 9576$ (na 3 decimalke).

g) $860 \cdot 72 \times 7965 \cdot 34$ (na 2 decimalki).

K § 24.

1. Določi naslednje kvocijente tako natanko, kakor je mogoče:

a) $8 \cdot 345 \dots : 35 \cdot 4$,

b) $53 \cdot 2498 \dots : 0 \cdot 9564$,

c) $203 \cdot 04 : 624 \cdot 57 \dots$,

d) $348 \cdot 72 : 694 \cdot 83 \dots$,

e) $534 \cdot 52 \dots : 39 \cdot 58 \dots$,

f) $4 \cdot 8193 \dots : 765 \cdot 8 \dots$,

g) $85 \cdot 97 \dots : 146 \cdot 38$,

h) $901 \cdot 854 : 97 \cdot 8 \dots$,

i) $0 \cdot 038406 \dots : 62 \cdot 87 \dots$,

k) $73 \cdot 92 \dots : 85 \cdot 74 \dots$.

2. Določi naslednje kvocijente tako natanko, kakor se zahteva:

a) $63 \cdot 58321 \dots : 8 \cdot 6759 \dots$ (na 2 decimalki).

b) $8 \cdot 56437 : 0 \cdot 64352$ (na 2 decimalki),

c) $9 \cdot 74625 : 6 \cdot 428$ (na 5 decimalk).

d) $76 \cdot 43 : 8 \cdot 93572$ (na 5 decimalk).

e) $5638 : 3845$ (na 4 decimalke).

f) $2346382 : 683 \cdot 945$ (na desetice).

g) $860376 : 43 \cdot 685$ (na stotice).

3. $\frac{6 \cdot 456 \times 0 \cdot 8157 \dots}{7 \cdot 63 \dots}$.

4. $\frac{0 \cdot 6318 \dots \times 0 \cdot 8}{8 \cdot 53 \times 2 \cdot 637 \dots}$.

5. $\frac{3 \cdot 08 \times 1 \cdot 4273}{31 \cdot 85}$ (na 3 decimalke).

6. $\frac{36 \cdot 7 \times 4 \cdot 95}{3 \cdot 54 \times 70 \cdot 89}$ (na 4 decimalke).

7. 1 dm^3 živega srebra tehta $13 \cdot 5959 \dots \text{kg}$; koliko prostornino zavzema 1 kg živega srebra?

8. 1^0 zemeljskega ravnika meri $111 \cdot 3066 \dots \text{km} = 15$ zemljepisnih milj; 1^0 na 45 . vzporedniku pa meri $0 \cdot 7071$ krat toliko. Koliko znaša razdalja dveh krajev *a*) na ravniku, *b*) na 45 . vzporedniku, če je razdalja njiju zemljepisnih dolžin $28^0 45' 36''$?

9. Pomorščaki imenujejo dolgost $1'$ zemeljskega poludnevnikarskega milja. Če meri 1^0 poludnevnikova $111 \cdot 1111 \dots \text{km}$, koliko morskih milj znaša zemljepisna milja po 7420 m ?

K § 25.

Izrazi naslednja razmerja z najmanjšimi celimi števili:

1. $3780 : 4105$.
2. $10(a^2 + ab) : 15(a^2 - b^2)$.
3. $(a^2 + 4a - 27) : (a^2 + 5a - 14)$.
4. $(x^3 - 1) : (x^3 - 2x^2 + 2x - 1)$.
5. $1\frac{1}{35} : 2\frac{1}{4}$.
6. $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$.
7. $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$.
8. $15\frac{1}{5} : 4\frac{2}{9}$.
9. $17 \cdot 85 : 26 \cdot 25$.
10. $0 \cdot 75 : 0 \cdot 625$.
11. $0 \cdot \dot{7} : 0 \cdot 4\dot{6}$.
12. $4 : 6 \cdot \dot{6}$.
13. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$.
14. $8\frac{1}{4} : 9\frac{1}{6} : 7\frac{7}{10}$.
15. $1 \cdot 25 : 3 \cdot 75 : 5$.
16. $0 \cdot \dot{1}8 : 0 \cdot \dot{2}7 : 0 \cdot 3\dot{1}8$.
17. $7^0 31' 12'' : 7^0 53' 8''$.
18. 43 dni 6 ur 53 minut : 29 dni 19 ur 11 minut.

K § 26.

1. Določi iz naslednjih podatkov prava sorazmerja:

$$a) 5\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3} = 3\frac{7}{8} : 5\frac{1}{6};$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{a}\right) : \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{b}{a} : \frac{b+1}{a+1};$$

$$c) (a+b) : (a-b) = (a^2 + 2ab + b^2) : (a^2 - b^2);$$

$$d) (a^3 + b^3) : (a^2 + b^2) = (a^2 - b^2) : (a - b).$$

2. Razreši naslednja sorazmerja:

- a) $3\frac{3}{4} : 12\frac{3}{8} = x : 20$; b) $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : x$;
 c) $x : 0.35 = 2.38 : 1.25$; d) $4.58\dot{3} : 0.8\dot{3} = 1\frac{1}{4} : x$;
 e) $\frac{3}{x - \frac{1}{8}} : \frac{1}{4} = 1\frac{7}{9} : \frac{2}{9}$; f) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : (1 + \frac{a}{b}) = (1 - \frac{b}{a}) : x$;
 g) $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$;
 h) $(1 + \frac{2b}{a-b}) : (1 - \frac{2b}{a+b}) = x : \frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$.

3. Poišči številom: a) $17\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, 9; b) $a^2 - b^2$, $3ab$, $a + b$ četrto geometrijsko sorazmernico!

4. Poišči številoma: a) $2\frac{1}{4}$ in $1\frac{1}{5}$; b) $\frac{a+b}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ in $\frac{a+b}{a-b}$ tretjo geometrijsko sorazmernico!

5. Poišči številoma: a) $2\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{5}$; b) $\frac{a-b}{a+b}$ in $\frac{a+b}{a-b}$ srednjo geometrijsko sorazmernico!

6. Pretvori naslednje produkte v sorazmerja:

- a) $ab = mn$; b) $x^2 = ab$; c) $a^2 - b^2 = mx$;
 d) $a^2 + 5ab + 6b^2 = (2a + b)x$; e) $a^3 - b^3 = (a + b)x$.

7. Izrazi naslednja sorazmerja z najmanjšimi celimi števili:

- a) $x : 7\frac{1}{3} = 3\frac{7}{8} : 5\frac{1}{6}$; b) $14.35 : 218.275 = 9.18 : x$;
 c) $17\frac{1}{2} : 8\frac{3}{4} = 9 : x$; d) $3\frac{4}{5} : 76 = x : 5\frac{1}{4}$;
 e) $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m+n}{m-n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m+n} : x$;
 f) $(m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3) : x = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m+n} : (m - n)$;
 g) $(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}) : x = (b + \frac{b^2}{a-b}) : \frac{a+b}{b}$.

8. Napravi iz naslednjih podatkov zaporedna sorazmerja:

- a) $a : b = 10 : 9$, $a : c = 7 : 8$, $a : d = 4 : 3$;
 b) $a : b = 6 : 5$, $b : c = 4 : 5$, $b : d = 7 : 8$;
 c) $a : b = 1 : 2$, $c : d = 4 : 5$, $b : e = 6 : 7$, $e : d = 4 : 3$;
 d) $a : b = \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$, $c : d = \frac{2}{3} : 1$, $b : c = \frac{2}{5} : \frac{1}{2}$;
 e) $a : d = \frac{1}{5} : \frac{2}{3}$, $c : e = \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, $e : b = 1 : \frac{2}{5}$, $d : b = \frac{5}{6} : \frac{4}{9}$.

9. Razdeli število 60 (270) na tri (štiri) dele, ki so si kakor 3 : 4 : 5 (6 : 7 : 8 : 9)!

10. Razdeli število 3710 v razmerju $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$!

11. Poišči neznanke iz naslednjih podatkov:

$$a) \quad x : y = 2 : 5$$

$$b) \quad x : z = 5 : 6$$

$$y : z = 2 : 3$$

$$y : u = 2 : 3$$

$$y : u = 5 : 9$$

$$z : u = 4 : 3$$

$$x + y + z + u = 705; \quad x + y + z + u = 555.$$

(Poišči najprej zaporedno sorazmerje!)

12. Razdeli število 9150 na tri dele x, y, z tako, da so si $x : y = 5 : 3$ in $z : y = 3 : 4$!

13. Razreši naslednje enačbe:

$$a) \quad 13 : (13 - y) = 39 : 30; \quad b) \quad (25 - y) : 3 = \frac{y}{2} : 11;$$

$$c) \quad (a - x) : (x - b) = a : b;$$

$$d) \quad (1 + x) : (1 - x) = (1 + a^2) : 2a;$$

$$e) \quad (x - 200) : (x + 100) = (x - 72) : (x + 394);$$

$$f) \quad (7x - 3) : (14x - 3) = (5x + 3) : (10x + 9);$$

$$g) \quad 1 : (x + \frac{2}{3}) = (x - 2a) : (a + x)(x - 2);$$

$$h) \quad \frac{a+b}{a+1} : \frac{a-1}{x-1} = \frac{a-b}{a-1} : \frac{a+1}{x+1}.$$

K § 27.

1. $17\frac{1}{2} m$ sukna velja 131 K 25 h; koliko velja $9\frac{3}{8} m$ istega blaga?

2. A pride od kraja M do kraja N v $8\frac{2}{5}$ ure, če prehodi vsako uro po 4500 m; koliko časa potrebuje B, ki prehodi vsako uro po 3600 m, za isto pot?

3. Posadka 7500 mož ima živeža za 48 tednov; čez koliko časa se sme posadka povečati za 500 mož, da se bo shajalo z ostalim živežem od te dobe še 255 dni?

4. 10 delavcev napravi prekop v 15 dneh; sprva dela samo 6 delavcev; čez 5 dni se najmeta še 2 delavca in 3 dni pozneje se najmejo še 4 delavci. V koliko dneh se dovrši delo?

5. Iz 16 *kg* preje se napravi 70 *m* platna, ki je po 78 *cm* široko; koliko metrov po 116 *cm* širokega platna se napravi iz 36 *kg* preje?

6. Stavbišče, ki je $15\frac{1}{2}$ *m* dolgo in $12\frac{1}{4}$ *m* široko, velja 3797·5 K; koliko velja drugo stavbišče, ki je 27 *m* dolgo in $18\frac{1}{2}$ *m* široko?

7. 36 zidarjev dozida stavbo v 90 dneh, če delajo po 10 ur na dan; koliko zidarjev se mora čez 40 dni še najeti, da se ostalo delo izvrši v 30 dneh, če delajo vsi delavci na dan po 12 ur?

8. V katerem času da določena glavnica po $5\frac{1}{4}\%$ naložena iste obresti kakor po $4\frac{2}{3}\%$ naložena v 45 dneh?

9. Po koliko procentov moraš naložiti kapital, da dobiš v 5 letih 1533 K obresti, ako dá isti kapital po 5% v 4 letih 876 K obresti?

10. Koliko obresti da 5240 K glavnice naložene po $4\frac{1}{2}\%$ a) v 3 letih 5 mesecih, b) v 2 mesecih 18 dneh?

11. Kateri kapital da po $5\frac{1}{4}\%$ naložen v 7 mesecih 220 $\frac{1}{2}$ K obresti?

12. Po koliko procentov moraš 2424 K naložiti, da dobiš v 225 dneh 136·35 K obresti?

13. V katerem času da 5844 K glavnice po $4\frac{3}{4}\%$ naložene 744 $\frac{4}{5}$ K obresti?

14. A si izposodi 780 K; koliko mu je plačati s $4\frac{1}{2}\%$ obrestmi vred čez 2 leti 3 mesece?

15. Koliko kapitala moraš naložiti po $4\frac{1}{2}\%$, da dobiš čez 2 leti 3 mesece z obrestmi vred 704·8 K nazaj?

Prvotni kapital + obresti tega kapitala = končni kapital z obrestmi vred.

16. Po koliko procentov moraš naložiti glavnico 4530 K na $2\frac{1}{3}$ leta, da dobiš za 165·82 K manj obresti ko od 3450 K glavnice naložene po $3\frac{1}{2}\%$ v $5\frac{1}{4}$ leta?

17. A kupi železniško delnico 400 K imenovane vrednosti, ki nese 5% obresti, za 344 K; po koliko procentov je naložil svoj denar?

Delnica nese obresti od njene imenovane vrednosti.

18. Trgovec prodaja kilogram nekega blaga z 20% dobičkom po 1.44 K; kolika je kupna cena? Po čem bi moral kilogram prodajati, da bi imel $27\frac{1}{2}\%$ dobička?

100 K kupne cene da 120 K prodajalne cene, če se prodaja blago z 20% dobičkom.

19. Ako se prodaja meter sukna po 4 K 86 h, znaša dobiček 8% ; koliko procentov znaša dobiček ali izguba, če se prodaja meter po 4 K 32 h?

20. *A* ima dolg 524.4 K plačati čez 3 mesece; koliko znaša gotovo plačilo, če se mu dovoli 5% letnega diskonta?

Gotovo plačilo + diskont = dolg. — Diskont se računa pravilno od gotovega plačila kakor obresti. Pri trgovskih dolgih, posebno pri menicah, se računa diskont (sicer nepravilno) od dolga.

21. Nekdo plača za dolg 7258.05 K, ki bi ga moral poravnati čez 2 leti 9 mesecev, 6350 K gotovo; po koliko procentov se je računal diskont?

22. Menica na 1720 K, ki se je 15. novembra izdala za 2 meseca, se proda 10. decembra s $5\frac{1}{2}\%$ diskontom; koliko se plača za menico?

Dan, katerega se menica proda, se ne jemlje v poštev pri izračunanju diskonta, sicer pa se štejejo dnevi po koledarju.

23. Menica na 800 K, ki doteče 2. avgusta, se proda 29. junija za 796.11 K; po koliko procentov se je računal diskont!

24. Razdeli 1004.5 K med štiri osebe tako, da dobi *A* tolikokrat po 3 K kakor *B* po 4 K, *C* tolikokrat po 9 K kakor *B* po 10 K in *D* tolikokrat po 25 K kakor *C* po 24 K; koliko dobi vsaka oseba?

25. K skupni kupčiji, pri kateri je 400 K izgube, dá *A* 400 K na 5 mesecev, *B* 1000 K na 2 meseca, *C* 600 K na 4 mesece in *D* 1200 K na 3 mesece. Koliko izgubi vsak?

26. Kosmata teža nekega blaga znaša 540 kg, tara $6\frac{1}{2}\%$, 17 kg čiste teže se kupi za 3.1 K; kako drago se mora prodati vse blago, da se zasluži 18% ?

K § 28.

Uredi naslednje enačbe:

1. $3x = \frac{4-x}{3+x} + 8.$
2. $\frac{x}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3-x}{3+x} = 0.$
3. $\frac{2x-1}{x+3} - (x-3) = \frac{1}{x-3}.$
4. $\frac{a+x}{2a-3x} = \frac{a-x}{4a+3x}.$
5. $(3x-4)(2x-1) - (4x-3)(x+5) = 2x^2 + 5x - 4.$
6. $(10x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 7x - 6) : (5x^2 - 3x - 2) =$
 $= 2x^2 + x - 3.$
7. $\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3} - 5\right)^2 = \left(\frac{5}{6}x\right)^2.$
8. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = ax + \frac{x}{a^2-x^2}.$
9. $\frac{2}{2-y} + \frac{1}{2+y} - \frac{4}{y^2-4} = 3.$
10. $\frac{7}{8} - \frac{45}{64y+24} = \frac{6+9y}{4y-6}.$
11. $\frac{2}{y-1} + 5 = \frac{4}{y^2-4y+3} + \frac{7}{2}.$
12. $\frac{y-5}{y^2-7y+12} + \frac{y+2}{y^2-9} = 2y-1.$
13. $\frac{y+3a}{y+4a} - \frac{y-2a}{y+3a} = \frac{y+2a}{y^2+7ay+12a^2}.$

K § 29.

