UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO IN MEHANIKO

Jasna Prezelj

HOMOTOPSKI PRINCIP ZA SUBMERZIJE S SPRAYEM NAD STEINOVIMI PROSTORI

Doktorska disertacija

Mentor: prof. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2000

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Francu Forstneriču za znanje, potrpežljivost, čas in spodbude pri delu, članom seminarja za kompleksno analizo, ki so hrabro vztrajali med serijo predavanj o homotopskem principu in posebej še prof. Globevniku za skrb in dobre nasvete.

Hvala staršem in prijateljem, ki so mi bili vedno pripravljeni stati ob strani.

Kazalo

Povzetek

V prvem delu je dokazan homotopski princip za submerzije s sprayi:

Naj bo Z kompleksen prostor, X Steinov prostor, $h : Z \to Z$ surjektivna holomorfna submerzija, ki lokalno dopušča spray, P kompakten Hausdorffov prostor in $a_p : X \to Z$, $p \in P$, zvezna družina zveznih prerezov submerzije $h : Z \to X$. Potem obstaja taka zvezna družina zveznih prerezov $a_{p,t} : X \to Z$, $p \in P, t \in [0, 1]$, da je $a_{p,0} = a_p$, $p \in P$ in je za vsak $p \in P$ prerez $a_{p,1} : X \to Z$ holomorfen.

Glavni izrek v drugem delu je vložitveni izrek za Steinove mnogoterosti z interpolacijo na diskretnih množicah.

Naj bo X n-dimenzionalna Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna podmnožica in $\varphi : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava injekcija. Če je $n = 1$ in $q \geq 2$ ali $n > 1$ in $q \geq \max\{[\frac{n+1}{2}] + 1, 3\}$, obstaja prava holomorfna vložitev $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$, ki razširi φ.

Math. Subj. Class. (1991): 32E10, 32H02, 32H35, 32L05

Ključne besede: kompleksen prostor, Steinov prostor, holomorfna submerzija, prerez holomorfne submerzije, tangentni prostor, homotopski princip, prava preslikava, holomorfna imerzija, holomorfna vložitev

Abstract

The first part contains a proof of the homotopy principle for holomorphic submersions with sprays:

Let Z be a complex space, X Stein space, $h : Z \to Z$ surjective holomorphic submersion which locally admits a spray, P a compact Hausdorff space and $a_p : X \to Z, p \in P$, a continuous family of continuous sections of the submersion $h : Z \to X$. Then there exists a continuous family of continuous sections $a_{p,t} : X \to Z, p \in P, t \in [0,1]$, of $h : Z \to X$, such that $a_{p,0} = a_p$, $p \in P$ and the section $a_{p,1} : X \to Z$ is holomorphic for each $p \in P$.

The second part is an embedding theorem for Stein manifolds with interpolation on discrete sets.

Let X be an n-dimensional Stein manifold, $Y \subset X$ a discrete subset and $\varphi : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ a proper injective map. If $n = 1$ and $q \geq 2$ or $n > 1$ and $q \geq \max\{[\frac{n+1}{2}]+1, 3\}$ then there exists a proper holomorphic embedding $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ extending φ.

Math. Subj. Class. (1991): 32E10, 32H02, 32H35, 32L05

Key words: complex space, Stein space, holomorphic submersion, section of holomorphic submersion, tangent space, homotopy principle, proper map, holomorphic immersion, holomorphic embedding

1. Homotopski princip za submerzije s sprayem nad Steinovimi prostori

1.1 Uvod

Naj bosta X, Z kompleksni mnogoterosti in $h : Z \to X$ surjektivna holomorfna submerzija. Prerezi submerzije $h : Z \to X$ so preslikave $a : X \to Z$, ki izpolnjujejo pogoj $h \circ a = id_X$. Pravimo, da za prereze submerzije $h : Z \to X$ velja **homotopski princip** (h-princip), če lahko vsak zvezen prerez $a_0 : X \to Z$ s homotopijo $a_t : X \to Z$, $t \in [0, 1]$ premaknemo v holomorfen prerez $a_1 : X \to Z$. Če je P kompakten Hausorffov prostor in $a_p : X \to Z$, $p \in P$ zvezna družina zveznih prerezov, zahtevamo obstoj take homotopije $a_{p,t} : X \to Z$, $(p, t) \in P \times [0, 1]$, da je $a_p = a_{p,0}$ in je prerez $a_{p,1}$ holomorfen za vsak $p \in P$. Če za P izbiramo kocke $P = [0, 1]^k$, iz h-principa sledi, da je inkluzija $\mathcal{O}(X, Z) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ med holomorfnimi in zveznimi prerezi šibka homotopska ekvivalenca, kar pomeni, da inducira izomorfizme med vsemi homotopskimi grupami prostorov $\mathcal{O}(X, Z)$ in $\mathcal{C}(X, Z)$. Za submerzije, da katere h-princip velja, je zagotovljena eksistenca (vsaj kakega) holomorfnega prereza, takoj ko vemo, da obstaja zvezni prerez. Poleg tega lahko najdemo holomorfni prerez v predpisanem homotopskem razredu (npr. Grauertov izrek 1.11.4.). Med najbolj znanimi primeri uporabe h-principa so vložitveni izrek za Steinove prostore v afine prostore minimalne dimenzije ([Fr2], [EG2], [Sch1]), pa izreki Forster - Ramspott o kompletnih presekih ([FR]).

Očitno h-princip velja za preslikave $X \to \mathbf{C}^n$, tj. za prereze trivialnega svežnja $X \times \mathbf{C}^n \to X$. Če je mnogoterost X Steinova, je vsak vektorski sveženj V nad X podsveženj trivialnega svežnja in zato velja h-princip tudi v tem primeru. Grauet je v [Gra] dokazal, da velja h-princip za prereze holomorfnih glavnih G-svežnjev nad Steinovo bazo X, kjer je G kompleksna Liejeva grupa in za prereze svežnjev z G-homogenimi vlakni (vlakno F je G-homogeno, če na njem Liejeva grupa G deluje holomorfno in tranzitivno). Ideja dokaza je, da lahko s pomočjo levo-invariantnih vektorskih polj na G problem prevedemo na glavne G-svežnje. V dokazu pomembno vlogo igra eksponentna preslikava.

Gromov je v [Gr] posplošil omenjeni dokaz na prostore s sprayi. Opazil je, da lahko problem s pomočjo Cartanove leme lokaliziramo in da lahko eksponentno preslikavo nadomestimo s sprayem.

Definicija 1.1.1. **Spray** *na kompleksni mnogoterosti* F *je trivialen vektorski svežen*j $p : F \times \mathbf{C}^N \to F$ *skupaj s tako holomorfno preslikavo* $s : F \times \mathbf{C}^N \to F$, $s(x,0) = x$, *da je za vsak* $x \in F$ *vertikalni odvod* $VDs(x) := \frac{\partial}{\partial t} s(x,t)|_{t=0} : \mathbf{C}^N \to T_xF$ *surjektiven.*

Izrek 1.1.1. [Gr] *Če je* $V \to X$ *holomorfni svežen*j *nad Steinovo mnogoterostjo* X *z vlaknom* F, *ki ima spray, potem velja h-princip za prereze svežnja* V.

Pogosto pa se zgodi, da imamo opraviti s submerzijami, ki niso svežnji, recimo če iz trivialnega svežnja $X \times \mathbf{C}^n$ odstranimo analitično podmnožico. Tudi bazni prostor je pogosto kompleksen prostor s singularnostmi. Zato se v nadaljevanju ne bomo ukvarjali le s kompleksnimi mnogoterostmi, ampak s kompleksnimi prostori (definicije so v naslednjem poglavju). Grobo rečeno, lokalno kompleksen prostor zgleda kot analitična množica v nekem evklidskem prostoru; definicija je v resnici precej splošnejša. Gromov je v [Gr] v grobem razložil, kako naj bi se dokazal izrek 1.1.1., vendar je bil dokaz pomanjkljiv. Glavni izrek prvega poglavja je naslednji.

Izrek 1.1.2. (Singularni h-princip). *Naj bo* X *Steinov prostor,* $Y \subset X$ *analitična podmnožica,* Z *kompleksen prostor,* $h : Z \to X$ *surjektivna holomorfna submerzija,* d *polna metrika na* Z, *kompatibilna s topologijo na* Z, $K \subset X$ *holomorfno konveksna kompaktna množica,* $U \supset K$ *njena odprta okolica in* $\varepsilon > 0$ *poljubno število. Naj ima vsaka točka* $x \in X \setminus K$ *tako odprto okolico* $U_x \subset X$, *da submerzija* $h : Z \to X$ *dopušča spray nad* U_x *(definicija 1.2.2.).*

Naj bo P *kompakten Hausdorffov prostor (prostor parametrov),* $P_0 \subset P$ *njegova zaprta podmnožica,* $P_1 \subset P$ *njena odprta okolica in* $a_p : X \to Z$, $p \in P$ *taka zvezna družina zveznih prerezov, ki so holomorfni na* U, *da je za vsak* $p \in P_1$ *prerez* a_p *holomorfen na* X *in je za vsak* $p \in P$ *prerez* $a_p|_Y$ *holomorfen. Potem obstaja zvezna družina prerezov* $a_{p,t} : X \to Z$, $p \in P$, $t \in [0,1]$ *z lastnostmi:*

(1) *za vsak* $p \in P$ *je prerez* $a_{p,1}$ *holomorfen,*

(2) $a_{p,t} = a_p$ *za vsak* $p \in P_0$,

(3) *prerezi* $a_{p,t}$ *so holomorfni na fiksni okolici* K *in velja* $d(a_p(x), a_{p,t}(x)) < \varepsilon$ *za vsak* $t \in [0,1]$ *in* $x \in K$ *in*

(4) $a_{p,t}|_Y = a_p|_Y$ *za vsak* $t \in [0,1]$.

Posledica 1.1.1. *Naj bodo* X, Z, $h : Z \to X$, K, U, ε *in* P *kot v izreku 1.1.2. Naj bo zaprta množiza* $P_0 \subset P$ *krepki okoliški deformacijski retrakt v* P *in* $a_p : X \to Z$ *taka zvezna družina zveznih prerezov, ki so holomorfni na* U, *da je za vsak* $p \in P_0$ *prerez* a_p *holomorfen na* X. *Potem obstaja zvezna družina prerezov* $a_{p,t} : X \to Z$, $p \in P$, $t \in [0,1]$ *z lastnostmi* (1), (2) *in* (3) *iz izreka 1.1.2.*

Dokaz posledice. Naj bo $r : P_2 \times [0,1] \to P_2$ krepka deformacijska retrakcija odprte okolice $P_2 \supset P_0$ na P, $r(\cdot,0) = id|_{P_2}$, $r(P_2,1) = P_0$. Naj bo $P_1 \subset P_2$ taka odprta okolica P_0, da je $\overline{P_1} \subset P_2$. Obstaja taka gladka funkcija $\chi : P \to [0,1]$, da je $\operatorname{supp}\chi = P_1$. Definirajmo družino prerezov $a_{p,t} : X \to Z$, $(p,t) \in P \times [0,1]$, s predpisom:

$$\begin{aligned} a_{p,t} &:= a_p,\ p \in (P \setminus \operatorname{supp}\chi),\ t \in [0,1], \\ a_{p,t} &:= a_{r(p,\chi(p))},\ p \in \operatorname{supp}\chi,\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Takoj opazimo, da prvi predpis določa zvezno družino na $\overline{(P \setminus supp\chi)} \times [0,1] \subset P \times [0,1]$. Ker sta retrakcija in funkcija χ zvezni, je tudi drugi predpis zvezen na $P_2 \times [0,1]$. Na preseku definicijskih območij se oba predpisa ujemata, zato je družina $a_{p,t}$ zvezna. Ker je r krepka deformacijska retrakcija, je $a_{p,t} = a_p$ za vsak $p \in P_0$, $t \in [0,1]$. Pri $t = 0$ dobimo začetno družino, pri $t = 1$ pa družino, ki ustreza predpostavkam izreka 1.1.2., saj je po definiciji krepke deformacijske retrakcije $r(P_1,1) \subset P_0$, kar pomeni, da so prerezi $a_{p,1}$ holomorfni na X za vsak $p \in P_1$. Če izberemo množico P_1 dovolj majhno, bo homotopija $a_{p,t}$ zadoščala pogoju (3) iz posledice 1.1.1. Po izreku 1.1.2. obstaja homotopija med družino $a_{p,1}$, $p \in P$, in družino holomorfnih prerezov, ki miruje na P_0 in aproksimira prereze $a_{p,1}$ nad K. ♣

<u>Opomba.</u> Pri interpolaciji predpostavke, da so prerezi a_p holomorfni na X za vse parametre $p \in P_1$ v splošnem ne moremo nadomestiti s predpostavko, da je P_0 krepki deformacijski okoliški retrakt, ker pri reparametriziranju - razen v posebnih primerih, kot recimo, če je $a_p|_Y = a_q|_Y$ za vsak par $p, q \in P_2$ - izgubimo interpolacijski pogoj.

Na kratko pojasnimo idejo dokaza glavnega izreka, če je prostor parametrov P samo točka. Skozi vsako točko $a(x), x \in X$ napeljemo 'majhen' holomorfen prerez $a_x : U_x \to Z$, definiran na odprti okolici $U_x \subset X$ točke x. Izmed teh prerezov izberemo tako manjšo števno družino prerezov $\{a_n : U_n \to Z\}_{n \in \mathbf{N}_0}$, da je $\cup U_n = X$ in poskusimo prereze iz te družine 'zlepiti' v globalen holomorfen prerez. Ker pa lahko lepimo le prereze nad Cartanskimi pari (definicija 1.2.1.), ki so holomorfno homotopni, moramo začetne prereze izbrati tako, da bomo nad preseki definicijskih območij imeli 'dovolj' holomorfnih homotopij in zvezne homotopije med prerezi a_n in začetnim prerezom a. Za popis teh homotopij bomo vpeljali poseben prostor parametrov. Najprej bomo dokazali izrek za primer, ko sta X in Z mnogoterosti; dokaz za kompleksne prostore zahteva nekaj dodatnih tehničnih sredstev.

1.2 Osnovne definicije, oznake in tehnikalije

Definicija 1.2.1. *Urejen par kompaktnih podmnožic* (A, B) *kompleksne mnogoterosti* X *je* **Cartanski par** *oziroma* **Cartanski niz dolžine** 2*, če velja:*

(i) množice A*,* B *in* $A \cup B$ *imajo baze Steinovih okolic,*

(ii) $\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus A)} = \emptyset$ *in*

(iii) množica $C = A \cap B$ *je Rungejeva v* B *(množica* C *je lahko prazna).*

Opomba 1. Množica C je Rungejeva v B, če ima B tako bazo odprtih množic $\{U_i\}$, da je C Rungejeva v U_i za vsak i.

Opomba 2. Definicija ima smisel tudi za kompleksne prostore, vendar za dokaz h-principa na kompleksnih prostorih ni dobra, dobra je le za nekatere dele dokaza. Dejstvo, da ima $A \cup B$ bazo Steinovih okolic v mnogoterosti X bomo uporabili zato, da bomo našli strogo psevdokonveksne okolice za to unijo in na njih reševali $\overline{\partial}$- enačbe z ocenami v sup normi, kar na singularnih prostorih zaenkrat ni znano.

Navedli bomo nekaj osnovnih definicij iz teorije kompleksnih prostorov ([GR1],[GR2]). Naj bo $D \subset \mathbf{C}^n$ odprta množica, $\mathcal{O}_D$ snop zarodkov holomorfnih funkcij na D in $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_D$ koherenten snop idealov (koherenten ideal). Naj bo $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_D/\mathcal{J}$ in $A = supp\, \mathcal{O}_A$. Množica A je analitična podmnožica v D in prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ imenujemo **zaprt kompleksen podprostor** v $(D, \mathcal{O}_D)$. Če je ideal nilpotentov $\mathcal{N} \subset \mathcal{J}$ trivialen, imenujemo prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ **reduciran**. Naj bo $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{O}_D$ ideal zarodkov tistih holomorfnih funkcij na D, ki so enake 0 na A. Če je $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_D/\mathcal{J}_A$, bomo (reduciran) snop $\mathcal{O}_A$ imenovali **kanonični**. Naj bo X topološki prostor in $\mathcal{O}_X$ snop lokalnih algeber nad $\mathbf{C}$, torej takih, da ima za vsak $x \in X$ algebra $\mathcal{O}_{X,x}$ natanko en maksimalni ideal m_x. Par $(X, \mathcal{O}_X)$ je kompleksen prostor, če ima vsaka točka $x \in X$ tako odprto okolico U, da je $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ izomorfen kakemu zaprtemu kompleksnemu prostoru $(A, \mathcal{O}_A)$ nekega območja $D \subset \mathbf{C}^n$ za kak $n \in \mathbf{N}$. Če za vsak $x \in X$ ideal nilpotentov $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ trivialen, je snop $\mathcal{O}_X$ reduciran. Naj bo $\mathcal{C}_X$ snop zarodkov zveznih funkcij na X. Snop $\mathcal{O}_X$ lahko na naraven način vložimo v $\mathcal{C}_X$ natanko takrat, ko je $\mathcal{O}_X$ reduciran. Kompleksni prostori, s katerimi se bomo ukvarjali, bodo vsi reducirani in bomo zanje pogosto uporabljali oznako X namesto $(X, \mathcal{O}_X)$. Namesto izraza snop idealov bomo uporabljali izraz ideal.

Naj bo $(X, \mathcal{O}_X)$ kompleksen prostor in $m \subset \mathcal{O}_X$ maksimalni ideal. Za vsak $x \in X$ je $T^*_x(X, \mathcal{O}_X) := m_x/m_x^2$ končno razsežen vektorski prostor, ki se imenuje **kotangentni prostor v točki** $x \in X$, njegov dualni prostor $T_x(X, \mathcal{O}_X) := (T^*_x(X, \mathcal{O}_X))^*$ pa **tangentni prostor Zariskega v točki** $x \in X$. **Kotangentni prostor** $T^*(X, \mathcal{O}_X)$ je definiran kot

$T^*(X, \mathcal{O}_X) = m/m^2$ in **tangentni prostor Zariskega** kot $T(X, \mathcal{O}_X) := (T^*(X, \mathcal{O}_X))^*$. Tangentni prostor je kompleksni vektorski sveženj v okolici vsake regularne točke $x \in X$. Naj bosta $(X, \mathcal{O}_X)$ in $(Z, \mathcal{O}_Z)$ reducirana kompleksna prostora in $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ holomorfna preslikava. Označimo z $m \subset \mathcal{O}_X$ in $n \subset \mathcal{O}_Z$ maksimalna ideala. Za vsak $x \in X$ preslikava f določa preslikavo $\overline{f}_x : n_{f(x)} \to m_x$, tako da zarodku $a \in n_{f(x)}$ priredi zarodek $a \circ f \in m_x$. Ker je $\overline{f}_x(n^2_{f(x)}) \subset m^2_x$, preslikava $\overline{f}_x$ inducira **kotangentno** preslikavo

$$f^*_x : T_{f(x)}(Z, \mathcal{O}_Z) = n_{f(x)}/n^2_{f(x)} \to T_x(X, \mathcal{O}_X) = m_x/m^2_x,$$

ki je homomorfizem vektorskih prostorov. Njej dualno preslikavo $D_x f = f_{*,x} : T_x(X, \mathcal{O}_X) \to T_{f(x)}(Z, \mathcal{O}_Z)$ imenujemo **tangentna preslikava ali odvod** preslikave f.

Vložitvena dimenzija točke $x \in X$, $emdim_x(X, \mathcal{O}_X)$ (ali krajše $emdim_x X$), je najmanše tako naravno število n, za katerega obstajata odprta okolica $U \subset X$ točke x in prava holomorfna vložitev $U \to B_n$, kjer $B_n = B_n(1)$ pomeni kroglo v $\mathbf{C}^n$ z radijem 1. Izkaže se, da je $emdim_x(X, \mathcal{O}_X) = dim_{\mathbf{C}}(m_x/m^2_x)$. V vsaki regularni točki je vložitvena dimenzija enaka dimenziji X v tej točki, v singularnih točkah pa je $emdim_x X > dim_x X$. **Vložitvena dimenzija kompleksnega prostora** $(X, \mathcal{O}_X)$, $emdim(X, \mathcal{O}_X)$ je definirana kot $emdim(X, \mathcal{O}_X) = sup\{emdim_x(X, \mathcal{O}_X),\ x \in X\}$. Kompleksni prostori so lahko neskončno dimenzionalni in tudi če so končno dimenzionalni, imajo lahko neomejeno vložitveno dimenzijo.

Holomorfna preslikava $h : Z \to X$ je **skoraj submerzija v točki** $z \in Z$, če je odvod $D_z h : T_z Z \to T_{h(z)} X$ surjektiven in skoraj submerzija, če je skoraj submerzija v vsaki točki. Če je h skoraj submerzija v z, je število $k := dimker D_z h$ korang preslikave h v z, $k = corg_z h$ in velja $emdim_z Z = emdim_{h(z)} X + corg_z h$.

Trditev 1.2.1. [Fi] *Naj bo $h : Z \to X$ skoraj submerzija v točki $z \in Z$ in $k = dimker D_z h$. Potem je $k = emdim_z h^{-1}(h(z))$.*

Preslikava $h : Z \to X$ je **submerzija v okolici točke** $z \in Z$, če obstajajo odprta okolica U za $h(z)$ v X, odprta okolica V točke z v Z in taka biholomorfna preslikava $\varphi : U \times B_k \to V$ (za nek $k \in \mathbf{N}$), da je $h \circ \varphi = pr_U$. Število k je korang preslikave h v z. Preslikava h je submerzija, če je submerzija povsod. V primeru, ko sta X in Z mnogoterosti, zaradi izreka o rangu pojma skoraj submerzija in submerzija sovpadata. Očitno je vsaka submerzija skoraj submerzija.

Posledica 1.2.1. *Skoraj submerzija $h : Z \to X$ je submerzija natanko takrat, ko je vložitvena dimenzija $emdim_z h^{-1}(h(z))$ lokalno konstantna (vlakna $Z_z := h^{-1}(h(z))$ so torej mnogoterosti, katerih dimenzija je lokalno konstantna). V tem primeru je $ker Dh$ vektorski sveženj nad Z.*

Dokaz. Ker je vsaka submerzija skoraj submerzija, moramo dokazati le, da je skoraj submerzija z lokalno konstantnim korangom submerzija. Izberimo $z \in Z$, naj bo $m = emdim_z Z$, $n = emdim_{h(z)} X$ in $k = corg_z h$. Velja $m = n + k$. Po definiciji vložitvene dimenzije obstajajo odprta okolica $U \subset Z$ točke z, odprta okolica $V \subset X$ točke $h(z)$ in taki pravi holomorfni vložitvi $\iota_Z : U \to B_m$ in $\iota_X : V \to B_n$, da je $\iota_Z(z) = 0$ in $\iota_X(h(z)) = 0$. Preslikava

$$h' := \iota_X \circ h \circ \iota_Z^{-1} : \iota_Z(U) \to B_n$$

je definirana na zaprti analitični podmnožici v B_m in ima razširitev H na B_m. Preslikava H je submerzija v 0 v običajnem smislu in je zato submerzija še na okolici 0. Po izreku o rangu je H (v ustreznih kartah) lokalno projekcija $B_m \to B_n$ vzdolž B_k. Ker je imela skoraj submerzija konstanten korang k na okolici točke z, se vlakna H nad točkami iz $\iota_X(V)$ ujemajo z vlakni h', torej je h v primernih lokalnih kartah tudi projekcija. ♣

Trditev 1.2.2. *Naj bo $h : Z \to X$ submerzija med kompleksnima prostoroma in $z \in Z$ poljubna točka. Naj bo $n = emdim_{h(z)} X$ vložitvena dimenzija točke $h(z) \in X$ in $k = corgh$. Potem obstaja odprta okolica V točke Z in taki vložitvi $\iota_z : V \to B_n \times B_k$ in $\iota_{h(z)} : h(V) \to B_n$, da je $\iota_{h(z)} \circ h|_V = pr_n \circ \iota_z$*

Dokaz. Po definiciji submerzije obstajajo odprta okolica $V \subset Z$ za z, odprta okolica $U \subset X$ točke $h(z)$, $U = h(V)$, odprta krogla B_k in taka biholomorfna preslikava $\varphi : U \times B_k \to V$, da je $h \circ \varphi = pr_U$. Ker ima točka $h(z)$ vložitveno dimenzijo n, obstaja prava holomorfna vložitev $\iota_{h(z)} : U \to B_n$. Definirajmo $\iota_z := (\iota_{h(z)}, id) \circ \varphi^{-1} : V \to B_n \times B_k$. ♣

Izrek 1.2.1. ([GuR], Holomorfni razcep vektorskega svežnja). *Naj bo X Steinov prostor, V, W holomorfna vektorska svežnja nad X in $h : V \to W$ surjektiven holomorfen homomorfizem vektorskih svežnjev. Obstaja desni inverz $d : W \to V$ za h, ki inducira izomorfizem $D : ker\, h \oplus W \to V$.*

Posledica 1.2.2. *Vsak vektorski sveženj nad končno dimenzionalnim Steinovim prostorom X je podsveženj trivialnega svežnja $X \times \mathbf{C}^N$ za nek dovolj velik $N \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Naj bo V n-dimenzionalen vektorski sveženj nad m-dimenzionalno Steinovo bazo X. Za generičen nabor globalnih vektorskih polj $v_1, \ldots, v_n$ je množica A vseh tistih točk $x \in X$, kjer polja $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ ne napenjajo V_x, $(m-1)$-dimenzionalna analitična podmnožica v X. Z indukcijo navzdol pridemo do končnega števila vektorskih polj

$v_1, \ldots, v_N$, ki napenjajo V v vsaki točki $x \in X$. Preslikava $h : X \times \mathbf{C}^N \to V$, definirana s predpisom $h(x,t) = \sum_i v_i(x)t_i$, je surjektiven holomorfen homomorfizem, zato ima po izreku 1.2.1. desni inverz, ki vloži V kot podsveženj v $X \times \mathbf{C}^N$. ♣

Izrek 1.2.2. ([Siu], [Scn]). *Naj bo Z kompleksen prostor in $X \subset Z$ lokalno analitična podmnožica v Z. Če je X Steinov prostor, obstaja Steinova odprta okolica U za X v Z.*

Izrek 1.2.3. *Naj bo X Steinov prostor, $U \subset X$ Steinova odprta množica, Z poljuben kompleksen prostor in $h : Z \to X$ surjektivna holomorfna submerzija. Naj bo $f : U \to Z$ holomorfen prerez submerzije h in naj bo $VT(U) := kerDh|_{f(U)}$. Potem obstajajo odprta okolica ničelnega prereza $V \subset VT(U)$, odprta okolica $W \subset Z$ množice $f(U)$ in taka biholomorfna preslikava $\varphi : V \to W$, da je za vsak $x \in U$ preslikava $\varphi_x : V \cap VT_{f(x)}(U) \to h^{-1}(x) \cap W$ biholomorfizem.*

Preslikavo $\varphi : V \to W$ imenujemo **lokalni spray nad** U in sveženj $VT(U)$ **vertikalni sveženj** submerzije $h : Z \to X$, zožen na U.

Dokaz. Naj bo $U_0 \subset Z$ Steinova okolica množice $f(U)$ v Z, $v_1, \ldots, v_N$ vektorska polja na U_0, ki generirajo $VT|_{U_0}$, θ^{t_i} njihovi tokovi, $s(x,t) := \theta^{t_1} \circ \ldots \theta^{t_N}(f(x))$, $x \in U$ in $d : VT|_{f(U)} \to U \times \mathbf{C}^N$ desni inverz za $\frac{\partial}{\partial t}s(x,t)$. Preslikava $\varphi := s \circ d$ je iskana preslikava. ♣

Definicija 1.2.2. *Naj bosta Z in X kompleksna prostora, $h : Z \to X$ surjektivna submerzija in $U \subset X$ odprta množica.* **Submerzija** h **dopušča spray nad** U, *če za nek $m \in \mathbf{N}$ obstaja taka preslikava $s : h^{-1}(U) \times \mathbf{C}^m \to h^{-1}(U)$, da je*

$s(z,0) = z$ *za vsak* $z \in h^{-1}(U)$,

$s(z, \mathbf{C}^m) \subset h^{-1}(h(z))$ *za vsak* $z \in h^{-1}(U)$ *in*

vertikalni odvod s, $VD(s)(z) := \frac{\partial}{\partial t}s(z,t)|_{t=0} : \mathbf{C}^m \to kerD_z h$ *je surjektiven.*

Spray *nad U, pridružen submerziji $h : Z \to X$, je trojica (E,p,s), kjer je $E = h^{-1}(U) \times \mathbf{C}^m$ trivialen vektorski sveženj nad $h^{-1}(U)$, $p : E \to h^{-1}(U)$ standardna projekcija in s zgornja preslikava. Submerzija $h : Z \to X$ med kompleksnima prostoroma* **lokalno dopušča spray**, *če ima vsaka točka $x \in X$ tako odprto okolico $U \subset X$, da submerzija h dopušča spray nad U.*

Opomba 1. Tak spray imenujemo tudi **vertikalni spray** ali **spray po vlaknih.**

Posledica 1.2.3. *Če je submerzija $h : Z \to X$ sveženj z vlaknom F, ki ima spray, submerzija $h : Z \to X$ lokalno dopušča spray.*

Opomba 2. Za definicijo spraya v resnici zadošča, da je preslikava $h : Z \to X$ skoraj submerzija. Zakaj je definicija napisana za submerzije, pojasni naslednja

Trditev 1.2.3. *Naj bo preslikava $h : Z \to X$ skoraj submerzija, ki lokalno dopušča spray. Potem je $h : Z \to X$ submerzija.*

Dokaz. Ker je izrek lokalen, smemo privzeti, da sta prostora X in Z povezana. Izberimo poljubno točko $x \in X$ in naj bo $U \subset X$ taka povezana odprta okolica za x, da ima preslikava h spray nad U. Naj bo preslikava $s : h^{-1}(U) \times \mathbf{C}^m \to h^{-1}(U)$ spray nad U. Za vsak $z \in Z$ naj bo $Z_z := h^{-1}(h(z))$ vlakno skozi točko z.

Iz teorije kompleksnih prostorov (glej [Fi]) je znano, da je preslikava $z \to corg_z h$ navzdol polzvezna in da je $emdim_z Z_z = corg_z h$. Seveda je tudi preslikava $(z,t) \to corg_{(z,t)} s$ navzdol polzvezna. Velja enačba:

$$corg_{(z,t)} s + emdim_{s(z,t)} Z_{s(z,t)} = m$$

za vsak $(z,t) \in h^{-1}(U) \times \mathbf{C}^m$. Vstavimo $t = 0$ in upoštevajmo, da je $s(z,0) = z$ in $emdim_z Z_z = corg_z h$. Takoj dobimo

$$corg_{(z,0)} s + corg_z h = m,$$

kar zaradi polzveznosti pomeni, da sta funkciji $z \to corg_z h$ in $z \to corg_{(z,0)}$ konstantni. Preslikava $h : Z \to X$ ima torej lokalno konstanten korang, kar pomeni, da je submerzija.