Razreši naslednje enačbe:

1. $(3x-4)(5x+2) - 5(3x-1)(x-1) = 5.$
2. $(15x^3 - 22x^2 + 3x + 4) : (5x-4) = 3(x^2 - x + 1).$
3. $x - 2[2(2-x) - x] = 16 - x.$
4. $4 - 2[5(3x+4) + 3] = -72.$
5. $2x - 3\{2x - 3[2x - 3(2x-3)]\} = 1.$
6. $\frac{5x}{2} - \frac{26}{7} = \frac{13x}{14} + \frac{89}{21} - \frac{x}{3}.$
7. $\frac{5x}{12} - \frac{5x}{24} - \frac{15}{2} = \frac{5x}{18} - \frac{20}{3} - \frac{5x}{36}.$
8. $22 - \left[\frac{5x}{4} - \left(\frac{2x}{9} + \frac{2}{3}\right)\right] = x - \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{9}\right).$

9. $16\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{x+5}{4} - 11 \right) + 5 \right] = 3\frac{1}{2}.$
10. $\frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} (x-4) \right] \right\} - 20\frac{2}{3} = \frac{x}{30}.$
11. $921\cdot6 : \left(100 - \frac{2x}{3} \right) = 916\cdot8 : \left(100 - \frac{3x}{4} \right).$
12. $\left(\frac{3\cdot4}{3} - \frac{2\cdot1}{4} \right) 0\cdot8x - \left(\frac{2\cdot6}{2} - \frac{3\cdot4}{3} \right) 0\cdot5x = 6\cdot05.$
13. $\frac{6-3y}{5} - \frac{5-7y}{3} = \frac{3+2y}{2} - \frac{4y-6}{4}.$
14. $\frac{2y+3}{5} - \frac{3(3-2y)}{2} - \frac{13y-3}{6} = \frac{5y+2}{8}.$
15. $\frac{3y+1}{4y-10} + \frac{5y-1}{6y-15} - \frac{7y+4}{10y-25} = 4\frac{2}{3}.$
16. $\frac{9y-0\cdot1}{20y+6} + \frac{5y-2}{y+0\cdot3} - \frac{0\cdot8y+7}{9y+2\cdot7} = 0\cdot97.$
17. $\frac{y-3}{y-4} + \frac{y-4}{y+3} - \frac{2y}{y+7} = 0.$
18. $(a-y)(a+b) - (a+y)(a-b) = a(3b-y).$
19. $a^2(y-b) - b^2(y-a) = a(y+a) - b(y+b).$
20. $\frac{a(y-a)}{a+2b} + \frac{b(y-b)}{2a+b} = \frac{y}{5}.$
21. $\frac{a+b}{2b} - \frac{(a-b)c}{2by} = \frac{bc}{(a+b)y} + \frac{a}{a+b}.$
22. $\frac{a(3y-2a)}{a+3b} + \frac{b(3y-2b)}{3a+b} = y.$
23. $\frac{y-a}{y+a} + \frac{y-b}{y+b} = 1 + \frac{y-a-b}{y+a+b}.$

Razreši naslednje enačbe po primerjalnem načinu :

24. $3x - 2y = 5$

25. $5x + 4y = 2$

$2x + 3y = 12.$

$3x + 5y = -4.$

26. $2x + 5y = 31$

$7x - 2y = 11.$

Razreši naslednje enačbe po zamenjalnem načinu :

$$27. \quad 4x + 5y = 23$$

$$3x - y = 3.$$

$$28. \quad 3x - 10y = 12$$

$$0.4x + y = 3.$$

$$29. \quad x : y = 11 : 19$$

$$2x - 3y = 10.$$

Razreši naslednje enačbe po načinu enakih koeficientov :

$$30. \quad 4x + 9y = 51$$

$$8x - 13y = 9.$$

$$31. \quad 3x + 5y = 93$$

$$4x + 7y = 128.$$

$$32. \quad 8x + 9y = 77$$

$$7x - 12y = -32.$$

Razreši naslednje enačbe po načinu nedoločenih koeficientov :

$$33. \quad 8x - 5y = 25$$

$$3x + 7y = 36.$$

$$34. \quad 3x - 4y = 4$$

$$4x + 3y = 72.$$

$$35. \quad 3x - 15y = -2$$

$$4x - 9y = -1.$$

Razreši naslednje enačbe :

$$36. \quad \frac{24}{x} + \frac{33}{y} = 15$$

$$\frac{36}{x} - \frac{9}{y} = 3.$$

$$37. \quad \frac{9}{2x} - \frac{10}{3y} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{10}{3x} - \frac{9}{2y} = \frac{181}{90}.$$

$$38. \quad \frac{4}{x-1} + \frac{3}{y+1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{x-1} - \frac{2}{y+1} = \frac{11}{12}.$$

$$39. \quad \frac{6}{x-1} + \frac{5}{y-1} = 1$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{7}{y-1} = 2.$$

$$40. \quad \frac{8}{2x-3y} + \frac{9}{4x+y} = 1$$

$$-\frac{5}{2x-3y} + \frac{6}{4x+y} = \frac{1}{48}.$$

$$41. \quad \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2 - b^2}{ab}.$$

Uredi sledeče enačbe ter jih razreši po načinu, ki je nalogi najprimernejši :

$$42. \quad x - y = \frac{1}{4}(5x - 6y)$$

$$x - y + 48 = 5(6x - 7y).$$

$$43. (3x + 2y):(2x + 3y) = 8:7$$

$$7x - 8y = 24.$$

$$44. \frac{5x}{4} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{4}\right) = y - 5$$

$$\frac{4y}{3} - \frac{1}{4}\left(y + \frac{y}{3}\right) = x + 3.$$

$$45. (x - 5y + 1):(3x - 7y + 3) = 7:9$$

$$(2x - y - 6):(7x + 9y + 6) = 1:5.$$

$$46. \frac{x-6}{y} = \frac{x}{y+5} \qquad 47. \frac{2x+3y}{x+2y} + 1 = \frac{25}{(x-y)+3y}$$

$$(x+12):y = x:(y-8). \qquad \frac{4x+y}{x-3y} + 2 = \frac{20}{(x+y)-4y}.$$

$$48. 1 + \frac{y}{x-y} = 3\left(\frac{1}{y-x} - 2\right) \qquad 49. 2x + \frac{y(2x-5)}{1-y} = \frac{2}{3(y-1)}$$

$$\frac{3}{4x}\left(3 - \frac{1}{x-y}\right) = \frac{1}{y-x}. \qquad 5 + \frac{2(4x-15y)}{1+6y} = \frac{4x+1}{3y}.$$

$$50. x - \frac{4x+3y}{7} = 6 - \frac{9y+33}{14}$$

$$y - \frac{5x-4y+6}{2} = x - \frac{11y-19}{4}.$$

$$51. x + 17 - \frac{3x+5y}{17} = \frac{4x+15y+7}{3}$$

$$\frac{8y+5}{18} - \frac{x+12y-43}{6} - \frac{5x-7}{11} = 0.$$

$$52. \frac{5x+13}{2} - \frac{8y-3x-5}{6} = \frac{7x-3y+28}{3}$$

$$\frac{x+7}{3} : \left(\frac{3y-8}{4} + 4x\right) = 4:21.$$

$$53. \frac{2x+y}{9} + \frac{7y+6x+11}{18} = \frac{19}{2} - \frac{5x-17}{6}$$

$$\frac{3y+2}{2} = \frac{5x+3y+2}{7}.$$

$$54. (14x+3):\left(7y - \frac{1}{3}\right) = (4x+3):\left(2y + \frac{1}{3}\right)$$

$$(8x+5):(6y+1) = (4x+1):3y.$$

$$55. 7x + \frac{84x-5(7xy+3)}{5y-7} = 45 + \frac{5(14x-90y)}{1+10y}$$

$$\left(3 - \frac{12x-2y}{1+4x}\right):(3y+2) = 1:(6x-1).$$

$$56. x - (a + b)y = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

$$(b - a)x + aby = b^2.$$

$$57. \frac{2x - b}{a} - \frac{2y - a}{b} = 2$$

$$\frac{2x - a}{b^2} + \frac{2y + b}{a^2} = \frac{a + b}{ab}.$$

$$58. \frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = 2$$

$$\frac{x}{a - b} - \frac{y}{a + b} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}.$$

$$59. \frac{a(x - a)}{a + b} + \frac{b(y + b)}{a - b} = \frac{a^2 - b^3}{2ab^2}.$$

$$\frac{b(x - b)}{a - b} + \frac{a(y - a)}{a + b} = \frac{a^2 - b^2}{2a^2b}.$$

$$60. y + 3z = 39$$

$$3y + 2x = 48$$

$$4z - 3x = 18.$$

$$61. 3z - 4y = 6$$

$$2z + 3x = 26$$

$$5y - 6x = 18.$$

$$62. 4x - y + 3z = 20$$

$$2x + 3y + 11z = 55$$

$$16x + 3y + 31z = 170.$$

$$63. \frac{2x + 3y}{4z} = 2$$

$$\frac{4x - 3y}{2z} = 2$$

$$6x + 9y - 16z = 2.$$

$$64. \frac{5}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 2$$

$$\frac{10}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 30$$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{5}{z} = 0.$$

$$65. \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 9$$

$$- \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 10$$

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = 20.$$

$$66. \frac{4}{x} - \frac{5}{2y} = \frac{11}{20}$$

$$\frac{25}{2y} + \frac{2}{3z} = \frac{77}{60}$$

$$\frac{24}{z} - \frac{4}{3x} = \frac{14}{15}.$$

$$67. \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 19$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 32$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 31.$$

$$68. (x + 1) : (y + 1) : (z + 1) = 1 : 2 : 3$$

$$4x + 3y + 2z = 55.$$

69. $4x - 3y + 2z - u = 19$

$5x + 4y - 3z - 2u = 39$

$6x + 2y - 5z - 3u = 26$

$3x - 5y + 6z - 4u = 12.$

70. $2x + 3y = 22$

$4y + 5z = 31$

$6z + 7u = 32$

$8u + 9x = 61.$

71. $3x : 4y = 6 : 5$

$4x : 6z = 4 : 3$

$3x : 8u = 3 : 1$

$7x - 6y + 8z - 10u = 40.$

72. $-4x + 2y + 3u = 5$

$-3x - 2z + 4u = 4$

$y - 5z + 2u = 3$

$3x - 4y + z = 2.$

K § 30.

1. Načrtaj točke $M_1(3, 0)$, $M_2(5, 2)$, $M_3(0, 4)$, $M_4(-6, -2)$, $M_5(-4, 7)$, $M_6(7, -4)$ ter določi razdaljo njih vzmetov *a*) v abscisni, *b*) v ordinatni osi.

2. Načrtaj naslednje linearne funkcije :

a) $y = -4x + 5,$

b) $y = 6x - 8,$

c) $2x - 3y = 1,$

d) $5y - 7x = 13,$

e) $4x + 5y = 0,$

f) $\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = 0.$

K § 31.

1. Pri katerem številu je tretji del za 7 manjši ko četrti in peti del skupaj?

2. Katero število smeš z 10 (11) pomnožiti, da najdeš isti rezultat, kakor če prišteješ dotičnemu številu 10 (11)?

3. Katero število je za toliko manjše ko 160, za kolikor je njegov 3kratnik večji od 160?

4. Katero število moraš za 2, 8, 18 povečati, da tvorijo zneski stalno sorazmerje?

5. Za koliko moraš povečati število 339 in zmanjšati število 355, da sta si zneska kakor $21 : 22$?

6. Katerega števila kvadrat je za 120 večji od kvadrata za 10 zmanjšanega števila?

7. Ako prišteješ določenemu številu 4, najdeš mnogokratnik števila 100; ako pa odšteješ dotično število od 801, najdeš istotolik mnogokratnik števila 15. Katero je to število?

8. Razdeli 60 na dva dela tako, da najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 3, če deliš večji del z manjšim!

9. Katero število moraš števcu ulomka $\frac{17}{10}$ prišteti in od imenovalca odšteti, da najdeš obratni ulomek?

10. Poišči dve števili, ki imata te-le lastnosti: ako povečaš prvo številko za 3 in zmanjšaš drugo za 3, znaša njun kvocijent 3; če pa povečaš vsako izmed števil za 2, je njun kvocijent 2.

11. Kvocijent dveh števil znaša 5 in delitveni ostanek 5; ako povečaš prvo število za 9 in drugo za 1, je njun kvocijent 6. Kateri sta števili?

12. Ako prišteješ številoma 5 in 8 določeni števili, najdeš vsoti, ki sta si kakor $2 : 3$; če pa odšteješ isti dve števili od 5 in 8, najdeš razliki, ki sta v razmerju $1 : 2$. Kateri sta dotični števili?

13. Vsota dveh števil je za toliko večja od 150, za kolikor je polovica razlike istih dveh števil manjša od 150; če deliš večje teh števil z manjšim, najdeš kvocijent 4 in delitveni ostanek 2. Kateri sta števili?

14. Ako prišteješ števcu in imenovalcu določenega ulomka 7, najdeš ulomek $\frac{4}{3}$; če pa odšteješ od števca in imenovalca istega ulomka 2, najdeš ulomek $\frac{1}{2}$. Kolik je dotični ulomek?

15. Produkt dveh števil znaša 25425 in postane za 565 večji, če povečaš en faktor za 5. Katera sta faktorja?

16. Učenec množi dve števili in najde zmnožek, ki je za 454 premajhen; ta znesek bi bil prav, če bi zmanjšal prvo število za 5 in drugo za 1. Pri drugem množenju najde učenec znesek, ki je za 750 prevelik; ta znesek bi pa bil prav, ako bi povečal prvi faktor za 1 in drugega za 3. Kateri števili je množil učenec?

17. Izrazi ulomek $\frac{a-5}{a^2-5a+6}$ kakor razliko dveh ulomkov!

18. Razdeli 67 na tri dele tako, da sta si prvi in drugi del kakor 3 : 4 in da je tretji del za 3 manjši od drugega!

19. Določi tri števila z naslednjimi lastnostmi: ako deliš vsoto prvega in drugega števila s tretjim številom, najdeš kvocijent 3 in delitveni ostanek 3; ako deliš vsoto prvega in tretjega števila z drugim številom, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 1; če pa deliš vsoto drugega in tretjega števila s prvim številom, najdeš kvocijent 1 in delitveni ostanek 1.

20. Izrazi naslednje ulomke kakor vsoto dveh ali več ulomkov, katerih imenovalci so faktorji določenega ulomka!

$$a) \frac{39 + a}{(2 + 3a)(5 - 4a)};$$

$$b) \frac{15 + 88a + 124a^2}{(1 + 2a)(1 + 3a)(1 + 4a)};$$

$$c) \frac{1 - a + a^2}{a - a^3};$$

$$d) \frac{7 + 2a - 14a^2}{1 - a - 20a^2}.$$

21. Ako odbiješ četveroštevilčnemu številu začetno številko 5 ter pripišeš ostalemu številu na desni ničlo, najdeš za 4 večje število; katero je to število?

22. Ako odbiješ peteroštevilčnemu številu začetno številko 1 ter jo pripišeš ostalemu številu na desni, najdeš število, ki je za 2384 manjše od 3 kratnika prvotnega števila; katero je to število?

23. Katero šesteroštevilčno število se podvoji, ako mu odbiješ začetni številki 28 ter ju pripišeš ostalemu številu na desni?

24. Številčna vsota dvoštevilčnega števila je 6; ako zameniš številki med seboj, najdeš število, ki je za 6 večje od trikratnika prvotnega števila. Katero je to število?

25. Dve dvoštevilčni števili se pišeta z istima številčkama. Če postaviš prvo teh števil pred drugo ter deliš to novo število z drugim številom, najdeš kvocijent 64 in delitveni ostanek 38; če pa postaviš drugo število pred prvo ter deliš to novo število s prvim številom, najdeš kvocijent 158 in delitveni ostanek 21. Kateri sta števili?

26. Dve števili, ki se pišeta z istima številčkama, sta si kakor 13 : 31; njiju vsota znaša 88. Kateri sta števili?

27. Troštevilknemu številu je številčna vsota 17; prva številka na levi je četrti del naslednjega dvoštevilknega števila, prva številka na desni pa je deveti del pred njo stoječega dvoštevilknega števila. Katero je to število?

28. Ako zameniš pri troštevilknem številu, katerega številčna vsota znaša 11, stotice z enicami, najdeš število, ki je za 29 manjše od dvojnega prvotnega števila; če pa zameniš desetice z enicami, najdeš za 36 večje število od prvotnega. Katero je to število?

29. Izmed treh bratov je prvi 22, drugi 15 in tretji 12 let star; čez koliko let bo prvi brat toliko star kakor njegova mlajša brata skupaj?

30. Oče je star 83 let, sin 55 let in hči 39 let. a) Pred kolikimi leti je bil oče 3 krat toliko star kakor sin? b) Čez koliko let bo oče 2 krat toliko star kakor hči?

31. Sin pravi: pred $5\frac{1}{2}$ leta je bil moj oče $5\frac{1}{2}$ krat toliko star kakor jaz in čez $5\frac{1}{2}$ leta bo oče $2\frac{3}{4}$ krat toliko star kakor jaz; koliko sem star jaz in koliko moj oče?

32. V dveh sosednjih sobah je skupaj 44 oseb; če gre iz druge sobe v prvo sobo toliko oseb, kolikor jih je v prvi sobi, je v vsaki sobi enako veliko oseb. Koliko oseb je bilo v vsaki sobi?

33. V družbi je 3 krat toliko gospodov kakor gospa; ko so 4 gospodje odšli s svojimi gospemi, je bilo v družbi 4 krat toliko gospodov kakor gospa. Koliko gospodov in gospa je bilo v družbi?

34. Pri nekem zborovanju je glasovalo 8 oseb več ko tretjina izmed navzočih za predlog, 4 osebe manj ko četrтина pa proti predlogu; če 26 oseb ni glasovalo, koliko oseb je bilo pri zborovanju?

35. Neka družba naroči skupen obed v gostilni. Če bi bili vsi udje prišli k obedu, bi plačal vsak tolikokrat po 10 h, kakor je imela družba udov; ker pa 5 udov ni prišlo k obedu, je moral vsak izmed navzočih razen prejšnjega deleža še 60 h plačati po vrhu. Koliko udov je imela družba?

36. Neki igralec napravi dve igri; v prvi igri izgubi polovico svojega premoženja in $\frac{1}{2}$ K, v drugi igri izgubi polovico ostanka in $\frac{1}{2}$ K. Če mu ostane še 5 K, koliko denarja je imel sprva?

37. Vrtnar zasluži vsak dan, kadar dela, hrano in $1\frac{3}{5}$ K; za vsak dan pa, kadar ne dela, mora plačati gospodarju $\frac{2}{3}$ K za hrano. Čez 30 dni znaša vrtnarjev zaslužek 36 K; koliko dni je delal vrtnar?

38. Dva soda držita skupaj 351 l vina; ako vzameš iz prvega soda šesti del, iz drugega pa tretji del, ostane v obeh sodih enako veliko vina. Koliko drži vsak sod?

39. V nekem razredu sedi v vsaki klopi po 6 učencev, v zadnji klopi pa le 1 učenec; če bi pa sedelo v vsaki klopi po 5 učencev, bi morala 2 učenca stati. Koliko klopi in koliko učencev je v razredu?

40. V tovarni dela 62 delavcev, mojstrov in pomagačev; vsak mojster zasluži na dan 4 K, vsak pomagač pa le polovico toliko; če bi vsakemu mojstru znižal dnino za 0·8 K in vsakemu pomagaču povečal dnino za istotoliko, bi postal dnevni zaslužek vseh delavcev za 25·6 K večji. Koliko mojstrov in koliko pomagačev je v tovarni?

41. V vsakem izmed dveh sodov je nekoliko vina; iz prvega soda ga preliješ v drugega toliko, kolikor ga je v tem sodu; potem ga preliješ iz drugega soda v prvega toliko, kolikor ga je ostalo v tem sodu; končno ga preliješ iz prvega soda v drugega toliko, kolikor ga je še ostalo v tem sodu. Če je sedaj v vsakem sodu 72 l vina, koliko ga je bilo sprva?

42. Ako denem iz levega žepa v desnega 10 h, je v tem žepu 3 krat toliko denarja kakor v levem; če pa denem iz desnega žepa v levega 10 h, je v tem žepu 7 krat toliko denarja kakor v desnem. Koliko denarja je bilo sprva v vsakem žepu?

43. Trije igralci napravijo tri igre. V prvi igri izgubi A in mora B -u in C -u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju; v drugi igri izgubi B in mora A -u in C -u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju; v tretji igri izgubi C in mora A -u in B -u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju. Če ima po tretji igri vsak igralec 32 K, koliko je imel sprva?

44. *A* pravi *B*-u: če mi daš 700 h, imam 2 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi; *B* pravi *C*-u: če mi daš 1400 h, imam 3 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi; *C* pravi *A*-u: če mi daš 420 h, imam 5 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi. Koliko denarja je imel vsak?

45. *A* kupi 4 *m* modrega, 6 *m* črnega in 11 *m* sivega sukna za 175 K. Če bi bil meter modrega sukna za $\frac{1}{4}$ K cenejši in meter sivega sukna za $\frac{1}{4}$ K dražji, bi bile cene modrega, črnega in sivega sukna v razmerju 7:6:5. Koliko velja 1 *m* sukna vsake vrste?

46. Trговец proda blago s 3% izgubo za 356 K 96 h; kolika je kupna cena?

47. *A* proda stot blaga za 55 K 20 h in ima 15% dobička; po čem je kupil stot?

48. Če proda trgovec kilogram blaga po 1 K 35 h, ima 8% dobička; koliko procentov dobička ali izgube ima, če proda kilogram po 1 K 16 h?

49. *A* plača čez 1 leto 5 mesecev za izposojeni kapital in $4\frac{1}{2}\%$ obresti 6382 K 50 h; kolik je bil kapital?

50. Pri katerem kapitalu, ki je po 5% naložen, se zmanjšajo letne obresti za 125 K, če ga naložiš po $4\frac{3}{8}\%$?

51. V katerem času dasta glavnici 4400 K po 5% in 5500 K po $4\frac{1}{2}\%$ naloženi skupaj 1870 K obresti?

52. *A* ima $\frac{1}{4}$ svojega premoženja po $4\frac{3}{10}\%$ naloženega v državnih papirjih, $\frac{2}{3}$ po 4% na posestvih, ostanek po $3\frac{1}{2}\%$ v hranilnici ter dobi skupaj 7060 K letnih obresti; koliko premoženja ima *A*?

53. 60 delavcev, katerim se je dnina zvišala za 15%, zasluži skupaj na dan 124 K 20 h; koliko je zaslužil vsak delavec na dan prej, ko se je zvišala dnina?

54. *A* posodi *B*-u določeni kapital po $4\frac{3}{4}\%$ na 9 mesecev in *C*-u drugi kapital po $5\frac{1}{4}\%$ na 8 mesecev ter dobi od obeh skupaj 297 K obresti; če bi zamenil kapitala med seboj, bi postale letne obresti za $\frac{3}{4}$ K manjše. Koliko je posodil vsakemu?

55. Dva kapitala, izmed katerih je prvi za 400 K večji od drugega, dasta enake letne obresti, ker je naložen prvi kapital po $\frac{1}{2}\%$ nižje; če bi zamenil pri teh kapitalih odstotke, bi bile letne obresti prvega kapitala za 30 K večje nego drugega. Kolika sta kapitala in po koliko procentov sta naložena?

56. A si prihrani nekega leta $\frac{1}{3}$ in v naslednjem letu $\frac{1}{4}$ svojih v obeh letih enako velikih dohodkov in ima koncem drugega leta 2100 K prihranjenega denarja; koliki so bili letni dohodki, če je prihranek prvega leta naložil po 5% ?

57. Trгоvec proda 65 m sukna z 12% dobičkom in 35 m istega sukna, ki je bilo nekoliko poškodovano, s 6% izgubo ter ima pri vsem tem suknu 34 K 20 h dobička. Po čem je kupil meter sukna?

58. Oče zapusti svojima otrokoma, sinu in hčerki, svoje premoženje ter določi, da ima sin od svoje dedščine izplačati staremu služabniku 8% , hčerka pa od svoje dedščine stari služabnici 5% . Če je služabnik dobil 700 K manj ko trikrat toliko kakor služabnica in sin 17500 K več nego hčerka, koliko je podedoval vsak otrok?

59. Trгоvec kupi kos sukna, meter po 5 K 20 h, in ima pri prodaji vsega sukna 40 K dobička; če bi pa bil prodal meter po 40 h ceneje, bi imel le 20 K dobička. Koliko metrov je meril kos in po čem je prodal meter?

60. Za dolg 2880 (1560) K, ki bi se moral plačati čez 4 leta (8 mesecev) brezobrestno, se plača takoj 2400 (1508) K; po koliko odstotkov se je računal diskont?

61. A mora plačati 15000 K čez 2 leti; plača pa 3000 K takoj in ostanek v 4 enakih obrokih, ki so enako daleč narazen. Kdaj se mora plačati prvi obrok?

62. Nekdo mora plačati 450 K čez 4 mesece, 560 K čez 5 mesecev in ostanek čez 8 mesecev; kolik je ostanek, če bi moral ves dolg poravnati čez $5\frac{1}{2}$ meseca?

63. A mora plačati 1200 K čez 4 mesece in 1500 K čez 7 mesecev; plača pa čez 5 mesecev toliko, da sme ostanek obdržati 9 mesecev. Kolika sta zadnja obroka?

64. Nekdo proda državne papirje, ki jih je prevzel po njih imenovani vrednosti, z $2\frac{1}{2}\%$ izgubo za 2437·5 K; kolika je imenovana vrednost teh papirjev?

65. Menica se za 21 (54) dni prej, ko doteče, proda z $9\frac{1}{3}$ (9) % diskontom za 900 (5327·1) K; na koliko se glasi menica?

66. *A* ima 1. julija plačati dve menici, izmed katerih je druga za 600 K večja od prve. Dne 1. junija plača za obe menici skupaj 7935 K. Na kateri vrednosti se glasita menici, če se diskont računa pri prvi menici po $3\frac{1}{2}\%$ in pri drugi po 4% ?

67. Razdeli 452 K med *A*, *B* in *C* tako, da dobi *A* tolikokrat po 1 K kakor *B* po 70 h, in *C* tolikokrat po 80 h kakor *B* po 1 K. Koliko dobi vsak?

68. Razdeli določeno vsoto denarja tako, da dobi *A* $\frac{1}{3}$ dotične vsote manj 2 K, *B* $\frac{1}{4}$ dotične vsote in še 8 K po vrhu, *C* pa ostanek, ki je za 1 K večji od *A*-evega deleža. Kolika je dotična vsota in koliko dobi vsaka oseba?

69. Razdeli določeno vsoto tako, da dobi *A* 1000 K in $\frac{1}{3}$ ostanka, *B* $\frac{1}{2}$ novega ostanka in še 500 K, *C* pa ostalih 2500 K. Koliko pride na vsako osebo?

70. Koliko litrov vina po 96 h in po 1 K 28 h moraš zmešati, da dobiš 160 l vina po 1 K 8 h?

71. Koliko litrov 80% špirita moraš priliti 25 l vode, da postane špirit 60%?

72. Koliko vode mora trgovec priliti 15·5 hl kisa po 20 K, da bode hektoliter veljal 16 K?

73. Koliko kilogramov srebra po 0·72 in po 0·6 čistine moraš zlit, da dobiš $4\frac{1}{2}$ kg srebra po 0·65 čistine?

74. Koliko bakra moraš pridejati 500 g srebra po 0·93 čistine, da ima zlitina 0·75 čistine?

75. Ako zliješ 24 kg srebra s čistino 0·8 in 12 kg srebra druge vrste, najdeš srebro s čistino 0·75; koliko čistino ima srebro druge vrste?

76. Ako zliješ $6\frac{1}{2} \text{ kg}$ srebra z $19\frac{1}{2} \text{ kg}$ srebra druge vrste, najdeš srebro, ki ima 0·8125 čistine; če pa zliješ $6\frac{3}{4} \text{ kg}$ srebra prve vrste in $2\frac{1}{4} \text{ kg}$ srebra druge vrste, ima zlitina 0·6875 čistine; kolika je čistina vsake vrste?

77. Srebrar zlije dvojno srebro, ki ima 0·9 in 0·75 čistine, z 10 *kg* bakra ter napravi srebro, ki ima 0·6 čistine. Koliko srebra vsake vrste mora vzeti, da bode zlitina tehtala 40 *kg*?

78. *A* ima tri srebrne palčice po 0·9, 0·8 in 0·72 čistine, ki tehtajo skupaj 2000 *g*; ako zlije prvo in drugo palčico, dobi čistino 0·84; če pa zlije drugo in tretjo palčico, dobi čistino 0·75. Koliko tehta vsaka palčica?

79. Specifična teža dveh snovi je 11·4 in 0·24; koliko gramov vsake snovi moraš spojiti, da dobiš 1 *kg* sestavljene snovi, ki je tako težka kakor voda?

80. Koliko kilogramov snovi s specifično težo 0·45 moraš spojiti z 10 *kg* snovi, kateri je specifična teža $3\frac{3}{4}$, da ima sestavljena snov specifično težo = 1?

81. Koliko zlata in srebra je bilo v kroni kralja Hierona sirakuškega, če je krona tehtala na zraku 20 funtov, pod vodo pa $18\frac{3}{4}$ funta?

82. Koliko kubičnih metrov smrekovega lesa, ki ima specifično težo 0·65, moraš zvezati z granitno kocko, ki ima 2·85 specifične teže in 10 *m*³ prostornine, da plavata spojeni telesi popolnoma v vodi?

83. Zlatar ima tri kovinske palice. Prva palica je sestavljena iz 4 *dkg* zlata, 8 *dkg* srebra in 12 *dkg* bakra; druga iz 8 *dkg* zlata, 10 *dkg* srebra in 2 *dkg* bakra; tretja iz 10 *dkg* zlata, 6 *dkg* srebra in 14 *dkg* bakra. Koliko vsake palice moraš vzeti, da napraviš zlitino, ki ima 10 *dkg* zlata, 10 *dkg* srebra in 11 *dkg* bakra?

84. *A* mora iz dveh zlitin, izmed katerih je prva sestavljena iz 27 delov bakra, 15 delov kositra in 8 delov svinca, druga pa iz 11 delov bakra, 9 delov kositra in 5 delov svinca, napraviti novo zlitino, ki ima 250 *kg* bakra in 188 *kg* kositra. Koliko svinca ima nova zlitina in koliko kilogramov moraš vzeti od prve in druge zlitine?

85. Vodnjak, ki drži $9117 m^3$ vode, se da napolniti po treh ceveh; po prvi cevi priteče v 3 urah $144 m^3$ vode, po drugi v 4 urah $231 m^3$ in po tretji v 5 urah toliko, kolikor po drugi cevi v 4 urah. V katerem času napolnijo vse tri cevi skupaj vodnjak?

86. Vodnjak napolni cev *A* sama v 3 urah in cev *B* sama v $4\frac{1}{2}$ urah; v katerem času napolnita obe cevi skupaj vodnjak?

87. Vodnjak napolni cev *A* sama v 4 urah in cev *B* sama v 8 urah; cev *C* pa izprazni polni vodnjak v 6 urah. V katerem času se napolni vodnjak, ako odpreš vse tri cevi obenem?

88. Cevi *A* in *B* skupaj napolnita vodnjak v 24 minutah; vodnjak se tudi napolni, ako teče voda po cevi *A* 20 in po cevi *B* 27 minut. V katerem času napolni vodnjak vsaka cev sama?

89. Ako priteče v vsakih 3 minutah 20 l vode v vodnjak, manjka po določenem času še 40 l, da ni vodnjak poln; če pa priteče v vsakih 5 minutah 52 l, je v istem času 72 l vode več priteklo, nego drži vodnjak. Koliko drži vodnjak?

90. Vodnjak napolnita cevi *A* in *B* v 70 minutah, cevi *A* in *C* v 84 minutah, cevi *B* in *C* v 140 minutah. V katerem času napolnijo vse tri cevi skupaj vodnjak?

91. *A* in *B* dovršita delo v 20 dneh; čez 9 dni zboli *A* in *B* dovrši ostalo delo v $24\frac{3}{4}$ dneva. Koliko časa bi potreboval vsak sam za isto delo?

92. 2 drvarja posekata določeni kos gozda v $8\frac{1}{4}$ dneva. Prvi drvar dela 2 dni, drugi pa 4 dni; tako sta dovršila $\frac{1}{3}$ svojega dela. V katerem času bi izvršil vse delo vsak drvar sam?

93. 8 zidarjev napravi zid v 6 dneh, 9 drugih zidarjev pa v 4 dneh; če najmeš 6 zidarjev prve vrste in 3 zidarje druge vrste, v koliko dneh dovršijo ti delavci isto delo?

94. Ako povečaš posadko neke trdnjave za 2000 mož, porabijo živež 15 dni prej; če pa zmanjšaš posadko za 3000 mož, shajajo z živežem 24 dni dalje. Kolika je posadka in koliko časa shaja z živežem?

Posadka ima x mož in shaja z živežem y dni. Če bi bil samo 1 mož za posadko, bi shajal z živežem x krat y dni; $(x + 2000)$ mož shaja z istim živežem $(x + 2000)$ ti del od xy dni in to je po pogoju naloge $= y - 15$, i. t. d.

95. Dve telesi, ki sta 847 m narazen, se pomičeta drugo proti drugemu in pretečeta vsako minuto oziroma po 4 m in 7 m ; čez koliko minut znaša razdalja med telesoma 110 m ?