♣

Definicija 1.2.3. ([Gr], 1.3) *Naj bosta (E_1, p_1, s_1) in (E_2, p_2, s_2) spraya na Z, pridružena submerziji $h : Z \to X$.* **Sestavljeni spray** *(E^*, p^*, s^*) je definiran z naslednjim predpisom*

$$\begin{aligned} &E^* := \{(e_1, e_2),\ s_1(e_1) = p_2(e_2)\}, \\ &p^*(e_1, e_2) := p_1(e_1) \ \textit{in} \\ &s^*(e_1, e_2) := s_2(e_2). \end{aligned}$$

*Naj bo (E, p, s) spray pridružen submerziji $h : Z \to X$. Za vsako naravno število $k \in \mathbf{N}$ je k-***ti sestavljeni spray** *$(E^{(k)}, p^{(k)}, s^{(k)})$ iz (E, p, s) definiran s predpisom*

$$\begin{aligned} &E^{(k)} := \{(e_1, \dots, e_k),\ e_j \in E, 1 \le j \le k,\ s(e_j) = p(e_{j+1})\}, \\ &p^{(k)}(e_1, \dots, e_k) := p(e_1) \ \textit{in} \\ &s^{(k)}(e_1, \dots, e_k) := s(e_k). \end{aligned}$$

Sestavljeni spray *ni* spray nad Z, saj $p^{(k)} : E^{(k)} \to Z$ v splošnem nima strukture holomorfnega vektorskega svežnja nad Z, je pa vektorski sveženj nad $(E^{(k-1)}, p^{(k-1)}, s^{(k-1)})$ s projekcijo $(e_1, \ldots, e_k) \to (e_1, \ldots, e_{k-1})$. Naslednja lema pove, da zožitve sestavljenih sprayev na Steinove podmnožice v Z dopuščajo strukturo vektorskega svežnja.

Lema 1.2.1. ([Gr], [Pr]) *Naj bo V Steinov prostor, $p_1 : E_1 \to V$ vektorski sveženj nad V in $p_2 : E_2 \to E_1$ vektorski sveženj nad E_1. Potem je $p_1 \circ p_2 : E_2 \to V$ vektorski sveženj nad V, ki je izomorfen direktni vsoti $E_1 \oplus E_2|_V$, kjer je $E_2|_V$ zožitev svežnja na ničelni prerez v E_1.*

Posledica 1.2.4. ([Gr], 1.3A') *Zožitev kakršnegakoli sestavljenega svežnja na Steinovo odprto množico $V \subset Z$ dopušča strukturo vektorskega svežnja nad V.*

Lema 1.2.2. ([Gr],1.2) *Naj bo X Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica, $h : Z \to X$ holomorfna submerzija s sprayem (E, p, s). Za vsak holomorfni prerez $f : X \to Z$ obstaja tak vektorski podsveženj $E' \subset E|_{f(X)}$, da preslikava s preslika odprto okolico ničelnega prereza v E' biholomorfno na odprto okolico $f(X)$ v Z.*

Če je $f_t : X \to Z$, $t \in [0,1]$, holomorfna homotopija, ki miruje na Y in $V \subset X$ poljubna relativno kompaktna množica, lahko za vsak $t \in [0,1]$ najdemo tako odprto okolico $I_t \subset [0,1]$ in holomorfno homotopijo $\xi_u^t, u \in I_t$ prerezov svežnja $E'|_{f_t(V)}$, da je ξ_t^t ničelni prerez, $\xi_u^t|_{Y \cap V} = 0$ in je $s(\xi_s^t) = f_u$ za vsak $u \in I_t$.

Naj bo $[t_0 := 0, t_1, \ldots, t_k = 1]$ delitev intervala $[0,1]$, podrejena pokritju $\{I_t\}_{t \in [0,1]}$ in privzemimo, da je V Steinova. Prereze $\xi_u^{t_i}, u \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$, lahko po vrsti dvignemo do take zvezne družine ξ^t prerezov sestavljenega svežnja $(E^{(k)}, p^{(k)}, s^{(k)})|_{f_0(X)}$, da je $\xi^t|_{(Y \cap V)} = 0$ in $\xi^0 = 0$.

Dokaz. Ker je $E|_{f(x)}$ sveženj nad Steinovo bazo, ima jedro preslikave $VD(s)$, ki je vektorski sveženj nad Z, holomorfen komplement E' v $E|_{f(X)}$. Ker je odvod preslikave $s : E' \to Z$ izomorfizem v točkah iz ničelnega prereza, preslika odprto okolico ničelnega prereza v E' biholomorfno na odprto okolico $f(X)$ v Z. Druga in tretja trditev sta takojšnja posledica. ♣

Naj bo P topološki prostor in $P_0 \subset P$ njegov podprostor. Prostor P_0 je **krepki okoliški deformacijski retrakt** v P, če obstaja odprta okolica U za P_0 v P in krepka deformacijska retrakcija $r : U \times [0,1] \to U$, tj. zvezna družina takih preslikav $r(\cdot, t) : U \to U$, da je $r(\cdot, t)|_{P_0} = id|_{P_0}$, $r(\cdot, 0) = id|_U$ in $r(\cdot, 1) : U \to P_0$ retrakcija.

Radi bi tudi znali na kanoničen način (z operatorji) razširjati funkcije z analitičnih podmnožic v Steinovih mnogoterostih na odprte okolice. To bomo potrebovali v več primerih: pri konstrukciji začetnih prerezov za interpolacijo na Y, za dokaz Rungejevega izreka na Steinovih prostorih itd. Prvi tak znan rezultat je naslednji

Izrek 1.2.4. ([HL1], 4.11) *Naj bo X Steinova mnogoterost, $D \subset X$ strogo psevdokonveksna odprta množica, $U \supset \overline{D}$ poljubna odprta množica in $Y \subset U$ zaprta podmnogoterost. Obstaja omejen razširitveni integralski operator*

$$Q_D : H^\infty(D \cap Y) \to H^\infty(D),$$

torej operator, ki zadošča $Q_D(f)|_Y = f$.

Radi bi tudi omejen razširitveni operator za analitične podmnožice. Če je Y analitična množica in ne mnogoterost, v splošnem ne obstaja omejen razširitveni operator $R_D : H^\infty(D \cap Y) \to H^\infty(D)$ za kako relativno kompaktno strogo psevdokonveksno območje $D \subset X$ kot v izreku 1.2.4., lahko pa dobimo opetaror $R_{D,D'} : H^\infty(D \cap Y) \to H^\infty(D')$ za vsak $D' \subset\subset D$.

Trditev 1.2.4. (Omejen razširitveni operator). *Naj bo X kompleksna mnogoterost, $X_0 \subset X$ zaprta podmnogoterost in $D \subset X$ relativno kompaktna psevdokonveksna množica. Za vsako relativno kompaktno množico $D_1 \subset\subset D$ obstaja omejen linearni razširitveni operator $R_{D,D_1} : H^\infty(D \cap X) \to H^\infty(D_1)$.*

Opomba. Če je $D \subset\subset X$ strogo psevdokonveksna, X_0 nima singularnosti na bD in seka bD transverzalno, po [Hen], [HL1] obstaja omejen razširitveni operator $R_D : H^\infty(D \cap X) \to H^\infty(D)$.

Dokaz. Idejo dokaza dolgujem B. Berndtssonu. Ker je D psevdokonveksna v X, je zožitveni operator $S : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(X_0 \cap D)$ surjektiven ([GuR], str. 245, izrek 18). Ker sta oba prostora Fréchetova, lahko uporabimo izrek o odprti preslikavi. Naj bo $D' \subset X$ tako območje, da je $D_1 \subset\subset D' \subset\subset D$. Po izreku o odprti preslikavi množica $V = S(\{f' \in \mathcal{O}(D), \|f'\|_{L^\infty(D')} < 1\})$ vsebuje odprto okolico izhodišča v $\mathcal{O}(X_0 \cap D)$, recimo $W_U = \{f \in \mathcal{O}(X_0 \cap D), \|f\|_{L^\infty(U)} < \delta\}$ za nek $\delta > 0$ in odprto množico $U \subset X_0 \cap D$. To pomeni, da ima vsak $f \in W$ razširitev $f' \in \mathcal{O}(D)$ z $\|f'\|_{L^\infty(D')} < 1$. Zato obstaja taka konstanta $M < \infty$, da je vsak $h \in \mathcal{O}(X_0 \cap D)$ mogoče razširiti do take funkcije $h' \in \mathcal{O}(D)$, ki zadošča oceni

$$\|h'\|_{L^\infty(D')} \leq M \|h\|_{L^\infty(U)}.$$

Res, če izberemo poljuben $f \in \mathcal{O}(X_0 \cap D)$, funkcija $g = \delta f / \|f\|_{L^\infty(U)}$ leži v W in ima zato razširitev g', ki leži v V. Za funkcijo $f' = g' \|f\|_{L^\infty(U)}/\delta$ velja

$$\|f'\|_{L^\infty(D')} = \|g'\|_{L^\infty(D')} \|f\|_{L^\infty(U)}/\delta < \|f\|_{L^\infty(U)}/\delta.$$

Konstanta M je kar $1/\delta$.

Privzeti smemo, da je $U \supset X_0 \cap D'$, saj je $W_{U_1} \subset W_U$ za vsak $U_1 \supset U$. Ker je zožitev $h'|_{D'}$ omejena, leži v Bergmanovem prostoru $H = L^2(D') \cap \mathcal{O}(D')$, kjer L^2-normo merimo glede na neko gladko hermitsko metriko na X. Prostor H je Hilbertov in vsebuje zaprt podprostor $H_0 = \{f \in H,\ f|_{X_0} = 0\}$. Naj bo H_1 ortogonalni komplement H_0 v H in $\pi : H \to H_1$ pripadajoča projekcija. Funkcija $\tilde{h} := \pi(h')$ je tista razširitev h, ki ima med vsemi razširitvami h na D'' najmanjšo L^2 normo na D'. Očitno je s tem funkcija $\tilde{h}$ enolično določena, in predpis $R_{D,D'}(h) = \tilde{h}$ določa omejen linearen operator $R_{D,D'} : H^\infty(D \cap X_0) \to L^2(D')$. Če zožimo $\tilde{h}$ na D_1, dobimo omejen razširitveni operator $R_{D,D_1} : H^\infty(D \cap X_0) \to H^\infty(D_1)$. ♣

1.3 H-Rungejev izrek

V tem razdelku se bomo ukvarjali s homotopsko verzijo Rungejevega izreka. Za funkcije je to naslednji izrek:

Izrek 1.3.1. (Homotopski Rungejev izrek za funkcije). *Naj bo X Steinova mnogoterost, $K \subset X$ holomorfno konveksna kompaktna množica, $U \supset K$ odprta okolica za K, V odprta holomorfno konveksna, relativno kompaktna množica, ki vsebuje $\overline{U}$, P kompakten Hausdorffov prostor, $\varepsilon > 0$ in $f_p : U \to \mathbf{C}$, $p \in P$ zvezna družina holomorfnih funkcij. Obstaja taka zvezna družina holomorfnih funkcij $f'_p : V \to \mathbf{C}$, da je $\|f_p(x) - f'_p(x)\| < \varepsilon$ za vsak $x \in K$.*

Družini f_p in f'_p lahko nad množico U povežemo s tako holomorfno homotopijo $g_{p,t} : U \to \mathbf{C}$, $p \in P, t \in [0,1]$, da je

(1) $g_{p,0} = f_p$, $g_{p,1} = f'_p$ *in je*

(2) $\|g_{p,t}(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$ *za vsak* $x \in K$, $(p,t) \in P \times [0,1]$.

Dokaz. Privzeti smemo, da je V strogo psevdokonveksna, saj je X Steinova (če ni, jo nadomestimo z večjo strogo psevdokonveksno množico $V' \subset X$ in dokažemo izrek za V'). Naj bo $r : X \to \mathbf{R}_+$ taka gladka strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja za V, da je $K \subset r^{-1}((-\infty, 0]) \subset U$, $\chi : V \to [0,1]$ gladka funkcija na V, ki je na okolici K enaka 1 in ima kompakten nosilec v U. Definirajmo družino $(0,1)$-form s predpisom

$$a_p := \overline{\partial}(\chi f_p) = f_p \overline{\partial}\chi.$$

Ker so funkcije f_p holomorfne na U, je $\operatorname{supp} a_p \subset \operatorname{supp} \overline{\partial}\chi \subset r^{-1}([t_1, t_2])$ za primerna $t_1, t_2 > 0$. Naj bo $M > 0$ tako veliko realno število, da je

$$\|a_p\|_{L^2(V, e^{-Mr})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

za $p \in P$.

Označimo s h_p zvezno družino rešitev enačbe $\overline{\partial} h_p = a_p$, ki je ortogonalna na $\mathcal{O}(V)$ v prostoru $L^2(V, e^{-Mr})$. L^2 ocene za rešitve $\overline{\partial}$-enačbe povedo (glej npr. [HL1]), da je

$$\|h_p\|_{L^2(V,e^{-Mr})} \leq D_1 \|a_p\|_{L^2(V,e^{-Mr})},$$

kjer je konstanta D_1 odvisna le od območja in ne od uteži.

Privzemimo za trenutek, da je V odprta v $\mathbf{C}^n$. Naj bo $\delta > 0$ tako število, da unija množic

$$U_K := \bigcup_{x \in K} B_n(x, \delta)$$

ne seka $\operatorname{supp} \overline{\partial}\chi$. Po lemi 3.2 iz [FL], str.144 za vsako gladko funkcijo h velja ocena:

$$|h(x)| \leq D_2 \left(\delta^{-n-1} \|h\|_{L^2(B_n(x,\delta))} + \delta \|\overline{\partial} h\|_{L^\infty(B_n(x,\delta))} \right).$$

Funkcije h_p so za vsak $x \in K$ holomorfne na $B_n(x, \delta)$, zato zadnji člen v oceni odpade. Očitno je

$$\|h_p\|_{L^2(B_n(x,\delta))} \leq \|h_p\|_{L^2(U_K)} \leq \|h_p\|_{L^2(U_K,e^{-Mr})} \leq \|h_p\|_{L^2(V,e^{-Mr})},$$

zato je

$$\|h_p\|_K \leq D_2 \delta^{-n-1} \|h_p\|_{L^2(V,e^{-Mr})}.$$

Podobne ocene naredimo na mnogoterostih. Ugotovili smo, da je

$$\|h_p\|_K \leq D \|h_p\|_{L^2(V,e^{-Mr})} < D \frac{\varepsilon}{2},$$

kjer je konstanta D odvisna le od χ, V in kart na V. Definirajmo $f_p' := \chi f_p - h_p$ in $g_{p,t} := (1-t) f_p + t f_p'$, $p \in P, t \in [0,1]$. Očitno je $\|f_p' - f_p\|_K = \|h_p\|_K < \varepsilon$. ♣

Včasih je začetna dužina funkcij $f_p, p \in P$ taka, da so funkcije f_p za kako množico parametrov P_0 že definirane in holomorfne na V. V tem primeru hočemo, da bodo za parametre $p \in P_0$ funkcije f_p' enake začetnim in bo homotopija $g_{p,t}$ za $p \in P_0$ mirovala.

Posledica 1.3.1. (Predpostavke kot v izreku 1.3.1.) *Naj bo $P_0 \subset P$ zaprta množica, $P_1 \subset P$ njena odprta okolica in V strogo psevdokonveksna množica. Če je za vsak $p \in P_1$ funkcijo f_p mogoče razširiti na V, lahko homotopijo $g_{p,t} : U \to \mathbf{C}$ izberemo tako, da ima lastnosti* (1) *in* (2) *iz izreka* 1.3.1. *in zadošča $g_{p,t} = f_p$ za vsak $p \in P_0, t \in [0,1]$.*

Dokaz. Dokaz je enak dokazu izreka 1.3.1., le da si moramo zagotoviti to, da bodo za parametre $p \in P_0$ forme a_p ničelne (potem bodo tudi rešitve ustreznih enačb ničelne).

Naj bosta funkciji $r : V \to \mathbf{R}_+$ in $\chi : V \to [0,1]$ kot v dokazu izreka 1.3.1. in naj bo $\psi : P \to [0,1]$ taka gladka funkcija, da je $\operatorname{supp}\psi \subset P_1$ in ψ enaka 1 na odprti okolici P_0. Definirajmo družino $(0,1)$-form s predpisom:

$$a_p := \overline{\partial}((1-\psi(p))\chi f_p), \quad p \in P$$

Izberimo konstanto M kot v dokazu zgornjega izreka 1.3.1. in naj bodo h_p rešitve enačbe $\overline{\partial} h_p = a_p$, ki so ortogonalne na $\mathcal{O}(V)$ v prostoru $L^2(V, e^{-Mr})$. Ker je $1 - \psi(p) = 0$ za vsak $p \in P_0$, je $a_p = 0$ in tudi $h_p = 0$. Po enakem sklepu kot v prejšnjem izreku družina holomorfnih funkcij $f'_p := (1-\psi(p))\chi f_p - h_p$ aproksimira f_p na K, $p \in P$. Ker je $h_p = 0$ za $p \in P_0$, je $f'_p = f_p$ za $p \in P_0$ in $g_{p,t} := (1-t)f_p + tf'_p : U \to \mathbf{C}, p \in P,\ t \in [0,1]$, je iskana homotopija. ♣

<u>Opomba.</u> Očitno oba izreka veljata tudi za preslikave v $\mathbf{C}^n$.

Posledica 1.3.2. (H-Rungejev izrek s fiksnimi parametri in interpolacijo za funkcije). *Naj bodo* X, K, U, V, P_0, P_1, P, $\varepsilon > 0$ *kot v izreku* 1.3.1. *in* $f_{p,t} : U \to \mathbf{C},\ p \in P,\ t \in [0,1]$, *taka družina holomorfnih funkcij, da so funkcije* $f_{p,t},\ p \in P_1, t \in [0,1]$ *in* $f_{p,0},\ p \in P$ *definirane in holomorfne na* V. *Potem obstaja taka homotopija* $g_{p,t,s} : U \to \mathbf{C}, p \in P, t, s \in [0,1]$, *da je*

(1) $g_{p,t,0} = f_{p,t},\ p \in P,\ t \in [0,1]$,

(2) $g_{p,t,s} = f_{p,t},\ p \in P_0,\ t, s \in [0,1]$ *in* $g_{p,0,s} = f_{p,0},\ p \in P$,

(3) *funkcije* $g_{p,t,1}$ *so holomorfne na* V *in*

(4) $\|g_{p,t,s}(x) - f_{p,t}(x)\| < \varepsilon$ *za vsak* $x \in K$.

Naj bo $Y \subset X$ *analitična podmnožica in naj bo družina* $f_{p,t}$ *taka, da je za vsak fiksen* $p \in P$ $f_{p,t}|_{Y\cap U} = f_{p,0}|_{Y \cap U},\ t \in [0,1]$. *Potem lahko homotopijo* $g_{p,t,s} : V \to \mathbf{C}$ *izberemo tako, da bo za vsak fiksen* $p \in P$ *veljalo*

(5) $g_{p,t,s}|_{Y\cap V} = f_{p,0}|_{Y\cap V},\ s, t \in [0,1]$.

<u>Opomba.</u> Tudi ta posledica velja za holomorfne preslikave v $\mathbf{C}^n$. Ker je vsak vektorski sveženj nad Steinovo bazo podsveženj trivialnega svežnja nad isto bazo, velja posledica tudi za prereze vektorskih svežnjev nad Steinovo bazo.

Dokaz. Za dokaz posledice brez interpolacije bomo problem prevedli na prejšnjo posledico. Najprej reparametrizirajmo družino glede na spremenljivko t. Izberimo $\delta > 0$ in za vsak fiksen $p \in P$ definirajmo novo družino

$$\begin{aligned} f'_{p,t} &:= f_{p,0},\ t \in [0,\delta], \\ f'_{p,t} &:= f_{p,(t-\delta)/(1-\delta)},\ t \in [\delta, 1] \end{aligned}$$

Ko gre $\delta \to 0$, gre $f'_{p,t} \to f_{p,t}$ enakomerno po kompaktih, zato $f'_{p,t}$ na K aproksimira $f_{p,t}$ tako dobro, kor želimo. Definirajmo $P' := P \times [0,1]$, $P'_1 := P_1 \times [0,1] \cup P \times [0,\delta)$ in $P'_0 := P_0 \times [0,1] \cup P \times 0$. Naša družina zdaj izpolnjuje predpostavke posledice 1.3.1. za P'_0, P'_1 in P' namesto P_0, P_1 in P.

Za drugi del izreka postopamo podobno. Najprej definiramo družino $f'_{p,t}$. $p \in P,\ t \in [0,1]$ in množice P'_0, P'_1 in P' kot zgoraj. Definirajmo novo družino

$$f''_{p,t} := f'_{p,t} - f'_{p,0}, \quad p \in P,\ t \in [0,1].$$

Naj bodo $\gamma_1, \dots \gamma_m : X \to \mathbf{C}$ holomorfne funkcije, ki na okolici V generirajo ideal $\mathcal{J}(Y)$ zarodkov holomorfnih funkcij, ki so na Y enake 0. Označimo z $\mathcal{O}_U^m$ kartezični produkt m primerkov snopa $\mathcal{O}_U$ in definirajmo preslikavo $\Psi : \mathcal{O}_U^m \to \mathcal{J}(Y)|_U$ za vsak $x \in U$ s predpisom: $\Psi_x(a_{1,x}, \dots, a_{m,x}) = \sum_1^m a_{i,x}\gamma_{i,x}$. Oznaka $\gamma_{i,x}$ pomeni zarodek funkcije g_i v točki x. Naj bo koherenten snop $\mathcal{K}$ jedro preslikave Ψ.
Kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{O}_U^m \to \mathcal{J}(Y)|_U \to 0$$

inducira dolgo eksaktno zaporedje

$$0 \to \Gamma(U,\mathcal{K}) \to \Gamma(U,\mathcal{O})^m \to \Gamma(U,\mathcal{J}(Y)) \to H^1(U,\mathcal{K}) \to \ ...$$

Ker je U Steinova mnogoterost in snop $\mathcal{K}$ koherenten, je $H^1(U,\mathcal{K}) = 0$, kar pomeni, da je prostor $\Gamma(U,\mathcal{O}_U)^m = \mathcal{O}(U)^m$ izomorfen direktni vsoti prostorov $\Gamma(U,\mathcal{K})$ in $\Gamma(U,\mathcal{J}(Y))$. Naj bo $\iota : \Gamma(U,\mathcal{J}(Y)) \to \mathcal{O}(U)^m$ vložitev, ki jo ta izomorfizem inducira in naj bodo $\varphi_{p,t} := \iota(f''_{p,t})$ dvigi te družine v prostor $\mathcal{O}(U)^m$, torej m-terice holomorfnih funkcij. Aproksimacijo bomo izvedli na teh funkcijah in jo bomo s preslikavo Ψ prenesli na začeten prostor.

Naj bo $\psi : P' \to [0,1]$ taka gladka funkcija, ki ima nosilec v P'_1 in je enaka 1 na okolici P'_0 in $\chi : U \to [0,1]$ gladka funkcija s kompaktnim nosilcem, ki je na okolici K enaka 1. Naj bo $\varphi'_{p,t} : V \to \mathbf{C}^m$, $p \in P, t \in [0,1]$ zvezna družina rešitev enačbe $\overline{\partial}\varphi'_{p,t} = a_{p,t}$ iz izreka 1.3.1. za zvezno družino $(0,1)$-form, definirano s predpisom

$$a_{p,t} := \overline{\partial}((1-\psi(p,t))\chi\varphi_{p,t}), \quad p \in P,\ t \in [0,1].$$

Naj bo

$$h'_{p,t} := (1-\psi(p,t))\chi\varphi_{p,t} - \varphi'_{p,t}, \quad p \in P,\ t \in [0,1]$$

in naj oznaka $h'_{p,t,i}$ pomeni i-to komponento preslikave $h'_{p,t}$. Definirajmo

$$h_{p,t} := \Psi(h'_{p,t}) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i h'_{p,t,i}$$

Po konstrukciji družina holomorfnih funkcij $h_{p,t}$, $p \in P,\ t \in [0,1]$, aproksimira družino $f''_{p,t}$ na K in je $h_{p,t}|_{Y\cap V} = 0$, saj so funkcije g_i enake 0 na Y. Družina holomorfnih funkcij $g_{p,t,1} := f_{p,0} + h_{p,t} : V \to \mathbf{C}$ aproksimira začetno družino in $g_{p,t,1}|_{Y\cap V} = f_{p,t}|_{Y\cap V}$. Homotopija

$$g_{p,t,s} := f_{p,t}|_U + s(g_{p,t,1}|_U - f_{p,t}|_U), \quad p \in P,\ s,t \in [0,1]$$

ima vse želene lastnosti. ♣

Posledica 1.3.3. *Izrek* 1.3.1. *in posledici* 1.3.1., 1.3.2. *veljajo tudi za* X*, ki je Steinov prostor.*

Opomba. Ni znano, kako se na singularnih prostorih rešuje $\overline{\partial}$-enačbe, razen za posebne primere dvo- in tridimenzionalnih Steinovih prostorov z eno samo singularno točko, pa še za ta primer so znane le ocene v L^2 normi ([FG]).

Dokaz. Naj bo $W \subset X$ odprta, holomorfno konveksna, relativno kompaktna množica, ki vsebuje $\overline{V}$. Ker je vložitvena dimenzija na vsaki relativno kompaktni množici Steinovega prostora X končna, lahko W prav vložimo v evklidski prostor $\mathbf{C}^N$ za dovolj velik N. Označimo to vložitev z ι. Naj bosta $D, D_1 \subset \mathbf{C}^N$ taki odprti množici, da je $K \subset D_1 \cap \iota(U)$, $D_1 \subset\subset D$ in D psevdokonveksna, relativno kompaktna odprta množica in je $\iota(U)$ zaprta analitična podmnožica v neki odprti okolici $\overline{D}$ (to pomeni, da $\iota(U)$ sega še čez rob D). Z omejenim razširitvenim operatorjem R_{D,D_1} (izrek 1.2.4.) lahko zvezno družino f_p z odprte okolice $D \cap \iota(U)$ razširimo do zvezne družine holomorfnih funkcij f'_p na strogo psevdokonveksni odprti okolici $W \subset \mathbf{C}^N$, $W \cap \iota(U) \subset \iota(U')$. Zdaj pa so izpolnjene predpostavke izreka 1.3.1. in posledic 1.3.1., 1.3.2., ki nam dajo homotopije $g'_{p,t}$ in zožitve teh homotopij ustrezajo vsem pogojem. ♣

Izrek za splošen primer, ko se ne ukvarjamo le s funkcijami, ampak s prerezi holomorfnih submerzij, bomo s pomočjo sprayev prevedli ravno na primer funkcij.

Izrek 1.3.2. (H-Rungejev izrek, [FP1]). *Naj bo X Steinov prostor, $Y \subset X$ analitična podmnožica, Z kompleksen prostor, opremljen s polno metriko d, kompatibilno s topologijo na Z in $h : Z \to X$ holomorfna submerzija. Naj bo $K \subset X$ kompaktna holomorfno konveksna množica, $U, V, W \subset X$ take odprte holomorfno konveksne množice, da je $K \subset\subset V \subset \overline{V} \subset W$ in je W taka relativno kompaktna strogo psevdokonveksna množica, da submerzija h dopušča spray (E, π, s) nad W.*

Naj bo P kompakten Hausdorffov prostor, $P_0 \subset P$ zaprta množica, $P_1 \subset P$ njena odprta okolica in $\varepsilon > 0$ dano število.

Naj bo $f_{p,t} : U \to Z$, $t \in [0,1], p \in P$, taka zvezna družina prerezov submerzije h, da velja:

(i) za vsak fiksen $p \in P$ je $f_{p,t}|_{Y\cap U} = f_{p,0}|_{Y\cap U}$ za vsak $t \in [0,1]$,

(ii) prereze $f_{p,0}$, $p \in P$ in $f_{p,t}$, $t \in [0,1], p \in P_1$ lahko razširimo do holomorfnih prerezov na W.

Potem obstaja odprta okolica $U' \subset U$ množice K in zvezna družina prerezov $g_{p,t,s} : U \to Z$, $p \in P$, $t, s \in [0,1]$ submerzije h z naslednjimi lastnostmi:

(1) *$g_{p,t,0} = f_{p,t}$ in prereze $g_{p,t,1}$ lahko razširimo do prerezov na V za vsak $p \in P, t \in [0,1]$,*

(2) *$d(g_{p,t,s}(x), f_{p,t}(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in K$, $p \in P$, $t, s \in [0,1]$,*

(3) *$g_{p,0,s} = f_{p,0}$ za vsak $p \in P, s \in [0,1]$ in $f_{p,t} = f'_{p,t}$ za vsak $p \in P_1$, $t, s \in [0,1]$,*

(4) *$g_{p,t,s}|_{Y\cap U'} = f_{p,t}|_{Y\cap U'}$.*

Preden se lahko lotimo dokaza izreka, potrebujemo še naslednjo trditev.

Trditev 1.3.1. *Naj bo X Steinov prostor, Z kompleksen prostor, $h : Z \to X$ holomorfna surjektivna submerzija, (E, π) vektorski sveženj nad Z in $U \subset X$ relativno kompaktna holomorfno konveksna množica. Naj bo P kompakten Hausdorffov prostor in $g_p : X \to Z$, $p \in P$ zvezna družina holomorfnih prerezov. Označimo z E_p zožitev svežnja E na $g_p(X)$. Obstajajo $N \in \mathbf{N}$, zvezna družina holomorfnih homomorfizmov vektorskih svežnjev $H_p : U \times \mathbf{C}^N \to E_p|_U$ in zvezna družina desnih inverzov*

$$\iota_p : E_p|_U \to U \times \mathbf{C}^N, \, p \in P,$$

torej zvezna družina takih preslikav, da je za vsak $p \in P$ preslikava $\iota_p : E_p|_U \to \iota_p(E_p|_U)$ izomorfizem vektorskih svežnjev in je $\iota_p(E_p|_U)$ vektorski podsveženj v $U \times \mathbf{C}^N$, določen s projekcijo $\pi_p = \iota_p \circ H_p : U \times \mathbf{C}^N \to \iota_p(E_p|_U)$. Tudi družina projekcij je zvezna v p.