96. Telo A se pomiče po neki premici in preteče vsako sekundo 4·6 m ; 40 sekund pozneje se začne pomikati od iste točke v isto smer telo B , ki preteče vsako sekundo 4·8 m . Kdaj se snideta telesi?

97. Od kraja A gre sel, ki prehodi vsako uro po 6 km , proti kraju B ; $\frac{3}{4}$ ure pozneje gre od kraja A kurir, ki prehodi vsako uro 11 km , proti kraju B . a) Kdaj doteče kurir sela? b) Čez koliko časa prehití kurir sela za toliko pota, za kolikor je bil sprva za njim?

98. Postaji A in B sta 153 km narazen. Od postaje A gre proti B vlak, ki preteče vsako sekundo po 8 m ; $1\frac{1}{2}$ ure pozneje gre od postaje B proti A drugi vlak, ki preteče vsako sekundo po 10 m . Kdaj in kje se srečata vlaka?

99. Od točk A in B , ki sta 42 m narazen, se pomičeta telesi M in N v isto smer; telo M preteče vsako sekundo po 4 m , telo N pa po 2·8 m . Kdaj in v kateri razdalji od B se snideta telesi, če se začne pomikati telo M 15 sekund pozneje ko telo N ?

100. Razdalja krajev A in B znaša 135 km . Od kraja A gre ob 6. uri zjutraj tovorni vlak proti B ; ob 7. uri zjutraj gre od kraja B proti A brzovlak, ki prevozi vsako uro 45 km . Ko je prevozil brzovlak $\frac{3}{4}$ razdalje od B do A , se srečata vlaka. Koliko prevozi tovorni vlak v 1 uri? Ob koliki uri se srečata vlaka? Kdaj pride brzovlak v kraj A in tovorni vlak v kraj B ?

101. A in B potujeta od kraja M do kraja N . A prehodi v 5 urah 66 km , B pa v 3 urah 22 km . Ko je B prehodil že

$16\frac{1}{2} km$, se poda A na pot in pride $2\frac{1}{3}$ ure prej do kraja N ko pa B . Koliko časa je rabil A za pot in kako daleč je od M do N ?

102. Kdaj se pokrijeta urna kazalca med četrto in peto uro?

103. Koliko časa preteče med tem, da se urna kazalca pokrijeta dvakrat zaporedoma?

104. Dve telesi se pomičeta po krožnici od iste točke v nasprotno smer in pretečeta vsako sekundo loka po $3^{\circ} 12' 30''$ in po $1^{\circ} 17' 30''$; kdaj se srečata telesi? (Krožnica, katero telesi pretečeta, meri 360° .)

105. Na dveh istosrediščnih krogih se pomičeta telesi A in B v isto smer; telo A preteče svoj krog v $27\cdot322$.. dneh, telo B pa svojega v $365\cdot24$.. dneh. Čez koliko časa sta telesi istodobno dvakrat zaporedoma na istem polumeru?

Kolik pot (koliki del od 360°) preteče telo A , oziroma telo B v 1 dnevu? Koliko pot v x dnevih? Razlika teh poti (lokov) je $= 360^{\circ}$.

106. Dve telesi sta $420 m$ narazen; ako se telesi pomičeta drugo proti drugemu, se srečata čez 70 sekund; če se pa telesi pomičeta drugo za drugim, se snideta čez 5 minut 50 sekund. Kako hitro se pomičeta telesi?

107. Od krajev A in B , ki sta $66 km$ narazen, gresta sela drug drugemu nasproti. Ako gre sel iz kraja A za 5 ur poprej, sreča sela iz kraja B čez 7 ur; če pa gre sel iz kraja B za 2 uri poprej, sreča sela iz kraja A čez 8 ur. Koliko kilometrov prehodi vsak sel v 1 uri?

108. Na okroglem drsališču, ki meri $380 m$, dohiti boljši drsalec slabjšega vsakih 76 sekund, če drsata drug za drugim; če pa drsata drug proti drugemu, se srečata vsakih 20 sekund. Koliko pot preteče vsak drsalec v 1 sekundi?

109. Dve točki se pomikata po krožnici, ki meri $180 m$, v isto (nasprotno) smer s hitrostima po $18 m$ in $12 m$; koliko časa preteče, da se točki snideta dvakrat zaporedoma?

110. Dve telesi se pomikata po krogovem obodu, ki ima $80 m$ v premeru, v nasprotno smer in se srečata vsakih 16 sekund; če se pa telesi pomikata v isto smer, se snideta vsakih 64 sekund. Kako hitro se pomikata telesi?

111. Dve telesi sta 80 m narazen. Ako se telesi pomikata drugo proti drugemu, sta čez 8 minut še 4 m narazen; če se pa telesi pomikata drugo za drugim, sta čez 50 minut 40 sekund še tudi 4 m narazen. Koliko pot preteče vsako telo v 1 minuti ?

112. Od krajev A in B gresta sela drug drugemu nasproti. Sel iz kraja A se poda 3 dni pozneje na pot in prehodi na dan 8 km več ko sel iz kraja B . Ko se srečata sela, sta si pota, katera sta prehodila, kakor $5:6$ in njuni hitrosti sta si kakor $4:3$. Koliko kilometrov prehodi vsak sel na dan in kako daleč je od A do B ?

113. Kolesar se pelje ob $8.$ uri od kraja A do kraja B , ki je 15 km oddaljen, in nazaj do kraja A . Pešec gre ob $8.$ uri $20.$ minuti od B proti A . Kolesar sreča pešca ob $9.$ uri in ga potem dohiti ob $9.$ uri $48.$ minuti. Koliko prehodi pešec in koliko prevozi kolesar v 1 minuti ?

114. Kolesarja A in B se odpeljeta od dveh krajev, ki sta 2 km narazen, istodobno v isto smer in se snideta čez 50 minut ; če se pa B odpelje 5 minut prej ko A , dohiti kolesar A kolesarja B čez 75 minut . Koliko prevozi vsak kolesar v 1 minuti ?

115. Popotniku je prehoditi pot od kraja A do kraja B v določenem času. Ko je že hodil polovico dotičnega časa, spozna, da bi prišel v kraj B za 2 uri prepozno; zato se podviza, prehodi vsako uro po 2 km več ko do sedaj in pride v pravem času v kraj B . Če bi bil takoj od začetka prehodil vsako uro po 3 km več, bi bil prišel v kraj B za 2 uri prezgodaj. Kako daleč je od A do B in koliko je popotnik sprva prehodil vsako uro?

116. Izračunaj trikotnikove kote, če je kot β za $17^{\circ}25'$ večji od kota α in kot γ za $2^{\circ}47'$ večji od kota β !

117. V enakokrakem trikotniku je kot na vrhu 3 krat tolik kakor vsak kot na osnovnici; koliki so notranji koti?

118. Vsota dveh trikotnikovih kotov, ki sta v razmerju $2:3$, znaša $3\frac{1}{2}$ krat toliko kakor tretji kot; koliki so trikotnikovi koti?

119. Ako povečaš trikotnikov kot α za 1° in kot β za 11° , so si trikotnikovi koti kakor $3:8:4$; koliki so koti?

120. V paralelogramu je deveti del enega kota za 12° manjši ko sedmi del priležnega kota; koliki so paralelogramovi koti?

121. Zunanja kota na hipotenuzi pravokotnega trikotnika sta si kakor $13:17$; koliki so notranji koti?

122. Koliko stranic ima mnogokotnik, katerega koti merijo 2880° ?

123. V katerem pravilnem mnogokotniku je razlika med notranjim in zunanjim kotom 150° ?

124. Ena kateta pravokotnega trikotnika je za 4.4 dm večja ko njen vzmet na hipotenuzo; vzmet druge katete na hipotenuzo znaša 16.9 dm . Kolika je hipotenuza?

125. Vsota obeh katet pravokotnega trikotnika znaša 223 m ; če povečaš krajšo kateto za 60 m in zmanjšaš večjo za 90 m , postane ploščina za 1950 m^2 večja. Koliki sta kateti?

126. Ako povečaš eno kateto pravokotnega trikotnika za 8 cm in drugo za 2 cm , se poveča hipotenuzni kvadrat za 144 cm^2 in ploščina trikotnikova za 24 cm^2 ; kolike so trikotnikove stranice?

127. Vsota iz osnovnice in višine nekega trikotnika znaša 40 cm ; če povečaš osnovnico za 6 cm in zmanjšaš višino za istotoliko, se ploščina poveča za 42 cm^2 . Kolika je osnovnica in kolika višina?

128. Trikotnikova osnovnica in višina sta si kakor $6:5$; ako povečaš vsako teh daljic za 9 cm , se ploščina poveča za 189 cm^2 . Izračunaj osnovnico in višino prvotnega trikotnika!

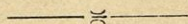
129. Ako zmanjšaš stranico določenega kvadrata za 0.5 m , se ploščina zmanjša za 31 m^2 ; kolika je stranica?

130. Pravokotnikovi stranici sta v razmerju $3:5$; ako zmanjšaš manjšo stranico za 1 m in povečaš večjo stranico za istotoliko, se ploščina zmanjša za 7 m^2 . Koliki sta stranici?

131. Romb se poveča za 324 m^2 , če povečaš vsako prekotnico za 6 cm ; če pa povečaš eno prekotnico za 6 cm , drugo pa za 4 cm , se rombova ploščina poveča za 54 cm^2 . Koliki sta prekotnici?

132. Na ravnini stojita dva stolpa 60 m narazen in sta oziroma 50 m in 40 m visoka; med tema stolpoma leži vodnjak, ki je enako oddaljen od obeh stolpnih vrhov. Kako daleč je od vodnjaka do vsakega stolpa?

133. Na sredi okroglega ribnika, katerega premer znaša 10 m , raste trstika, ki sega 1 m nad vodo; če nagneš trstiko, sega ravno do brega. Kako globok je ribnik?



132. Na ravnini stojita dva stolpa 60 m narazen in sta oziroma 50 m in 40 m visoka; med tema stolpoma leži vodnjak, ki je enako oddaljen od obeh stolpnih vrhov. Kako daleč je od vodnjaka do vsakega stolpa?

133. Na sredi okroglega ribnika, katerega premer znaša 10 m, raste trstika, ki sega 1 m nad vodo; če nagneš trstiko, sega ravno do brega. Kako globok je ribnik?

K § 32.

1. $(-a)^5 + (-a)^4 - (-a)^3 - (-a)^2$.
2. $4(-b)^5 - 3(-b)^4 + 2(-b)^3 - 3(-b)^2$.
3. $5 \cdot (-1)^5 + 4 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2$.
4. $(-2)^5 + (-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2$.
5. $(-3)^5 - (-3)^4 + (-3)^3 - (-3)^2$.
6. $3 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-3)^3$.
7. $(-3)^2 \cdot (-2)^3 - (-3)^3 \cdot (-2)^2 + (-2)^4 \cdot (-3)^2 - (-3)^3 \cdot (-2)^3$.

8. Zameni $a = -2$ v izrazu:

$$2a^5 - 3a^4 + 4a^3 - 5a^2 + 6a - 7.$$

9. Zameni $b = -1$ v izrazu:

$$(b-1)^5 - (b+1)^4 + \frac{1}{(b+2)^3} - \frac{1}{(b-1)^2}$$

10. Zameni $x = -5$ in $y = 4$ v izrazih:

$$a) \frac{2(x-y^2) + 3(y-x^2)}{x^2 - y^2}; \quad b) \frac{2(x-y)^2 - 3(x+y)^2}{x^2 - y^2}.$$

K § 33.

1. Skrči naslednje izraze:

$$a) 12a^5 - 13b^6 + 14a^5 - 15b^6 + 24b^6;$$

$$b) \frac{4}{5}a^{2n} - 0.75a^n - \frac{3}{8}a^{2n} - 0.645a^n + \frac{3}{40}a^{2n} - 0.395a^n;$$

$$c) 3a^2 - \{5b^2 - [5a^2 - (7a^2 - 3b^2)]\}.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$2. a^{4x-5y+3z} \cdot a^{2x+4y-5z} \cdot a^{2y+4z-5x}.$$

$$3. (-b)^{2x+3y} \cdot (-b)^{3x-2y} \cdot (-b)^{y-4x}.$$

$$4. 2^{4n-3} \cdot 2^{8-3n} \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{9-2n}.$$

5. $(-3)^{5m-7} \cdot (-3)^{9-4m} \cdot (-3)^{4-m} \cdot (-3).$
6. $a^4b(-x)^3 \cdot a^n b^{n-2}(-x)^n \cdot a^{n-2}b^5(-x)^{5n}.$
7. $(m+2n)^{6x-2y+3} \cdot (m+2n)^{5y-4x+2} \cdot (m+2n)^{x+y-1}.$
8. $4(2a^2-3b)^5 \cdot 3(2a^2-3b)^{3x-4} \cdot 2(2a^2-3b)^{1+2x} \cdot (2a^2-3b)^{x-2}.$
9. $(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3) \cdot (x^3-2x^2y+2xy^2-y^3).$
10. $(a^{3x+5}+a^{2x+3}+a^{x+1}) \cdot (a^{2x-3}-a^{x-1}-a).$
11. $(a^x-5a^{x-1}+6a^{x-2}-8a^{x-3}-9a^{x-4}) \cdot (2a^{x+3}-3a^{x+2}+4a^{x+1}-5a^x).$
12. $\frac{5x^{m-4}y^{2n+1}}{6a^{2+3m}} \cdot \frac{2x^{7+2m}y^{4n-5}}{9a^{2m-3}} \cdot \frac{4x^{5-m}y^{8-3n}}{5a^{7-m}}.$
13. $(\frac{4}{9}a^{2x-y}-\frac{3}{2}a^{2y}-\frac{2}{3}a^{5y-2x}) \cdot \frac{6}{5}a^{3x-2y}.$
14. $(\frac{3}{4}y^{5n-4}-\frac{2}{5}y^{3n-2}+\frac{5}{4}y^n) \cdot (\frac{2}{3}y^{3n-2}-\frac{6}{5}y^{2n-1}+10y^n).$
15. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

a) $x^{3n}+x^{2n}+x^n;$	b) $x^{m+4}+x^{m+3}+x^{m+2};$
c) $a^{2m}-a^{3m+1}+a^{4m+2};$	d) $a^{2n+3}b^{m+1}-a^{3n}b^{2m+1};$
e) $3^{3x+3}+3^{2x+2}+3^{x+1};$	f) $5^{x+3}-5^{x+2}-5^{x+1}.$

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

16. $a^{x+y-4} : a^{x-y+4}.$
17. $(-a)^{7-2x} : (-a)^{5-2x}.$
18. $(-35a^{2x-3y-4z}) : 7a^{x-4y+5z}.$
19. $a^9(x-y)^5 : (-a)^3(y-x)^2.$
20. $a^xb^y(a-1)^3 : a^{x-1}b^{y-2}(1-a)^2.$
21. $(a-1)^3(b-1)^4 : (1-a)^2(1-b)^3.$
22. $(-135x^{14}+270x^{11}-108x^8) : (-27x^7).$
23. $(a^{2x-y}+a^{3y-2x}-a^{4y-3x}) : a^{y-5x}.$
24. $(9x^{2m+3}y^{m+1}-12x^{m+n}y^{m-2}) : 3x^{m+3}y^{m-n}.$
25. $(a^8-b^8) : (a^5+a^4b+ab^4+b^5).$
26. $(-49a^{12}-6a^{10}+51a^8+25a^6) : (-7a^5+6a^4-3a^3+5a^2).$
27. $(x^{3n}-2x^{2n}+4x^n-8) : (x^n-2).$
28. $(x^{3m}-y^{3n}) : (x^{2m}+x^my^n+y^{2n}).$
29. $(27a^{4x+8y}-6a^{2x+4y}+\frac{1}{3}) : (3a^{2x+4y}+2a^{x+2y}+\frac{1}{3}).$
30. $(6x^{4n}-8x^{3n}-\frac{5}{6}x^{2n}+\frac{5}{6}x^n+\frac{1}{6}) : (3x^{2n}-x^n-\frac{1}{3}).$
31. $(\frac{3a^4}{b^4}-\frac{19a^3}{b^3}+\frac{21a^2}{5b^2}-\frac{9a}{10b}+1) : (\frac{3a^2}{x^2}-\frac{2a}{5x}+1).$

32. Okrajšaj naslednje ulomke:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{a^3}{a^{x+4}}; & b) \frac{a^{x-y}}{a^{x+y}}; & c) \frac{a^{2x-3y}}{a^{4x+y}}; \\ d) \frac{a^{m+3}}{a^{n+3}}; & e) \frac{a^{m-2n}}{a^{m+n} + a^{2m-3n}} & f) \frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a^{2n+1} - a^{2n-3}}. \end{array}$$

33. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

$$\begin{array}{ll} a) a^n - a^{n-1} + a^{n-2}; & b) a^{n-1}b - 2a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3; \\ c) a^{2n-1}b^{2n-3} - a^{2n-3}b^{2n-5}; & \\ d) 5a^{2n+3}b^{n-1} - 20a^{n-1}b^{3n+1}; & \\ e) 2^{x-4} + 2^{x-3} - 2^{x-2}; & f) 4^{3x-3} - 4^{2x-2} + 4^{x-1}. \end{array}$$

$$34. \frac{5ax^4}{6by^3} \cdot \frac{3b^2x^2}{2ay} \cdot \frac{4a^2y^4}{5b^3x^3}. \quad 35. \frac{5a^{m-1}b^{m-2}}{3x^{n+1}y^{n+2}} : \frac{3a^{m-2}x^{5-n}}{2b^3y^{n-3}}.$$

$$36. \frac{7a^{3x-y}b^{4y-2x}}{22a^{2x+2y}b^{3x-y}} : \frac{21a^{9x-8y}b^{6y-10x}}{11a^{6y+3x}b^{9x-7y}}.$$

37. Izvrši odštevanje v naslednjih izrazih:

$$\begin{array}{l} a) \frac{x^2y}{(x+y)^{m+1}} - \frac{y}{(x+y)^{m-1}}; \\ b) \frac{1-2x^4}{x^n} - \frac{1-3x^2}{x^{n-2}} - \frac{4}{x^{n-4}}. \end{array}$$

38. Poišči največjo skupno mero in najmanjši skupni mnogokratnik naslednjim izrazom:

$$\begin{array}{l} a) x^{3n} - 64y^{6m} \text{ in } x^{2n}y^{3m} - 16y^{7m}; \\ b) a^{2x+z} + a^zb^{3y} \text{ in } a^4xb^z - b^{6y+z}. \end{array}$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

$$39. (3ax)^2 \cdot (2ay)^3 \cdot (2axy)^4.$$

$$40. (-3ab)^2 \cdot (-5ac)^3 \cdot (-2bc)^4 \cdot (-abc)^5.$$

$$41. (1\frac{3}{7})^2 \cdot (1\frac{2}{5})^2 + (2\frac{2}{3})^3 \cdot (3\frac{3}{4})^3.$$

$$42. (3\frac{3}{5})^4 \cdot (1\frac{0}{1})^4 \cdot (3\frac{2}{3})^4 - (-3\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{3}{14})^3 \cdot (-\frac{4}{3})^3.$$

$$43. \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^5 \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^5 \cdot \left(\frac{b}{a-b}\right)^5 + \left(\frac{a^4-b^4}{c^2-d^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{c+d}{a^2+b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{c-d}{a^2-b^2}\right)^3.$$

$$44. (\frac{1}{2})^5 - (-\frac{1}{10})^3 + (-\frac{1}{5})^4 - (-\frac{1}{4})^3.$$

$$45. (-1\frac{1}{2})^4 - (-3\frac{1}{3})^3 + (2\frac{3}{4})^2.$$

$$46. \left(\frac{2ax-3by}{3b} + y\right)^3 + \left(1 - \frac{2bx-3a}{2bx}\right)^2.$$

$$47. \left(\frac{xy}{5ab}\right)^2 \cdot \left(\frac{3xy}{4ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ab}{3xy}\right)^4.$$

$$48. \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}.$$

$$49. [(-4\frac{2}{5})^3 : (2\frac{1}{5})^3] + [(-3\frac{3}{5})^2 : (-1\frac{1}{5})^2].$$

$$50. \frac{(a^3 - b^3)^2}{(x^2 - y^2)^2} : \frac{(a^2 + ab + b^2)^2}{(x + y)^2}.$$

$$51. \left(\frac{a-b}{x+y}\right)^n : \left(\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2}\right)^n : \left(\frac{x-y}{a+b}\right)^n.$$

$$52. \left(\frac{2a^2 + 3ab + b^2}{3a + b}\right)^3 : \left[\left(\frac{2a+b}{3a-b}\right)^3 : \left(\frac{a+b}{3a+b}\right)^3\right].$$

$$53. \left[\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m\right] - \left[\left(a - \frac{b^2}{a}\right)^m : \left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right)^m\right].$$

$$54. (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)^m : (a^2 - 2a + 1)^m.$$

$$55. \left(\frac{1}{3}x^4 - x^2y^2 + \frac{9}{16}y^4\right)^n : \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}y^2\right)^n.$$

$$56. [(32^x - 1) : (2^x - 1)] - [(8^x - 1) : (2^x - 1)].$$

57. Koliko vrednost ima:

a) kvocijent $\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$ za $x = -\frac{1}{2}$;

b) " $\frac{a^{10} - b^{10}}{a^4 - b^4}$ za $a = b$;

c) " $\frac{16a^2 - 8ab + b^2}{32a^2 - 2b^2}$ za $b = 4a$.

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

$$58. (-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3.$$

$$59. 7(a^{12})^3 - 8(-a^4)^9 + 5(-a^6)^6 - 10(-a^2)^{18}.$$

$$60. [(a^2)^3]^5 \cdot (a^5)^6 \cdot (a^6)^3 : [(a^3)^4]^2.$$

$$61. (-a^2)^{2n-1} \cdot (-a^{2n-1})^2 \cdot (-a^{2n-1})^3 \cdot (-a^{7-3n})^4.$$

$$62. \left[\left(\frac{5x^3}{4y^2}\right)^2\right]^m \cdot 3\left[\left(\frac{8y}{x^2}\right)^m\right]^2 + 2\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^m\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{15}{y}\right)^m\right]^2.$$

$$63. \left(\frac{4a^{n-1}b^4c^3-x}{9x^2y^3z^5}\right)^2 : \left(\frac{2a^{n-2}bc^2-x}{3x^2y^2z}\right)^3.$$

$$64. \left(\frac{2a^2x^3}{3by^3}\right)^3 : \left(\frac{5b^2y}{6ax^2}\right)^2 : \left(\frac{4a^2}{3b^2}\right)^4. \quad 65. [(4a)^x + (5b)^x] [(4a)^x - (5b)^x].$$

$$66. [(3a)^y + (6b)^y] [(3a)^y - (5b)^y].$$

$$67. [(3a^2 - 5ab - 2b^2)^{10x}]^{3y} : [(a - 2b)^{5x}]^{6y}.$$

$$68. \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^m \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2\right)^m.$$

$$a^0 = 1; a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

69. Določi vrednost naslednjih izrazov:

$$\begin{array}{llll} a) 6^{-2}; & b) 4^{-3}; & c) 0.4^{-1}; & d) 0.125^{-3}; \\ e) 9 \cdot 3^{-2}; & f) \frac{1}{3-4}; & g) \left(5\frac{1}{4}\right)^{-2}; & h) \left(\frac{15}{16}\right)^{-1}; \\ i) (-2)^5 \cdot (-5)^{-2} \cdot (-3)^0 \cdot (-6)^{-1}. \end{array}$$

70. Odpravi v naslednjih izrazih negativne eksponente:

$$a) 2^{-1}a^2x^{-3}y^4; \quad b) \frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{2b^2n^{-2}x^{-4}}; \quad c) \frac{a^{-1}x^{-m}}{b^{-2}y^{-n}}.$$

71. Pretvori naslednje izraze na obliko celih števil:

$$a) \frac{5a}{b}; \quad b) \frac{2ax^{-2}}{b^{-1}y}; \quad c) \frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}.$$

72. Skrči naslednje izraze kolikor mogoče:

$$\begin{array}{l} a) \frac{2}{3}a^{-5} + \frac{5}{6}a^{-5} - \frac{5}{8}a^{-5} - \frac{1}{2}a^{-5}; \\ b) 9a^{-3}b^2 + 13a^4b^{-4} + \frac{27b^2}{a^3} - \frac{12a^4}{b^4}; \\ c) \frac{3x^{-n}}{4y^{-m}} + \frac{2y^m}{x^n} - \frac{5x^{-n}}{12y^{-m}}. \end{array}$$

73. Določi naslednje produkte:

$$\begin{array}{l} a) (-5a^{-6}b^3) \cdot (-a^4b^{-3}); \quad b) (-5\frac{1}{2}a^{-5}b^2) \cdot (-8a^3b^{-5}); \\ c) (-6a^{-3}b^{-2}) \cdot (-4a^2b^{-1}) \cdot (-2a^2b^{-2}); \\ d) (\frac{3}{4}a^{-5} + \frac{2}{5}a^{-4} - \frac{3}{8}a^{-3} + \frac{1}{2}a^{-2} + a^{-1}) \cdot (-20a^5); \\ e) (8a^{-4} - 5a^{-2} - 3) \cdot (4a^{-4} - 2a^{-2} + 1). \end{array}$$

74. Določi naslednje kvocijente:

$$\begin{array}{l} a) a^{-20} : a^{-12} : a^{-3}; \quad b) (x - y)^n : (y - x)^{-3}; \\ c) (16a^{-3} - 12a^{-2} - 24a^{-1} + 6) : 6a^{-4}; \\ d) (a^{-7} - a^{-3} + 16a) : (a^{-4} + 3a^{-2} + 4); \\ e) (9x^2 + 2 + x^{-2}) : (3x - 2 + x^{-1}). \end{array}$$

75. Določi naslednjim izrazom rezultate:

$$\begin{array}{l} a) (-a^{2n-1})^{-2}; \quad b) \left(-\frac{4a^{-2}b^3}{c^{-4}}\right)^{-2}; \quad c) \left(-\frac{a^{-2}b^3}{c^{-1}d^{-4}}\right)^{-3}; \\ d) \left(\frac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-6}; \quad e) \frac{[3(4a^2b)^2]^{-1}}{[(3^{-1}ab^3)^{-2}]^3}; \end{array}$$

- f) $3[(a^{-2})^{-6}]^3 + 4[(a^9)^{-1}]^{-4} - 6[(a^{-4})^3]^{-3} + 5[(a^{-1})^{-2}]^{18}$;
 g) $(-\frac{1}{3})^{-3} \cdot (a^{-4}b^{-5})^{-5} \cdot (a^{-4}b^5)^{-5} : 9a^{-3}b^{-4}$;
 h) $(\frac{1}{2}a^{-2})^{-3} \cdot (\frac{2}{3}a^{11})^{-2} \cdot a^{-13} : (-a^{-4})^5 \cdot (2a^3x)^{-3}$.

K § 34.

1. $(5a^2 - 4x^2)^2 + (5a^2 + 4x^2)^2$. 2. $(5x^3 + 6y^3)^2 - (5x^3 - 6y^3)^2$.
3. $(2a + 5b^2)^2 - (3a - 7b^2)^2 + (4a - 9b^2)^2$.
4. $(\frac{3a}{4b} + \frac{2b}{3a})^2 + (\frac{3a}{2b} - \frac{3b}{a})^2$. 5. $(\frac{6x^2}{5y} - \frac{7y^2}{8x})^2 - (\frac{4x^2}{y} + \frac{3y^2}{2x})^2$.
6. a) $(4 + 2a - a^2)^2$; b) $(3x^2 - 4xy - 2y^2)^2$.
7. $(8x^2 - 5xy + 6y^2)^2 - (7x^2 - 9xy - 4y^2)^2$.
8. a) $(a^2 - \frac{a}{3} + \frac{1}{2})^2$; b) $(4x - \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{2x^3})^2$.
9. $(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3})^2 - (a^2 + \frac{a}{2} - \frac{1}{3})^2$.
10. $(\frac{3x^2}{4y} - \frac{2x}{3} - \frac{5y}{2x})^2 + (\frac{2x^2}{3y} + \frac{x}{2} - \frac{4y}{x})^2$.
11. a) $(6a^3 - 5a^2 + 4a - 3)^2$; b) $(9a^6 - 6a^4 + 7a^2 - 8)^2$.
12. $(4 + 3x + 2x^2 + 5x^3)^2 - (4 - 3x + 2x^2 - 5x^3)^2$.
13. $(2x - 3y)^4 = [(2x - 3y)^2]^2$.
14. $(3a + 2b)^8 = \{[(3a + 2b)^2]^2\}^2$.
15. $(7x - 3y)^4 - (5x - 4y)^4$. 16. $(3x + 2)^8 - (2x - 3)^8$.
17. $(5x^2 - 6y^{-2})^2 - (2x - 3y^{-1})^4$.
18. $(3x^{-1}y^2 - 4xy^{-2})^4 - (3xy^{-2} - 5x^{-1}y^2)^4$.
19. $(\frac{1}{2}xy^{-1} - \frac{2}{3}x^2y^{-2})^4 + (\frac{1}{2}xy^{-1} + \frac{1}{3}x^2y^{-2})^4$.
20. a) 568^2 ; b) 4796^2 ; c) 85973^2 .
21. a) 4087^2 ; b) 610809^2 ; c) 94008^2 .
22. a) $7 \cdot 29^2$; b) $0 \cdot 837^2$; c) $0 \cdot 1485^2$.
23. a) 307^4 ; b) 628^4 ; c) $0 \cdot 175^4$.
24. a) $(\frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5})^2$; b) $(1\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7})^2$; c) $(2\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6})^{-2}$.
25. a) $(1\frac{4}{5})^4$; b) $(2\frac{5}{6})^8$; c) $(10\frac{5}{9})^{-4}$.
26. a) π^2 ; b) $1 \cdot 73205 \dots^2$; c) $1 \cdot 41421 \dots^4$.
27. a) $0 \cdot 59371 \dots^4$; b) $0 \cdot 1234 \dots^4$; c) $4 \cdot 6038 \dots^4$.

28. $(3a + 4b)^3 + (3a - 4b)^3$. 29. $(5x^2 + 6x)^3 - (5x^2 - 6x)^3$.
 30. $(7a^2b - 8ab^2)^3 - (6a^2b - 9ab^2)^3$.
 31. $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b)^3 + (\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b)^3$.
 32. $(\frac{1}{3}ab^{-1} + \frac{3}{4}a^{-2}b^2)^3 + (\frac{2}{3}ab^{-1} - \frac{1}{4}a^{-2}b^2)^3$.
 33. $(\frac{6a^2x^3}{5by^2} - \frac{5b^3y^2}{3ax^2})^3 - (\frac{3a^2x^3}{5by^2} + \frac{b^3y^2}{3ax^2})^3$.
 34. $(\frac{4a^3x^2}{3b^{-2}y^{-3}} + \frac{5by^3}{2a^{-1}x^{-2}})^3 - (\frac{5a^3x^2}{6b^{-2}y^{-3}} - \frac{7by^3}{4a^{-1}x^{-2}})^3$.
 35. a) $(a^2 + 2a - 3)^3$; b) $(4x^2 - 5x - 6)^3$.
 36. $(4a^2 - 5a + 6)^3 - (3a^2 - 8a - 5)^3$.
 37. a) $(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1)^3$; b) $(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3})^3$.
 38. $(5x^3y^{-2} - 4x^{-1}y^2 + 3x^{-5}y^6)^3$.
 39. $(2a - 3b)^5 = (2a - 3b)^3(2a - 3b)^2$.
 40. $(3x - 2y)^6 = [(3x - 2y)^3]^2$.
 41. a) $(3x - 4y)^5$; b) $(\frac{5a}{3b} + \frac{6b}{5a})^5$.
 42. a) $(3a^2 + 5x^3)^6$; b) $(\frac{x}{2a} - \frac{y}{3b})^6$.
 43. a) 28^3 ; b) 45^3 ; c) 87^3 ; d) 495^3 .
 44. a) 567^3 ; b) 708^3 ; c) $80 \cdot 09^3$.
 45. a) $1 \cdot 075^3$; b) $0 \cdot 7083^3$; c) $4 \cdot 986^3$.
 46. a) 67^{-3} ; b) $(-9\frac{1}{9})^{-3}$; c) $(-5\frac{3}{11})^3$.
 47. a) $(\frac{5}{6})^6$; b) $1 \cdot 03^6$; c) $(1\frac{5}{9})^9$.
 48. a) $0 \cdot 8079 \dots^3$; b) $0 \cdot 658 \dots^3$; c) $12 \cdot 3456 \dots^3$.
 49. a) $(0 \cdot 8\dot{1} : 0 \cdot \dot{1}8)^3$; b) $0 \cdot \dot{7}5^3 : 0 \cdot 2\dot{7}^3$.

K § 35.