Dokaz. Naj bo V odprta, relativno kompaktna Steinova okolica $\overline{U}$. Za vsak $p \in P$ obstaja Steinova okolica V_p množice $g_p(X)$ v kompleksnem prostoru Z po izreku [Siu]. Ker je $E|_{V_p}$ vektorski prostor nad Steinovo bazo, obstaja končno vektorskih polj $v_{p,1}, \ldots, v_{p,n_p}$, ki ta sveženj generirajo. Ker je družina g_p zvezna v parametru p, obstaja taka odprta okolica $Q_p \subset P$ točke p, da je $g_q(V) \subset V_p$ za vsak $q \in Q_p$. Naj bo $\{Q_i := Q_{p_i}, i = 1, \ldots, m\}$ končno podpokritje pokritja $\{Q_p, p \in P\}$ za P in $\{Q'_i, i = 1, \ldots, m\}$ tako finejše zaprto pokritje za P, da je $Q'_i \subset Q_i$. Naj bodo $\chi_i : Q_i \to [0,1]$ zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem, ki so na Q'_i enake 1. Če dodamo ničelna polja, smemo privzeti, da je $n_{p_i} = l$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Pišimo $V_i = V_{p_i}$ in definirajmo vektorska polja

$$v^p_{i,j} := \chi_i(p) v_{p_i,j}|_{g_p(U)}, \quad j = 1, \ldots, l,\ i = 1, \ldots, m.$$

Za vsak fiksen p je družina vektorskih polj $v^p_{i,j}, j = 1, \ldots, l, i = 1, \ldots, m$ dobro definirana, saj je $\chi_i(p) v_{p_i,j} = 0$ za vsak $p \notin Q_i$. Poleg tega po konstrukciji za vsak p ta polja generirajo sveženj $E|_{V_i}$ in $E|_{g_p(U)}$. Naj bo $N = ml$ in preštevilčimo polja: $v^p_{(i-1)l+j} := v^p_{i,j}$, $j = 1, \ldots, l, i\ 1, \ldots, m$. Definirajmo zvezno družino preslikav $H_p : U \times \mathbf{C}^N \to E_p|_{g_p(U)}$, $p \in P$ s predpisom

$$H_p(x, a_1, \ldots, a_N) := \sum_1^N a_i v^p_i(g_p(x)).$$

Preslikave H_p so surjektivni homomorfizmi vektorskih svežnjev, zato po [GuR] obstaja zvezna družina desnih inverzov $\iota_p : E_p|_U \to U \times \mathbf{C}^N$. ♣

Dokaz izreka 1.3.2. Naj bo (E, π, s) spray nad W in $E_p := E|_{f_{p,0}(W)}$ zvezna družina vektorskih svežnjev nad $W, p \in P$. Ker je preslikava $s : E_p \to Z$ submerzija, preslika odprto okolico ničelnega prereza v E_p na odprto okolico prereza $f_{p,0}$ v Z. Naj bo $E_0 := ker VDs$ jedro vertikalnega odvoda preslikave s. Ker ima s konstanten korang, je E_0 vektorski sveženj nad $h^{-1}(W)$, ki ga na naraven način vložimo v E. Ker je W Steinova, ima sveženj $E_0|_{f_{p,0}}$ holomorfen komplement v E_p. Celo več, obstaja taka zvezna družina vektorskih podsvežnjev $E'_p \subset E_p, p \in P$, da je

$$E_p = E_0|_{f_{p,0}} \oplus E'_p$$

(glej npr. [GuR] ali lemo 4.4 v [FP1]). Ker je za vsak $p \in P$ vertikalni odvod $VDs : E'_p \to VT(Z)|_{f_{p,0}(W)}$ izomorfizem vektorskih svežnjev, preslika s okolico U_p ničelnega prereza E'_p biholomorfno na okolico $V_p \subset Z$ prereza $f_{p,0}(W)$. Naj bo preslikava $u_p : V_p \to U_p$ inverz za $s : U_p \to V_p$. Ker sta K in P kompaktni množici, obstaja tak $\delta_0 > 0$, da je $f_{p,t}(K) \subset V_p$ za vsak $p \in P$, $t \in [0, \delta_0]$. Definirajmo prereze $\xi_{p,t} := u_p(f_{p,t})$. Definicijsko območje prerezov $\xi_{p,t}$ je neka manjša odprta okolica $U_1 \subset U$ množice K. Ker so bile preslikave u_p biholomorfizmi, bo $\xi_{p,t} = 0$ za $p \in P_1, t \in [0,\delta_0]$ in $\xi_{p,t}|_{f_{p,t}(Y \cap K)} = 0$ za $p \in P$, $t \in [0,\delta_0]$.

Najprej opazimo, da za vsak dovolj majhen $\varepsilon > 0$ in $t \in [0,1]$ in vsako zvezno družino holomorfnih prerezov $g_p : W \to Z$, ki zadošča $d(f_{p,t}(x), g_p(x)) < \varepsilon$ za $x \in K$ obstajajo take odprte okolice $V_p \supset g_p(W)$ (definirane analogno kot zgoraj za družino prerezov g_p namesto $f_{p,0}$) in tak $\delta_t > 0$, neodvisen od družine g_p, da je $f_{p,s}(K) \subset V_p$, za vsak $p \in P, s \in [t-\delta_t, t+\delta_t]$. Za ta sklep potrebujemo le kompaktnost množic K in P in dejstvo, da je spray (E,p,s) definiran nad W. Izberimo $\varepsilon > 0$ in naj bodo $\delta_t, t \in [0,1]$ kot zgoraj. Družina odprtih množic $\mathcal{I} := \{(t-\delta_t, t+\delta_t), t \in [\delta_0, 1]\}$ je odprto pokritje za interval $[\delta_0, 1]$, zato obstaja delitev $[t_1 := \delta_0, t_2, \ldots, t_k := 1]$ tega intervala, podrejena pokritju $\mathcal{I}$. To pomeni, da lahko za vsako zvezno družino prerezov $g_p^l : W \longrightarrow Z$, $l = 1, \ldots, k-1$, ki na K aproksimira družino f_{p,t_l} ε-natančno, prereze $f_{p,t}$, $p \in P, t \in [t_l, t_{l+1}]$ dvignemo do zvezne družine prerezov svežnjev $E_p^l := E|_{g_p^l(W)}$. Po k-korakih bomo pokrili vso homotopijo in dobili prereze $\xi_{p,t}$ sestavljenih svežnjev $(E^k, \pi^k, s^k)|_{f_{p,0}}$.

Za nadaljevanje zadostuje pojasniti, kako aproksimiramo že dvignjene homotopije $\xi_{p,t}$, $p \in P, t \in [0,t_1]$ in dvignemo homotopije za $t \in [t_1, t_2]$. Naj bo $W_1 \subset W$ taka odprta holomorfno konveksna množica, da je $\overline{V} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W$. Svežnje E_p razumemo kot svežnje nad W in jih lahko, zožene nad W_1, po trditvi 1.3.1. predstavimo kot zvezno družino vektorskih podsvežnjev nekega trivialnega svežnja $W_1 \times \mathbf{C}^N$ za nek dovolj velik $N \in \mathbf{N}$. Naj bo $\pi_p : W_1 \times \mathbf{C}^N \to E_p$ pripadajoča zvezna družina holomorfnih projekcij. Družino prerezov $\xi_{p,t}$, $p \in P, t \in [0,t_1]$ lahko identificiramo z ustrezno družino preslikav $U_1 \to \mathbf{C}^N$. Izberimo poljubno zaprto množico $P_2 \subset P_1$, ki vsebuje P_0 v svoji notranjosti in $\varepsilon' > 0$. Po posledici 1.3.2. za množice $P_0 := P_2$, P_1, P in družino $\xi_{p,t}$, $t \in [0,t_1]$ obstaja zvezna družina preslikav $\gamma_{p,t,s} : U_1 \to \mathbf{C}^N$, $p \in P$, $t \in [0,t_1], s \in [0,1]$, z naslednjimi lastnostmi:

(1)′ $\gamma_{p,t,0} = \xi_{p,t}$ in prereze $\gamma_{p,t,1}$ lahko razširimo do prerezov na W_1 za vsak $p \in P, t \in [0,t_1]$,

(2)′ $d(\gamma_{p,t,s}(x), \xi_{p,t}(x)) < \varepsilon'$ za vsak $x \in K,\ p \in P,\ t \in [0,t_1], s \in [0,1]$,

(3)′ $\gamma_{p,0,s} = \xi_{p,0}$ za vsak $p \in P, s \in [0,1]$ in $\xi_{p,t} = f'_{p,t}$ za vsak $p \in P_1,\ t \in [0,t_1]$, $s \in [0,1]$,

(4)′ $\gamma_{p,t,s}|_{f_{p,0}(Y \cap U_1)} = \xi_{p,t}|_{f_{p,0}(Y \cap U_1)}$ za $t \in [0,t_1]$, $s \in [0,1]$.

Družina

$$g_{p,t,s} := s \circ \pi_p(\gamma_{p,t,s}), \quad p \in P,\ t \in [0,t_1], s \in [0,1]$$

ima lastnosti (1) – (4) iz izreka 1.3.2., če smo le izbrali dovolj majhen $\varepsilon' > 0$. Ker je družina $g_p^1 := g_{p,t_1,1} : W_1 \to Z$ nad K ε-blizu družini f_{p,t_1}, lahko nad neko manjšo odprto okolico $U_2 \subset U_1$ množice K dvignemo prereze $f_{p,t}$, $p \in P, t \in [t_1, t_2]$ do prerezov $\xi_{p,t}$, $p \in P, t \in [t_1, t_2]$ vektorskih svežnjev $E_p^1 := E|_{g_p^1(W)}$, ki so ničelni za $p \in P_2, t \in [0,1]$ in zadoščajo $\xi_{p,t}|_{f_{p,t}(Y \cap K)} = 0$ za $p \in P$, $t \in [t_1, t_2]$. Nadaljujemo kot v primeru intervala $[0, t_1]$. Po k-korakih dobimo homotopijo $g_{p,t,s} : U' := U_k \to Z$, $p \in P, t, s \in [0,1]$. ♣

Iz dokaza tega izreka direktno sledi

Posledica 1.3.4. (Dvig prerezov submerzije v vektorski sveženj) *Naj bodo predpostavke kot v izreku* 1.3.2. *in $U' \subset X$ odprta okolica kompaktne množice K, kompaktno vsebovana v U. Obstaja tako naravno število $k \in \mathbf{N}$ in zvezna družina holomorfnih prerezov $\xi_{p,t}$ svežnja $E^{(k)}|_{f_{p,0}(U')}$, $p \in P, t \in [0,1]$, da velja:*

(1) *če je $t = 0$ ali $p \in P_1$ je $\xi_{p,t}$ ničelni prerez v $E^{(k)}|_{f_{p,0}(V)}$,*

(2) *za vsak fiksen $p \in P$ je za vsak $t \in [0,1]$ prerez $\xi_{p,t}$ enak* 0 *na Y in*

(3) $s^{(k)}(\xi_{p,t}) = f_{p,t}$, $p \in P$, $t \in [0,1]$.

1.4 Osnovne leme o lepljenju nad Cartanskimi pari

Trditev 1.4.1. *Naj bo X Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica (lahko prazna), W strogo psevdokonveksna relativno kompaktna množica v X in $W' \subset\subset W$.*

Obstaja omejen integralski operator $T_{W,W'} : C^b_{(0,1)}(W, \mathcal{J}(Y)) \to C^b(W', \mathcal{J}(Y))$ iz prostora omejenih zveznih $(0,1)$-form na W, ki so ničelne na $Y \cap W$ v prostor omejenih zveznih funkcij na W', ki so ničelne na $Y \cap W$, ki reši enačbo $\overline{\partial}(T_{W,W'} f) = f$.

Dokaz. Skličemo se na izrek 3.2.2 iz [HL1], ki pove, da obstaja tak omejen integralski operator R_W na zaprtih $(0,1)$-formah z omejenimi koeficienti, da za vsako zvezno zaprto $(0,1)$-formo f na W z omejenimi koeficienti funkcija $u := R_W(f)$ reši $\overline{\partial} u = f$. Če je f zaprta $(0,1)$-forma z omejenimi koeficienti, ki je na $W \cap Y$ enaka 0, je $R_W(f)|_{Y \cap W}$ holomorfna funkcija. Po izreku 1.2.4. obstaja omejen linearen razširitveni operator $Q_{W,W'}$: $H^\infty(W \cap Y) \to H^\infty(W')$, $Q_W(g)|_{Y \cap W'} = g|_{W' \cap Y}$. Operator $T_{W,W'}$, definiran s predpisom $T_{W,W'}(f) := R_W(f)|_{W'} - Q_{W,W'}(R_W(f)|_{Y \cap W})$ ima vse želene lastnosti. ♣

Trditev 1.4.2. *Naj bo (A, B) Cartanski par v Steinovi mnogoterosti X in $Y \subset X$ zaprta podmnožica (ki je lahko tudi prazna). Potem imata A in B taki bazi okolic $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, $\overline{U_{i+1}} \subset U_i, i \in \mathbf{N}$ in $\{V_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, $\overline{V_{i+1}} \subset V_i$ po vrsti, da za vsak $i \in \mathbf{N}$ veljajo naslednje trditve:*

(1) *Množica* $W_i := U_i \cup V_i$ *je strogo psevdokonveksna in* $(\overline{V_i} \setminus U_i) \cap (\overline{U_i} \setminus V_i) = \emptyset$.

(2) *Za vsak* i *obstajata taka omejena linearna operatorja*

$$\mathcal{A}_i : H^\infty(U_i \cap V_i, \mathcal{J}(Y)) \to H^\infty(U_{i+1}, \mathcal{J}(Y)) \text{ in}$$

$$\mathcal{B}_i : H^\infty(U_i \cap V_i, \mathcal{J}(Y)) \to H^\infty(V_{i+1}, \mathcal{J}(Y)),$$

da je

$$c = \mathcal{A}_i(c) - \mathcal{B}_i(c),\ c \in H^\infty(U_i \cap V_i, \mathcal{J}(Y)),\ i \in \mathbf{N}.$$

Dokaz. Naj bo $\{W_i'\}$ poljubna baza okolic za $A \cup B$ in $\{U_i'\}$ in $\{V_i'\}$ taki bazi relativno kompaktnih okolic za A in B po vrsti, da je $W_i' = U_i' \cup V_i'$. Ker je $A \cup B$ Steinov kompakt, ima tako strogo psevdokonveksno okolico $W_i \subset \overline{W_i} \subset W_i'$, da za množici $U_i := U_i' \cap W_i$ in $V_i := V_i' \cap W_i$ velja trditev (1).

Če pa trditev (1) velja, obstaja taka C^∞-razčlenitev enote $\{\chi_i, 1-\chi_i\}$ na W_i, podrejena pokritju $\{U_i, V_i\}$, da ima forma $\overline{\partial}\chi_i$ omejene koeficiente na W_i. Fiksirajmo nek indeks $i \in \mathbf{N}$ in definirajmo $W := W_i$, $W' = W_{i+1}$, $U = U_{i+1}$, $V = V_{i+1}$, $\chi := \chi_i$ in privzemimo, da je $\operatorname{supp} \chi \subset U$. Naj bo c holomorfna funkcija na $U_i \cap V_i$, ki je na Y enaka 0. S predpisom $f := \overline{\partial}\chi\, c$ je zato definirana zaprta $(0,1)$-forma na W z omejenimi koeficienti, ki je na Y enaka 0. Po trditvi 1.4.1. obstaja tak omejen linearen operator $T = T_{W,W'}$, ki reši enačbo $\overline{\partial}Tf = f$, da je $Tf = 0$ na Y. Naj bo $E = \|T\|$. Definirajmo $\mathcal{A}(c) := T(f) + (1-\chi)c$ na U, $\mathcal{B}(c) := T(f) - \chi\, c$ na V. Na $U \cap V$ je $\mathcal{A}(c) - \mathcal{B}(c) = T(f) + c - \chi c - T(f) + \chi c = c$. Očitno je

$$\overline{\partial}\mathcal{A}(c) = \overline{\partial}T(f) - c\overline{\partial}\chi = 0 \text{ in } \overline{\partial}\mathcal{B}(c) = \overline{\partial}T(f) - c\overline{\partial}\chi = 0$$

in veljata oceni

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(c)\|_U &\le \|T(f)\|_W + \|c\|_{U\cap V} \le E\|c\|_{U\cap V}\|\overline{\partial}\chi\|_W + \|c\|_{U\cap V} \le (E\|\overline{\partial}\chi\|_W + 1)\|c\|_{U\cap V},\\
\|\mathcal{B}(c)\|_V &\le \|T(f)\|_W + \|c\|_{U\cap V} \le E\|c\|_{U\cap V}\|\overline{\partial}\chi\|_W + \|c\|_{U\cap V} \le (E\|\overline{\partial}\chi\|_W + 1)\|c\|_{U\cap V}.
\end{aligned}$$

♣

Lema 1.4.1. [FP1] (Lema o lepljenju za preslikave v $\mathbf{C}^n$). *Naj bo* X *Steinova mnogoterost* $Y \subset X$ *analitična podmnožica (lahko prazna),* (A, B) *Cartanski par,* $\tilde{C}$ *odprta okolica* $C := A \cap B$ *v* X, U *odprta okolica izhodišča v* $\mathbf{C}^n$ *in* $\psi_0 : \tilde{C} \times U \to \mathbf{C}^n$ *taka omejena holomorfna preslikava, da je* $\psi_0(x, 0) = 0$ *za vsak* $x \in \tilde{C}$ *in je preslikava* $\psi_0(x, \cdot) : U \to \mathbf{C}^n$ *injektivna. Obstajajo odprti okolici* $A' \supset A$ *in* $B' \supset B$ *z* $C' := A' \cap B'$, *odprta okolica* W *preslikave* ψ_0 *v Banachovem prostoru* $H^\infty(\tilde{C} \times U, \mathcal{J}(Y \times 0)^n)$ *in taka gladka operatorja*

$\mathcal{A}' : W \to H^\infty(A', \mathcal{J}(Y)^n)$, $\mathcal{B}' : W \to H^\infty(B', \mathcal{J}(Y)^n)$, da je $\mathcal{A}'(\psi_0) = 0$, $\mathcal{B}'(\psi_0) = 0$ in da za vsak $\psi \in W$ omejeni holomorfni preslikavi $\alpha := \mathcal{A}'(\psi) : A' \to \mathbf{C}^n$ in $\beta := \mathcal{B}'(\psi) : B' \to \mathbf{C}^n$ zadoščata

$$\alpha|_Y = 0, \beta|_Y = 0,$$
$$\psi(x, \alpha(x)) = \beta(x) \quad (x \in A' \cap B').$$

Če preslikava $\psi \in W$ zadošča še $\psi(x, 0) = 0$ za vsak $x \in \tilde{C}$, je $\mathcal{A}'(\psi) = 0$ in $\mathcal{B}'(\psi) = 0$.

Dokaz. Dokaz je popolnoma enak dokazu trditve 5.2 v [FP1], le da je potrebno namesto leme 2.4 v [FP1] uporabiti trditev 1.4.2. zgoraj in vmes enkrat več skrčiti okolice zaradi operatorjev $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{B}_i$. ♣

Izrek 1.4.1. (Splošna lema o lepljenju z interpolacijo). *Naj bo X Steinova n-mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica, (A, B) Cartanski par v X in $U, V \subset X$ taki odprti okolici za A in B po vrsti, da je $U \cap V$ Rungejeva v V in je množica $U \cup V$ strogo psevdokonveksna (take okolice obstajajo po definiciji Cartanskega para). Naj bo Z kompleksna mnogoterost z dano polno metriko d, ki je kompatibilna s topologijo na Z in $h : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki dopušča spray (E, p, s) nad V. Naj bo P kompakten Hausdorffov prostor in $P_0 \subset P$ njegova zaprta podmnožica in $P_1 \subset P$ odprta okolica P_1.*

Naj bosta $a_p : U \to Z$ in $b_p : V \to Z$ dani zvezni družini holomorfnih prerezov submerzije $h : Z \to X$ z lastnostmi

(i) za vsak $p \in P_1$ se a_p in b_p ujemata na $U \cap V$,

(ii) za vsak $p \in P$ se a_p in b_p ujemata na množici $Y \cap U \cap V$ in

(iii) obstaja taka zvezna družina holomorfnih prerezov $f_{p,t} : U \cap V \to Z$, $t \in [0, 1]$, $p \in P$, da je $f_{p,0} = a_p|_{U\cap V}$, $f_{p,1} = b_p|_{U\cap V}$ in je za vsak $t \in [0, 1]$, $p \in P$ $f_{p,t}|_{Y\cap U\cap V} = a_p|_{Y\cap U\cap V}$.

Obstaja tak $\varepsilon > 0$, da velja: če je $d(f_{p,t}(x), a_p(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in A \cap B$, $p \in P, t \in [0, 1]$, obstajata odprti okolici A', B' za A, B po vrsti in taki zvezni družini prerezov $a_{p,t} : B' \to Z$, $b_{p,t} : B' \to Z$, $t \in [0, 1], p \in P$, da je

(1) $a_{p,t} = a_p$ in $b_{t,p} = b_p$ za vsak $t \in [0, 1]$, $p \in P_0$,

(2) $d(a_p(x), a_{p,t}(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in A, t \in [0, 1], p \in P$

(3) $a_{p,1}|_{A'\cap B'} = b_{p,1}|_{A'\cap B'}$ za vsak $p \in P$ in

(4) $a_{p,t}|_{Y\cap A'\cap B'} = b_{p,t}|_{Y\cap A'\cap B'} = a_p|_{Y\cap A'\cap B'}$ za vsak $t \in [0, 1]$, $p \in P$.

Opomba. Zgornji izrek je posplošitev izreka 5.5 iz [FP1]. V predzadnjem razdelku tega poglavja bomo pokazali, da velja tudi za Steinove prostore. Dejstvo, da je X mnogoterost, potrebujemo le za uporabo leme 1.4.1. v dokazu.

Dokaz izreka 1.4.1. S pomočjo sprayev in lokalnih sprayev bomo poskusili problem lepljenja prerezov prevesti na problem lepljenja funkcij. Ideja dokaza izreka 1.4.1. je ta, da konstruiramo trivialna svežnja $E_1 = U' \times \mathbf{C}^N \to U'$, $E_2 = V' \times \mathbf{C}^N \to V'$ za nek dovolj velik $N \in \mathbf{N}$ nad odprtima okolicama $U' \subset U, V' \subset V$ za A, B po vrsti in zvezni družini takih holomorfnih preslikav $s_{1,p} : E_1 \to Z$, $s_{1,p}(x, 0) = a_p(x)$, $s_{2,p} : E_2 \to Z$, $s_{2,p}(x, 0) = b_p(x, 0)$, ki slikajo vlakna svežnja na vlakna submerzije $h : Z \to X$, da so vertikalni odvodi $VD(s_{1,p})$ in $VD(s_{2,p})$ surjektivni in $b_p(U' \cap V') \subset s_{p,1}(E_1)$. Dovolj je, če so preslikave $s_{1,p}$ definirane na okolici ničelnega prereza v E_1.

Recimo, da za dovolj majhen $\eta > 0$ lahko najdemo tako zvezno družino injektivnih holomorfnih preslikav $\varphi_p : (U' \cap V') \times B_N(\eta) \to (U' \cap V') \times \mathbf{C}^N$ oblike $\varphi_p(x, t) = (x, \psi_p(x, t))$, ki reši enačbo $s_{2,p} \circ (x, \psi_p(x, t)) = s_{1,p}(x, t)$ vsaj na neki majhni okolici ničelnega prereza. Če so preslikave φ_p enakomerno blizu takim injektivnim holomorfnim preslikavam $\varphi_{p,0} = (id, \psi_{p,0})$, da je $\psi_{p,0}(x, 0) = 0$, po lemi 1.4.1. obstajata manjši odprti okolici A', B' za A, B po vrsti in zvezni družini prerezov α_p, v $E_1|_{A'}$, β_p, v $E_2|_{B'}$, da je $\varphi_p(\beta_p)(x) = \alpha_p(x)$ za vsak $x \in A' \cap B'$. S predpisom

$$a_{p,t} = s_{1,p}(t\alpha_p),\ t \in [0, 1], \tag{1}$$

$$b_{p,t} = s_{2,p}(t\beta_p),\ t \in [0, 1] \tag{2}$$

je definirana homotopija med prerezi $a_p = a_{p,0}$ in prerezi $a_{p,1}$ in homotopija med $b_p = b_{p,0}$ in $b_{p,1}$. Ker je $\varphi_p(\beta_{p,1}(x)) = \alpha_{p,1}(x)$ za $x \in U' \cap V'$, je $b_{p,1}(x) = s_{2,p} \circ \varphi_p(\beta_{p,1}) = s_{1,p}(\alpha_{p,1}(x))$, kar pomeni, da za vsak $p \in P$ prereza $a_{p,1}$ in $b_{p,1}$ definirata holomorfni prerez na $A' \cap B'$.

Če se prerezi a_p in b_p ujemajo na Y, lahko poiščemo take preslikave ψ_p, da bo $\psi_p(x, 0) = 0$ za vsak $x \in Y$, kar nam bo dalo homotopiji $a_{p,t}$ in $b_{p,t}$, ki mirujeta na Y. Ker želimo, da bodo homotopije mirovale na P_0, saj imamo za te parametre že prereze nad $A' \cup B'$, bomo poiskali tako družino preslikav ψ_p, da bo za vsak $p \in P_0$ veljalo $\psi_p(x, 0) = 0$ za vsak $x \in A' \cap B'$.

Da bomo izrek dokazali, moramo najprej poiskati prej omenjene preslikave $s_{1,p}, s_{2,p}$ in φ_p (trditev 1.4.3.) in se prepričati, da homotopije $a_{p,t}$ na množici A aproksimirajo začetni prerez tako natančno, kot želimo. ♣

Trditev 1.4.3. *Naj bo X Steinov prostor, Z kompleksen prostor, $h : Z \to X$ holomorfna submerzija, $A, B \subset X$ Steinova kompakta, $U, V \subset X$ odprti okolici za A, B po vrsti in U_1, V_1 manjši odprti okolici za A, B po vrsti, kompaktno vsebovani v U, V po vrsti.*

Privzemimo, da ima množica $C = A \cap B$ bazo odprtih okolic, ki so Rungejeve v V in izberimo $\delta > 0$. Naj imajo družine prerezov a_p, b_p in $f_{p,t}$ lastnosti $(i) - (iii)$ iz izreka 1.4.1. Obstajata taka $\varepsilon > 0, \eta > 0$, da velja: če družine prerezov a_p, b_p in $f_{p,t}$ izpolnjujejo še pogoja $d(a_p(x), b_p(x)) < \varepsilon$ in $d(a_p(x), f_{p,t}(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in \overline{U_1 \cap V_1}$, obstajajo

- zvezna družina lokalnih sprayev $(E_1 := U_1 \times \mathbf{C}^N, \pi_p^1, s_{1,p})$,

- zvezna družina sprayev $(E_2 := V_1 \times \mathbf{C}^N, \pi_p^2, s_{2,p})$ in

- zvezna družina preslikav $\varphi_p = (id, \psi_p) : (U_1 \cap V_1) \times B_N(\eta) \to (U_1 \cap V_1) \times \mathbf{C}^N$, ki na okolicah ničelnih prerezov v $E_{p,1}|_{U_1 \cap V_1}$ in $E_{p,2}|_{U_1 \cap V_1}$ rešijo enačbo $s_{2,p} \circ (x, \psi_p(x,t)) = s_{1,p}(x,t)$, zadoščajo $\varphi_p(x, 0) = 0$ za vsak $x \in U_1 \cap V_1$, za katerega je $a_p(x) = b_p(x)$ in so δ-blizu zvezni družini takih injektivnih holomorfnih preslikav $\varphi_{p,0} = (id, \psi_{p,0}) : (U_1 \cap V_1) \times B_N(\eta) \to (U_1 \cap V_1) \times \mathbf{C}^N$, da je $\psi_{p,0}(x, 0) = 0$ za vsak $x \in U_1 \cap V_1$.

Lema 1.4.2. (Eksistenca zvezne družine lokalnih sprayev). *Naj bo $h : Z \to X$ holomorfna submerzija med kompleksnima prostoroma, (A, B) tak par Steinovih kompaktov, da je $A \cup B$ Steinov kompakt, $U, V \subset X$ odprti okolici za A, B po vrsti, P kompakten Hausdorffov prostor, $P_0 \subset P$ zaprta množica in $P_1 \subset P$ njena odprta okolica. Privzemimo, da ima množica $C = A \cap B$ bazo okolic, ki so Rungejeve v V. Naj bo $a_p : U \to Z$ taka zvezna družina holomorfnih prerezov, da je za vsak $p \in P_1$ prerez a_p mogoče razširiti na $U \cup V$. Obstajo:*

- odprti okolici U', V' množic A, B po vrsti, kompaktno vsebovani v U, V po vrsti,

- odprta okolica $P_2 \supset P_0$, kompaktno vsebovana v P_1,

- družina takih Steinovih odprtih okolic $D_p \subset Z$, da je $a_p(\overline{U'}) \subset D_p$ za vsak $p \in P$ in je $a_p(\overline{U' \cup V'}) \subset D_p$ za vsak $p \in P_2$,

- števili $\eta > 0$, $N \in \mathbf{N}$,

- zvezna družina vektorskih polj $\mathcal{V}^p = \{v_1^p, \ldots, v_N^p\}$, definiranih na D_p, ki generirajo $VT_z(Z)$ v vsaki točki $z \in D_p$ in

- zvezna družina holomorfnih preslikav $s_{\mathcal{V}^p} : D_p \times B_N(\eta) \to Z$ z naslednjimi lastnostmi:

(i) $s_{1,\mathcal{V}^p}(z,t) \subset h^{-1}(z)$,

(ii) $s_{1,\mathcal{V}^p}(z, 0) = z$,

(iii) vertikalni odvod $VDs_{\mathcal{V}^p}(z) : \mathbf{C}^N \to VT_z(Z)$, $z \in D_p$ je surjektiven, natančneje $\frac{\partial}{\partial t_i} s_{\mathcal{V}^p}(z, 0) = v_k^p(z)$ za vsak $k = 1, \ldots, N$, $p \in P$.

Opomba. Preslikave $s_{\mathcal{V}^p}$ imajo vse lastnosti spraya, le da niso definirane za $t \in \mathbf{C}^N$, ampak le za $t \in B_N(\eta)$. Tudi te imenujemo **lokalni sprayi**.

Dokaz leme 1.4.2. Naj bo $(VT(Z), \pi)$ vertikalni sveženj nad Z, P_2 odprta okolica P_0, kompaktno vsebovana v P_1 in U', V' odprti okolici za A, B po vrsti, kompaktno vsebovani v U, V po vrsti. Za vsak $p \in P$ obstaja po [Siu] in [Scn] Steinova odprta okolica $V_p \subset Z$ za $a_p(\overline{U'})$ in za vsak $p \in P_1$ obstaja Steinova odprta okolica V_p za $a_p(\overline{U' \cup V'})$. Ker pa je V_p Steinova, obstajajo vektorska polja $v_j^p, j = 1, \ldots, n_p$, ki generirajo vektorski sveženj $VT(Z)|_{V_p}$. Vsak $p \in P$ ima tako odprto okolico $Q_p \subset P$, da je $a_q(\overline{U'}) \subset V_p$ za vsak $q \in Q_p$; za parametre $p \in P_1$ pa naj bo Q_p taka odprta okolica za p v P, da poleg $a_q(\overline{U'}) \subset V_p$, $q \in Q_p$ velja še $a_p(\overline{U' \cup V'}) \subset V_p$ za vsak $p \in Q_p \cap P_1$. Kot v dokazu trditve 1.3.1. obstaja odprto pokritje $\{Q_i := Q_{p_i}, i = 1, \ldots m\}$ za P in finejše zaprto pokritje $\{Q'_i, i\ 1, \ldots, m\}$ in privzeti smemo, da je $Q_i \cap P_2 = \emptyset$ za vsak $p_i \notin P_1$. Ker imamo le končno število prerezov p_i, smemo privzeti, da je $n_i = l$ za neko naravno število l za vsak $i = 1, \ldots, m$, saj lahko dodamo ničelna vektorska polja.