Razreši naslednje eksponentne enačbe:

1. $a^{x+1} \cdot a^{3x-4} = a^x \cdot a^{7x-11}$. 2. $a^{2x+3} \cdot a^{3x-4} = a^5 : a^{6-4x}$.
 3. $a^{2x-1} : a^{x+3} = a^{4x-3} : a^{x+5}$. 4. $(a^x - 5)^3 = (a^x - 4)^2$.
 5. $(a^{x-4})^{x-1} = (a^{5-x})^{4-x}$. 6. $(-2)^{-x} = -32$.
 7. $2^{-x} = 32$. 8. $(-2)^x = 16$.
 9. $(-2)^x = 64$. 10. $10^x = 0 \cdot 01$.
 11. $100^{2x} = 0 \cdot 0001$. 12. $4 \cdot 2^{x+1} = 8^{x-1}$.

13. $8^x \cdot 4^{3x} = 16^{x+5}$.

14. $8^{2x+1} = 0 \cdot 125^{4-3x}$.

15. $0 \cdot 5^{10x-9} = 2^{3-13x}$.

16. $(\frac{3}{5})^{2x} = \frac{25}{9}$.

17. $(1\frac{1}{3})^7 = 0 \cdot 75^{x-3}$.

18. $8^{-x} = \frac{4^x}{32}$.

19. $2^{x+3} + 2^x = 144$.

20. $3^x = 270 - 3^{x-2}$.

21. $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$.

22. $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-3} + 3^{x-4}$.

23. $8^x = 7^{x-1} + 7^x$.

24. $7^x + 8 \cdot 7^{x-1} = 735$.

25. $5^{2x+4} - 2 \cdot 5^{2x+3} = 15^{x+2}$.

26. $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$.

27. $9 \cdot 5^x + 8 \cdot 5^{x+1} = 1225$.

28. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

29. $4^{x+3} + 2^{x+2} = 36 \cdot 2^x$.

30. $3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2} - 4 \cdot 3^{2x-1} = 27$.

31. $a^x \cdot a^y = a^5$

32. $4^{2x-3} \cdot 2^{3y-2} = 1024$

$a^x : a^y = 1 : a$

$3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = \frac{1}{9}$

33. $a^{4x-y} : a^{y-x} = a$

34. $3^{3x-4y} : 3^{y-x-1} = 1$

$a^{x+y} : a^{8x-2y} = 1$

$2^{2x-3} \cdot 2^{5-3y} = 0 \cdot 5$

35. $17^x = 17^{y+1} \cdot 289$

36. $4^{4x-3} \cdot 2^{2y-10} = 64$

$2^{x+y} = 128$

$9^{2x-4} : 3^{y-2} = \frac{1}{3}$

K § 36.

1. Razstavi: a) število $64(x^6)$ na 2, 3, 6 enakih faktorjev; b) število $81(y^4)$ na 2 in 4 enake faktorje; c) število a^{36} na 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 enakih faktorjev!

2. Določi kvadratne korene naslednjim številom: 4, + 9, + 16, 25, 36, 49, + 64, + 81, + 100!

3. Koreni s 3 naslednja števila: 8, - 27, + 64, 125, + 216, - 343, - 512, + 729, 1000!

4. Kakšno število je: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$?

5. Ali moreš določiti kvadratni koren številom: - 4, - 9, - 16?

6. Kolika je vrednost naslednjih izrazov :

- a) $\sqrt[1]{6}, \sqrt[1]{a}, \sqrt[5]{1}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[4]{0}, \sqrt[4]{0}$; b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$;
 c) $\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$; d) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$?

K § 37.

$$a\sqrt[m]{x} \pm b\sqrt[m]{x} = (a \pm b)\sqrt[m]{x}.$$

1. $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b}$.
2. $6\sqrt[m]{a-2b} - 8\sqrt[m]{a-2b} - 5\sqrt[m]{a-2b} + 7\sqrt[m]{a-2b}$.
3. $8\sqrt[m]{a} - 12\sqrt[m]{b} - (7\sqrt[m]{b} - 3\sqrt[m]{a}) - (\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b})$.
4. $8\sqrt[2]{2} - [7\sqrt[3]{2} - (3\sqrt[2]{2} - 2\sqrt[3]{2}) - (5\sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{2})]$.

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot p]{a^p}.$$

5. Pretvori naslednje korenske izraze tako, da dobijo enake korenske eksponente:

- a) $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{x^3}$; b) $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{b^3}, \sqrt[6]{ab^2}$;
 c) $\sqrt[6]{a}, \sqrt[8]{a^2b^3}, \sqrt[12]{a^5b^7}$; d) $\sqrt[n]{a^4b^5}, \sqrt[2n]{a^6b^7}, \sqrt[3n]{a^5b^5}$.

6. Pretvori naslednje korenske izraze na enostavnejšo obliko:

- a) $\sqrt[4]{x^2}, \sqrt[6]{y^{15}}, \sqrt[18]{a^{12}}, \sqrt[mn]{x^{mp}}, \sqrt[15]{a^5}, \sqrt[4]{36}$;
 b) $\sqrt[m \cdot p]{a^m}, \sqrt[\frac{ax+bx}{m^{a+b}}]{m^{a+b}}, \sqrt[\frac{8x+12y}{a^{6x+9y}}]{a^{6x+9y}}, \sqrt[10]{32}$;
 c) $\sqrt[4]{25}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{27}, \sqrt[8]{81}, \sqrt[8]{64}, \sqrt[12]{125}$.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

7. a) $\sqrt{9 \cdot 49 \cdot 64}$; b) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; c) $\sqrt[3]{27a^3b^3}$;
 d) $\sqrt[5]{32a^5b^5}$; e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16^3 \cdot 81^3}}$; f) $\sqrt[3]{\sqrt{64 \cdot 27^2}}$;
 g) $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m \cdot 27^m}}$.

8. a) $\sqrt{x^3}$; b) $\sqrt{4a^3b}$; c) $\sqrt{75}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{80}$;
 f) $\sqrt[3]{a^6b^5c^4}$; g) $\sqrt[3]{81}$; h) $\sqrt[3]{48}$; i) $\sqrt[3]{54}$; k) $\sqrt{147}$;
 l) $\sqrt[3]{128}$; m) $\sqrt[m]{x^{m+n}}$; n) $\sqrt{1200}$; o) $\sqrt[3]{243}$;
 p) $\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+2}}$.

9. Skrči naslednje izraze kolikor mogoče:

- a) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} - \sqrt{96} + \sqrt{150}$;
 b) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - \sqrt{108}$;
 c) $2\sqrt{63} + 3\sqrt{700} - 4\sqrt{175} + 5\sqrt{28} - \sqrt{112}$;
 d) $\sqrt{18x} + \sqrt{147x} - 2\sqrt{32x} - \sqrt{192x} + \sqrt{72x}$;
 e) $13a^2x\sqrt{5ax^5} - 3ax^3\sqrt{45a^2x} - 2a^2\sqrt{80ax^7} +$
 $+ 2ax\sqrt{245a^3x^5}$;
 f) $\sqrt{4a + 4b} - \sqrt{16a^3 + 16a^2b} + \sqrt{25ab^4 + 25b^5}$;
 g) $4\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{9 + 9a^2} - x\sqrt{x^2 + a^2x^2} + \sqrt{x^4(1 + a^2)}$;
 h) $5\sqrt[3]{54} - 7\sqrt[3]{16} + 13\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{128}$;
 i) $7\sqrt[3]{250} - 9\sqrt[3]{432} + 5\sqrt[3]{686} - 8\sqrt[3]{1024}$;
 k) $3\sqrt[3]{48} - 2\sqrt[3]{750} + 3\sqrt[3]{135} - 7\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{625}$;
 l) $\sqrt[3]{54a^4b^4c} - \sqrt[3]{16a^4bc^4} + \sqrt[3]{128ab^4c^4} - \sqrt[3]{250a^4b^4c^4}$;
 m) $2\sqrt[3]{a^3 + a^3x} - 5\sqrt[3]{8 + 8x} + a\sqrt[3]{27 + 27x} - \sqrt[3]{64 + 64x}$.

10. Izvrši naslednje množitve:

- a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$; c) $\sqrt{6a} \cdot \sqrt{8b} \cdot \sqrt{3ab}$;
 d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$; e) $\sqrt{10a^3b} \cdot \sqrt{20a^4b^5} \cdot \sqrt{50ab^4}$;
 f) $\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy}$; g) $\sqrt[3]{\frac{4a}{9b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{3a}}$;
 h) $\sqrt{\frac{21a^5b^5}{8c^3}} \cdot \sqrt{\frac{24ac^5}{7b}}$; i) $\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x}$;
 k) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}}$; l) $\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$;
 m) $\sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^6 - b^6}} \cdot \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a^6 - b^6}}$;

$$n) \sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}}; \quad o) \sqrt[3]{x^2 - y^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}};$$

$$p) \sqrt[4]{x^2 - 1} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}}.$$

$$11. (2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}.$$

$$12. (5\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{72} - 5\sqrt{200}) \cdot 3\sqrt{6}.$$

$$13. (5\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) - (4 - 2\sqrt{6})(2 + 3\sqrt{6}).$$

$$14. (8\sqrt{6} - 2\sqrt{12} - \sqrt{8})(2\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

$$15. (3\sqrt{10} - 5\sqrt{3} + \sqrt{15})(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{15}).$$

$$16. \sqrt{x + y + \sqrt{2xy}} \cdot \sqrt{x + y - \sqrt{2xy}} - \\ - \sqrt{\sqrt{a + 2x^2} + \sqrt{a - 2x^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{a + 2x^2} - \sqrt{a - 2x^2}}.$$

$$17. (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + (5 - 2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2.$$

$$18. (\sqrt{4 + \sqrt{11}} - \sqrt{4 - \sqrt{11}})^2 + (\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}})^2.$$

$$19. (\sqrt{a + b} - \sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a + b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

20. Izvrši naslednje množitve:

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{5};$$

$$b) \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{y^3} \cdot \sqrt[6]{z^5};$$

$$c) \sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b};$$

$$d) \sqrt[12]{a^{11}} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4};$$

$$e) \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^2}{a^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{b^{10}}{a^9}};$$

$$f) (2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a^2b} + 4\sqrt[4]{ab^2}) \cdot \sqrt{ab};$$

$$g) (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b} + 3\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt{6} + 4a\sqrt[4]{b^3}) \cdot \sqrt[4]{b^2} \cdot \sqrt[6]{a};$$

$$h) (4\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{3})(3\sqrt{5} + 8\sqrt[3]{3});$$

$$i) (3\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7} - 2\sqrt[4]{3});$$

$$k) (\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt{ab} + 4\sqrt{xy});$$

$$l) (2 - \sqrt{3} + \sqrt[3]{5})(2 + \sqrt{3} - \sqrt[3]{5}).$$

21. Izvrši naslednje množitve:

$$a) 2 \cdot \sqrt{3}; \quad b) 3 \cdot \sqrt[3]{2}; \quad c) 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}}; \quad d) 5 \cdot \sqrt{0.2};$$

$$e) x \cdot \sqrt{\frac{a}{x}}; \quad f) \frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}; \quad g) \frac{ax}{by} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$h) (a+b) \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}; \quad i) \frac{a+1}{a-1} \cdot \sqrt{\frac{a-1}{a+1}};$$

$$k) (x-y) \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}}; \quad l) \frac{1}{x+y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{x-y}};$$

$$m) (5-3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}; \quad n) (2\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot \sqrt{7-4\sqrt{3}};$$

$$o) (1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}; \quad p) (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}.$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

$$22. a) \sqrt{\frac{49}{64}}; \quad b) \sqrt{2\frac{7}{9}}; \quad c) \sqrt[3]{\frac{27}{125}}; \quad d) \sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27c^3}};$$

$$e) \sqrt{\frac{8a^4b}{27c^4}}; \quad f) 5\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}; \quad g) \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2} + \frac{a^2+b^2}{b^2}}.$$

$$23. \sqrt{2\frac{1}{4}} + 3\sqrt{1\frac{7}{9}} - 2\sqrt{1\frac{9}{16}} + 2\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{1\frac{61}{64}}.$$

$$24. \sqrt[3]{\frac{120}{5}} + \sqrt[5]{\frac{224}{7}} - \sqrt{\frac{3}{2} : \frac{32}{3}} + \sqrt{1000 : \frac{5}{2}}.$$

25. Izvrši naslednje delitve:

$$a) 15\sqrt[3]{81a^4b^5} : 5\sqrt[3]{3ab^2}; \quad b) (10\sqrt{12} : 2\sqrt{18}) : 4\sqrt{1\frac{1}{2}};$$

$$c) \sqrt{x^{3x+2}} : \sqrt{x^{2x+2}}; \quad d) \sqrt{a^3-b^3} : \sqrt{a-b};$$

$$e) \sqrt{a^2-a^2b^2} : \sqrt{1-b^2}; \quad f) \sqrt[n]{\frac{x^{m+n}}{y^{m-n}}} : \sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^m};$$

$$g) \sqrt[n]{\frac{x^{1-n}y^{2n-3}}{a^3b^4}} : \sqrt[n]{\frac{a^{2n-3}b^{n-4}}{x^{2n-1}y^{n+3}}};$$

$$h) \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b^{2n-1}}{a^2b^3}} : \sqrt[n]{\frac{b^{n-1}}{a^3}};$$

$$i) \sqrt{\frac{2}{3}(9-m^2)} : \sqrt{\frac{27}{32}(3+m)};$$

- $k) (\sqrt[3]{30} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}) : \sqrt[3]{3};$
 $l) (6\sqrt[3]{54} - 6\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{250} - 15\sqrt[3]{128}) : 3\sqrt[3]{2};$
 $m) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} - 2\sqrt[3]{b^2}) : (\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b});$
 $n) (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}) : (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}).$

26. Izvrši naslednje delitve:

- $a) \sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a^2}; \quad b) \sqrt[6]{a^{2n+3}} : \sqrt[9]{a^{3n+2}};$
 $c) \sqrt[12]{\frac{ab^2}{c}} : \sqrt[8]{\frac{a^3b^5}{c^6}} : \sqrt[6]{\frac{c^5}{ab^2}}; \quad d) (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : (\sqrt[4]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^7});$
 $e) \left(\sqrt{\frac{a^2x}{by^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ay}{bx^3}} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{by}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^2y}{ax^2}} \right);$
 $f) (14a\sqrt[6]{a^5} - 10a^3\sqrt[4]{a}) : 2\sqrt[3]{a^3};$
 $g) (4\sqrt[5]{a^6} - 6\sqrt[6]{a^7} + 8\sqrt[3]{a^3}) : 2\sqrt[10]{a^7};$
 $h) (25\sqrt[3]{a^4} - 9\sqrt[5]{a^6}) : (5\sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[5]{a^3});$
 $i) (2\sqrt[12]{b^{13}} - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - \sqrt[6]{a^{15}b^2} + \sqrt[3]{a^9}) : (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a});$
 $k) (6\sqrt[3]{8} + 8\sqrt[6]{9} - 9\sqrt[6]{288} - 6\sqrt[3]{18}) : (3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3}).$

27. Izvrši naslednje delitve:

- $a) x : \sqrt{x}; \quad b) a : \sqrt[3]{a}; \quad c) 16 : \sqrt{2}; \quad d) 3 : \sqrt[3]{3};$
 $e) (a + x) : \sqrt{a^2 - x^2}; \quad f) (x + y) : \sqrt{\frac{x+y}{x-y}};$
 $g) (x - y) : \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy + y^2}}; \quad h) 1 : \sqrt{\frac{2a+b}{2a^3 - 3a^2b + b^3}};$
 $i) (a - b) : (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}); \quad k) (x - y) : (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y});$
 $l) (x - y) : (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}); \quad m) (3 - 5\sqrt[3]{25}) : (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5});$
 $n) (x + 4\sqrt{xy} + 3y) : (\sqrt{x} + \sqrt{y});$
 $o) \sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}} : \sqrt{\frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}};$
 $p) (a + \sqrt{a} + 1) : (\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1).$

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

28. a) $(\sqrt[3]{\sqrt[5]{27a^3b^3}})^5$; b) $(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{32}}})^3$;
 c) $(\sqrt[5]{a^2b})^2 \cdot (\sqrt[5]{ab^2})^3$; d) $(2\sqrt[3]{2})^5 + (2\sqrt[6]{2^5})^2$;
 e) $(\sqrt{x^{x-2}})^n \cdot (\sqrt{x^{2x+2}})^n$; f) $\sqrt{\frac{a^2-4a+4}{a^2+4a+4}}^3$;
 g) $\sqrt[n]{a} \cdot (\sqrt[n]{a})^{5m-3n} \cdot (\sqrt[n]{a})^{4n-5m+1}$; h) $(\sqrt[7]{ab^2c^3})^4 \cdot (\sqrt[7]{a^2b^4c^6})^5$;
 i) $b^2 \cdot \sqrt[m]{b} \cdot (\sqrt[m]{b})^{5x-4m} \cdot (\sqrt[m]{b})^{3m-5x-1}$;
 k) $(\sqrt[13]{\frac{a^5b^8}{x^{11}y^{12}}})^3 : (\sqrt[13]{\frac{a^3b^6}{x^5y^7}})^2$.