Naj bodo $\chi_i : Q_i \to [0, 1]$ take zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem, da je $\chi_i|_{Q'_i} = 1$, in definirajmo

$$v_{i,j}^p := \chi_i(p) v_j^{p_i}, \quad j = 1, \ldots, l,\ i = 1, \ldots, m.$$

Za vsak $p \in P_2$ so vektorska polja $v_{i,j}^p$ definirana na neki odprti Steinovi $D_p \subset Z$ množice $a_p(\overline{U' \cup V'})$; če je $p_i \in P_1$, so polja $v_j^{p_i}$ po konstrukciji definirana na okolici $a_p(\overline{U' \cup V'})$, saj je za $p_i \notin P_1$ presek $Q_i \cap P_2$ prazen in zato $\chi_i(p) = 0$. Podobno vidimo, da so za vsak $p \in P$ polja $v_{i,j}^p$ definirana (in holomorfna) na odprti okolici D_p množice $a_p(\overline{U'})$.

Naj bo $N = ml$, $\mathcal{V}^p = \{v_k^p, k = 1, \ldots, m\}$, kjer je $v_{(i-1)l+j}^p := v_{i,j}^p$, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, l$ in naj bodo θ_{p,t_k}, $k = 1, \ldots, N$ tokovi teh polj na D_p. Če okolice D_p zmanjšamo, obstaja tak $\eta > 0$, da ima zvezna družina preslikav $s_{\mathcal{V}^p} : D_p \times B_N(\eta) \to Z$, definirana s predpisom

$$s_{1,\mathcal{V}^p}(z, t_1, \ldots, t_N) := \theta^{p,t_1} \circ \theta^{p,t_2} \circ \ldots \circ \theta^{p,N}$$

vse želene lastnosti:

(i) $s_{1,\mathcal{V}^p}(z, t) \subset h^{-1}(h(z))$, saj smo integrirali vertikalna vektorska polja,

(ii) $s_{1,\mathcal{V}^p}(z, 0) = z$, ker so θ^{p,t_i} tokovi vektorskih polj in

(iii) ker je $\frac{\partial}{\partial t_i} s_{1,\mathcal{V}^p}(z, 0) = v_k^p(z)$ in polja v_k^p generirajo $VT(Z)|_{D_p}$, je vertikalni odvod $VDs_{1,\mathcal{V}^p}(z) : \mathbf{C}^N \to VT_z(Z)$ surjektiven. ♣

Lema 1.4.3. (Zvezni razcep družine svežnjev). *Naj bosta B in $C \subset B$ Steinova kompakta v Steinovem prostoru v X, $W \subset V$ odprti Steinovi okolici za C, B po vrsti, P kompakten*

Hausdorffov prostor, $P_2 \subset P$ zaprta množica, $P_1 \subset P$ njena odprta okolica in $a_p : W \to Z, p \in P$, zvezna družina holomorfnih prerezov submerzije $h : Z \to X$, ki se za $p \in P_1$ razširijo na V. Naj bo (E, p, s) spray (lahko le lokalni) nad V. Obstaja družina Steinovih okolic $D_p \subset Z$ za $a_p(C)$, ki za $p \in P_2$ vsebujejo še $a_p(B)$ in zvezna družina razcepov $E|_{D_p} = kerVD(s)|_{D_p} \oplus E'_p$.

Dokaz. Naj bodo Steinove okolice V_i, točke $p_i \in P, i = 1, \ldots, m$ in odprto pokritje $\{Q_i, i = 1, \ldots, m\}$ množice P kot v trditvi 1.3.1.:

- za vsak $p \in Q_i$ je $a_p(C) \subset V_i$,

- če je $p_i \in P_1$ in $p \in P_1 \cap Q_i$ je $a_p(B) \subset V_i$,

- za vsak $p_i \notin P_1$ je presek $Q_i \cap P_2$ prazen in

- unija $\cup\{Q_i, p_i \in P_1\}$ vsebuje množico P_2.

Preslikava $VD(s) : E|_{V_i} \to VT(Z)|_{E_i}$ je po definiciji spraya surjektivni homomorfizem vektorskih svežnjev in ima desni inverz $d_i : VT(Z)|_{V_i} \to E|_{V_i}$. Za vsak $j \neq i$, za katerega je $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, leži razlika $d_i(v) - d_j(v)$ v jedru $kerVD(s)(z)$ po definiciji desnega inverza za vsaka $z \in V_i \cap V_j$ in $v \in VT_z(Z)$. Naj bo χ_i razčlenitev enote na P, podrejena pokritju $\{Q_i\}$ in definirajmo $d_p = \sum_1^m \chi_i(p) d_i$. Če je $\chi_i(p) \neq 0$ to pomeni, da je $a_p(C) \subset V_i$, torej je za vsak p preslikava d_p dobro definirana na Steinovi odprti množici $D_p := \cap\{V_i, \chi_i(p) \neq 0\}$, ki vsebuje $a_p(C)$. Prepričajmo se še, da je za parametre $p \in P_2$ ta preslikava definirana na okolicah množic $a_p(B)$. Za vsak $p \in P_2$ je $\chi_i(p) = 0$, če $p_i \notin P_1$, torej so edini neničelni koeficienti v zgornji konveksni kombinaciji pri tistih i-jih, kjer množica V_i vsebuje $a_p(B)$. Družina svežnjev $E'_p := d_p(VT(Z)|_{D_p})$ je iskana družina komplementov jedra $kerVD(s)|_{D_p}$ v $E|_{D_p}$. ♣

Dokaz trditve 1.4.3. Ker se zvezni družini prerezov $a_p : U \to Z$ in $b_p : V \to Z$ za $p \in P_1$ na preseku definicijskih območij ujemata, lahko zvezno družino holomorfnih prerezov a_p razumemo kot družino prerezov, ki se za $p \in P_1$ razširijo do holomorfnih prerezov $U \cup V$. Po lemi 1.4.2. obstajajo odprti okolici U', V' za A, B po vrsti, kompaktno vsebovani v U, V po vrsti, družina Steinovih odprtih okolic $D_p \subset Z$ za $a_p(\overline{U'})$, ki vsebujejo $a_p(\overline{U' \cup V'})$ za vsak p iz odprte okolice P_0, ki jo označimo kar s P_1, zvezna družina lokalnih sprayev $s_{\mathcal{V}^p} : D_p \times B_N(\eta) \to Z$ in pripadajoča družina vektorskih polj $\mathcal{V}^p = \{v_k^p = \frac{\partial}{\partial t_k} s_{\mathcal{V}^p}(\cdot, 0)\}$, ki generirajo $VT(Z)$ na D_p. Naj bo (E, p, s) spray nad V in naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da je $b_p(\overline{U' \cap V'}) \subset D_p$ in je $a_p(\overline{U' \cap V'}) \subset s(E|_{b_p(V)})$.

Naj bo $P_2 \subset P_1$ zaprta množica, ki vsebuje P_0 v notranjosti. Ker je $VD(s) : E \to VT(Z)$ surjektiven homomorfizem vektorskih svežnjev, obstajajo po lemi 1.4.3. Steinove okolice D'_p za $a_p(\overline{U' \cap V'})$, ki za $p \in P_2$ vsebujejo $a_p(\overline{V'}) = b_p(\overline{V'})$ in razcep $E|_{D'_p} = kerVD(s)|_{D'_p} \oplus E'_p$, kjer je E'_p zvezna družina holomorfnih komplementov.

Naj bodo vektorska polja $\tilde{\mathcal{V}}^p = \{\tilde{v}_k^p,\ k = 1,\dots,N\}$ dvigi polj v_k^p v vektorski sveženj E'_p. Ne pozabimo, da so vektorska polja v_k^p za $p \in P_2$ definirana nad $b_p(\overline{V'})$, za ostale $p \in P$ pa nad $b_p(\overline{U' \cap V'})$. Definirajmo družino preslikav $\tilde{s}_{\tilde{\mathcal{V}}^p} : D'_p \times \mathbf{C}^N \to Z$ s predpisom

$$\tilde{s}_{\tilde{\mathcal{V}}^p}(z, t_1, \dots, t_N) := s\left(\sum_1^N t_k \tilde{v}_k^p(z)\right).$$

S preprostim računom se prepričamo, da je

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\tilde{s}_{\tilde{\mathcal{V}}^p}(z,0) = VD_z(s)\tilde{v}_k^p = v_k^p = \frac{\partial}{\partial t_k} s_{1,\mathcal{V}^p}(z,0). \tag{3}$$

Naj bo $D''_p \subset D_p \cap h^{-1}(V \cap U)$ družina Steinovih okolic za $a_p(C)$. Za vsako zvezno družino vektorskih polj $\mathcal{W}^p = \{w_1^p, \dots, w_N^p\}$ nad $D''_p, p \in P$, definirajmo družino preslikav

$$s_{\mathcal{W}^p}(z,t) = s\left(\sum_1^N t_k w_k^p(z))\right), \quad z \in D''_p, t \in \mathbf{C}^N.$$

Očitno je $s_{\mathcal{W}^p}(z,0) = z$ in

$$\frac{\partial}{\partial t_k} s_{\mathcal{W}^p}(z,0) = w_k^p(z). \tag{4}$$

Da bi dokaz dokončali, potrebujemo še naslednjo lemo.

Lema 1.4.4. *Naj bo d metrika na Z in d' norma na trivialnem svežnju E. Obstajajo taka $\eta > 0, \delta > 0$, da velja: za vsak par točk $z, w \in D''_p$, $h(z) = h(w)$ in vsako zvezno družino vektorjev $\mathcal{W}^p = \{w_1^p, \dots, w_N^p\} \subset E_w$, ki zadoščajo $d'(v_j^p(z), w_j^p) < \delta$, obstaja taka zvezna družina injektivnih holomorfnih preslikav $\phi_{\mathcal{W}^p}(z, w\cdot) : B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N$, da je*

(1) $s_{\mathcal{W}^p}(w, \phi_{\mathcal{W}^p}(z,w,t)) = s_{1,\mathcal{V}^p}(z,t)$,

(2) *preslikave $\phi_{\mathcal{W}^p}$ so zvezne v p in za vsak fiksen p holomorfne v z, w, W, t,*

(3) $\phi_{\mathcal{W}^p}(z,z,0) = 0$ *za* $z \in D''_p$.

Dokaz leme 1.4.4. Naj bo $D''_p \times \mathbf{C}^N = kerVD(s_{1,\mathcal{V}^p})|_{D''_p} \oplus M^p$, $p \in P$, zvezna družina razcepov trivialnega svežnja kot v lemi 1.4.3. (mogoče je potrebno okolice D''_p zmanjšati). S tem je za zveznost v p poskrbljeno. V nadaljevanju se bomo ukvarjali le še s holomorfnostjo v ostalih parametrih. Naj bo za vsak $(z,t) \in D_p \times \mathbf{C}^N$ $t = (t', t'') \in kerVD(s_{1,\mathcal{V}^p}) \oplus M^p$ razcep t glede na razcep trivialnega svežnja vad D''_p. Za vsak $z \in D''_p$ preslikava $s_{1,\mathcal{V}^p} : M^p \to Z$ preslika okolico ničle 0_z v M_z^p biholomorfno na okolico z v $Z_z = h^{-1}(h(z))$. Enako velja tudi za preslikave

$$s_{1,\mathcal{V}^p}(z, t', \cdot) : M_z^p \to Z_z \tag{5}$$

za vse dovolj majhne $t' \in kerVD(s_{1,\mathcal{V}^p})$.

Iz enačb (3) in (4) sledi, da je za vsak par točk $z, w \in Z_z$, ki sta dovolj blizu in vsako zvezno družino vektorjev $\mathcal{W}^p$, ki zadošča $d'(w_k^p, v_k^p(z)) < \delta, k = 1, \ldots, N$, za nek dovolj majhen δ, vektorski prostor $M_z^p \subset \mathbf{C}^N$ komplementaren tudi prostoru $kerVD(s_{\mathcal{W}^p})$ za $s_{\mathcal{W}^p}(t) = \sum_1^N t_k w_k^p$. Zato preslikava

$$s_{\mathcal{W}^p}(w, t', \cdot) : M_z^p \to Z_z \tag{6}$$

preslika okolico 0_z v M_z^p biholomorfno na odprto okolico w v Z_z, ki vsebuje tudi točko z. Za tako izbiro točk z, w in vektorjev $\mathcal{W}^p$ naj bo $\phi''_{\mathcal{W}^p}(z, w, t', \cdot) : M_z^p \to M_z^p$ kompozitum preslikave (5) in (enolično določenega) inverza preslikave (6) na okolici 0_z v M_z^p. Preslikava

$$\phi_{\mathcal{W}^p}(z, w, t', t'') = (t', \phi''_{\mathcal{W}^p}(z, w, t', t''))$$

je za vsak par z, w definirana za vse $t \in \mathbf{C}^N$, ki so dovolj blizu izhodišča in je neodvisna od z, w in $\mathcal{W}^p$, če sta točki z, w dovolj blizu in so vektorji $\mathcal{W}^p$ dovolj blizu vektorjem $\mathcal{V}^p(z)$.

♣

Nadaljujmo dokaz trditve 1.4.3. Naj bosta $U_1 \subset U', V_1 \subset V'$ taki odprti okolici za A, B po vrsti, da je $U_1 \cap V_1$ Rungejeva v V' (take okolice obstajajo po privzetku trditve). Po h-Rungejevem izreku 1.3.2. obstaja zvezna družina vektorskih polj $\mathcal{W}^p = \{w_1^p, \ldots, w_N^p\}$, v trivialnem svežnju $E|_{b_p(V')}$, ki na $U_1 \cap V_1$ poljubno dobro aproksimirajo polja $\tilde{v}_k^p$ in se za vsak p iz neke odprte okolice P_0 ujemajo s polji $\tilde{v}_k^p$. Definirajmo družino preslikav $s_{2,p} : V' \times \mathbf{C}^n \to Z$,

$$s_{2,p}(x, t_1, \ldots, t_N) = s\left(\sum_1^N t_k W_k^p(b_p(x))\right).$$

Naj bo $s_{1,p} : U' \times B_N(\eta) \to Z$ družina preslikav, definirana s predpisom

$$s_{1,p}(x, t) = s_{1,\mathcal{V}^p}(a_p(x), t), \quad x \in U',$$

$s_{2,p} = s_{\mathcal{W}^p}$ in $s_{0,p}(x, t) = \tilde{s}_{\tilde{\mathcal{V}}^p}(a_p(x), t), x \in U' \cap V'$. Če so prerezi b_p nad $U_1 \cap V_1$ dovolj blizu prerezom a_p in so bila polja w_k^p dovolj blizu poljem v_k^p, obstaja po lemi 1.4.4. za vsak $x \in U_1 \cap V_1$ injektivna holomorfna preslikava

$$\psi_p(x, \cdot) = \phi_{\mathcal{W}^p}(a_p(x), b_p(x), \cdot) : B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N,$$

ki reši enačbo $s_{2,p}(x, \psi_p(x, t)) = s_{1,p}(x, t)$. Očitno je $\psi_p(x, 0) = 0$ za vsak x, za katerega je $a_p(x) = b_p(x)$, saj je $\phi_{\mathcal{W}^p}(z, z, 0) = 0$. V primeru interpolacije na Y je ta pogoj izpolnjen za vsak $x \in Y \cap U_1 \cap V_1$ in vsak $p \in P$. Ker je $a_p|_{U \cap V} = b_p|_{U \cap V}$ za vsak $p \in P_1$, je tudi $\psi_p(x, 0) = 0$ za vsak $p \in P_1$. Če so bile aproksimacije dovolj dobre, so preslikave ψ_p enakomerno blizu preslikavam

$$\psi_{p,0}(x, \cdot) = \phi_{\mathcal{V}^p}(a(x), a(x), \cdot) : B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N,$$

ki zadoščajo $\psi_{x,0} = 0$ za vsak $x \in U_1 \cap V_1$. ♣

Zaključek dokaza izreka 1.4.1. Trditev 1.4.3. je poskrbela za eksistenco preslikav $s_{1,p}$, $s_{2,p}$ in $\phi_p = (id, \psi_p)$. Prepričati se moramo še, da homotopije $a_{p,t}$ aproksimirajo $a_p = a_{p,0}$ nad A. Lema 1.4.1. pove, da so norme $\|\alpha_p\|_{A'}$ in $\|\beta_p\|_{B'}$ odvisne le od kvalitete aproksimacij prerezov a_p s prerezi b_p in kvalitete aproksimacij polj $\tilde{\mathcal{V}}^P$ s polji $\mathcal{W}^p$. Ker so preslikave $s_{1,p}$ odvisne le od prerezov a_p, predpis (1) pove, da je $d(a_p(x), a_{p,t}(x))$ odvisna le od $\|\alpha_p\|_{A'}$, kar nam da aproksimacijo nad A'. Ker pa so preslikave $s_{2,p}$ odvisne tudi od polj $\mathcal{W}^p$, ki smo jih dobili z Rungejevim izrekom, in ne le od prerezov b_p, dobimo ocene za $d(b_p(x), b_{p,t}(x))$ le za $x \in A' \cap B'$. ♣

1.5 Konstrukcija majhnih prerezov

Konstrukcijo začetnih majhnih prerezov bomo posebej pojasnili za različne primere.

1. Privzemimo, da je $P = \{p\}$, $Y = \emptyset$ in X in Z kompleksna prostora. Naj bo $a : X \to Z$ dan začeten zvezen prerez. Zaradi enostavnosti privzemimo, da sta prostora X in Z povezana. Naj bo n dimenzija vlaken Z_x, $x \in X$ (zaradi povezanosti X in Z je n neodvisen od $x \in X$). Po definiciji submerzije obstaja za vsako točko $x \in X$ odprta okolica U_x in odprta okolica $V_{a(x)} \subset Z$ točke $a(x)$ ter biholomorfna preslikava $g_x : U_x \times B_n(1) \to V_{a(x)}$, kjer je $B_n(1) = B_n$ enotska krogla v $\mathbf{C}^n$. Naj bodo okolice U_x tako majhne, da ima $Z|_{U_x}$ spray po vlaknih in je $a(U_x) \subset V_{a(x)}$. Definirajmo holomorfne prereze a_x s predpisi

$$a_x := g_x|_{U_x \times \{0\}},\ x \in X.$$

Teh prerezov je seveda veliko preveč, zato izberemo tako podpokritje $\{U_{x_n} =: U_n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ pokritja $\{U_x\}_{x \in X}$, da vsak prerez $a_n := a_{x_n}$, zožen na množico $U_m \cap U_n$, leži v $V_m := V_{a(x_m)}$ za vsak $m < n$. Pri tem se lahko zgodi, da moramo okolice U_x pomanjšati, kar pa ni nobena težava. S tem dosežemo, da sta prereza a_m in a_n nad $U_m \cap U_n$ holomorfno homotopna, saj smo v evklidskem prostoru in lahko za homotopijo vzamemo kar konveksne kombinacije

$$a_{m,n,t}(x) := ta_m(x) + (1-t)a_n(x),\ x \in U_m \cap U_n,\ t \in [0, 1].$$

Če je začetni prerez a holomorfen na okolici U kompaktne holomorfno konveksne množice K bomo seveda izbrali $U_0 := U$ in $a_0 := a|_U$.

2. Naj bo prostor parametrov P poljuben kompakten Hausdorffov prostor in Y prazna množica. Ker je prostor parametrov P kompakten, lahko na enak način konstruiramo začetne majhne prereze, katerih definicijska območja so neodvisna od parametrov $p \in P$.

3. Nekaj več težav pa nam bo povzročila interpolacija. Naj bo $a_p : X \to Z$ dana zvezna družina zveznih prerezov, ki so holomorfni na Y. Želimo, da se bodo začetni majhni prerezi, ki pripadajo prerezu a_p, na podmnogoterosti Y ujemali s prerezom a_p. Naj bo $n_x = emdim_x X$. Po definiciji submerzije (oziroma izreku o rangu) obstajajo za vsako točko $x \in X$ odprta okolica $U_x \subset X$, zvezna družina odprtih okolic $V_{a_p(x)} \subset Z$ točke $a_p(x)$ ter zvezna družina biholomorfnih preslikav $g_{p,x} : U_x \times B_n \to V_{a_p(x)}$; ker je prostor parametrov P kompakten, lahko izberemo eno okolico U_x, ki bo dobra za vse prereze a_p. Naj bo $\iota_x : U_x \to B_{n_x}(1)$ prava holomorfna vložitev (taka obstaja po definiciji vložitvene dimenzije; lahko, da moramo U_x zmanjšati) in identificirajmo U_x z $\iota(U_x) \subset B_{n_x}(1) = B_{n_x}$. Naj bodo odprte okolice U_x tako majhne, da je $a_p(U_x) \subset V_{a_p(x)}$ za vsak $x \in X, p \in P$. Za vsak $p \in P$ in $x \in X$ prerez a_p definira holomorfno preslikavo $\alpha_{p,x} : U_x \cap Y \to B_n$ (če je presek $Y \cap U_x$ slučajno prazen, ravnamo kot v primeru brez interpolacije). Na tem koraku pa je potrebno poiskati zvezno družino holomorfnih funkcij $\tilde{\alpha}_{p,x} : U_x \to B_n$, ki so razširitve funkcij $\alpha_{p,x}$, sicer nimamo nobenega upanja, da bo končna družina holomorfnih prerezov zvezna v parametru. Pri tem nam bo pomagal izrek 1.2.4. Ker pa ta izrek zahteva, da je ambientni prostor mnogoterost, bomo razširili preslikave na krogle B_{n_x}. Izberimo $t \in (0, 1)$, naj bo $U'_x = B_{n_x}(t) \cap U_x$ in definirajmo

$$\tilde{\alpha}_{p,x} := R_{B_{n_x}(1), B_{n_x}(t)}(\alpha_{p,x})|_{U'_x}.$$

Lahko se zgodi, da moramo naše definicijsko območje U'_x zmanjšati, da bo slika $\tilde{\alpha}_{p,x}(U'_x)$ ležala v B_n. Pri zmanjševanju okolic moramo paziti, da se ne skrčijo v točko. V tem primeru imamo opravka s kompaktnim prostorom parametrov P in s samo enim omejenim razširitvenim operatorjem (ker imamo skupno definicijsko območje U_x), zato se to ne zgodi. Pripomnimo še, da bomo v primeru, ko so vsi prerezi $a_p, p \in P$ holomorfni na neki odprti odprti okolici U holomorfno konveksne kompaktne množice K, definirali $U_0 := U$.

Podobno kot v najosnovnejšem primeru, ko je bila podmnogoterost Y prazna in smo imeli le en začeten prerez, lahko izberemo tako števno podpokritje $\{U_n := U'_{x_n}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$

pokritja $\{U'_x\}_{x\in X}$ in zvezno družino prerezov $a_{p,n} : U_n \to Z,\ p \in P$, da za vsak par indeksov $m < n \in \mathbf{N}_0$, za katera je $U_m \cap U_n \neq \emptyset$ velja $a_{p,n}(U_n \cap U_m) \subset V_{p,m} := V_{p,x_m}$. To pomeni, da sta (pri fiksnem $p \in P$) vsaka dva prereza $a_{p,m}$ in $a_{p,n}$ nad presekom definicijskih območij $U_m \cap U_n$ holomorfno homotopna in je homotopija nad $Y \cap U_m \cap U_n$ fiksirana. Podobno so v primeru, ko je $U_m \cap U_n \cap U_k \neq \emptyset$ za $m < n < k$ prerezi $a_{p,m}, a_{p,n}$ in $a_{p,k}$ paroma holomorfno homotopni in holomorfni homotopiji med $a_{p,m}$ in $a_{p,n}$ ter $a_{p,n}$ in $a_{p,k}$ lahko povežemo s holomorfno homotopijo nad presekom definicijskih območij $U_m \cap U_n \cap U_k$, ki miruje na $Y \cap U_m \cap U_n \cap U_k$. Potrebujemo še homotopije med majhnimi prerezi in začetnimi zveznimi prerezi. Vsak prerez $a_{p,m}$ je nad U_m zvezno homotopen začetnemu prerezu $a_p|_{U_m}$; ker so okolice dovolj majhne, lahko vse delamo v evklidskem prostoru in homotopijo $a_{p,m,t}, t \in [0,1]$ dobimo kar s konveksnimi kombinacijami: $a_{p,m,t} := ta_{p,m} + (1-t)a_p|_{U_m}, t \in [0,1]$. Ker sta se prereza ujemala nad $Y \cap U_m$, taka homotopija miruje na $Y \cap U_m$. Na enak način vidimo, da je tudi vsaka holomorfna homotopija med $a_{p,m}$ in $a_{p,n}$ nad $U_m \cap U_n$ zvezno homotopna $a_p|_{U_n \cap U_m}$ in tako naprej.

4. Poglejmo si še splošnejši primer. Naj bo prostor parametrov P kompaktem Hausdorffov prostor in $P_0 \subset P$ zaprta podmnožica in P_1 njena odprta okolica v P. Naj bo dana taka zvezna družina $a_p,\ p \in P$ zveznih prerezov, da je za vsak parameter $p \in P_1$ prerez $a_p : X \to Z$ holomorfen. Radi bi, da bodo za $p \in P_0$ začetni majhni prerezi $a_{p,m}$ kar enaki $a_p|_{U_m}$, česar nam zgoraj opisani postopek ne zagotavlja. Z razčlenitvijo enote bomo začetne majhne prereze popravili. Naj bo $\chi : P \to [0,1]$ taka zvezna funkcija, ki je na okolici P_0 enaka 1 in ima nosilec v P_1. Zadostuje, da popravljanje pojasnimo le nad eno odprto množico U_m in pri tem uporabimo dejstvo, da lahko problem prenesemo v evklidski prostor. Nove majhne prereze bomo definirali tako:

$$\begin{aligned} a'_{p,m} &:= a_{p,m} \text{ za vsak } p \in P \setminus P_1, \\ a'_{p,m} &:= (1-\chi(p))a_{p,m} + \chi(p)a_p|_{U_m},\ p \in P_1 \text{ in} \\ a'_{p,m} &:= a_p|_{U_m} \text{ za vsak } p \in P_0. \end{aligned}$$

Ker so prerezi a_p za vsak $p \in P_1$ holomorfni na vsem X, so tudi prerezi $a'_{p,m}$ holomorfni na U_m za vsak $p \in P_1$. Po konstrukciji se prereza $a_{p,m}$ in $a_p|_{U_m}$ ujemata na $Y \cap U_m$, zato se tudi $a'_{p,m}$ ujema z $a_p|_{U_m}$ na $Y \cap U_m$. Homotopija med prerezi $a_{p,m}$ in $a'_{p,m}$ je naslednja:

$$\begin{aligned} a_{p,m,t} &:= a_{p,m} \text{ za vsak } p \in (P \setminus P_1) \cup P_0,\ t \in [0,1], \\ a_{p,m,t} &:= (1-t)a_{p,m} + ta'_{p,m}. \end{aligned}$$

Za nadaljevanje potrebujemo učinkovito sredstvo za popis homotopij. Prereze $a_{p,n}$ bi radi lepili med seboj tako, da bomo še vedno imeli vse holomorfne in zvezne homotopije.

H-Rungejev izrek nam pove, da lahko lepljenje naredimo na tak način, da lahko s homotopijo popravljamo še vse ostale homotopije. Po vsakem koraku lepljenja se moramo seveda prepričati, da je dobljen prerez homotopen začetnemu. Za lepljenje prerezov v primeru submerzije $h : Z \to X$, ki je svežen, potrebujemo Cartanske pare, v tem splošnejšem primeru pa to ne zadošča več.

1.6 Kompleksi in prizme

Na družino prerezov bi radi vpeljali strukturo, ki bo popisala vse holomorfne homotopije, pa holomorfne homotopije med temi homotopijami in tako naprej. Kar sami od sebe se nam pri tem ponudijo simpleksi, oziroma natančneje, simplicialni kompleksi.

Oznaka $\triangle^n$ naj pomeni standardni n-simpleks v $\mathbf{R}^n$, ki ga določajo točke $e_0 := 0$ in $e_1, \ldots, e_n$, kjer je $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ z enico na i-tem mestu. Naj bo $\{i_0, \ldots, i_k\} \subset \{0, \ldots, n\}$. Oznaka $J = (i_0, \ldots, i_k)$ pomeni tisto k-dimenzionalno lice simpleksa $\triangle^n$, ki ga določajo točke $e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}$, oznaka $|J|$ telo tega lica, $|J| := \triangle^n_J$ in oznaka K_n simplicialni kompleks, ki ga sestavljajo vsa lica simpleksa $\triangle^n$.

Naj bodo $A_0, \ldots, A_n$ podmnožice v X. Simplicialni kompleks $K(A_0, \ldots, A_n) \subset K_n$ je **živec** niza $(A_0, \ldots, A_n)$, če velja naslednje:

$$J = (i_0, \ldots, i_k) \in K(A_0, \ldots, A_n) \Longleftrightarrow A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_k} \neq \emptyset.$$

Vpeljimo še dve koristni oznaki:

$$\begin{aligned} A_J &:= A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_k}, \\ A^J &:= A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_k}. \end{aligned}$$

Naj bo $Z \to X$ holomorfna submerzija in U odprta podmnožica v X. Z $\mathcal{O}(U, Z)$ bomo označili množico vseh holomorfnih prerezov $f : U \to Z$, s $\mathcal{C}(U, Z)$ pa množico vseh zveznih prerezov $f : U \to Z$.

Naj bo $(A_0, \ldots, A_n)$ zaporedje kompaktnih množic, $U_i \subset X$ pa take odprte okolice množic A_i po vrsti, da je $K(A_0, \ldots, A_n) = K(U_0, \ldots, U_n)$. Družina preslikav

$$f_* = \{f_J,\ J \in K(A_0, \ldots, A_n)\}$$

je **holomorfni kompleks nad** $K(A_0, \ldots, A_n)$, če je za vsak $J \in K(A_0, \ldots, A_n)$ preslikava $f_J : |J| \to \mathcal{O}(U_J, Z)$ zvezna in je za vsako lice $I \in K(A_0, \ldots, A_n)$, $I \subset J$ izpolnjena zahteva

$$f_J(t) = f_I(t)|_{U_J},\ t \in |I|.$$

Podobno definiramo **zvezni kompleks**. Če je f_* (holomorfni ali zvezni) kompleks nad simplicialnim kompleksom K in je $K' \subset K$ njegov podkompleks, je **zožitev kompleksa** f_* **na** K' definirana z $f_*|_{K'} := \{f_J,\ J \in K'\}$. Če sta f_* in f'_* (holomorfna ali zvezna) kompleksa nad simplicialnima kompleksoma K in K' po vrsti, je $f'_* \leq f_*$, če je $K' \subset K$ in je $f'_* = f_*|_{K'}$. Zaporedje kompleksov $\{f^n_*\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **naraščajoče,** če je $f^n_* \leq f^{n+1}_*$ za vsak $n \in \mathbf{N}$. Naj bo $Y \subset X$ analitična podmnožica. Holomorfni (zvezni) kompleks **miruje na** Y, če vse homotopije mirujejo na Y. To pomeni, da se na Y vsi holomorfni prerezi ujemajo.