29. $\sqrt{9^3} + \sqrt[3]{8^2} + \sqrt{(5\frac{4}{9})^3} + \sqrt[3]{(2\frac{10}{27})^2}$.

30. $(\sqrt[5]{210})^3 \cdot (\sqrt[5]{210})^2 + (\sqrt[17]{280})^9 \cdot (\sqrt[17]{280})^{-2} \cdot (\sqrt[17]{280})^{10}$.

31. a) $(\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}})^2$;

b) $(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}})^2$;

c) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2})^2$;

d) $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} - \sqrt[6]{ab^2})^2$;

e) $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^4$;

f) $(3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2})^3$;

g) $(a - 3\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a})^3$.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

32. a) $\sqrt[6]{a^{30}}$;

b) $\sqrt[7]{a^{14}b^{35}}$;

c) $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^{15}y^{20}}}$;

d) $\sqrt{a^{15}b^{21}}$;

e) $\sqrt[3]{a^{16}b^{20}}$;

f) $\sqrt[4]{x^{17}y^{25}z^{30}}$;

g) $\sqrt[6]{\frac{a^{16}b^{14}}{c^{27}}}$;

h) $\sqrt[3]{a^{6x+9y}}$;

i) $\sqrt[4]{\frac{a^{4x-8y}b^{12x-4}}{c^{4+16y}}}$;

k) $\sqrt[m+n]{a^{mx+nx}}$;

l) $\sqrt[n]{a^{nx+y}}$;

m) $\sqrt[\frac{2m}{3}]{a^{4m}x}$;

n) $\sqrt{\frac{a^{x+1}}{b^{x-1}c^{x-1}}}$;

o) $\sqrt{\frac{a^{2m+1}b^{3m+2}}{c^{4m-3}}}$;

p) $\sqrt[n]{\frac{a^{1-n}b^{2-2n}}{c^{3-3n}}}$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

33. a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}}$; c) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[4]{125}}}$;
 d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5 b^7}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{ab^{11}}}$; e) $3\sqrt[3]{\sqrt[12]{a}} - 4\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}} + 5\sqrt[3]{\sqrt[8]{a}}$;
 f) $\sqrt{a\sqrt{2a}}$; g) $\sqrt[m^3]{3m}$; h) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; i) $\sqrt[7]{a\sqrt[5]{a^2}}$;
 k) $3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$; l) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$; m) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{7}{8}}}$;
 n) $\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$; o) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{1000}} + 2\sqrt{2\sqrt[2]{\frac{1}{2}}}$;
 p) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} + 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$; r) $\sqrt[m]{a\sqrt[2]{a^2}} \cdot (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[3]{a^3})$;
 s) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; t) $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt[3]{ab}}} \cdot \sqrt{\frac{b\sqrt[3]{ab}}{a\sqrt[3]{ab}}}$;
 u) $\sqrt{\frac{1}{x+y}} \cdot \sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt[6]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}.$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

34. Izračunaj vrednosti naslednjih korenskih izrazov:

a) $\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt[4]{16}$; c) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; d) $\sqrt[2]{0.25}$;
 e) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$; f) $\sqrt{a^3} : \sqrt[2]{a}$; g) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[2]{a}$;
 h) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a}$; i) $\sqrt{a} : \sqrt[1]{a}$; k) $\sqrt[3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}.$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

35. Izračunaj vrednosti naslednjih izrazov:

a) $8^{\frac{2}{3}}$; b) $25^{\frac{1}{2}}$; c) $27^{-\frac{4}{3}}$; d) $49^{0.5}$; e) $64^{1.5}$;
 f) $(-0.125)^{-\frac{2}{3}}$; g) $\sqrt[3]{8}$; h) $\sqrt[2]{49}$; i) $\sqrt[4]{9}$;
 k) $\sqrt[2]{2}.$

36. Izvrši naslednje račune:

$$a) a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}; \quad b) 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{4}} + 9^{-\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}} \cdot 9; \quad c) 15a^{-\frac{3}{4}} : 3a^{\frac{5}{6}};$$

$$d) 6a^{\frac{3}{4}} \cdot 5a^{\frac{5}{6}} : 15a^{\frac{7}{12}}; \quad e) (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} + (a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}};$$

$$f) \sqrt[{\frac{1}{2}}]{7} + \sqrt[{\frac{3}{4}}]{512}; \quad g) \sqrt[{-\frac{2}{3}}]{\frac{1}{36}} + \sqrt[{-\frac{3}{4}}]{\frac{8}{27}}; \quad h) (x^{-\frac{2}{3}} : y^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}.$$

$$37. a) (x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}}); \quad b) (2a - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}}).$$

$$38. (a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - 2a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{3}{5}}b).$$

$$39. (30x - 33x^{\frac{4}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}} + 25x^{\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{5}{3}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}}).$$

$$40. (x^{\frac{3}{2}} - 81y^{10}) : (x^{\frac{3}{8}} - 3y^{\frac{5}{2}}).$$

K § 38.

1. Poišči naslednjim mnogočlenikom kvadratni koren:

$$a) \frac{4}{9}x^4 + \frac{28}{33}x^2y + \frac{49}{121}y^2. \quad b) \frac{x^2y^2}{16} - \frac{x^2yz}{10} + \frac{x^2z^2}{25}.$$

$$c) 4a^4 - 12a^3 + 25a^2 - 24a + 16.$$

$$d) 121x^6 - 198x^5 + 235x^4 - 236x^3 + 139x^2 - 70x + 25.$$

$$e) 9x^{12} - 12x^{10} + 34x^8 - 26x^6 + 29x^4 - 10x^2 + 1.$$

$$f) 0.16x^4 - 2.4x^3 - 0.16x^2y + 9x^2 + 1.2xy + 0.04y^2.$$

$$g) a^4 - a^3b + \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{2}{3}ab^3 + \frac{1}{9}b^4.$$

$$h) 5\frac{4}{3}x^2 - 7xy - 15\frac{1}{6}xz + 2\frac{1}{4}y^2 + 9\frac{3}{4}yz + 10\frac{9}{16}z^2.$$

$$i) \frac{4x^2}{9y^4} - \frac{4xz}{3y^2} + 5z^2 + \frac{27y^6z^5}{x^3} + \frac{81y^8z^6}{4x^4}.$$

$$k) \frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25.$$

$$l) 25x^{2n-4} - 60x^{2n-2} + 106x^{2n} - 84x^{2n+2} + 49x^{2n+4}.$$

$$m) 4a^2b^{-6} - 12ab^{-5} + 25b^{-4} - 24a^{-1}b^{-3} + 16a^{-2}b^{-2}.$$

$$n) a^{4m-1} - 4a^{3m-3}b^{-m} + 2a^{2m-2}b^{-2m} + 4a^{m-1}b^{-3m} + b^{-4m}.$$

$$o) a^2 - 4a\sqrt{ab} - 2ab + 12b\sqrt{ab} + 9b^2.$$

$$p) \sqrt[5]{a^4} - 4\sqrt[15]{a^{11}} + 4\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[5]{a^2} - 4\sqrt[3]{a} + 1.$$

$$r) a^3 - 4a^2b^{\frac{1}{4}} + 4ab^{\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}} + 12a^{\frac{1}{2}}b + 9b^{\frac{3}{2}}.$$

2. Koreni naslednja dekadična števila z 2:

- a) 5041, b) 49284, c) 163216, d) 820836.
 e) 53993104, f) 1406·25, g) 532·2249,
 h) 0·97535376, i) 0·00178929, k) 0·06091024.

3. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$ 4. $\sqrt[4]{362673936}$ 5. $\sqrt[8]{1475789056}$.

6. $\sqrt{\frac{76176}{20484676}}$ 7. $\sqrt{1031\frac{10}{81}}$ 8. $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.

9. Izračunaj naslednjim številom kvadratni koren na 6 veljavnih števil:

- a) 2·63, b) 6·584, c) 1735, d) $\frac{2}{3}$, e) $18\frac{6}{7}$,
 f) $4\frac{1}{12}$, g) 2, h) 3, i) 5.

10. Določi naslednje korene na 5 veljavnih števil:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, c) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

11. Določi naslednjim številom kvadratne korene tako natanko kakor mogoče:

a) 0·1907..., b) 335·779..., c) 1·84235..

12. Poišči naslednjim mnogočlenikom tretji koren:

a) $\frac{x^6}{8} - \frac{3}{2}x^4y^2 + 6x^2y^4 - 8y^6$.

b) $\frac{27}{64}x^3 - \frac{45}{32}x^2y + \frac{25}{16}xy^2 - \frac{125}{216}y^3$.

c) $8a^6 - 12a^5 + 18a^4 - 13a^3 + 9a^2 - 3a + 1$.

d) $343 - 735x + 819x^2 - 545x^3 + 234x^4 - 60x^5 + 8x^6$.

e) $64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 +$
 $+ 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6$.

f) $\frac{a^3}{64} + \frac{3a^2}{8} + \frac{45a}{16} + 5 - \frac{45}{4a} + \frac{6}{a^2} - \frac{1}{a^3}$.

g) $\frac{27x^6}{8a^6} - \frac{27x^5}{2a^5} + \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{10x^3}{a^3} - \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{6x}{a} - 1$.

h) $8x^3 - 36x^2 + 66x - 63 + 33x^{-1} - 9x^{-2} + x^{-3}$.

i) $x^{6m} - x^{5m} + \frac{5}{27}x^{3m} - \frac{1}{81}x^m - \frac{1}{729}$.

k) $a^{-6m+12} - 6a^{-7m+3} + 12a^{-8m-6} - 8a^{-9m-15}$.

l) $8a - 60\sqrt[3]{a^2b} + 150\sqrt[3]{ab^2} - 125b$.

m) $x^3 - 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{2}{3}} - 7 + 6x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2}$.

13. Koreni naslednja dekadična števila s 3:

- a) 9261, b) 12167, c) 50653, d) 357911,
 e) 614125, f) 4492125, g) 347428927,
 h) 14·348907, i) 0·087528384, k) 78·402752.

14. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$.

15. $\sqrt[6]{1126162419264}$.

16. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$.

17. $\sqrt[3]{21\frac{119}{125}}$.

18. $\sqrt[3]{5207\frac{19}{27}}$.

19. Izračunaj naslednjim številom kubični koren na štiri veljavne številke:

- a) 2, b) 3, c) 2136, d) 1·190275,
 e) $\frac{5}{6}$, f) $\frac{37}{70}$, g) $8\frac{7}{12}$, h) $15\frac{4}{9}$.

20. Določi naslednjim številom kubične korene tako natanko kakor mogoče:

- a) $13\cdot279\dots$, b) $2\cdot618379\dots$, c) $\frac{4\pi}{3}$.

K § 39.

1. Izrazi naslednje ulomke z racionalnim imenovalcem:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{a^2b}}, \frac{\sqrt[4]{8x}}{\sqrt{2}\sqrt{2x}};$

b) $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}, \frac{3x\sqrt[5]{a}}{2\sqrt[4]{2a}}, \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{8}}, \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}};$

c) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}, \frac{4x^2-1}{\sqrt{2x+1}}, \frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}, \frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2-x^2}};$

d) $\frac{1}{2\sqrt{2a}\cdot\sqrt[3]{2b}}, \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}, \frac{a^4-b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}};$

e) $\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{a-b}}, \frac{a-b}{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}, \frac{ab}{\sqrt[n]{a^{n-2}b^{n-4}}}.$

2. Odpravi v naslednjih ulomkih iracionalni imenovalci:

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}+5}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};$$

$$b) \frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}, \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b}, \frac{\sqrt{xy}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}, \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}};$$

$$c) \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}};$$

$$d) \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}};$$

$$e) \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}}, \frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}, \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}},$$

$$\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}.$$

3. Odpravi korene v imenovalcih naslednjih izrazov:

$$a) \frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \frac{4-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}-\sqrt{6}};$$

$$b) \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}},$$

$$\frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}.$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}, \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}, \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}};$$

$$d) \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}, \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}, \frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}.$$

4. Pretvori naslednje binome v samo en korenski izraz:

$$a) \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}, \quad \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}};$$

$$b) \sqrt{8 + \sqrt{39}} - \sqrt{8 - \sqrt{39}}, \quad \sqrt{8 + \sqrt{28}} + \sqrt{8 - \sqrt{28}};$$

$$c) \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \\ \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \pm \sqrt{11 - 6\sqrt{2}};$$

$$d) \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{7}} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{7}}, \\ \sqrt{\frac{4 + \sqrt{10}}{2}} \pm \sqrt{\frac{4 - \sqrt{10}}{2}};$$

$$e) \sqrt{a + \sqrt{2a - 1}} \pm \sqrt{a - \sqrt{2a - 1}}, \\ \sqrt{x + \sqrt{ax - \frac{a^2}{4}}} \pm \sqrt{x - \sqrt{ax - \frac{a^2}{4}}};$$

$$f) \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} \pm \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}, \\ \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

5. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

$$a) \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}, \quad \sqrt{7 + 2\sqrt{10}};$$

$$b) \sqrt{11 \pm 2\sqrt{30}}, \quad \sqrt{18 \pm 8\sqrt{2}}, \quad \sqrt{7\sqrt{2} \pm 4\sqrt{6}}, \\ \sqrt{2\sqrt{5} \pm \sqrt{15}}.$$

$$c) \sqrt{4a - 2\sqrt{4a^2 - 9b^2}}, \quad \sqrt{2a + 3b + \sqrt{24ab}}, \\ \sqrt{8a^2 - b^2 + 4a\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

$$d) \sqrt{x^2 - 2y\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{2x^2 + y^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sqrt{a^2 + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4x^2}}.$$

K § 40.

Razreši naslednje iracionalne enačbe:

1. $5 - \sqrt{31 - 2x} = 0$.
2. $19 - 4\sqrt{2x + 3} = 7$.
3. $3\sqrt{\frac{4x}{3x+2}} = 4$
4. $\sqrt{41 - 20\sqrt{\frac{9x+1}{4x-3}}} = 3$.
5. $\sqrt[3]{20 - 3\sqrt{5x+1}} = 2$.
6. $2\sqrt[3]{x-3} = 3\sqrt[3]{x-27}$.
7. $2\sqrt[3]{25 + \sqrt{x}} = \sqrt[3]{200 + 6\sqrt{5x} - 29}$.
8. $\sqrt[4]{x - 0.9375} = 0.5$
9. $\sqrt{x+1} - \frac{2x-4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x-1}$.
10. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+17} = \frac{60}{\sqrt{x+17}}$.
11. $\sqrt{27x+1} - \sqrt{3x-3} = \frac{18x+5}{\sqrt{27x+1}}$.
12. $\sqrt{8x-7} - \frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2x+3}$.
13. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-4) = (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$.
14. $(\sqrt{x}+1):(\sqrt{x}+4) = (\sqrt{x}+3):(\sqrt{x}+8)$.
15. $(7-2\sqrt{x}):(10+\sqrt{x}) = (9-4\sqrt{x}):2\sqrt{x}$.
16. $\sqrt{x^2+3x+7} = 1 + \sqrt{x^2+x+4}$.
17. $\sqrt{2x-3} = 8 - \sqrt{2x+13}$.
18. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} - \sqrt{4x+5} = 0$.
19. $\sqrt{16x+9} - \sqrt{x-1} - \sqrt{9x+10} = 0$.
20. $\sqrt{4x+2} = 2\sqrt{2x-5} - \sqrt{2x-10}$.
21. $2\sqrt{x+6} + \sqrt{x+33} = 3\sqrt{x+13}$.
22. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5x+14} + \sqrt{2x-3} - \sqrt{5x+14} = 8$.
23. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$.
24. $\sqrt{ax+b} = \sqrt{ax-b} + \sqrt{2b}$.
25. $\sqrt{x-3b} - \sqrt{x-3a} = \sqrt{a-b}$.
26. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \frac{a}{\sqrt{a-x}}$.

$$27. x - 2a - \sqrt{x^2 - b^2} = (x - a) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \right).$$

$$28. 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 13$$

$$29. 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3$$

$$7\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 2.$$

$$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5.$$

$$30. \sqrt{x-y} + \sqrt{2y-x} = 8.$$

$$3\sqrt{x-y} - 2\sqrt{2y-x} = -1.$$

$$31. 8\sqrt{2x-3y} - 3\sqrt{3x+7y} = -10.$$

$$7\sqrt{2x-3y} + 5\sqrt{3x+7y} = 37.$$

$$32. \frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2$$

$$33. \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6$$

$$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1.$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1.$$

$$34. \frac{11}{3\sqrt{x+5}} + \frac{1}{4\sqrt{y+4}} = 1$$

$$35. \sqrt{\frac{x}{y}+1} = 1 + \sqrt{\frac{x}{y}-1}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x+5}} - \frac{13}{3\sqrt{y+4}} = -\frac{7}{36}.$$

$$2\sqrt{x+y} = \sqrt{3x+4y+5}.$$

Razreši naslednje eksponentne enačbe:

$$36. \sqrt[4]{a^{3x+1}} = \sqrt{a^{x+1}}. \quad 37. a^{2x} : \sqrt[3]{a^{x-1}} = a^{x-1} \cdot \sqrt{a^{3x-4}}.$$

$$38. a^{1-x} \cdot \sqrt{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{x-3}} \cdot \sqrt[6]{a^{5x}} = 1. \quad 39. \frac{x+1}{-} \sqrt{a^{20}} : a^2 = a^2.$$

$$40. \sqrt{a^{5-3x}} : \sqrt[3]{a^{5-6x}} = a. \quad 41. 4096^x \cdot 0.5 = 4^{x+\frac{1}{6}}.$$

$$42. \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x+1}{7}}. \quad 43. 0.25^{23} = \sqrt[3]{4^{5x-3}} \cdot 0.125^{6x}.$$

$$44. 64^{\frac{x+2}{8x-5}} = \sqrt[4]{0.5} \cdot \sqrt[3]{2^{x+24}}.$$

$$45. \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6.$$

$$46. 2^{3x-4\frac{1}{2}} + 3^{2x-4} = 3^{2x-3} + 2^{3x-6\frac{1}{2}}.$$

$$47. a^{2x-2} - a^{2x-3} = (a-1)^{x-\frac{1}{2}}.$$

$$48. \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2}$$

$$49. \sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1$$

$$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[2]{27} = 1.$$

$$\sqrt[4]{m^{3x-3}} \cdot \sqrt[3]{m^{5y-1}} = \sqrt[3]{m^{23}}.$$

$$50. \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{a} = 1 : \sqrt{a}$$

$$\sqrt[2]{b^2} = \sqrt[4]{b^7} \cdot b^{13} \cdot \sqrt[4]{b^3}$$

$$51. a^x : a^3 = \sqrt[3]{(a^y \cdot a^2)^2}$$

$$(a^x \cdot a)^2 = (a^y : a^2)^3$$

K § 41.

1. Skrži naslednje številne izraze:

$$a) \sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-16} - 2\sqrt{-36} + \sqrt{-100} - 5\sqrt{-49},$$

$$b) 2\sqrt{-2} + 3\sqrt{-8} - \sqrt{-18} - 4\sqrt{-50} + 5\sqrt{-72} - \\ - 2\sqrt{-98},$$

$$c) 3\sqrt{-64} - 7\sqrt{-25} + \sqrt{-12\frac{1}{4}} - 2\sqrt{-2\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{25}{36}},$$

$$d) 3\sqrt{-4\frac{1}{6}} + 2\sqrt{-7\frac{1}{5}} - 5\sqrt{-\frac{3}{2}} - 6\sqrt{-\frac{1}{5}} + \frac{3}{4}\sqrt{-54} + \\ + \frac{2}{3}\sqrt{-75},$$

$$e) 6a\sqrt{-63ab^3} + 3\sqrt{-112a^3b^3} + 2ab\sqrt{-343ab} - \\ - 5\sqrt{-28a^3b},$$

$$f) 3a^3\sqrt{-12ab^5} + 2a^2b^2\sqrt{-27a^3b} - 5\sqrt{-48a^7b^5} - \\ - 4a^2b\sqrt{-75a^3b^3}.$$

$$2. \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-40} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-4}.$$

$$3. (2\sqrt{-27} + \sqrt{-75} - 5\sqrt{-8}) \cdot 2\sqrt{-6}.$$

$$4. (-3\sqrt{-5} + 4\sqrt{-8} - 3\sqrt{-7} + 5\sqrt{-9}) \cdot (-4\sqrt{-3}).$$

$$5. (2\sqrt{-3} + \sqrt{-5})(-2\sqrt{-3} - \sqrt{-5}).$$

$$6. (3\sqrt{-3} + 5\sqrt{-5})(5\sqrt{-5} + 3\sqrt{-3}).$$

$$7. (6\sqrt{-7} - 3\sqrt{-9})(6\sqrt{-7} + 3\sqrt{-9}).$$

$$8. (5\sqrt{-2} + 6\sqrt{-3})^2 + (2\sqrt{-8} - 5\sqrt{-3})^2.$$

$$9. (5\sqrt{-2} + 4\sqrt{-3})^2 - (2\sqrt{-6} - 3\sqrt{-4})^2.$$

$$10. (5\sqrt{-2} + 2\sqrt{-3})^3 \pm (2\sqrt{-3} - 3\sqrt{-2})^3.$$

$$11. \frac{3}{4}\sqrt{-15} : \frac{4}{5}\sqrt{3}.$$

$$12. \frac{7}{2}\sqrt{6} : \frac{2}{3}\sqrt{-5}.$$

$$13. \frac{4}{3}\sqrt{-15} : \frac{3}{2}\sqrt{-5}.$$

$$14. \frac{2}{3}\sqrt{-48} : \frac{4}{5}\sqrt{-3}.$$

$$15. (12\sqrt{-6} - 3\sqrt{-3} + 15\sqrt{-9} - 21\sqrt{-15}) : 3\sqrt{-3}.$$

$$16. (26\sqrt{-20} + 39\sqrt{-35} - 65\sqrt{-45}) : 13\sqrt{-5}.$$

$$17. \left(15\sqrt{-\frac{a^2x}{by^2}} - 12\sqrt{-\frac{ax^2}{by^2}} + 18\sqrt{-\frac{a^2x}{b^2y}} - \right. \\ \left. - 21\sqrt{-\frac{ax^2}{b^2y}} \right) : 12\sqrt{-\frac{ax}{by}}.$$

$$18. (1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-49}).$$

$$19. (\sqrt{-6} + i\sqrt{5} - 7) \pm (2\sqrt{-24} - \sqrt{-75} + 11).$$

$$20. (3 + 2i)(3 - 2i) + (8 + \sqrt{-3})(8 - \sqrt{-3}).$$

$$21. (5 - 2\sqrt{-3})(5 + 2\sqrt{-3}) - (4 + \sqrt{-2})(4 - \sqrt{-2}).$$

$$22. (2\sqrt{3} - \sqrt{-5})(4\sqrt{3} - \sqrt{-4})(14 + 8\sqrt{-15}).$$

$$23. (6\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} - 4\sqrt{5})(6\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} + 4\sqrt{5}).$$

$$24. (x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}) - (x - \sqrt{-2})(x + \sqrt{-2}).$$

$$25. (3\sqrt{-4} - 2\sqrt{-12} + \sqrt{6} - 9) : (-3\sqrt{-2}).$$

$$26. (12 - 2\sqrt{-3} + \sqrt{6}) : (4 - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-3}).$$

$$27. \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3. \quad 28. (-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3})^3.$$

$$29. \left(\frac{2 + \sqrt{-3}}{2} \right)^4 + \left(\frac{2 - \sqrt{-3}}{3} \right)^4.$$

$$30. \left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{1 - 2\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} \right) \cdot 6i.$$

31. Izrazi naslednje ulomke z racijonalnim imenovalcem :

$$a) \frac{5}{2i}, \quad b) \frac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}, \quad c) \frac{10}{\sqrt{-25}}, \quad d) \frac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}},$$

$$e) \frac{28\sqrt{-12}}{3\sqrt{-7}}, \quad f) \frac{\sqrt{-3} + \sqrt{-2}}{\sqrt{-3} - \sqrt{-2}}, \quad g) \frac{4\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-4} - 4\sqrt{-2}},$$

$$h) \frac{10}{2 - \sqrt{-8}}, \quad i) \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{-2}}, \quad k) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{-3}}{\sqrt{3} - \sqrt{-2}}.$$

32. Pretvori naslednje binome v en korenski izraz:

$$a) \sqrt{3 + \sqrt{-16}} \pm \sqrt{3 - \sqrt{-16}},$$

$$b) \sqrt{2 + \sqrt{-5}} \pm \sqrt{2 - \sqrt{-5}},$$

$$c) \sqrt{-3 + 4i} \pm \sqrt{-3 - 4i},$$

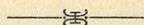
$$d) \sqrt{7 + \sqrt{-15}} + \sqrt{7 - \sqrt{-15}}.$$

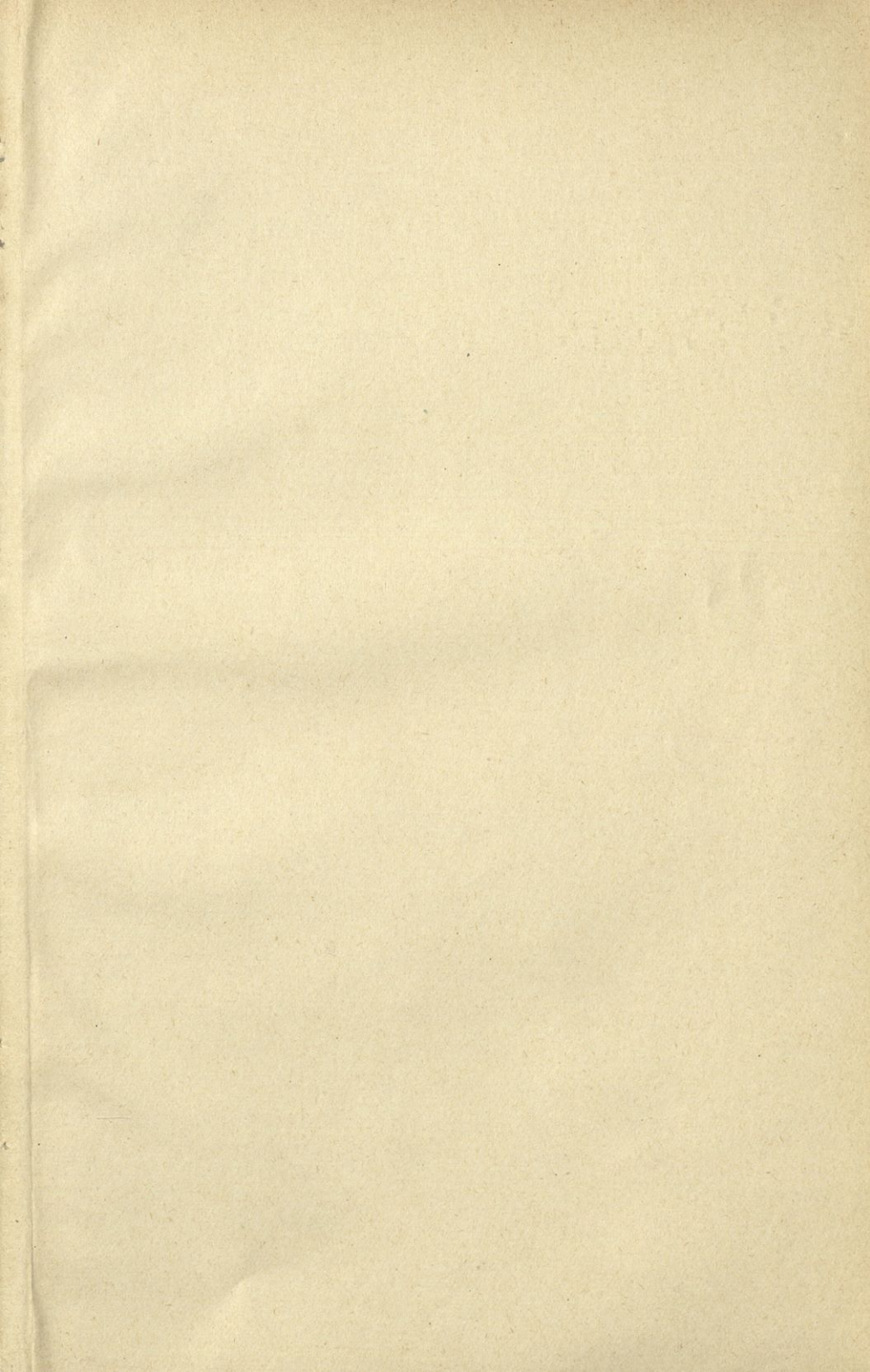
33. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

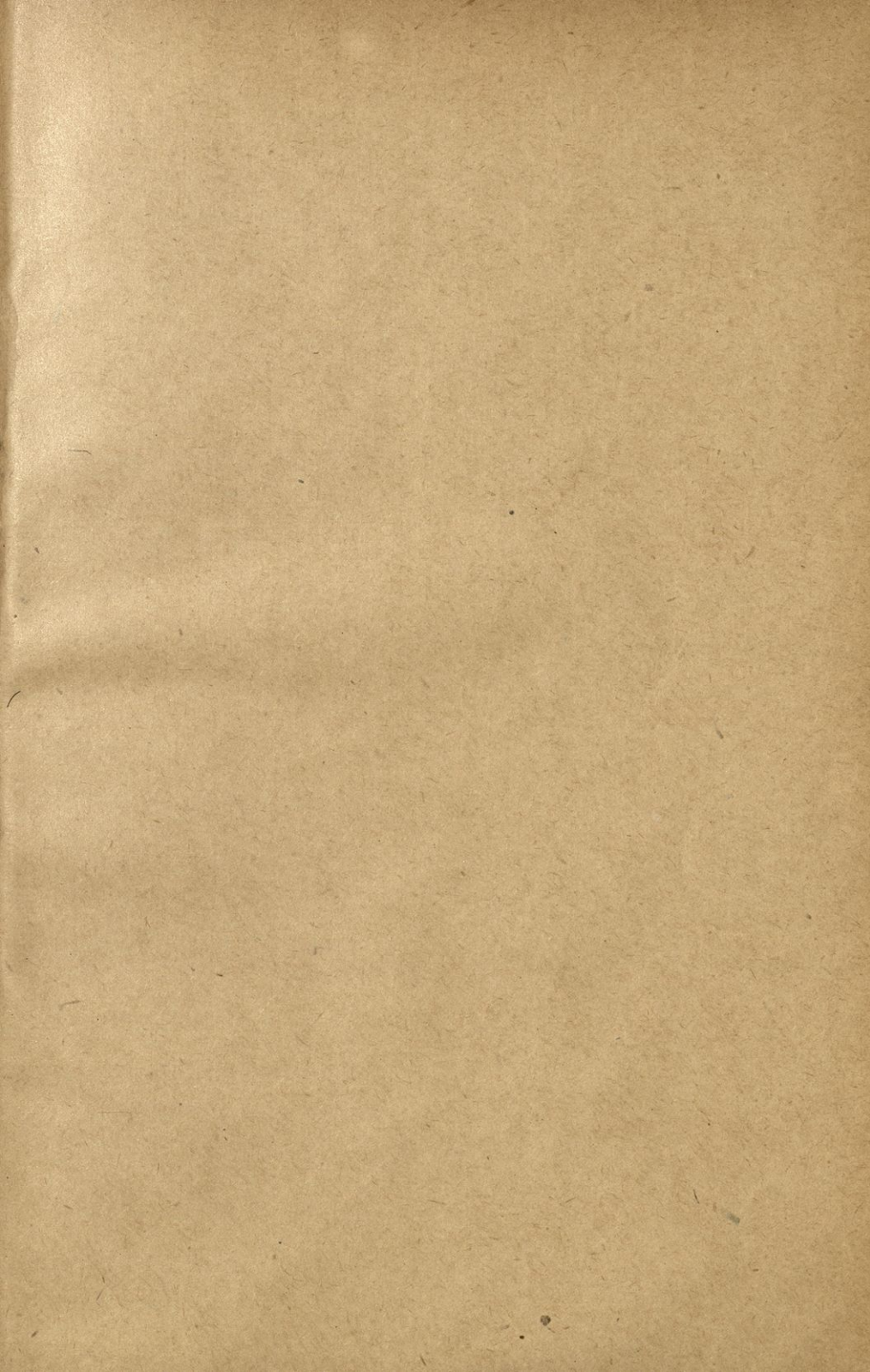
$$a) \sqrt{11 - 60i}, \quad b) \sqrt{-3 + 4i}, \quad c) \sqrt{6 + 8\sqrt{-10}},$$

$$d) \sqrt{-16 + 30i}, \quad e) \sqrt{-2 \pm 4\sqrt{-6}}, \quad f) \sqrt{9 - 2i\sqrt{3}},$$

$$g) \sqrt{\pm i} = \sqrt{0 \pm i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}).$$







NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA



00000048741