Naj bo S kompakten Hausdorffov prostor. Družina zveznih preslikav

$$f_* = \{f_J : |J| \times S \to \mathcal{O}(U_J, Z),\ J \in K(A_0, \ldots, A_n)\}$$

holomorfna S**-prizma nad** $K(A_0, \ldots, A_n)$, če je za vsak $s \in S$ družina preslikav $f_{*,s} := \{f_J|_{|J|\times\{s\}},\ J \in K(A_0, \ldots, A_n)\}$ holomorfni kompleks. Podobno definiramo zvezno prizmo. Če je $S = [0,1]^k$ bomo tako prizmo imenovali kar k-prizma, če pa je $S = [0,1]^k \times P$, kjer je P nek drug kompakten Hausdorffov prostor, bomo namesto izraza S-prizma uporabljali tudi izraz zvezna družina k-prizem.

Če je f_* (holomorfna ali zvezna) prizma nad simplicialnim kompleksom K in je $K' \subset K$ njegov podkompleks, je **zožitev prizme** f_* **na** K' definirana z $f_*|_{K'} := \{f_J,\ J \in K'\}$. Če sta f_* in f'_* (holomorfni ali zvezni) k-prizmi nad simplicialnima kompleksoma K in K' po vrsti, je $f'_* \leq f_*$, če je $K' \subset K$ in je $f'_* = f_*|_{K'}$. Zaporedje k-prizem $\{f^n_*\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **naraščajoče,** če je $f^n_* \leq f^{n+1}_*$ za vsak $n \in \mathbf{N}$. Naj bo $Y \subset X$ analitična množica. Holomorfna (zvezna) prizma **miruje na** Y, če vse homotopije mirujejo na Y.

Holomorfni (zvezni) kompleks f_* nad $K(A_0, \ldots, A_n)$ je **konstanten**, če obstaja holomorfen (zvezen) prerez $h : U^{(0,\ldots,n)} \to Z$ in je $f_J(t) = h|_{U_J}$ za vsak $t \in |J|, J \in K(A_0, \ldots, A_n)$. V takem primeru bomo namesto oznake h za globalni prerez uporabljali kar oznako f. Holomorfna (ali zvezna) k-prizma f_* je **po nivojih konstantna**, če je za vsak $t \in [0,1]^k$ kompleks $f_{*,t}$ konstanten. Po nivojih konstantna holomorfna (zvezna) k-prizma nad kompleksom $K(A_0, \ldots, A_n)$ določa zvezno družino družino holomorfnih (zveznih) prerezov $f_t : U^{(0,\ldots,n)} \to Z$.

Z $r_n : \triangle^n \times [0,1] \to \triangle^{n+1}$ bomo označili retrakcijo, definirano s predpisom $r_n(u,s) := (u(1-s), s)$.

r_2

Sličica 1: preslikava r_2.

1.7 Cartanski nizi in konstrukcija začetne zvezne prizme

Kot smo že omenili, je oblika definicijskih območij majhnih prerezov pomembna za lepljenje. V primeru dveh množic znamo zlepiti holomorfno homotopna prereza nad Cartanskim parom. Poskusimo pojasniti, zakaj za lepljenje majhnih prerezov Cartanski pari ne zadostujejo. Vzemimo holomorfne prereze $a_{p,0}, a_{p,1}$ in $a_{p,2}$, ki so definirani na U_0, U_1, U_2 po vrsti. Recimo, da smo že zlepili prereza $a_{p,0}$ in $a_{p,1}$ v holomorfen prerez $a_{p,(0,1)}$ nad unijo $U_0 \cup U_1$. Ta prerez bi zdaj radi zlepili s prerezom $a_{p,2}$, ki sicer *ni* holomorfno homotopen $a_{p,(0,1)}$ nad $(U_0 \cup U_1) \cap U_2$. Imamo pa dve drugi holomorfni homotopiji: holomorfno homotopijo med $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,2}$, definirano nad $U_0 \cap U_2$, ki jo dobimo iz prvotne homotopije med $a_{p,0}$ in $a_{p,2}$ in homotopije med $a_{p,0}$ in $a_{p,(0,1)}$ ter holomorfno homotopijo med $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,2}$, definirano nad $U_1 \cap U_2$, ki jo dobimo iz začetne homotopije med $a_{p,1}$ in $a_{p,2}$ in iz homotopije med $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,1}$. Prva stvar, ki nam pride na misel je, da bi poskusili (s homotopijo) zlepiti ti dve homotopiji v homotopijo med $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,2}$, ki bo definirana na $(U_0 \cup U_1) \cap U_2$. Če bi nam to uspelo, bi preko te homotopije zlepili še prereza $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,2}$. Če želimo izvajati lepljenje na tak način, mora biti par množic $(U_0 \cap U_2, U_1 \cap U_2)$ Cartanski (za lepljenje homotopij) in par $(U_0 \cup U_1, U_2)$ tudi Cartanski (za lepljenje $a_{p,(0,1)}$ in $a_{p,2}$). Tako urejeno trojico (U_0, U_1, U_2) bomo imenovali Cartanski niz dolžine 3. Splošna definicija Cartanskih nizov je naslednja.

Definicija 1.7.1. [Gr] *Naj bo X kompleksna mnogoterost in $A_0, \ldots, A_n$ zaporedje kompaktnih podmnožic mnogoterosti X. Pravimo, da je $(A_0, \ldots, A_n)$* **Cartanski niz dolžine** *$n+1$, če sta niza $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ in $(A_0 \cap A_n, \ldots, A_{n-1} \cap A_n)$ Cartanska in $(A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}, A_n)$ Cartanski par.*

Lokalno končno pokritje $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2, \ldots)$ je **Cartansko pokritje***, če je za vsak $n \in \mathbf{N}$ niz $(A_0, \ldots, A_n)$ Cartanski.*

Naše izbrano začetno pokritje seveda ni Cartansko, zato ga bomo malce popravili.

Izrek 1.7.1. [HL] *Če je X Steinova mnogoterost in $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}_0}$ odprto pokritje za X, obstaja tako Cartansko pokritje $(A_0, A_1, \ldots)$, da vsak A_k leži v kaki množici U_i. Če je $K \subset U_0$ kompaktna holomorfno konveksna množica, lahko pokritje $(A_0, A_1, \ldots)$ izberemo tako, da je $intA_0 \supset K$ poljubno majhna okolica K in je $K \cap A_i = \emptyset$ za vsak $i \in \mathbf{N}$.*

Opomba. Cartansko pokritje iz izreka 1.7.1. imenujemo **podrejeno pokritju** $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}_0}$.

Naj bo $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ odprto pokritje iz razdelka 1.2. in $(A_0, A_1 \ldots)$ Cartansko pokritje iz izreka 1.7.1., ki je podrejeno temu pokritju. Naj bo n_k najmanši indeks, pri katerem je $A_k \subset U_{n_k}$ in naj bo $f_{p,k} := a_{p,n_k}$. Da se bomo izognili večkratnim indeksom, bomo v bodoče pisali kar U_k namesto U_{n_k}. Če okolice U_k zmanjšamo, lahko dosežemo, da je $K(A_0, \ldots, A_n) = K(U_0, \ldots, U_n)$ za vsak $n \in \mathbf{N}_0$. Tako pokritje $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bomo imenovali **zvesto** pokritju $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Zdaj pa že lahko definiramo začetno družino holomorfnih kompleksov (ali P-prizmo) in začetno družino zveznih 1-prizem (oziroma zvezno $P \times [0,1]$-prizmo). Začasno fiksirajmo nek parameter $p \in P$ in si oglejmo prereza $f_{p,0}$ in $f_{p,1}$. Po konstrukciji sta ta dva prereza holomorfno homotopna nad $U_0 \cap U_1$ in skupaj s homotopijo določata holomorfni kompleks $f_*^{p,1}$ nad $K(U_0, U_1)$. Ker pa lahko prereza in homotopijo med njima z zvezno homotopijo povežemo z začetnim prerezom a_p, dobimo tako zvezno 1-prizmo $g_*^{p,1}$ nad $K(U_0, U_1)$, da je zvezni kompleks $g_{*,0}^{p,1}$ konstantni kompleks, ki ga določa začetni prerez a_p in je $g_{*,1}^{p,1} = f_*^{p,1}$. Ko dodamo še množico U_2, dobimo zvezno družino holomorfnih kompleksov $f_*^{p,2}$ nad $K(U_0, U_1, U_2)$, $f_*^{p,2}|_{K(U_0,U_1)} = f_*^{p,1}$ in tako zvezno družino holomorfnih 1-prizem $g_*^{p,2}$, da je za vsak $p \in P$ $g_*^{p,2}|_{K(U_0,U_1)} = g_*^{p,1}$, $g_{*,0}^{p,2}$ je konstantni kompleks, ki ga določa začetni zvezni prerez in $g_{*,1}^{p,2} = f_*^{p,2}$ in tako naprej. Zvezna družina prerezov $\mathcal{F}^p = \{f_{p,k} : U_k \to Z\}_{k\in\mathbf{N}_0}$ za vsak $p \in P$ torej določa naraščajoče zaporedje holomorfnih kompleksov

$$f_*^{p,k} = \{f_J^{p,k} : |J| \to \mathcal{O}(U_J, Z),\ J \in K(A_0, \ldots, A_k)\},\ k \in \mathbf{N}_0$$

in naraščajoče zaporedje zveznih 1-prizem

$$g_*^{p,k} = \{g_J^{p,k} : |J| \times [0,1] \to \mathcal{C}(U_J, Z),\ J \in K(A_0, \ldots, A_n)\},\ k \in \mathbf{N}_0$$

za katere je $g_{*,0}^{p,k}$ konstantni zvezni kompleks, ki ga določa začetni zvezni prerez a_p, kompleks $g_{*,1}^{p,k}$ pa je enak kompleksu $f_*^{p,k}$.

1.8 Lepljenje prerezov nad Cartanskimi nizi

Najprej si poglejmo, kako lahko 'na zvezen način' lepimo holomorfne (zvezne) prereze, kar v jeziku prizem in kompleksov pomeni, da poskušamo poiskati pot med začetnim in konstantnim kompleksom oziroma med začetno k-prizmo in tako k-prizmo f_*, da je $f_{*,q}$ konstanten kompleks za vsak parameter $q \in [0,1]^k$. Ker je lepljenje narejeno z operatorji, je mogoče vse naslednje trditve narediti zvezno v parametru $p \in P$ za poljuben kompakten Hausdorffov prostor parametrov.

Trditev 1.8.1. *Naj bo $h : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki lokalno dopušča spray, $Y \subset X$ analitična podmnožica, $(A_0, \ldots, A_n)$ pa tak Cartanski niz, da ima $Z|_{U_i}$ spray nad neko odprto okolico $U_i \subset X$ množice A_i, $i = 0, \ldots, n$. Naj bo $K^n = K(A_0, \ldots, A_n)$ živec niza $(A_0, \ldots, A_n)$, $Q \subset [0,1]^k$ zaprta množica, ki je krepki okoliški deformacijski retrakt v $[0,1]^k$, P kompakten Hausdorffov prostor, $P_0 \subset P$ zaprta množica in $P_1 \subset P$ njena odprta okolica. Naj bo $f_*^p, p \in P$ taka zvezna družina holomorfnih k-prizem nad K^n, da je družina $f_{*,q}^p := \{f_J^p|_{|J|\times\{q\}},\ J \in K^n\}$ konstanten kompleks, če je $q \in Q$ ali $p \in P_1$. Naj za vsak fiksen $p \in P$ prizma f_*^p miruje na Y. Potem obstaja odprta okolica $P_1' \subset P_1$ množice P_0 in taka zvezna družina k-prizem $f_*^{p,t}$, $p \in P$, $t \in [0,1]$, da je*

(1) $f_*^{p,0} = f_*^p$ *za vsak* $p \in P$,

(2) $f_{*,q}^{p,t} = f_{*,q}^p$ *za vsak* $t \in [0,1]$, *če je* $q \in Q$ *ali* $p \in P_1'$,

(3) $f_{*,q}^{p,1}$ *je konstanten kompleks za vsak* $p \in P$, $q \in [0,1]^k$ *in*

(4) *za vsak fiksen* $p \in P$ *je* $(k+1)$*-prizma* $f_*^{p,t}$ *konstantna vzdož* Y.

Opomba. Trditev bomo uporabljali za množice Q, ki bodo unije določenih stranskih ploskev $\partial[0,1]^k$.

Dokaz. Trditev bomo dokazali z indukcijo na n. Dokaz baze indukcije je najbolj zoprn, indukcijski korak pa je precej bolj spodoben. Ker v primeru $Q = [0,1]^k$ ni česa dokazati, privzemimo, da je $Q \neq [0,1]^k$.

$n = 2:$ Če je $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ trditev očitno drži, zato privzemimo, da je $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$. Ideja dokaza je naslednja. Najprej bomo uporabili h-Rungejev izrek, da bomo prereze, definirane na okolici A_0, nad $A_0 \cap A_1$ aproksimirali s prerezi, definiranimi na okolici A_1, saj lahko lepimo le bližnje prereze. Vse to bomo naredili s homotopijami. V drugem koraku pa bomo družini prerezov zlepili.

Aproksimacija. Ker je Q krepki okoliški deformacijski retrakt v $[0,1]^k$, lahko z reparametriziranjem v $[0,1]^k$ dosežemo, da bo pogoj $f_{*,q}^{p,t} = f_{*,q}^p$ veljal za vsak $q \in Q_1$, kjer je $Q_1 \subset [0,1]^k$ neka odprta okolica Q. Kocke $[0,1]^k$ reparametriziramo enako za vsak parameter $p \in P$ kot v dokazu posledice 1.1.1. Naj bosta P_1', Q_1' odprti okolici za P_0, Q po vrsti, kompaktno vsebovani v P_1, Q_1 po vrsti.

Uporabili bi radi h-Rungejev izrek 1.3.2. Družino preslikav in množice, ki nastopajo v predpostavkah izreka, bomo navedli spodaj. Vlogo časovnega parametra t iz izreka bo prevzel krajevni parameter, to je parameter, ki določa simplicialni kompleks $K(A_0, A_1)$ (ta je daljica), in sicer tako, da se premikamo od krajišča, ki pripada A_1 proti krajišču, ki pripada A_0. Naj bo f_*^p dana k-prizma nad $K(A_0, A_1)$. To pomeni, obstajata odprti okolici $U_0, U_1 \subset X$ za A_0, A_1 po vrsti in zvezna družina takih preslikav $\{f_{J,q}^p : |J| \to \mathcal{O}(U_J, Z), J \in K(A_0, A_1), q \in [0,1]^k\}$, da je za vsako lice $J \subset K(A_0, A_1)$ izpolnjena zahteva

$$f_{J,q}^p(t) = f_{I,q}(t)|_{U_J} \text{ za vsako lice } I \subset K(A_0, A_1), I \subset J. \tag{7}$$

V $K(A_0, A_1)$ imamo samo 3 lica: $(0), (0,1)$ in (1). Za lici (0) in (1), ki sta točki, dobimo samo družini preslikav $a_{p,q} = f_{(0),q}^p(0) : U_0 \to Z$ in $b_{p,q} = f_{(1),q}^p(0) : U_1 \to Z$, $p \in P$, $q \in [0,1]^k$. Lice $(0,1)$ pa je daljica, parametrizirana s parametrom $t \in [0,1]$, zato je $f_{J,q}^p$ za vsak fiksen par p, q naslednja 1-parametrična družina: $f_{(0,1),q}^p(t) : U_{(0,1)} = U_0 \cap U_1 \to Z, t \in |(0,1)| = [0,1]$. Zahteva (7) za te družine pomeni, da se na $U_0 \cap U_1$ družina $f_{(0,1),q}^p(0)$ ujema z $a_{p,q}$, družina $f_{(0,1)p,q}^p(1)$ pa se ujema z družino $b_{p,q}$. Družina $f_{p,q,t} := f_{(0,1),q}^p(1-t), t \in [0,1]$ je družina holomorfnih prerezov Z, ki je definirana na $U_0 \cap U_1$ in pri $t = 0$ so prerezi definirani na U_1 (saj se ujemajo s prerezi $b_{p,q}$). Poleg tega pogoj, da za vsak fiksen p prizme f_*^p mirujejo na Y pomeni, da se vse homotopije iz teh prizem na $Y \cap U_0 \cap U_1$ določajo en sam holomorfni prerez na $Y \cap (U_0 \cup U_1)$. Ker je za vsak $p \in P_1$ prizma f_*^p konstantna, se (za vsak $p \in P_1$) prereza $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$ ujemata na preseku definicijskih območij, kar pomeni, da vse homotopije iz te prizme določajo en sam prerez na $U_0 \cup U_1$. Podobno je za parameter q. Če je prizma f_*^p konstantna za nek $q \in [0,1]^k$, to pomeni, da vse homotopije v $f_{*,q}^p$ sovpadajo na preseku definicijskih območij in tako določajo prerez $f_{p,q}$ nad $U_0 \cup U_1$.

Po h-Rungejevem izreku 1.3.2. za $K = A_0 \cap A_1$, $U := U_0 \cap U_1$, $V = U_1$, množice $(P_1' \times [0,1]^k) \cup (P \times Q_1')$, $(P_1 \times [0,1]^k) \cup (P \times Q_1)$, $P \times [0,1]^k$ namesto P_0, P_1, P in družino $f_{p,q,t}$, obstajata manjši odprti okolici U_0', U_1' za A_0, A_1 po vrsti in zvezna družina prerezov $g_{p,q,t,s} : U_0' \cap U_1' \to Z$, ki na K aproksimira začetno družino, za vsak fiksen $(p,q) \in P \times [0,1]^k$ miruje vzdolž Y, prereze $g_{p,q,t,1}$ je mogoče razširiti na U_1' in homotopija miruje, če je $p \in P_1'$ ali $q \in Q_1'$ ali $t = 0$. Da ne bo še več oznak, zamenjajmo U_0' in U_1' z oznakama U_0, U_1. Z družino prerezov $g_{p,q,t,s}$ definiramo zvezno družino holomorfnih k-prizem $\overline{f}_*^{p,s}$ nad $K(A_0, A_1)$, $p \in P, s \in [0,1]$, ki povzeuje začetno prizmo $f_*^p := \overline{f}_*^{p,0}$ s prizmo $\overline{f}_*^{p,1}$ na naslednji način (zamenjati moramo smer parametra t in biti previdni pri definicijskih območjih). Za vsak $p \in P$, $q \in [0,1]^k$, in $s \in [0,1]$ definirajmo

$$\overline{f}^{p,s}_{(0),q}(0) := a_{p,q},$$

$$\overline{f}^{p,s}_{(1),q}(0) := \begin{cases} g_{p,q,0,2s}, & s \in [0,1/2], \\ g_{p,q,2s-1,1}, & s \in [1/2,1] \end{cases}$$

$$\overline{f}^{p,s}_{(0,1),q}(t) := \begin{cases} g_{p,q,1-t,2st}, & s \in [0,1/2], \\ g_{p,q,1-2t(1-s),t}, & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Opomba. Če gledamo par (q,s) kot parameter v $[0,1]^{k+1}$, je $\overline{f}^{p,*}_{*}$, $p \in P$, zvezna družina $(k+1)$-prizem.

Lepljenje. Pišimo $\overline{a}_{p,q} := a_{p,q} = \overline{f}^{p,1}_{(0),q}(0)$, $\overline{b}_{p,q} := \overline{f}^{p,1}_{(1),q}(0)$ in $\overline{f}_{p,q,t} := \overline{f}^{p,1}_{(0,1),q}(t)$. Spomnimo se, da je družina $\overline{a}_{p,q}$ definirana na $U_0 \supset A_0$, družina $\overline{b}_{p,q}$ na $U_1 \supset A_1$ in da homotopija $\overline{f}_{p,q,t}$, definirana na $U_0 \cap U_1$, povezuje družini $\overline{a}_{p,q}$ in $\overline{b}_{p,q}$. S h-Rungejevim izrekom smo dosegli, da za vsak $p \in P, q \in Q$ velja $d(\overline{f}_{p,q,t}(x), \overline{a}_{p,q}(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in A_0 \cap A_1, t \in [0,1]$. Zdaj pa lahko uporabimo izrek 1.4.1. (splošni izrek izrek o lepljenju z interpolacijo) za množice $A = A_0$, $B = A_1$, $U = U_0$, $V = U_1$, družine $\overline{a}_{p,q}, \overline{b}_{p,q}, \overline{f}_{p,q,t}$ in prostore parametrov $(P_1' \times [0,1]^k) \cup (P \times Q_1'), (P_1 \times [0,1]^k) \cup (P \times Q_1),\ P \times [0,1]^k$ namesto P_0, P_1, P. Podobno kot pri h-Rungejevem izreku je rezultat zvezna družina k-prizem $\tilde{f}^{p,s}_{*}, p \in P, s \in [0,1]$, z lastnostmi:

-za vsaka p,q družina $\tilde{f}^{p,s}_{*,q}$ miruje na Y,

-če je $p \in P_1'$ ali $q \in Q_1'$ je 1-prizma $\tilde{f}^{p,s}_{*,q}$ konstantna in

-$\tilde{f}^{p,1}_{*,q}$ je konstantna za vsak $p \in P, q \in Q$.

Družini $\overline{f}^{p,s}_{*}$ in $\tilde{f}^{p,s}_{*}$ skupaj določata homotopijo med začetno in po nivojih konstantno prizmo:

$$\begin{aligned} f^{p,t}_{*} &:= \overline{f}^{p,2t},\ t \in [0,1/2], \\ f^{p,t}_{*} &:= \tilde{f}^{p,2t-1},\ t \in [1/2,1]. \end{aligned}$$

$n = 3$: Zaradi boljšega razumevanja bomo posebej pojasnili še ta primer, in sicer brez interpolacije in brez zahteve, da morajo homotopije ostati fiksirane za $p \in P_1$. Videli bomo tudi, zakaj je potrebno imeti homotopije fiksirane za določene parametre in zakaj mora biti izrek formuliran za prizme poljubne dimenzije (samo kompleksi niso dovolj).

Imamo simplicialni kompleks $K(A_0, A_1, A_1)$, U_0, U_1, U_2 naj bodo odprte okolice za A_0, A_1, A_2 po vrsti, in $f_*^p, p \in P$, zvezna družina holomorfnih k-prizem nad $K(A_0, A_1, A_2)$. Privzemimo, da je $A_0 \cap A_1 \cap A_1 \neq \emptyset$ in predstavimo $|K(A_0, A_1, A_2)|$ kot trikotnik T v $\mathbf{R}^2$ z oglišči $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$, ki ustrezajo množicam A_0, A_1, A_2 po vrsti. Prostor parametrov, ki pripada k-prizmam, je $T \times [0,1]^k$.

Primer $n = 2$ pove, da lahko družino $f_*^p|_{K(A_0,A_1)}$ s homotopijo $\tilde{f}_*^{p,t}, t \in [0,1]$, premaknemo do take družine k-prizem, ki bo po nivojih konstantna. Na prostoru parametrov to pomeni, da smo na ploskev $[0,1] \times 0 \times [0,1]^k$ nalepili kvader $[0,1] \times [-1,0] \times [0,1]^k$. Ker je prostor T homeomorfen $T \cup [0,1] \times [-1,0]$, lahko družini f_*^p in $\tilde{f}_*^{p,t}$ reparametriziramo tako, da bomo dobili družino k-prizem, ki bo na $K(A_0, A_1)$ po nivojih konstantna. V jeziku prerezov to pomeni: nad odprto okolico $U \supset A_0 \cup A_1$ imamo družino prerezov $a_{p,q}, p \in P, q \in [0,1]^k$, nad odprto okolico $U_2 \supset A_2$ družino prerezov $b_{p,q} = f_{(2),q}^p(0)$; za vsak $(p,q) \in P \times [0,1]^k$ imamo tri holomorfne homotopije:

- holomorfno homotopijo prerezov $f_{p,q,(0,2),t}$, definiranih nad $U_0 \cap U_2$, ki povezuje prereza $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$, $t \in [0,1]$; to homotopijo popisuje stranica trikotnika T, določena z ogliščema $(0,0)$ in $(0,1)$,

- holomorfno homotopijo prerezov $f_{p,q,(1,2),t}$, definiranih nad $U_1 \cap U_2$, ki povezuje prereza $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$, $t \in [0,1]$; to je homotopija, ki jo popisuje stranica T, določena z ogliščema $(1,0)$ in $(0,1)$;

- holomorfno homotopijo prerezov $f_{p,q,(0,1,2),s}$, $s \in T$, definiranih nad $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ ki povezuje homotopiji $f_{p,q,(0,1),t}$ in $f_{p,q,(1,2),t}$ in miruje za $s_2 = 0$, ker imamo nad spodnjo stranico trikotnika konstanten kompleks in miruje za $s_2 = 1$, ker je to le točka.

Naj bo $S = [0,1]^2$ in $r : S \times [0,1] \to S$ krepka deformacijska retrakcija S na T v vodoravni smeri. Reparametrizirajmo družino $f_{p,q,(0,1,2),s}$, $s \in T$ s predpisom $f_{p,q,(0,1,2),s} := f_{p,q,(0,1,2),r(s)}$, $s = (s_1, s_2) \in S$. Definirajmo simplicialni kompleks $K^1 := K(A_0 \cap A_1, A_1 \cap A_2)$ in sestavimo zgornje tri homotopije v $(k+1)$ prizmo F_*^p nad K^1 na naslednji način:

- prerezi $a_{p,q}$ so na spodnji stranici S, $(s_2 = 0)$

- homotopija $f_{p,q,(0,2),t}$ je na levi navpični stranici,

- homotopija $f_{p,q,(1,2),t}$ je na desni navpični stranici,

- na zgornji vodoravni stranici imamo konstantno homotopijo, ki jo določa prerez $b_{p,q}$, $(s_2 = 1)$

- v notranjosti kvadrata imamo homotopijo $f_{p,q,(0,1,2),s}$.

Za vsak $(p, q, s_2) \in P \times [0,1]^k \times [0,1]$ zgornje homotopije definirajo holomorfni kompleks F^p_{*,q,s_2} na naslednji način:

$$\begin{aligned} F^p_{(0),q,s_2}(0) &= f^p_{(0,2),q}(r(0,s_2)), \\ F^p_{(0,1),q,s_2}(s_1) &= f^p_{(0,1,2),q}(r(s_1,s_2)), \\ F^p_{(1),q,s_2}(0) &= f^p_{(1,2),q}(r(1,s_2)) \end{aligned}$$

Lica $(0), (0,1), (1)$ so lica kompleksa K^1, torej so prerezi $F^p_{(0),q,s_2}(0)$ definirani na $U_0 \cap U_2$, prerezi $F^p_{(0,1),q,s_2}(s_1)$ definirani na $(U_0 \cap U_2) \cap (U_1 \cap U_2)$ in prerezi $F^p_{(1),q,s_2}(0)$ definirani na $U_1 \cap U_2$. Lica $(0,2), (1,2), (0,1,2)$ so lica kompleksa $K(A_0, A_1, A_2)$.

Za vsak fiksen nabor p, q, s_2 želimo prerez $f_{p,q,(1,2),s_2}$ (ki mu ustreza $F^p_{(1),q,s_2}$) vzdolž homotopije $f_{p,q,(0,1,2),(s_1,s_2)}$, $s_1 \in [0,1]$ (ki ji ustreza $F^p_{(0,1),q,s_2}(s_1)$) pomakniti blizu prerezu $f_{p,q,(0,2),s_2}$ (temu ustreza $F^p_{(0),q,s_2}$) in ju potem zlepiti, da bomo dobili za rezultat prerez $\tilde{f}_{p,q,s_2}$, definiran nad $(U_0 \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_2)$. Pri vrednosti parametra $s_2 = 0$ imamo prerez $a_{p,q}$ definiran nad $U_0 \cup U_1$, za $s_2 = 1$ je prerez $b_{p,q}$ definiran nad U_2, nad presekom pa bomo dobili homotopijo $\tilde{f}_{p,q,s_2}$, $s_2 \in [0,1]$ med $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$. Taki družini prerezov pa znamo zlepiti (korak $n = 2$). Na kar moramo pri aproksimaciji in lepljenju paziti je, da se prerezi pri vrednostih $s_2 \in \{0,1\}$ ostanejo enaki, saj bi v nasprotnem primeru za rezultat dobili homotopijo, ki s prerezi $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$ nima nobene zveze. Aproksimacijo in lepljenje moramo narediti zvezno v parametrih p, q, s_2.

Ker je K^1 kompleks dolžine 2, lahko uporabimo primer $n = 2$ za $(k+1)$-prizme F^p in množico $Q = [0,1]^k \times \{0,1\}$ in za rezultat bomo dobili družino $(k+1)$-prizem, ki je po nivojih konstantna, kar pomeni, da imamo med prerezi $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$ homotopijo nad $(U_0 \cup U_1) \cap U_2$. Ker je $(A_0 \cup A_1, A_2)$ Cartanski par, lahko spet uporabimo korak $n = 2$ in zlepimo prereze $a_{p,q}$ in $b_{p,q}$.

<u>$n \to n+1$:</u> Naj bo

$$\begin{aligned} &K^{n+1} := K(A_0, \ldots, A_{n+1}), \\ &K^n := K(A_0, \ldots, A_n), \\ &K^n_1 := K(A_0 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}), \end{aligned}$$

$Q \subset [0,1]^k$ dana množica in f^p_* taka zvezna družina k-prizem nad K^{n+1}, da je kompleks $f^p_{*,q}$ konstanten, če je $q \in Q$ ali $p \in P_1$ in za vsak fiksen $p \in P$ prizme mirujejo na Y. Naj bo $P_1' \subset P_1$ taka odprta okolica za P_0, da je $\overline{P_1} \subset P_1$. Po indukcijski predpostavki s P_1' namesto P_0 obstaja pot $\tilde{f}^{p,t}_*$ med k-prizmo

$$\tilde{f}^p_* := \{f|_J,\ J \in K^n\}$$

in tako prizmo $\tilde{f}_*^{p,1}$, da je $\tilde{f}_{*,q}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $p \in P$, $q \in [0,1]^k$. Če je $q \in Q$ ali $p \in P_1'$, je $\tilde{f}_{*,q}^{p,t} = \tilde{f}_{*,q}^{p,0}$ za vsak $t \in [0,1]$. Zato smemo privzeti, da je že kompleks $\tilde{f}_*^p$ konstanten na $K^n \times \{q\}$ za vsak $p \in P$, $q \in [0,1]^k$. Definirajmo družino $(k+1)$-prizem

$$F_*^p := \{F_J^p : |J| \times [0,1]^k \times [0,1] \to \mathcal{O}(U_J, Z),\ J \in K_1^n\}$$

s predpisom

$$F_J^p(u,q,s) := f_{(J,n+1)}^p(r_n(u,s),q),\ (u,q,s) \in |J| \times [0,1]^k \times [0,1],\ J \in K_1^n.$$

Na tem koraku smo dolžino kompleksa zmanjšali za 1 in imamo tako en krajevni parameter manj, vendar smo zato morali dodati še en časovni parameter. Družina $(k+1)$-prizem F_*^p ustreza indukcijski predpostavki za množico $Q_1 := Q \times [0,1] \cup [0,1]^k \times \{0,1\}$. Zato obstaja pot $F_*^{p,t}$, $t \in [0,1]$, ki miruje za $q \in Q_1$ ali $p \in P_0$, tj. $F_{*,q}^{p,t} = F_{*,q}$, $q \in Q_1$, $F_*^{p,0} = F_*^p$ in je $F_{*,q}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $p \in P$, $q \in [0,1]^{k+1}$. To pa pomeni, da smemo privzeti, da so prizme f_*^p take, da je za vsak $p \in P$ družina preslikav

$$\{f_J^p|_{(|J| \cap \mathbf{R}^n \times \{s\}) \times \{t\}},\ J \in K^{n+1}\}$$

konstanten kompleks za vsaka $s \in [0,1]$, $t \in [0,1]^k$.

Take prizme pa predstavljajo holomorfne prizme f_*^p nad Cartanskim parom $(A_0 \cup \ldots \cup A_n, A_{n+1})$, zato po indukcijski predpostavki obstaja taka pot $f_*^{p,t}$ med $f_*^{p,0} = f_*^p$ in prizmo $f_*^{p,1}$, da je za vsak $t \in [0,1]$ $f_{*,q}^{p,t} = f_{*,q}^p$ za $q \in Q$ ali $p \in P_0$ in je $f_{*,q}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $p \in P$, $q \in [0,1]^k$. ♣

Posledica 1.8.1. *Naj bo X Steinova mnogoterost, Z kompleksna mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica, $h : Z \to X$ holomorfna submerzija, ki lokalno dopušča spray, prostori parametrov P_0, P_1, P in Cartanski niz $(A_0, \ldots, A_n)$ kot v trditvi 1.8.1., $K^n := K(A_0, \ldots, A_n)$ in $f_*^p = \{f_J,\ J \in K^n\}$ zvezna družina holomorfnih kompleksov nad K^n, ki za vsak p mirujejo na Y in so konstantni za vsak $p \in P_1$. Potem obstaja zvezna družina poti $f_*^{p,t}$, $t \in [0,1]$, $p \in P$, med $f_*^{p,0} = f_*^p$ in konstantnim kompleksom, ki je konstantna za vsak $p \in P_0$ in miruje na Y.*

Če so kompleksi $\tilde{f}_*^p := f_*^p|_{K(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ konstantni za vsak $p \in P$, lahko pot $f_*^{p,t}$ izberemo tako, da je $\tilde{f}_*^{p,t} := f_*^{p,t}|_{K(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ konstanten kompleks za vsak $t \in [0,1]$. Naj bo $\tilde{f}^p(t)$ zvezna družina prerezov nad okolico $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, ki jo definirajo konstantni kompleksi $\tilde{f}_*^{p,t}$. Potem lahko pot $f_*^{p,t}$, $t \in [0,1]$ izberemo tako, da je $\tilde{f}^p(t)$ poljubno blizu $\tilde{f}^p(0)$ nad $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$.

Dokaz. Prva trditev je direktna posledica trditve 1.8.1. za 0-prizme. Dokažimo še drugi del posledice.

Naj bo $K^{n-1} := K(A_0, \ldots, A_{n-1}), K^n := K(A_0, \ldots, A_n)$ in f_*^p zvezna družina takih holomorfnih kompleksov nad K^n, ki mirujejo vzdolž Y, da so holomorfni kompleksi $\tilde{f}_*^p := \{f_J,\ J \in K^{n-1}\}$ konstantni in so kompleksi f_*^p konstantni za vsak $p \in P_1$. Holomorfni kompleksi f_*^p določajo s predpisom

$$F_J^p(u,s) := f_{(J,n)}^p(r_{n-1}(u,s)),\ (u,s) \in |J| \times [0,1],\ J \in K_1^{n-1}$$

kjer je $K_1^{n-1} := K(A_0 \cap A_n, \ldots, A_{n-1} \cap A_n)$, zvezno družino holomorfnih 1-prizem F_*^p, ki so konstantne za $s \in \{0,1\}$ in mirujejo na Y. Po trditvi 1.8.1. za $Q := \{0,1\}$ obstaja taka pot $F_*^{p,t}$ med $F_*^{p,0} = F_*^p$ in prizmo $F_*^{p,1}$, ki za vsak $p \in P$ miruje na Y, da je $F_{*,s}^{p,t} = F_{*,s}^p$, če je $s \in \{0,1\}$ ali $p \in P_0$, in je $F_{*,s}^{p,1}$ konstantni kompleks za vsak $s \in [0,1], p \in P$. Zato smemo privzeti, da so kompleksi f_*^p taki, da je družina preslikav

$$\{f_J|_{(|J| \cap \mathbf{R}^{n-1} \times \{s\}) \times \{t\}},\ J \in K^n\}$$

konstanten kompleks za vsaka $s \in [0,1],\ t \in [0,1]^k$ in imamo za vsak $p \in P$ homotopijo med prerezom, definiranim nad okolico $A_0 \cup \ldots, \cup A_{n-1}$, ki ga določa konstantni kompleks $\tilde{f}^p$ in prerezom $f_{(n)}^p(0)$, ki je definiran na okolici A_n.

Take komplekse pa lahko (kot prej) razumemo kot holomorfne komplekse $\overline{f}_*^p$ nad kompleksom $K^1 := K(A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}, A_n)$. Zdaj pa imamo primer $n = 2$ iz trditve 1.8.1., saj je K^1 simplicialni kompleks dolžine 2. Po h-Rungejevem izreku (izrek 1.3.2.) in lemi o lepljenju (izrek 1.4.1.) obstaja taka pot $\overline{f}_*^{p,t}$ med $\overline{f}_*^p = \overline{f}_*^{p,0}$ in konstantnim kompleksom $\overline{f}_*^{p,1}$, da je $\overline{f}_{(0)}^{p,t}(0)$ na $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ tako blizu $\overline{f}_{(0)}^0(0)$, kot želimo in miruje na Y. ♣

Trditev 1.8.2. (Lema o lepljenju za zvezne prizme). *Naj bo X Steinova mnogoterost, Z kompleksna mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica, P kompakten Hausdorffov prostor, $P_0 \subset P$, $Q_1 \subset [0,1]^k$ dani množici, $(A_0, \ldots, A_n)$ Cartanski niz in f_*^p taka zvezna družina zveznih k-prizem, da je $f_{*,q}^p$ konstantni kompleks za vsak $q \in Q_1$, prizme $f_{*,q}^p$ so konstantne in holomorfne za $p \in P_1, q \in [0,1]^k$ in za vsak fiksen $p \in P$ prizma f_*^p miruje na Y. Potem obstaja taka zvezna družina poti $f_*^{p,t}$ med $f_*^{p,0} = f_*^p$ in prizmo $f_*^{p,1}$, ki miruje na Y, da je $f_{*,q}^{p,t} = f_{*,q}^p$ za $q \in Q_1$ ali $p \in P_1$ in je $f_{*,q}^{p,1}$ konstantni kompleks za vsak $q \in [0,1]^k$. Če je prerez $f_{(0)_q}^p(0)$ (ki je definiran na okolici množice A_0) holomorfen na okolici množice $A_0 \setminus int(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ za neka $p \in P$, $q \in [0,1]^l$, lahko pot $f_*^{p,t}$ izberemo tako, da bo tudi $f_{(0),q}^{p,t}(0)$ holomorfen na (mogoče manjši) okolici $A_0 \setminus int(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.*

Dokaz. Spet bomo trditev dokazali z indukcijo na n.

$n = 2:$ Če je $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, trditev očitno drži, zato privzemimo, da je $A_0 \cap A_1 \neq \emptyset$. Naj bo $f_*^p = \{f_{(0)}^p, f_{(1)}^p, f_{(0,1)}^p\}$ dana družina k-prizem in U_0, U_1 odprti okolici za A_0, A_1 iz definicije prizme nad $K(A_0, A_1)$. Ker je (A_0, A_1) Cartanski par, obstaja taka zvezna funkcija $\chi : U_0 \cup U_1 \to [0,1]$, da je $\chi = 0$ na okolici $U_0 \setminus U_1$ in $\chi = 1$ na $U_1 \setminus U_0$. Funkcijo χ lahko izberemo tako, da je $\chi^{-1}((0,1)) \cap (A_0 \cup A_1) \subset A_0 \cap A_1$. Za vsak $q \in [0,1]^k, p \in P$ definirajmo

$$F_q^p(x) := \begin{cases} f_{(0),q}^p(0)(x), & x \in U_0 \setminus U_1, \\ f_{(0,1),q}^p(\chi(x))(x), & x \in U_0 \cap U_1, \\ f_{(1),q}^p(1)(x), & x \in U_1 \setminus U_0. \end{cases}$$

Za vsak $(p,q) \in P \times Q_1 \cup P_1 \times [0,1]^k$ označimo z f_q^p prerez, ki ga določa konstantni kompleks $f_{*,q}^p$. Očitno je $F_q^p = f_q^p$ za vsak $q \in Q_1$ ali $p \in P_1$, saj so bili kompleksi konstantni. Takoj opazimo, da se F_q^p na Y ujema z vsemi homotopijami, saj so te na Y mirovale in da je prerez F_q^p holomorfen na okolici $A_0 \setminus A_1$, če je bil tak tudi prerez f_q^p. Družina zveznih prerezov F_q^p definira tako zvezno družino zveznih k-prizem F_*^p, da je za vsak $q \in [0,1]^k, p \in P$ kompleks $F_{*,q}^p$ konstanten. Za vsak $t \in [0,1]$ je s predpisom

$$f_{(0),q}^{p,t}(0)(x) := \begin{cases} f_{(0),q}^p(0)(x), & x \in U_0 \setminus U_1, \\ f_{(0,1),q}^p(t\chi(x))(x), & x \in U_0 \cap U_1, \end{cases}$$

$$f_{(0,1),q}^{p,t}(u)(x) := f_{(0,1),q}^p((1-t)u + t\chi(x))(x), \quad x \in U_0 \cap U_1$$

$$f_{(1),q}^{p,t}(0)(x) := \begin{cases} f_{(1),q}^p(0)(x), & x \in U_1 \setminus U_0, \\ f_{(0,1),q}^p(1 - t(1-\chi(x)))(x), & x \in U_0 \cap U_1, \end{cases}$$

definirana pot $f_*^{p,t}$ med prizmo $f_*^{p,0} = f_*^p$ in prizmo $f_*^{p,1} = F_*^p$, ki miruje na Y in je konstantna, če je $q \in Q_1$ ali $p \in P_1$.

$n \to n+1$: Naj bo

$$\begin{aligned} K^{n+1} &:= K(A_0, \ldots, A_{n+1}), \\ K^n &:= K(A_0, \ldots, A_n), \\ K_1^n &:= K(A_0 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}), \end{aligned}$$

$Q_1 \subset [0,1]^k$, $P_1 \subset P$ dani množici in f_*^p taka zvezna družina zveznih k-prizem nad K^{n+1}, da je $f_{*,q}^p$ konstantni kompleks za vsak $q \in Q_1$ ali $p \in P_1$ in za vsak fiksen p prizme f_*^p mirujejo vzdolž Y. Po indukcijski predpostavki smemo privzeti, da je $f_{*,q}^p|_{K^n}$ konstantni kompleks za vsak $q \in [0,1]^k, p \in P$. S predpisom

$$F_J^p(u,q,s) := f_{(J,n+1)}^p(r_n(u,s),q), \ (u,q,s) \in |J| \times [0,1]^k \times [0,1], \ J \in K_1^n$$

je definirana zvezna družina $(k+1)$-prizem F_*^p, ki ustreza indukcijski predpostavki za množico $Q_1' := Q_1 \times [0,1] \cup [0,1]^k \times \{0,1\}$ namesto Q_1. Zato obstaja taka zvezna družina poti $F_*^{p,t}$, ki miruje na Y, da je $F_{*,q}^{p,t} = F_{*,q}^p$, $q \in Q_1'$ ali $p \in P_1$, $F_*^p = F_*^{p,0}$ in je $F_{*,q}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $q \in [0,1]^{k+1}, p \in P$. To pa pomeni, da smemo privzeti, da je da je prizma f_*^p taka, da je družina preslikav

$$\{f_J^p|_{(|J| \cap \mathbf{R}^{n-1} \times \{s\}) \times \{t\}},\ J \in K^n\}$$

konstanten kompleks za vsak $s \in [0,1]$, $t \in [0,1]^k, p \in P$. Kot prej to pomeni zvezno družino zveznih k-prizem $f_*^p, p \in P$, nad K^1, kjer je $K^1 := K(A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}, A_n)$, zato po indukcijski predpostavki (oz. primeru $n = 2$) obstaja taka zvezna družina poti $f_*^{p,t}$ med $f_*^{p,0} = f_*^p$ in prizmo $f_*^{p,1}$, ki miruje na Y, da je $f_{*,q}^{p,t} = f_{*,q}^p$ za $q \in Q$ ali $p \in P_1$ in je $f_{*,q}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $q \in [0,1]^k, p \in P$. ♣

Posledica 1.8.2. *Naj bosta $Q_1 \subset [0,1]^k$ in $P_1 \subset P$ dani množici. Če je k-prizma f_*^p nad kompleksom $K = K(A_0, \ldots, A_n)$ taka, da je zožitev $f_{*,q}^p|_{K(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ konstanten kompleks za vsak $q \in Q_1$ ali $p \in P_1$, je pot $f_*^{p,t}$ iz trditve 1.8.2. taka, da je*

$$f_{J,q}^{p,t}(u)(x) = f_{J,q}^p(u)(x),\ x \in A^J \setminus intA_n,\ J \in K,\ q \in Q_1 \ ali\ p \in P_1.$$

Recimo, da je dano naraščajoče zaporedje kompleksov $\{f_*^n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ in da kompleks f_*^n po poti zapeljemo v konstanten kompleks $\tilde{f}_*^n$. Naslednja lema opisuje, kako z reparametriziranjem zvezno popravimo zaporedje kompleksov $\{f_*^k\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ v zaporedje $\{\underline{f}_*^k\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, $\tilde{f}_*^n = \underline{f}_*^n$, da postane naraščajoče.

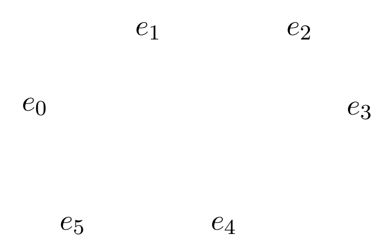
Lema 1.8.1. *Naj bodo X, Y, Z in P kot doslej in $\{f_*^{p,k}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, $p \in P$ družina zaporedij (holomorfnih ali zveznih) kompleksov ($f_*^{p,k}$ je kompleks nad $K(A_0, \ldots, A_k)$), ki za neko naravno število $n \in \mathbf{N}$ zadošča pogojema:*

- kompleksi $f_*^{p,k}$ so konstantni za $k \leq n-1$ in

- zaporedja $\{f_*^{p,k}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, $p \in P$ so naraščajoča.

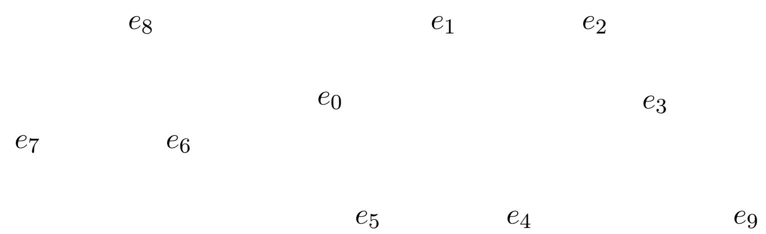
Naj bodo h_*^p take 1-prizme nad $K(A_0, \ldots, A_n)$, da je $h_{*,0}^p = f_*^{p,n}$ in $h_{*,1}^p$ konstanten kompleks. Potem obstaja taka družina naraščajočih zaporedij 1-prizem $\{H_*^{p,k}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, kjer so $H_*^{p,k}$ prizme nad $K(A_0, \ldots, A_k)$, da je $H_{*,0}^{p,k} = f_*^{p,k}$ in $H_{*,1}^{p,k}|_{K(A_0,\ldots,A_n)} = h_{*,1}^p$, $k \geq n$. Če za nek $p \in P$ kompleksi $f_*^{p,k}, k \in \mathbf{N}$ in prizma h_*^p mirujejo vzdolž Y (oz. so konstantni) tudi 1-prizme $H_*^{p,k}$ mirujejo na Y (oz. so konstantne).

Dokaz. Naj bo m tako najmanjše naravno število, da je $A_{m_0} \cap (A_0 \cup \ldots \cup A_n) = \emptyset$ za vsak $m_0 \geq m$. Množica $|K(A_0, \ldots, A_m)|$ leži v $\mathbf{R}^m$, množico $|K(A_0, \ldots, A_n)| \subset \mathbf{R}^n$ pa bomo identificirali z $|K(A_0, \ldots, A_n)| \times \{0\}^{m-n} \subset \mathbf{R}^m$.



Sličica 2: telo kompleksa $|K(A_0, \ldots, A_n)|$ za $n = 5$.

Na zgornji sliki je telo takega kompleksa $K(A_0, \ldots, A_n)$, da je $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ za vsak nabor i, j, k, $0 \leq i < j < k \leq n$, na spodnji pa primer kompkeska $K(A_0, \ldots A_m)$ za zgoraj izbrani m (v tem primeru $m = 9$), kjer so edine tri množice z nepraznim presekom A_3, A_4 in A_9.



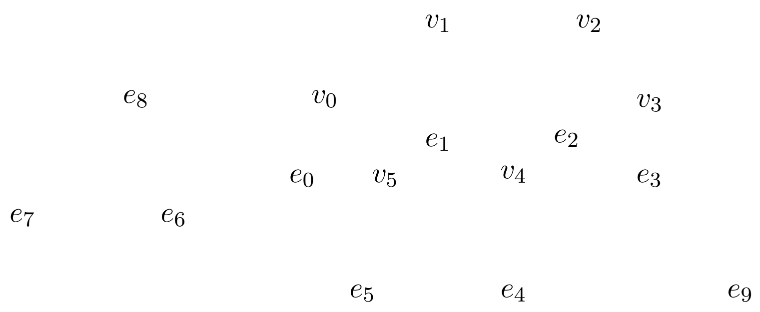
Sličica 3: telo kompleksa $|K(A_0, \ldots, A_m)|$ za $m = 9$.

Definirajmo množico M s predpisom

$$M := |K(A_0, \ldots, A_m)| \times \{0\} \cup |K(A_0, \ldots, A_n)| \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^{m+1}.$$

Množica M pove, kako smo prizme h_*^p 'nalepili' na komplekse $f_*^{p,k}$, $k \geq n$. Definirajmo točke $v_0, \ldots, v_m$

$$v_j := \begin{cases} e_j + e_{m+1}, & j \leq n, \\ e_j, & j > n. \end{cases}$$



Sličica 4: množica M.

Vsakemu licu $J = (i_0, \ldots, i_k) \in K(A_0, \ldots, A_m)$, $i_0 < \ldots i_l \leq n < \ldots < i_k$ pridružimo lice $J^n = (i_0, \ldots, i_l) \in K(A_0, \ldots, A_n)$ in množico točk $J_c := \{e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}, v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}$. Množica $|J_c|$ naj bo konveksna ovojnica množice J_c. Vsak parameter $u \in |J|$ lahko (na en sam način) zapišemo kot $u = \sum_{i=1}^m u_j e_j$. Množica M je retrakt množice

$$R := \{|J_c|,\ J \in K(A_0, \ldots, A_m)\}$$

in retrakcijo r lahko izberemo tako, da zadošča pogoju

$$r(|J_c|) = |J| \cup (|J^n| \times [0,1])$$

za vsako lice $J \in K(A_0, \ldots, A_m)$.

Sličica 5: množica R.

Naj bo $s(u,t) := r(tv_0(1 - \sum_{j=1}^m u_j) + \sum_{j=1}^m (1-t)u_j e_j + tu_j v_j)$, kjer je r omenjena retrakcija. S pomočjo preslikave s lahko definiramo 1-prizmo $H_*^{p,m}$ nad $K(A_0, \ldots, A_m)$:

$$H_J^{p,m}(u,t) := \begin{cases} f_J^{p,m}\left(s(u,t)\right), & s(u,t) \in \mathbf{R}^m \times \{0\}, \\ h_{J^n}^p\left(s(u,t)\right) & \text{sicer}\ , \end{cases}$$

za vsak $u \in |J|$, $J \in K(A_0, \ldots, A_m)$. Brez težav se prepričamo, da je $H_J^{p,m}(u,0) = f_J^{p,m}(u)$, $H_{*,1}^{p,m}|_{K(A_0,\ldots,A_n)} = h_{*,1}^p$ in $H_J^{p,m}(u,t) = H_J^{p,m}(u,0)$ za vsak $u \in |J|$ in vsako lice $J \in K(A_0, \ldots, \ldots, A_m)$, ki ne seka $K(A_0, \ldots, A_n)$. Naj bo $H_*^{p,k} := H_*^{p,m}|_{K(A_0,\ldots,A_k)}$ za $k \leq m$. Za $k > m$ definirajmo 1-prizme s predpisom

$$H_J^{k,p}(u,t) := \begin{cases} H_J^{p,m}(u,t), & u \in |J|,\ J \in K(A_0, \ldots, A_m), \\ f_J^{p,k}(u) & u \in |J|,\ J \in K(A_0, \ldots, A_k) \setminus K(A_0, \ldots, A_m). \end{cases}$$

Očitno je zaporedje prizem $\{H_*^k\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ naraščajoče. ♣

Posledica 1.8.3. *Naj bosta $Q \subset [0,1]^l$ in $P_1 \subset P$ dani množici, $\{f_*^{k,p}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ pa družina zaporedij (holomorfnih ali zveznih) l-prizem ($f_*^{p,k}$ je prizma nad $K(A_0, \ldots, A_k)$), ki za neko naravno število $n \in \mathbf{N}$ zadošča pogojem:*

- *kompleksi $f_{*,q}^{p,k}$ so konstantni za $q \in Q$,*

- *prizme $f_*^{p,k}$ so konstantne za $p \in P_1$,*

- *kompleksi $f_{*,q}^{p,k}$ so konstantni za $q \in [0,1]^l$ in $k \leq n-1$,*

- *za vsak $p \in P$ prizme mirujejo na Y in*

- *za vsak $p \in P$ je zaporedje $\{f_*^{p,k}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ naraščajoče.*

Naj bo h_*^p taka družina $(l+1)$-prizem nad $K(A_0, \ldots, A_n)$, ki za vsak fiksen $p \in P$ mirujejo vzdolž Y, da je $h_{*,(q,0)}^p = f_{*,q}^{p,n}$, za vsak $q \in [0,1]^l$ je $h_{*,(q,1)}^p$ konstanten kompleks, za vsak $p \in P_1$ je prizma h_*^p konstantna in velja $h_{*,(q,t)}^p = h_{*,(q,0)}^p$ za vsak $q \in Q$. Potem obstaja družina naraščajočih zaporedij $(l+1)$-prizem $\{H_*^{p,k}\}_{k \in \mathbf{N}_0}$, kjer je $H_*^{p,k}$ prizma nad $K(A_0, \ldots, A_k)$, da je $H_{*,(q,0)}^{p,k} = f_{*,q}^{p,k}$, $H_{*,(q,1)}^{p,k}|_{K(A_0,\ldots,A_n)} = h_{*,(q,1)}^p$ za vsak $q \in [0,1]^l$, $k \geq n$ in $H_{*,(q,t)}^{p,k} = H_{*,(q,0)}^{p,k}$ za vsak $t \in [0,1]$, $q \in Q$ ali $p \in P_1$.

1.9 Dokaz izreka 1.1.2.

Najprej bomo dokazali izrek za primer, ko sta X in Z mnogoterosti in $Y \subset X$ analitična podmnožica. Ponovimo predpostavke: P je kompakten Hausdorffov prostor, $P_0 \subset P$ je zaprta množica in $P_1 \subset P$ njena odprta okolica, $K \subset X$ holomorfno konveksna kompaktna množica, $U \subset X$ njena odprta okolica, $a_p : X \to Z, p \in P$, zvezna družina zveznih prerezov, ki so holomorfni na U, za vsak $p \in P$ so prerezi $a_p|_Y$ holomorfni in za vsak $p \in P_1$ so prerezi a_p holomorfni na X. Konstruirali smo že tako Cartansko pokritje $\mathcal{A} =$

$\{A_0, A_1, \dots\}$ mnogoterosti X, da je $K \subset A_0 \setminus (A_1 \cup A_1 \cup \dots)$ in začetno družino razdrobili v družino majhnih holomorfnih prerezov (začetna družina holomorfnih kompleksov), ki jih z začetnimi prerezi povezuje zvezna homotopija, ki miruje na Y (začetna družina zveznih prizem). Dokazati moramo dve stvari: da družino majhnih holomorfnih prerezov lahko zlepimo v družino globalnih holomorfnih prerezov in da lahko poiščemo homotopijo med družino začetnih zveznih prerezov in dobljeno družino globalnih prerezov, ki bo mirovala na Y in bo aproksimirala začetno družino nad K. Naši začetni podatki so družina naraščajočih zaporedij holomorfnih kompleksov

$$f_*^{p,k} = \{f_J^{p,k} : |J| \to \mathcal{O}(U_J, Z),\ J \in K(A_0, \dots, A_k)\},\ p \in P,$$

ki za vsak fiksen $p \in P$ mirujejo na Y in so konstantni za vsak $p \in P_1$ in tako naraščajoče zaporedje 1-prizem

$$g_*^{p,k} = \{g_J^{p,k} : |J| \times [0,1] \to \mathcal{O}(U_J, Z),\ J \in K(A_0, \dots, A_k)\},$$

ki za vsak fiksen $p \in P$ mirujejo na Y in so konstantne za $p \in P_1$, da je za vsak $p \in P$, $k \in \mathbf{N}$ $g_{*,0}^{p,k}$ konstantni kompleks, ki ga določajo prerezi a_p in je $g_{*,1}^{p,k} = f_*^{p,k}$. Izberimo si $\varepsilon > 0$ in naj bo d polna metrika na Z. Konstruirali bomo zvezno družino globalnih holomorfihn prerezov F^p (oziroma zvezno družino naraščajočih zaporedij konstantnih holomorfnih kompleksov $\{F_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$), ki zadošča $d(F^p(x), a_p(x)) < \varepsilon$ za $x \in K$ in $F^p|_Y = a_p|_Y$ in naraščajoče zaporedje 1-prizem $\{h_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$, $h_{*,0}^{p,n} = f_*^{p,n}$, $h_{*,1}^{p,n} = F_*^{p,n}$, ki mirujejo na Y in so konstantne za $p \in P_1$. Dovolili smo si majhno nedoslednost. Odprto okolico P_1 na vsakem koraku malce zmanjšamo, kar ne povzroča nobenih težav, saj želimo fiksirane homotopije le za parametre $p \in P_0$.

Prizme $h_*^{p,n}$ bomo nazadnje nalepili na ustrezne prizme $g_*^{p,n}$ in tako dobljeno družino naraščajočih zaporedij prizem $G_*^{p,n,0}$ s homotopijami pomaknili v naraščajoče zaporedje konstantnih 1-prizem $G_*^{p,n}$, $G_{*,i}^{p,n} = G_{*,i}^{p,n,0}$ za $i = 0, 1$. Ker je $G_*^{p,n}$ naraščajoče zaporedje konstantnih 1-prizem, določa homotopijo G^p med a_p in F_p, ki miruje na Y in aproksimira prerez a_p nad K.

Zaporedja $\{F_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ in $\{h_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ bomo poiskali kot limito $F_*^{p,n} := \lim_{k\to\infty} F_*^{p,n,k}$, $h_*^{p,n} := \lim_{k\to\infty} h_*^{p,n,k}$. Kako do takih dvojnih zaporedij pridemo, pove naslednja

Lema 1.9.1. *Obstaja zvezna družina holomorfnih kompleksov*

$$F_*^{p,n,k} = \{F_J^{p,n,k},\ |J| \to \mathcal{O}(U_J, Z), J \in K(A_0, \dots, A_n)\},\ n, k \in \mathbf{N}_0,\ p \in P,$$

ki izpolnjuje pogoje

(a) za vsak $p \in P$ je kompleks $F_*^{p,n,k}$ konstanten za vsak $n \leq k$ in zato določa holomorfen prerez $F^{p,k,k}$ na okolici $A_0 \cup \ldots A_k$ za vsak $k \in \mathbf{N}$,

(b) za vsak $p \in P$ in $k \in \mathbf{N}$ je zaporedje $\{F_*^{p,n,k}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ naraščajoče

(c) $d(F^{p,n,k}(x), F^{p,n,k-1}(x)) < \varepsilon 2^{-(k-1)}$ za vsak $x \in A_0 \cup \ldots \cup A_n$, $n < k$,

(d) za vsak $p \in P_1$ so kompleksi $F_*^{p,n,k}$ konstantni,

(e) za vsak $p \in P$ kompleksi $F_*^{p,n,k}$ mirujejo na Y,

in družina holomorfnih 1-prizem

$$h_*^{p,n,k} = \{h_J^{p,n,k} : |J| \times [0, 1 - 2^{-k}] \to \mathcal{O}(U_J, Z), J \in K(A_0, \ldots, A_n)\},\ n, k \in \mathbf{N}_0,\ p \in P$$

ki izpolnjuje pogoje

(1) $h_{*,0}^{p,n,k} = f_*^{p,n}$, $n \in \mathbf{N}_0$, $p \in P$,

(2) *za vsak $p \in P$ in $k \in \mathbf{N}_0$ je zaporedje prizem $\{h_*^{p,n,k}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ naraščajoče,*

(3) *za vsak $s \in [1 - 2^{-(k-1)}, 1 - 2^{-k}]$ je $h_{*,s}^{p,n,k}$ konstanten kompleks, ki ga kar identificiramo z ustreznim holomorfnim prerezom $h_s^{p,n,k}$, definiranim nad okolico $A_0 \cup \ldots \cup A_n$,*

(4) *$d(h_s^{p,n,k}(x), h_{1-2^{-(k-1)}}^{p,n,k}(x)) < \varepsilon 2^{-k}$ za $x \in A_0 \cup \ldots \cup A_n$, $k \leq n$ $(k \geq 1)$ in $s \in [1 - 2^{-(k-1)}, 1 - 2^{-k}]$,*

(5) *$h_{*,s}^{p,n,k} = h_{*,s}^{p,n,k-1}$ za $s \in [0, 1 - 2^{-(k-1)}]$, $k, n \in \mathbf{N}_0$, $k \geq 1$, $p \in P$,*

(6) $h_{*,1-2^{-k}}^{p,n,k} = F_*^{p,n,k}$,

(7) *za vsak $p \in P$ prizme $h_*^{p,n,k}$ mirujejo na Y in*

(8) *za vsak $p \in P_1$ in $k, n \in \mathbf{N}$ so prizme $h_*^{p,n,k}$ konstantne.*

Opomba. Pogoj (8) pomeni, da za vsak $p \in P_1$ družina $h_*^{p,n,k}$ določa globalni holomorfni prerez, ki je enak začetnemu prerezu a_p.

Dokaz leme 1.9.1. Spet indukcija na k. Kar bomo v tem dokazu počeli, je reparametrizacija obstoječih homotopij in lepljenje prizem nanje, ki pa je neodvisno od parametra $p \in P$. To pomeni: če so za fiksen $p \in P$ vsi kompleksi prizme mirovali na Y ali pa so bili konstantni, bo to veljalo tudi za nove komplekse in prizme pri istem p.
$k = 0$: Definiramo $h_*^{p,n,0} := f_*^{p,n}$ in $F_*^{p,n,0} = f_*^{p,n}$. Očitno je zahtevam $(a) - (d)$ in $(1) - (8)$ zadoščeno.
$k \to k+1$: Na tem koraku že imamo zaporedja kompleksov $\{F_*^{p,n,m}\}_{n \in \mathbf{N}}$ za $m = 0, \ldots, k$, ki izpolnjujejo pogoje $(a) - (d)$ in zaporedja prizem $\{h_*^{p,n,m}\}_{n \in \mathbf{N}}$ za $m = 0, \ldots, k$, ki izpolnjujejo zahteve $(1) - (8)$. Po indukcijski predpostavki je kompleks $F_*^{p,k,k}$ konstanten in

zato določa holomorfni prerez $F^{p,k,k}$ na okolici $A_0 \cup \ldots \cup A_k$. Zato po posledici 1.8.1. obstaja taka družina poti $F_*^{p,t}$, $p \in P, t \in [0,1]$ med kompleksom $F_*^{p,k+1,k}$ in konstantnim kompleksom $F_*^{p,1}$ nad $K(A_0, \ldots, A_{k+1})$, ki za vsak fiksen $p \in P$ miruje na Y in je konstantna za vsak $p \in P_1$ (P_1 je na tem mestu potrebno zmanjšati), da je $F_*^{p,t}|_{K(A_0,\ldots,A_k)}$ konstantni kompleks in je

$$d(F^{p,t}(x), F^{p,k,k}(x)) < \varepsilon 2^{-k}$$

za vsak $x \in A_0 \cup \ldots \cup A_k$; s $F^{p,t}$ smo označili prereze nad $A_0 \cup \ldots \cup A_k$, ki jih določajo konstantni kompleksi $F_*^{p,t}|_{K(A_0,\ldots,A_k)}$. Naj bo h_*^p družina 1-prizem nad $K(A_0, \ldots, A_{k+1})$, ki jo določa družina poti $F_*^{p,t}$. Po lemi 1.8.1. obstaja tako naraščajoče zaporedje prizem $\{H_*^{p,n}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$, da je $H_{*,0}^{p,n} = F_*^{p,n,k}$, $n \in \mathbf{N}_0$, $H_*^{p,k+1} = h_*^p$, za vsak $p \in P$ prizme mirujejo na Y in so za vsak $p \in P_1$ konstantne. Ker je zaporedje naraščajoče, je

$$H_*^{p,n} = H_*^{p,k+1}|_{K(A_0,\ldots,A_n)}$$

za $n \leq k+1$ in vsak $p \in P$. Definirajmo

$$F_*^{p,n,k+1} := H_{*,1}^{p,n}.$$

Popraviti moramo še prizme $h_*^{p,n,k}, k, n \in \mathbf{N}$, $p \in P$. To storimo tako, da nanje nalepimo prizme $H_*^{p,n}$:

$$h_{*,s}^{p,n,k+1} := \begin{cases} h_{*,s}^{p,n,k}, & s \in [0, 1-2^{-k}], \\ H_{*,(s-1+2^{-k})2^{k+1}}^{p,n}, & s \in [1-2^{-k}, 1-2^{-(k+1)}]. \end{cases}$$

Brez težav se prepričamo, da novi kompleksi in prizme izpolnjujejo dane pogoje. ♣

Definirajmo

$$F_*^{p,n} := \lim_{k \to \infty} F_*^{p,n,k}.$$

Zaradi pogoja (c) ta limita obstaja in zaradi pogoja (b) je $F_*^{p,n}$ konstanten kompleks za vsak $n \in \mathbf{N}_0$. Iz pogoja (a) sledi, da je zaporedje kompleksov $\{F_*^{p,n}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ naraščajoče, zato definira globalne holomorfne prereze F_*^p, ki zaradi pogoja (c) izpolnjujejo zahtevo $d(F^p(x), a_p(x)) < 2\varepsilon$ za vsak $x \in A_0$. Zaradi pogoja (d) za vsak $p \in P$ velja $F^p|_Y = a_p|_Y$. Podobno je s prizmami $h_*^{p,n,k}$. Definirajmo

$$h_*^{p,n} := \lim_{k \to \infty} h_*^{p,n,k}.$$

Limitne prizme

$$h_*^{p,n} = \{h_J^{p,n} : |J| \times [0,1) \to \mathcal{O}(U^J, Z)\}$$

sestavljajo naraščajoče zaporedje. Če dodatno definiramo

$$h_{*,1}^{p,n} := F_*^{p,n},$$

dobimo naraščajoče zaporedje 1-prizem $\{h_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$, ki izpolnjuje pogoja $h_{*,0}^{p,n} = f_*^{p,n}$ in $h_{*,1}^{p,n} = F_*^{p,n}$ in je $d(h_J^{p,n}(u,t)(x), a_p(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in A_0 \cap A_J$, $(u,t) \in |J| \times [0,1]$, $J \in K(A_0,\ldots,A_n)$, $n \in \mathbf{N}_0$ in $p \in P$. Zaradi pogoja (7) za vsak $p \in P, n \in \mathbf{N}$ prizme $h_*^{p,n}$ mirujejo na Y in zaradi pogoja (8) so za vsak $p \in P_1$, $n \in \mathbf{N}$ konstantne. Zlepimo prizme $g_*^{p,n}$ in $h_*^{p,n}$ s predpisom

$$G_{*,s}^{p,n,0} := \begin{cases} g_{*,2s}^{p,n}, & s \in [0,1/2], \\ h_{*,2s-1}^{p,n}, & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Za vsak $n \in \mathbf{N}_0$ je prerez $G_J^{p,n,0}(u,t)$ holomorfen na okolici $(A_0 \setminus int(A_1 \cup \ldots \cup A_n)) \cap A_J$ in zadošča $d(G_J^{p,n,0}(u,t)(x), a_p(x)) < 2\varepsilon$, $x \in K \cap A^J$ za vsak $(u,t) \in |J| \times [0,1]$, $J \in K(A_0,\ldots,A_n)$ in $p \in P$.

Kar nam je še ostalo, je popravljanje tega naraščajočega zaporedja prizem do 'po parametrih konstantnega' zaporedja prizem, kar pomeni, da bomo homotopije, skrite v prizmah $G_*^{p,n,0}$ po korakih zlepili v homotopije, definirane na vsem X. Spet nas čaka podobna induktivna konstrukcija kot prej, ko smo popravljali komplekse $F_*^{p,n,0}$, le da nam na tem mestu ni treba paziti na homotopije, ki nastajajo pri popravljanju (na 2-prizme, ki bodo povezale $G_*^{p,n,k}$ z $G_*^{p,n,k+1}$, podobno, kot so v prejšnjem koraku 1-prizme $h_*^{p,n,k}$ povezovale komplekse $F_*^{p,n,k}$ in $F_*^{p,n,k+1}$).

Lema 1.9.2. *Obstaja taka zvezna družina zaporedij zveznih 1-prizem $\{G_*^{p,n,k}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$, $k \in \mathbf{N}_0$, $p \in P$, kjer so $G_*^{p,n,k}$ prizme nad $K(A_0,\ldots,A_n)$, da velja:*

(1) *za vsak $k \in \mathbf{N}_0$, $p \in P$ je zaporedje $\{G_*^{p,n,k}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ naraščajoče,*

(2) *za $n \leq k$ je $G_{*,t}^{p,n,k}$ konstanten kompleks za vsak $t \in [0,1]$, $p \in P$*

(3) $G_J^{p,n,k}(u,t)(x) = G_J^{p,n,k-1}(u,t)(x)$ *za vsak $u \in |J|$, $x \in (A^J \setminus A_k)$, $J \in K(A_0,\ldots,A_k)$,*

(4) $G_{*,t}^{p,n,k} = G_{*,t}^{p,n,0}$ *za $t \in \{0,1\}$, $k,n \in \mathbf{N}_0$ in $p \in P$*

(5) *za vsak fiksen $p \in P_1$ so 1-prizme $G_*^{p,n,k}$ konstantne in*

(6) *1-prizme $G_*^{p,n,k}$ mirujejo na Y za vsak fiksen $p \in P$.*

Dokaz leme. Indukcija na k.
$\underline{k=0:}$ Ni potrebno ničesar dokazati, saj začetna zaporedja $\{G_*^{p,n,0}\}_{n\in\mathbf{N}}$ ustrezajo (1), (4), (5) in (6).
$\underline{k \to k+1:}$ Po trditvi 1.8.2. obstaja pot $G_*^{p,s}$, $s \in [0,1]$, $G_{*,t}^{p,s} = G_{*,t}^{p,k+1,k}$, $t \in \{0,1\}$, med $G_*^{p,k+1,k}$ in tako prizmo $G_*^{p,1}$, da je $G_{*,t}^{p,1}$ konstanten kompleks za vsak $t \in [0,1]$ in je $G_J^{p,s}(u,t)(x) = G_J^{p,k+1,k}(u,t)(x)$ za vsak $x \in (A_0 \cup \ldots \cup A_k) \setminus intA_{k+1}$. Ta pot definira

2-prizmo h_*^p. Po posledici 1.8.3. obstaja tako naraščajoče zaporedje 2-prizem $\{H_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$, da je $H_{*,0}^{p,n} = G_*^{p,n,k}$ za $n \in \mathbf{N}_0$ in je $H_*^{p,k+1} = h_*^p$. Definirajmo

$$G_*^{p,n,k+1} := H_{*,1}^{p,n}.$$

Novo zaporedje očitno ustreza vsem pogojem. ♣

Zdaj bo pa zares kmalu konec. Zaradi pogoja (3) za vsak $n \in \mathbf{N}_0$ obstaja

$$G_*^{p,n} := \lim_{k\to\infty} G_*^{p,n,k}.$$

Zaradi pogoja (1) je zaporedje $\{G_*^{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ naraščajoče, zaradi pogoja (2) je $G_{*,t}^{p,n}$ konstanten kompleks za vsak $t \in [0,1]$, zato določa družino globalnih prerezov $G^{p,t}$, $t \in [0,1]$. Zaradi pogoja (4) je $G^{p,0} = a_p$ in $G^{p,1} = F^p$ za vsak $p \in P$. Po (3) je vsak prerez $G^{p,t}$, $t \in [0,1]$ na okolici $A_0 \setminus int(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$ holomorfen in zadošča $d(G^{p,t}(x), a_p(x)) < 2\varepsilon$ za vsak $x \in K \subset A_0 \setminus int(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$. Zaradi pogoja (5) je homotopija $G^{p,t}$ konstantna za $p \in P_0$ in po (6) za vsak fiksen $p \in P$ homotopija $G^{p,t}$ miruje na Y. ♣

1.10 Dokaz izreka 1.1.2. za splošni primer

Privzemimo, da je X Steinov prostor. Za dokaz h-principa v primeru mnogoterosti smo reševali $\overline{\partial}$-enačbe na relativno kompaktnih strogo psevdokonveksnih podmnožicah v X z ocenami v sup normi, kar na singularnih prostorih zaenkrat še ni znano.

Najbolj naravna ideja je, da poskusimo prevesti problem na mnogoterosti. Idealno bi bilo, če bi za dano submerzijo $h : Z \to X$ obstajali mnogoterosti $Z' \supset Z$, $X' \supset X$ in submerzija $h' : Z' \to X'$, $h'|_Z = h$, ki bi imela enak korang kot h. To so zaenkrat žal le lepe želje.

Če natančno premislimo, smo potrebovali dejstvo, da je X mnogoterost, le za eksistenco omejenega razširitvenega operatorja (za razširjanje funkcij z $Y \cap D$ na $D_1 \subset X$) in v lemi 1.4.1., kjer smo reševali $\overline{\partial}$-enačbe. H-Rungejev izrek velja tudi za Steinove prostore. Prav tako dobimo eksistenco lokalnih sprayev - trditev 1.4.3. velja tudi za Steinove prostore. Edina težava je lepljenje - lema 1.4.1. in iz nje izhajajoči izrek 1.4.1. Prednost leme 1.4.1. je, da imamo opravka s preslikavami v $\mathbf{C}^N$ in se nam ni treba ukvarjati s sprayi in nelinearno strukturo na Z. V lemi 1.4.1. imamo: Cartanski par (A, B), odprti okolici U, V za A, B po vrsti in lepilne preslikave φ_p. Če sta A, B taka Steinova kompakta v Steinovem prostoru X, da je $A \cup B$ Steinov kompakt, $C = A \cap B$ Rungejeva v neki okolici $V \supset B$, znamo konstruirati lepilne preslikave φ_p. V dokazu rešujemo $\overline{\partial}$-enačbo in samo na tem mestu potrebujemo strogo psevdokonveksnost $A \cup B$.

Recimo, da smo okolico Steinovega kompakta $A \cup B$ vložili v nek evklidski prostor X' (to je vedno mogoče, ker je na relativno kompaktnih podmnožicah Steinovih prostorov vložitvena dimenzija navzgor omejena) in da obstaja tak Cartanski par (A', B') v X', da je $A = A' \cap X$ in $B = B' \cap X$. Recimo, da znamo zvezni družini holomorfnih preslikav $\psi_p, \psi_{p,0}$ razširiti do zveznih družin holomorfnih preslikav $\psi'_p, \psi'_{p,0} : C' = (A' \cap B') \times B_M(\eta) \to \mathbf{C}^N$, ki na C' zadoščajo analognim pogojem kot $\psi_p, \psi_{p,0}$ (slikajo biholomorfno vlakna na vlakna in $\psi'_{p,0}(x', 0) = 0$ za vsak $x' \in C'$). Zdaj pa lahko uporabimo lemo 1.4.1. za množice A', B' in lepilne preslikave ψ'_p in dobimo prereze α'_p, β'_p. Definiramo $\alpha_p := \alpha'_p|_A$, $\beta_p := \beta'_p|_B$ in dokončamo dokaz kot v primeru mnogoterosti. Zadnji del dokaza, sestavljanje prizem, je samo še kombinatorika. Prva stvar, ki bi jo bilo potrebno narediti, je definicija Cartanskih parov na X v smislu zgornjega razmišljanja, torej (A, B) je Cartanski par v X, če obstajajo X', A', B' kot zgoraj.

Videti je vse lepo, ampak v resnici ni tako. Prvič, norma α'_p je odvisna od norme preslikave ψ'_p na $A' \times B_N(\eta)$, ki v splošnem nima nobene zveze z normo ψ_p na $A \times B_N(\eta)$, kar pomeni, da izgubimo aproksimacijo na A. Drugič, zagotoviti si moramo eksistenco preslikav $\psi'_{p,0}$ s predpisanimi lastnostmi. Ni nujno, da bo razširitev $\psi'_{p,0}$ preslikave $\psi_{p,0}$ nad vsemi točkami iz C' slikala vlakna biholomorfno na vlakna in da bo preslikava ψ'_p enakomerno blizu $\psi'_{p,0}$ nad $C' \times B_N(\eta)$. Veliko več upanja bi imeli, če bi bile preslikave $vph_{p,0} = (id_X, \psi_{p,0})$ kar identiteta. Zato bomo poskusili lepilne preslikave φ_p popraviti tako, da bodo blizu identiteti.

Definicija 1.10.1. (Cartanski par v kompleksnem prostoru). *Naj bo X kompleksni prostor. Urejen par kompaktnih množic (A, B) in X je* **Cartanski** *(ali C-***par** *ali* **Cartanski niz dolžine** 2*) če obstaja odprta okolica $U \subset X$ množice $A \cup B$, kompleksna mnogoterost X' in taka (ne nujno prava) vložitev $\iota : U \to M$, da obstajata kompaktni množici $A', B' \subset X'$ z lastnostmi:*

(i) $A = A' \cap \iota(U)$ in $B = B' \cap \iota(U)$,

(ii) množice A', B', in $A' \cup B'$ imajo bazo Steinovih okolic,

(iii) $\overline{A' \setminus B'} \cap \overline{B' \setminus A'} = \emptyset$ (separacijski pogoj) in

(iv) množica $C' = A' \cap B'$ je Rungejeva v B' (C' je lahko prazna).

Opomba. Par (A', B') je Cartanski v smislu definicije 1.2.1. in tudi par (A, B) ima vse lastnosti iz te definicije. Razlika je v tem, da po tej definiciji lahko Cartanski par vložimo v kompleksno mnogoterost na tak način, da imamo dovolj psevdokonveksnih okolic v X' (ne zahtevamo baze psevdokonveksnih okolic za $\iota(A), \iota(B)$ ali $\iota(A \cup B)$). V primeru kompleksne mnogoterosti X obe definiciji sovpadata. Množici A in B sta lahko tudi prazni. Razširimo še definicijo Cartanskih nizov na singularne prostore.

Definicija 1.10.2. (Cartanski niz v kompleksnem prostoru). *Naj bo X kompleksen prostor in $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset X$ kompaktne podmnožice ($n \geq 1$). Zaporedje $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ je* **Cartanski niz dolžine** $n+1$, *če obstaja odprta okolica $U \subset X$ množice $A_0 \cup \ldots \cup A_n$, kompleksna mnogoterost X' in taka vložitev $\iota : U \to X'$, da obstaja Cartanski niz $(A'_0, \ldots, A'_n)$ v X' z lastnostjo $A_i = A'_i \cap \iota(U)$, $i = 0, \ldots, n$. Niz $(A'_0, \ldots, A'_n)$ bomo imenovali* **pridružen** *Cartanskemu nizu $(A_0, \ldots, A_n)$.*

Lokalno končno pokritje $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2, \ldots)$ prostora X s kompaktnimi množicami je **Cartansko pokritje**, *če je $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ Cartanski niz za vsak $n \in \mathbf{N}$.*

Opomba. Če je X kompleksna mnogoterost, zgornja definicija sovpada z definicijo 1.7.1. Dopuščamo, da so nekatere od množic A_i prazne.

Trditev 1.10.1. *Naj bo X Steinov prostor s končno vložitveno dimenzijo in $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}_0}$ odprto pokritje za X. Obstaja Cartansko pokritje $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \ldots)$, podrejeno $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}_0}$.*

Dokaz. Naj bo $\iota : X \to \mathbf{C}^N$ prava holomorfna vložitev (za nek $N \in \mathbf{N}$) in $U \subset \mathbf{C}^N$ Steinova odprta okolica množice $\iota(X)$. Definirajmo $U'_{-1} := U \setminus X$ in izberimo tako pokritje $U'_i \subset U$, da je $U_i = U'_i \cap \iota(X)$. Po [HL] obstaja Cartansko pokritje $\mathcal{A}'$ podrejeno pokritju $\{U'_i\}$, ki inducira Cartansko pokritje $\mathcal{A}$, podrejeno $\{U_i\}$. ♣

Posledica 1.10.1. *Naj bo X Steinov prostor, $K \subset X$ holomorfno konveksna kompaktna množica in $U \subset X$ odprta, relativno kompaktna holomorfno konveksna okolica K. Naj bo $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}_0}$ tako odprto pokritje množice U, da je $K \subset U_0$. Potem obstaja tako Cartansko pokritje $(A_0, A_1, \ldots)$ množice U, podrejeno pokritju $\{U_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, da je $K \subset A_0$ in $A_i \cap K = \emptyset$.*

Dokaz. Ker je U relativno kompaktna, ima končno vložitveno dimenzijo in zato obstaja prava holomorfna vložitev $\iota : U \to \mathbf{C}^N$ za dovolj velik N. Razširimo pokritje kot v trditvi in uporabimo izrek [HL]. ♣

Trditev 1.10.2. *Naj bo (A, B) Cartanski par v Steinovem prostoru X, množica $C := A \cap B$, kompleksna mnogoterost X', preslikava ι in Cartanski par (A', B') pa pridruženi (A, B) (definicija 1.10.1.). Naj bo $U \subset X$ odprta okolica množice $A \cup B$, $V \subset U$ odprta okolica C in $V' \subset X$ taka odprta, relativno kompaktna psevdokonveksna okolica množice $C' = A' \cap B'$ (taka obstaja po definiciji Cartanskega para) X', da je $(V' \cap \iota(U)) \subset\subset \iota(V)$. Naj bo $V'_1 \subset\subset V'$ odprta množica, ki vsebuje C', P kompakten Hausdorffov prostor in $0 < \eta_1 < \eta$ poljubni pozitivni števili. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja naslednje: če je*

$$\psi_p : V \times B_N(0,\eta) \to \mathbf{C}^N,\ p \in P$$

zvezna družina preslikav, ki zadošča $\|\psi_p(x,u) - u\| < \delta$ *za vsak* $(x,u) \in V \times B_N(0,\eta)$ *in* $p \in P$*, obstaja zvezna družina preslikav*

$$\psi'_p : V'_1 \times B_N(0,\eta_1) \to \mathbf{C}^N,$$

ki zadoščajo $\|\psi'_p(x',u) - u\| < \varepsilon$ *za vsak* $(x',u) \in V_1 \times B_N(0,\eta_1)$*,* $p \in P$ *in* $\psi'_p(\iota(x),u) = \psi_p(x,u)$ *za vsak* $p \in P$ *in* $(x,u) \in U \times B_N(0,\eta_1)$*.*

Dokaz. Da ne bo preveč pisanja, bomo $\iota(U)$ kar identificirali z $U \subset X'$. Po definiciji je $U \subset X'$ zaprta analitična množica. Definirajmo družino preslikav $\phi_p(x,u) = \psi_p(x,u) - u$ za $(x,u) \in V \times B_N(\eta)$ in $p \in P$. Po privzetku je

$$\|\phi_p\|_{L^\infty(V \times B_N(\eta))} < \varepsilon. \tag{8}$$

Naj bosta $D, D_1 \subset V' \times B_N(\eta)$ psevdokonveksni množici, ki vsebujeta $V'_1 \times B_N(\eta_1)$ in naj bo D_1 kompaktno vsebovana v D. Uporabimo omejen razširitveni operator $R_{D,D_1} : H^\infty(D \cap U) \to H^\infty(D_1)$ z normo M iz izreka 1.2.4. po komponentah preslikav ϕ_p in dobimo družino preslikav $\phi'_p : D_1 \to \mathbf{C}^N$, ki zadoščajo oceni

$$\|\phi'_p\|_{L^\infty(D_1)} < M\|\phi_p\|_{L^\infty(D \cap U)} < M\varepsilon.$$

Zadnjo neenakost dobimo iz (8). Naj bo $\delta = \varepsilon/M$. Preslikave $\psi'_p(x,u) := \phi'_p(x,u) + u, (x,u) \in V'_1 \times B_N(\eta_1)$, so razširitve preslikav ψ_p in so ε-blizu preslikavi $(x,u) \to u$ na $V'_1 \times B_N(\eta_1)$. ♣

Trditev 1.10.3. *Naj bo* X *Steinov prostor,* $V \subset X$ *poljubna množica in* $\eta > \eta' > 0$ *poljubno število,* P *kompakten Hausdorffov prostor,* $\psi_p : V \times B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N$ *zvezna družina takih preslikav, da je* $\psi_p(x,\cdot) : B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N$ *injektivna za vsak* $x \in V$*. Obstaja tak* $\varepsilon > 0$*, da velja: če so preslikave* $\psi'_p : V \times B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N$ *take, da je* $|\psi'_p(x,u) - \psi_p(x,u)| < \varepsilon$ *za vsak* $(x,u) \in V \times B_N(\eta')$*, je za vsak* $x \in V$ *in* $p \in P$ *tudi preslikava* $\psi'_p(x,\cdot) : B_N(\eta') \to \mathbf{C}^N$ *injektivna.*

Dokaz. Injektivna preslikava med prostoroma enake dimenzije je regularna, injektivnost in regularnost skupaj pa sta na kompaktih odprt pogoj. ♣

Trditev 1.10.4. *Naj bo* X *Steinov prostor,* Z *kompleksen prostor,* $V \subset X$ *odprta holomorfno konveksna množica,* $U \subset V$ *Rungejeva v* V*, in* $\varphi_{p,0} = (id_U, \psi_{p,0}) : U \times B_N(\eta) \to \mathbf{C}^N$ *družina preslikav iz trditve 1.4.3. Naj bo* $\eta' \in (0,\eta)$*,* $U' \subset\subset U$ *in* $\varepsilon > 0$ *iz trditve 1.10.3.*

Obstaja taka zvezna družina preslikav $\Phi_{p,0} : V \times \mathbf{C}^N \to V \times \mathbf{C}^N$, $\Phi_{p,0} = (id, \Psi_{p,0})$ z $\Psi_{p,0}(x, 0) = (x, 0)$ za vsak $x \in V$, ki na $U' \times B_N(\eta')$ ε-dobro aproksimira družino $\varphi_{p,0}$ in ima zato inverz $\Phi_{p,0}^{-1} : \Phi_{p,0}(V \times B_N(\eta')) \to V \times B_N(\eta)$.

Dokaz. Ker je $U \times B_N(\eta)$ Rungejeva v $V \times \mathbf{C}^N$, lahko preslikave $\psi_{p,0}$ na $U' \times B_N(\eta')$ po posledici 1.3.2. poljubno dobro aproksimiramo s preslikavami $\Psi_{p,0} : V \times \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$, ki zadoščajo $\Psi_{p,0}(x, 0) = 0$ za vsak $x \in V$. ♣

Dokaz leme 1.4.1. za Steinove prostore. Naj bo (A, B) Cartanski par v Steinovem prostoru X, (A', B') pridružen Cartanski par v mnogoterosti X' in $\iota : V \to X'$ prava vložitev neke relativno kompaktne, holomorfno konveksne odprte okolice $V \supset A \cup B$. Naj bo $U' \subset X'$ odprta psevdokonveksna okolica množice $C' = A' \cap B'$ in $U = U' \cap \iota(V)$. V nadaljevanju bomo identificirali V z $\iota(V)$ v X'.

Ker ima Cartanski par (A, B) vse lastnosti iz definicije 1.2.1., lahko definiramo preslikave $s_{1,p}$, $s_{2,p}$ in $\varphi_p, \varphi_{p,0} : U \times B_N(\eta) \to U \times \mathbf{C}^N$ po trditvi 1.4.3. Naj bodo $\Phi_{p,0}$ preslikave iz trditve 1.10.4. in definirajmo $\varphi_p^1 := \Phi_{p,0}^{-1} \circ \phi_p$ in $\varphi_{p,0}^1 = \Phi_{p,0}^{-1} \circ \varphi_{p,0}$. Če so bile preslikave φ_p dovolj blizu preslikavam $\varphi_{p,0}$ in so preslikave $\Phi_{p,0}$ dovolj dobro aproksimirale preslikave $\varphi_{p,0}$, bodo preslikave $\varphi_p^1 = (id_U, \psi_p^1)$ in $\varphi_{p,0}^1$ tako blizu identiteti, kot želimo. Zdaj pa lahko uporabimo trditev 1.10.2. za razširjanje preslikav ψ_p^1 z množice $U' \times B_N(\eta)$ do preslikav $\psi_p' : U'' \times B_N(\eta') \to \mathbf{C}^N$, kjer je $U'' \subset\subset U'$ in $\eta' \in (0, \eta)$. Če so bile vse aproksimacije dovolj dobre, so razširitve $\varphi_p' = (id_{U''}, \psi_p')$ tako blizu identiteti $id_{U'' \times \mathbf{C}^N}$, kot želimo. Po lemi 1.4.1. dobimo zvezno družino preslikav α_p', ki so definirane na odprti okolici $A'' \subset X'$ za A' in zvezno družino preslikav β_p', ki so definirane na odprti okolici $B'' \subset X'$ za B', ki zadoščata

$$\beta_p'(x') = \varphi_p'(\alpha_p'(x')) \tag{9}$$

za vsak $x' \in A'' \cap B''$. Naj bo $\alpha_p := \alpha_p'|_{V \cap A''}$ in $\beta_p := \beta_p'|_{V \cap B''}$. Ti dve družini preslikav tudi zadoščata enačbi (9) na $V \cap A'' \cap B''$,

$$\beta_p(x) = \varphi_p'(\alpha_p) = \varphi_p^1(\alpha_p) = \Phi_{p,0}^{-1} \circ \varphi_p(\alpha_p(x)),\ x \in V \cap A'' \cap B'', \tag{10}$$

kar pomeni, da je $\Phi_{p,0}(\beta_p) = \varphi_p(\alpha_p)$ na $V \cap A'' \cap B''$ oziroma

$$s_{2,p} \circ \Phi_{p,0}(\beta_p(x)) = s_{1,p}(\alpha_p(x)),\ x \in V \cap A'' \cap B''.$$

Družini preslikav

$$\begin{aligned} a_{p,t} &= s_{1,p}(t\alpha_p),\ t \in [0, 1], \\ b_{p,t} &= s_{2,p} \circ \Phi_{p,0}(t\beta_p), t \in [0, 1] \end{aligned}$$

imata torej vse zahtevane lastnosti. ♣

1.11 Primeri prostorov s sprayi in uporaba

Trditev 1.11.1. *Kompleksna mnogoterost F ima spray v naslednjih primerih* ([Gr])*:*

(1) *F je kompleksna Liejeva grupa (spray generirajo levo invariantna vektorska polja, ki v enoti napenjajo T_eF);*

(2) *obstaja Liejeva grupa L, ki na F deluje holomorfno in tranzitivno (mnogoterost F je L-homogena); če je $s : L \times \mathbf{C}^N \to L$ spray na L in $\phi : L \times F \to F$ delovanje grupe L na F, je s predpisom $\tilde{s}(x,t) := \phi(s(e,t),x)$ definiran spray na F;*

(3) *$F = \mathbf{C}^N \setminus A$, kjer je A algebraična podmnožica kodimenzije vsaj* 2.

Primer (3) je dokazan v [Pr]. Na podoben način dokažemo tudi naslednjo

Trditev 1.11.2. (Obstoj sprayev). *Naj bo $U \subset \mathbf{C}^n$ odprta množica ($n \geq 1$) in naj bo $\Sigma \subset U \times \mathbf{C}^q$ za $q \geq 2$ taka zaprta analitična podmnožica, da ima vsako vlakno $\Sigma_x = \{w \in \mathbf{C}^q \colon (x,w) \in \Sigma\}$ kompleksno kodimenzijo vsaj dva v $\mathbf{C}^q$ (vlakno je lahko prazno). Privzemimo, da obstaja taka neprazna odprta množica $\Omega \subset \mathbf{CP}^{q-1}$, da je za vsak $[v] \in \Omega$ linearna projekcija $\tilde{\pi}_v \colon U \times \mathbf{C}^q \to U \times \mathbf{C}^{q-1}$ definirana z*

$$\tilde{\pi}_v(x,w) = \big(x, \pi_v(w)\big) \quad (x \in U,\ w \in \mathbf{C}^q)$$

prava na Σ. Potem projekcija $h \colon (U \times \mathbf{C}^q) \setminus \Sigma \to U$, dana z $h(x,w) = x$, dopušča spray.

Za dokaz vložitvenega izreka potrebujemo še naslednji primer prostorov s sprayi.

Trditev 1.11.3. *Naj bo X Steinov prostor, $X_0 \subset X_1 \subset X$ zaprti analitični podmnožici, $n \in \mathbf{N}$ naravno število, $\pi : X \times \mathbf{C}^n \to X$ trivialen vektorski sveženj in $\Sigma \subset X \times \mathbf{C}^n$ analitična podmnožica z naslednjimi lastnostmi:*

(1) *$pr_X(\Sigma) \subset X_1 \setminus X_0$,*

(2) *za vsak $x \in X_1 \setminus X_0$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ in biholomorfna preslikava $\varphi : U \times \mathbf{C}^n \to U \times \mathbf{C}^n$, ki ohranja vlakna in zadošča $\varphi((U \cap X_1) \times \mathbf{C}^n \setminus \Sigma) = (U \cap X_1) \times (\mathbf{C}^n \setminus A)$; $A \subset X$ je taka analitična množica, da ima mnogoterost $F = \mathbf{C}^n \setminus A$ spray $s : F \times \mathbf{C}^N \to F$, ki ga je mogoče razširiti do holomorfne preslikave $s_1 : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^n$.*

Potem submerzija $\pi : (X \times \mathbf{C}^n) \setminus \Sigma \to X$ dopušča spray lokalno nad $X \setminus X_0$.

Dokaz. Očitno je, da zgornja submerzija dopušča spray nad vsemi točkami iz $X \setminus X_1$, zato privzemimo, da je $x \in X_1 \setminus X_0$ in naj bodo U, φ, F in s_1 kot v (2). Naj bo U tako majhna, da je $U \cap X_0 = \emptyset$. Po Cartanu obstajajo holomorfne preslikave $g_1, \ldots, g_M : X \to \mathbf{C}^n$, ki so enake 0 na X_1 in generirajo ideal $\mathcal{J}(X_1)^n$ na U (privzeti smemo, da je U relativno kompaktna). Definirajmo $\tilde{s} : (U \times \mathbf{C}^n) \times \mathbf{C}^{N+M} \to U \times \mathbf{C}^n$ s predpisom

$$\tilde{s}(x, u, t_N, t_M) = (x, s_1(u, t_N) + \sum_{i=1}^{M} t_{M,i} g_i(x)).$$

Očitno je $\tilde{s}(x, u, 0) = (x, u)$ za vsak $(x, u) \in U \times \mathbf{C}^n$. Prepričati se moramo, da je

(i) za vsak $(x, u) \in U \times \mathbf{C}^n \setminus \Sigma$ vertikalni odvod $\frac{\partial}{\partial t} s(x, u, t)|_{t=0}$, $t = (t_N, t_M)$, surjektiven in

(ii) $\tilde{s}\left((\{y\} \times \mathbf{C}^n) \setminus \Sigma, \mathbf{C}^{N+M}\right) \subset (\{y\} \times \mathbf{C}^n) \setminus \Sigma$ za vsak $y \in U$.

Za $y \in U \cap X_1$ je $g_i(y) = 0$ po definiciji, torej $\tilde{s}(y, u, t_N, t_M) = (y, s(x, u, t_N))$, kar pomeni, da sta obe zahtevi izpolnjeni. Ker množica Σ ne seka $y \in U \setminus X_1$, je drugi pogoj trivialen in ker funkcije g_i generirajo $\mathcal{J}(X_1)^n$ na U, je že $\frac{\partial}{\partial t_M} s(x, u, t)|_{t=0}$ surjektiven. Preslikava $\varphi^{-1} \circ \tilde{s} \circ (\varphi, id_{C^{N+M}})$ je spray nad U. ♣

Napišimo še nekaj primerov uporabe.

Trditev 1.11.4. [Gra] *Naj bo X Steinov prostor in $p_1 : E_1 \to X$ in $p_2 : E_2 \to X$ kompleksna vektorska svežnja nad X. Vektorska svežnja E_1 sta natanko tedaj holomorfno izomorfna, ko sta izomorfna kot topološka kompleksna vektorska svežnja.*

Dokaz. Naj imata svežnja rang n. Lokalno je izomorfizem med vektorskima svežnjema predstavljen kot preslikava $x \to GL_{\mathbf{C}}(n)$. Ker je $GL_{\mathbf{C}}(n)$ kompleksna Liejeva grupa, velja h-princip, zato lahko vsak zvezen izomorfizem s homotopijo premaknemo do holomorfnega. ♣

Trditev 1.11.5. *Naj bo X Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ analitična podmnožica, (E, p) vektorski sveženj nad X in F vektoreki podsveženj v $E|_Y$. Obstaja odprta okolica $U \subset X$ za Y in tak vektorski podsveženj F_1 v $E|_U$, da je $F_1|_Y = F$.*

Dokaz. Naj bo (E, p) podsveženj trivialnega svežnja $X \times \mathbf{C}^N$ za nek dovolj velik N in naj ima sveženj F rang n in E rang m. Po [Ha1], [Ha2] obstaja odprta okolica $V \subset X$ za Y in krepka deformacijska retrakcija $r : V \times [0, 1] \to V$ množice V na Y (v splošnem samo zvezna; holomorfna retrakcija obstaja natanko takrat, ko je Y mnogoterost, [Fi]). Naj bo (zvezen) vektorski sveženj F' na V pull-back svežnja F z retrakcijo $r(\cdot, 1) : V \to Y$ in $\pi_E : X \times \mathbf{C}^N \to E$ projekcija. Linearna preslikava $\pi_{E,y} : F'_y \to E|_y$ ima pri vsakem $y \in Y$

rang n, zato ima rang n še na odprti okolici $U \supset Y$; po [Siu] smemo privzeti, da je U Steinova. Definirajmo $F'' = \pi_E(F|_U)$. Lokalno lahko na projekcijo $\pi : E|_U \to F''$ gledamo kot na zvezno preslikavo $\pi : U' \to P_{m,n} = \{A \in C^{m \times m}, A^2 = A, rangA = n\}$. Na $P_{m,n}$ deluje Liejeva grupa $U(m)$ holomorfno in tranzitivno, zato lahko uporabimo h-princip in zvezno preslikavo π deformiramo v holomorfno preslikavo $\tilde{\pi}$. Sveženj $F_1 := \tilde{\pi}(E|_U)$ je iskani sveženj. ♣

Najbrž najpomembnejši primer uporabe h-principa je vložitveni izrek za Steinove prostore v prostore minimalne dimenzije. V naslednjem poglavju je predstavljen vložitveni izrek za Steinove mnogoterosti z interpolacijo na diskretnih množicah.

2. Vložitve Steinovih mnogoterosti z interpolacijo na diskretni množici

2.1 Uvod

Klasični rezultati o vložitvah Steinovih mnogoterosti pravijo, da za vsako n-dimenzionalno Steinovo mnogoterost obstaja prava holomorfna vložitev v $\mathbf{C}^N$ za $N \geq 2n+1$ ([GuR], str. 226), kar je analogno rezultatu za (gladke) vložitve realnih mnogoterosti. Ker je znano, da je vsaka n-dimenzionalna Steinova mnogoterost homotopno ekvivalentna realnemu n-dimenzionalnemu CW-kompleksu, je naravno pričakovati, da bo vsako n-dimenzionalno Steinovo mnogoterost mogoče vložiti v $\mathbf{C}^N$ za $N \geq 2n+1-[\frac{n}{2}]$. Leta 1971 sta Gromov in Eliashberg najavila ([EG1]), da je to mogoče za dimenzije $N \geq [\frac{n}{2}]+n+2$ in kasneje sta z uporabo h-principa ([Gr]) to mejo zmanjšala do $N \geq [\frac{n+1}{2}]+n+1$ ([EG2]). Nazadnje je Schürmann dokazal, da je vsako Steinovo n-mnogoterost mogoče vložiti v $\mathbf{C}^N$ za $N = [\frac{n}{2}]+n+1$. Te meje ni mogoče izboljšati ([Sch1]). Glavni izrek je naslednji:

Izrek 2.1.1. *Naj bo X n-dimenzionalna Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna množica, $N = \max\{[\frac{n+1}{2}]+1, 3\}$, $N' = \max\{[\frac{n+1}{2}], 1\}$ in $\varphi : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ preslikava za nek $q \geq 0$. Potem veljajo naslednje trditve:*

(a) Če je $n = 1$ in $q \geq 2$ ali $n > 1$ in $q \geq N$ in je preslikava φ prava injekcija, obstaja prava holomorfna vložitev $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$, ki razširi φ.

(b) Če je $q \geq N'$ in preslikava φ prava, jo je mogoče razširiti do prave holomorfne imerzije $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$;

(c) Če je $q \geq 1$ in preslikava φ prava, potem obstaja prava holomorfna razširitev $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ preslikave φ.

(d) Če je $q \geq 0$, lahko preslikavo φ razširimo do skoraj prave holomorfne preslikave $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$.

Najpomembnejši del izreka 2.1.1. je trditev (a), ki je interpolacijski analog vložitvenega izreka Eliashberg–Gromov–Schürmann. Dobljeni razultat je za sode n optimalen, za lihe pa bi ga bilo morda mogoče zmanjšati za 1. V tem trenutku še ni jasno, ali je razlika posledica metode. Trditev (b) je interpolacijski analog za holomorfne imerzije. Če privzamemo, da je je slika $\varphi(Y)$ naše diskretne množice Y pohlevna (tame) podmnožica $\mathbf{C}^{n+q}$ v smislu [RR], lahko izrek 2.1.1. izboljšamo:

Izrek 2.1.2. *Naj bo X n-dimenzionalna Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna množica, $q \geq \max\{[\frac{n}{2}]+1, 2\}$ in $\varphi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ taka holomorfna preslikava, da je $\varphi|_Y : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava injekcija in $\varphi(Y)$ pohlevna podmnožica $\mathbf{C}^{n+q}$. Za vsak $y \in Y$ naj bo $m_y \in \mathbf{N}_0$ dano število.*

Obstaja taka prava holomorfna vložitev $\Phi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$, da je $j_{m_y}(\Phi)(y) = j_{m_y}(\phi)(y)$ za vsak $y \in Y$.

Dokaz. Vložitveni izrek v [Sch1] da tako vložitev $g : X \to \mathbf{C}^{n+q}$, da je slika vsake diskretne podmnožice X pohlevna. Po [BFo] obstaja tak avtomorfizem G prostora $\mathbf{C}^{n+q}$, da je za vsak $y \in Y$ izpolnjen pogoj $j_{m_y}(G \circ g)(y) = j_{m_y}\varphi(y)$. ♣

Vložitveni izrek z interpolacijo na podmnogoterostih so rešili Aquistapace, Broglia in Tognolli v [ABT] po Narasimhanovih idejah ([Na]). Njihov rezultat je naslednji:

Izrek 2.1.3. *Naj bo X Steinova n-mnogoterost in $Y \subset X$ njena zaprta podmnogoterost. Za vsak $m \geq 2n+1$ je vsako pravo holomorfno vložitev $f : Y \to \mathbf{C}^m$ mogoče razširiti do prave holomorfne vložitve $F : X \to \mathbf{C}^m$.*

Za $m = 2n$ je obstoj take razširitve še odprt problem, za vsak $m \leq 2n-1$, $m \geq n+1$, pa obstajajo protiprimeri za izrek 2.1.3., ki jih dobimo z s pomočjo naslednjega izreka:

Izrek 2.1.4. ([Fo]) *Za vsak $k \in \{1, \ldots, l-1\}$ obstaja taka prava holomorfna vložitev $f : \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^l$, da je vsaka holomorfna preslikava $g : \mathbf{C}^{l-k} \to \mathbf{C}^l \setminus f(\mathbf{C}^k)$ degenerirana.*

Za konstrukcijo protiprimerov si izberimo $m \leq 2n-1$, $m \geq n+1$ in pišimo $l = m$, $k = m - n$. Naj bo $f : \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^m$ preslikava iz izreka 2.1.4. in privzemimo, da jo je mogoče razširiti do prave holomorfne vložitve $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$. Ker je F injektivna, je $F(\mathbf{C}^n \setminus \mathbf{C}^k)$ podmnožica $\mathbf{C}^m \setminus f(\mathbf{C}^k)$. Definirajmo $G : \mathbf{C}^n \to (\mathbf{C}^n \setminus \mathbf{C}^k)$ z $G(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_k, \exp(z_{k+1}), \ldots, \exp(z_n))$. Preslikava $F \circ G : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m \setminus f(\mathbf{C}^k)$ je potem nedegenerirana, kar je v nasprotju z izrekom 2.1.4. V resnici preslikava f nima niti nobene injektivne holomorfne razširitve $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$. ♣

2.2 Definicije in oznake

Naj za $y \in \mathbf{C}^n$ oznaka $|y| := \sup\{|y_i|, 1 \leq i \leq n\}$ pomeni supremum normo in $\|y\|$ evklidsko normo. Z $M^{k \times n}$ bomo označili množico vseh $k \times m$ matrik nad $\mathbf{C}$. Naj bo X kompleksna mnogoterost, $K \subset X$ kompaktna množica in $f : X \to \mathbf{C}^n$ zvezna preslikava. Uporabljali bomo oznaki $|f|_K := \max\{|f(x)|,\ x \in K\}$ in $\|f\|_K := \max\{\|f(x)\|,\ x \in K\}$.

Z $B_n(r)$ bomo označili kroglo v $\mathbf{C}^n$ s središčem v izhodišču in radijem r; če je $n = 1$ bomo indeks spuščali: $B(r) := B_1(r)$.

Z $\mathcal{O}(X)$ bo označen prostor vseh holomorfnih preslikav na kompleksni mnogoterosti X z običajno topologijo enakomerne konvergence na kompaktih. Če je $Y \subset X$ analitična, bomo z $\Gamma(X, \mathcal{J}(Y))$ označili podmnožico vseh holomorfnih funkcij na X, ki so enake 0 na Y.

Odprta relativno kompaktna množica P v n-dimenzionalni kompleksni mnogoterosti X je **specialni analitični polieder,** če obstajajo take holomorfne funkcije $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbf{C}$, da je P unija končno mnogo povezanih komponent množice $\{x \in X,\ |f_1(x)| < 1, \ldots, |f_n(x)| < 1\}$. Funkcije $f_1, \ldots, f_n$ imenujemo **definicijske funkcije za** P.

Naj bo X kompleksna mnogoterost. S TX označimo kompleksni tangentni sveženj nad X in s T_xX kompleksni tangentni prostor na X v x. Naj bo tudi Y kompleksna mnogoterost in $f : X \to Y$ holomorfna preslikava. Z $Df : TX \to TY$ označimo odvod preslikave f in z $D_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ odvod f v x. Z $j_m(f)(x)$ bomo označili jet reda m za f v točki x.

Holomorfna preslikava $f : X \to Y$ je **skoraj prava** če so za vsak kompakt $K \subset Y$ povezane komponente of $f^{-1}(K)$ kompaktne. **Stratifikacija** je tako končno padajoče zaporedje analitičnih množic $A_m \supset A_{m-1} \ldots \supset A_0$, da je $A_i \setminus A_{i-1}$ kompleksna mnogoterost $(i = 1, \ldots, m)$.

2.3 Skoraj prave in prave preslikave

V tem razdelku se bomo ukvarjali z razširjanjem pravih in skoraj pravih preslikav. Trditvi (c) in (d) v izreku 2.1.1. sta posebna primera trditev v tem razdelku.

Trditev 2.3.1. *Naj bo X n-dimenzionalna Steinova mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna množica in $F : X \to \mathbf{C}^n$ holomorfna preslikava. Naj bo $\{P_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ normalno izčrpanje X s takimi specialnimi analitičnimi poliedri, da je $\partial P_j \cap Y = \emptyset$ za vsak $j \in \mathbf{N}$. Naj bo za vsak $y \in Y$ dano število $m_y \in \mathbf{N}_0$. Naj bo $K \subset P_1$ kompaktna množica in $\varepsilon > 0$.*

Za vsako zaporedje pozitivnih realnih števil $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ obstaja holomorfna preslikava $H : X \to \mathbf{C}^n$ z lastnostmi:

(a) $|H - F|_K < \varepsilon$,

(b) $\inf_{\partial P_j} |H| > d_j$ *za vsak* $j \in \mathbf{N}$ *in*

(c) $j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(H)(y)$ *za vsak* $y \in Y$.

Opomba. Če gre zaporedje $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ proti neskončnosti, je preslikava H skoraj prava.

Dokaz. Za vsak $m \in \mathbf{N}$ naj bodo $h_1^m, \ldots, h_n^m$ definicijske funkcije za polieder P_m. Izberimo zaporedje (pozitivnih) realnih števil $\{\delta_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, ki zadoščajo $\sum_m \delta_m < \min\{\varepsilon, 1\}$. Preslikava H bo limita primernega zaporedja holomorfnih preslikav $\{H^m\}_{m\in\mathbf{N}}$, ki ga bomo konstruirali z indukcijo na m.

Označimo $P_0 := K$ in definirajmo $\{y_1, \ldots y_{n_0}\} := Y \cap K$ in $\{y_{n_{m-1}+1}, \ldots, y_{n_m}\} := Y \cap (P_m \setminus P_{m-1})$ za vsak $m \in \mathbf{N}$. Poenostavimo oznake in pišimo $m_k := m_{y_k}$ za vsak $k \in \mathbf{N}$. Nadaljujemo z indukcijo na m.
$m = 1$. Konstrukcija preslikave H^1 poteka po komponentah. Pišimo $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Ker je $|h_i^1|_K < 1$ in $|h_i^1(y_k)| < 1$ za vsak $k = 1, \ldots, n_1$ in $i = 1, \ldots, n$, obstajajo take konstante $a_i > 1$, da je $|a_i h_i^1|_K < 1$, $|a_i h_i^1(y_k)| < 1$ za $k = 1, \ldots, n_1$, $i = 1, \ldots, n$ in je $|a_i h_i^1|_{\partial P_1 \cap \{|h_i^1|=1\}} = a_i > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Zato lahko izberemo tako dovolj veliko naravno število $N \in \mathbf{N}$, da je

$$\prod_{k=1}^{n_1} |(a_i h_i^1)^N - (a_i h_i^1(y_k))^N|_K^{m_k+1} \;<\; \delta_1/2,$$
$$\inf_{\{|h_i^1|=1\}\cap\partial P_1} \prod_{k=1}^{n_1} |(a_i h_i^1)^N - (a_i h_i^1(y_k))^N|^{m_k+1} \;>\; d_1 + \sup_{\{|h_i^1|=1\}\cap\partial P_1} |F_i| + 1.$$

Definirajmo
$$\tilde{H}_i^1 := F_i + \prod_{k=1}^{n_1} \left[(a_i h_i^1)^N - (a_i h_i^1(y_k))^N\right]^{m_k+1}.$$

Zlahka se prepričamo, da je $j_{m_k}(\tilde{H}_i^1)(y_k) = j_{m_k} F_i(y_k)$ za $k = 1, \ldots, n_1$. Obstajajo take holomorfne funkcije $g_i : X \to \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, n$, da je

(1) $j_{m_k+1}(g_i)(y_k) = 0,\ k = 1, \ldots, n_1$,

(2) $j_{m_k}(g_i)(y_k) = j_{m_k}(F_i - \tilde{H}_i^1)(y_k),\ k = n_1 + 1, \ldots, n_2$ in

(3) $|g_i|_{\overline{P_1}} < \delta_1/2$.

Definirajmo
$$H_i^1 := \tilde{H}_i^1 + g_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Preslikava $H^1 = (H_1^1, \ldots, H_n^1) : X \to \mathbf{C}^n$ ima lastnosti

(a_1) $|H^1 - F|_K < \delta_1$,

(b_1) $\inf_{\partial P_1} |H^1| > d_1 + 1 - \delta_1$ in

(c_1) $j_{m_k}(H^1)(y_k) = j_{m_k}(F)(y_k),\ k = 1, \dots n_2.$

$\underline{m \to m+1.}$ Recimo, da smo že konstruirali zaporedje preslikav $H^1, \dots, H^m : X \to \mathbf{C}^n$, ki zadoščajo

(a_m) $|H^m - H^{m-1}|_{\overline{P_{m-1}}} < \delta_m$,

(b_m) $\inf_{\partial P_m} |H^m| > d_m + 1 - \sum_1^m \delta_i$ in

(c_m) $j_{m_k}(H^m)(y_k) = j_{m_k}(F)(y_k),\ k = 1, \dots n_{m+1}.$

Preslikava H^1 zadošča tem lastnostim, če definiramo $P_0 := K$ in $H^0 := F$. Preslikavo H^{m+1} konstruiramo po komponentah na enak način kot H^1. Za i-to komponento izberimo $a_i > 1$ in tako dovolj veliko število $N \in \mathbf{N}$, da je

$$\prod_{k=1}^{n_{m+1}} |(a_i h_i^{m+1})^N - (a_i h_i^{m+1}(y_k))^N|_{\overline{P_m}}^{m_k+1} < \delta_{m+1}/2,$$

$$\inf_{\{|h_i^{m+1}|=1\} \cap \partial P_{m+1}} \prod_{k=1}^{n_{m+1}} |(a_i h_i^{m+1})^N - (a_i h_i^{m+1}(y_k))^N|^{m_k+1} >$$
$$> d_{m+1} + \sup_{\{|h_i^{m+1}|=1\} \cap \partial P_{m+1}} |H_i^m| + 1.$$

Definirajmo

$$\tilde{H}_i^{m+1} := H_i^m + \prod_{k=1}^{n_{m+1}} \left((a_i h_i^{m+1})^N - (a_i h_i(y_k)^{m+1})^N\right)^{m_k+1}.$$

Naj bodo $g_i : X \to \mathbf{C}$, $i = 1, \dots, n$ take holomorfne funkcije, da je

(1) $j_{m_k+1}(g_i)(y_k) = 0,\ i = 1, \dots, n_{m+1}$,

(2) $j_{m_k}(g_i)(y_k) = j_{m_k}(H_i^m - \tilde{H}_i^{m+1})(y_k),\ k = n_{m+1}+1, \dots, n_{m+2}$, in

(3) $|g_i|_{\overline{P}_{m+1}} < \delta_{m+1}/2$.

Definirajmo

$$H_i^{m+1} := \tilde{H}_i^{m+1} + g_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Preslikava $H^{m+1} = (H_1^{m+1}, \dots, H_n^{m+1}) : X \to \mathbf{C}^n$ ima lastnosti

(a_{m+1}) $|H^{m+1} - H^m|_{\overline{P_m}} < \delta_{m+1}$,

(b_{m+1}) $\inf_{\partial P_{m+1}} |H^{m+1}| > d_{m+1} + 1 - \sum_1^{m+1} \delta_i$ in

(c_{m+1}) $j_{m_k}(H)^{m+1}(y_k) = j_{m_k}(F)(y_k),\ k = 1, \dots n_{m+2}.$

Lastnost (a_m) pove, da je $|H - f|_K < \varepsilon$ in da zaporedje H^m konvergira enakomerno po kompaktnih množicah v X k limiti $H := \lim_{n\to\infty} H^m : X \to \mathbf{C}^n$. Lastnost (c_m) zagotavlja, da velja $j_{m_y}H(y) = j_{m_y}(F)(y)$ za vsak $y \in Y$, lastnost (b_m) pa, da je $\inf_{\partial P_j} |H| > d_j + 1 - \sum_1^\infty \delta_i > d_j$ za vsak $j \in \mathbf{N}$. ♣

Trditev 2.3.2. *Naj bo X Steinova n-mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna množica in $\varphi : X \to \mathbf{C}^n$ holomorfna preslikava. Naj bo za vsak $y \in Y$ dano število $m_y \in \mathbf{N}_0$. Potem je množica*

$$A := \{F : X \to \mathbf{C}^n,\ \ F \text{ skoraj prava holomorfna, } j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)\ \forall y \in Y\}$$

residualna v množici

$$B := \{F : X \to \mathbf{C}^n,\ F \text{ holomorfna, } j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)\ \forall y \in Y\}.$$

Opomba. Trditev (d) izreka 2.1.1. je poseben primer trditve 2.3.2.

Dokaz. Ker je znano, da je množica vseh skoraj pravih holomorfnih preslikav $X \to \mathbf{C}^n$ residualna v Frechetovem prostoru $\mathcal{O}(X)$ (glej [Bi] in [Sch1]) in je B zaprt afin podprostor v $\mathcal{O}(X)^n$, zadošča dokazati, da je A gosta v B.

Izberimo $F \in B$, kompaktno množico $K \subset X$ in $\varepsilon \in (0,1)$. Naš cilj je poiskati preslikavo $H \in A$, ki zadošča $|H - F|_K < \varepsilon$. Naj bo $\{K_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ tako normalno izčrpanje X s kompaktnimi množicami, da je $K_1 = K$. Izberimo poljubno skoraj pravo preslikavo $h : X \to \mathbf{C}^n$. Obstaja tako zaporedje pozitivnih števil $c_i \to \infty$, da za vsak $j \in \mathbf{N}$ velja naslednje:

Če je polieder P_j definiran kot unija končnega števila tistih povezanih komponent množice $h^{-1}(B(c_j) \times \ldots \times B(c_j))$, ki sekajo K_j, je $\partial P_j \cap Y = \emptyset$.

Privzeti smemo, da je $K \subset P_1$. Izberimo naraščajoče zaporedje (pozitivnih) realnih števil $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, ki gre v neskončnost. Po trditvi 2.3.1. obstaja preslikava $H : X \to \mathbf{C}^n$ z lastnostmi

(a) $|H - F|_K < \varepsilon$,

(b) $\inf_{\partial P_j} |H| > d_j$ za vsak $j \in \mathbf{N}$ in

(c) $j_{m_y}(H)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)$ za vsak $y \in Y$.

Ker gre zaporedje $\{d_j\}$ v neskončnost, nam lastnost (b) zagotavlja, da je H skoraj prava, iz (c) pa sledi $H \in A$. ♣

Trditev 2.3.3. *Naj bosta X in Y kot v trditvi 2.3.2., $q \in \mathbf{N}$ število in $\varphi : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ taka preslikava, da je $\varphi|_Y : Y \to \mathbf{C}^{n+m}$ prava. Naj bo za vsak $y \in Y$ dano število $m_y \in \mathbf{N}_0$. Potem je množica*

$$A := \{F : X \to \mathbf{C}^{n+q},\ \ F \text{ prava holomorfna, } j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)\ \forall y \in Y\}$$

gosta v množici

$$B := \{F : X \to \mathbf{C}^{n+q},\ F \text{ holomorfna, } j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)\ \forall y \in Y\}.$$

Opomba. Trditev (c) izreka 2.1.1. je poseben primer zgornje trditve 2.3.3.

Dokaz. Izberimo poljubno preslikavo $F \in B$, kompaktno množico $K \subset X$ in $\varepsilon > 0$. Iščemo holomorfno preslikavo $(H, G) : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ iz A, ki zadošča $|F - (H, G)|_K < \varepsilon$. Definirajmo $\varphi' := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi'' = (\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+q})$, ter naj bo $F' := (F_1, \ldots, F_n)$, $F'' = (F_{n+1}, \ldots, F_{n+q})$. S pomočjo strogo plurisubharmonične funkcije izčrpanja na X lahko izberemo tako normalno izčrpanje X s holomorfno konveksnimi kompaktnimi množicami $\{C_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, da je $K \subset C_1$, za vsak $j \geq 2$ množica $(C_j \setminus C_{j-1})\cap$Y vsebuje natanko eno točko, ki jo označimo z y_j in je množica $\partial C_j \cap Y$ prazna za vsak $j \in \mathbf{N}$. Poenostavimo oznake in pišimo $m_j := m_{y_j}$ za vsak $j \in \mathbf{N}$. Iz tehničnih razlogov privzemimo, da $0 \notin \varphi''(Y)$ (ker je Y diskretna, je to vedno mogoče doseči s translacijo koordinatnega sistema). Za vsak y_j obstajajo odprta okolica $U_j \subset C_j$ točke y_j in taka holomorfna preslikava $f_j : U_j \to \mathbf{C}^q$, da je $j_{m_j}(f_j)(y_j) = j_{m_j}(\varphi'')(y_j)$ in $|f_j|_{U_j} > |f_j(y_j)|/2$. Naj bo V_{j-1} odprta okolica C_{j-1}. Privzeti smemo, da je $U_j \cap V_{j-1} = \emptyset$. Ker so množice $C_j \cup \{y_{j+1}\}$ holomorfno konveksne, lahko uporabimo Bishopove rezultate ([Bi], Theorem 2) in aproksimiramo množice $C_j \cup \{y_{j+1}\}$ s takimi specialnimi analitičnimi poliedri P_j, da za vsak $j \in \mathbf{N}$ velja:

- $(C_j \cup \{y_{j+1}\}) \subset P_j \subset (V_j \cup U_{j+1})$ in $K \subset P_1 \cap V_1$;
- $\partial P_j \cap Y = \emptyset$, $(P'_j \setminus P'_{j-1}) \cap Y = \{y_j\}$ kjer je $P'_j := P_j \cap V_j$;
- množica $P''_j := P_j \cap U_{j+1}$ vsebuje točko y_{j+1} in ima natanko eno povezano komponento.

Očitno je $\{P_j\}$ normalno izčrpanje X. Naj bo $n_k := |\varphi(y_k)|$ (za vsak $k \in \mathbf{N}$) in izberimo tako naraščajoče zaporedje pozitivnih števil $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, da je $d_j \neq n_k$ za vsak $j, k \in \mathbf{N}$ in $d_j > \max\{n_1, \ldots, n_{j+1}\} + 1$. Ker je φ prava na Y, gre zaporedje n_k v neskončnost in prav tako zaporedje $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$. Iz trditve 2.3.1. sledi, da obstaja skoraj prava preslikava $H : X \to \mathbf{C}^n$, ki zadošča $|F' - H|_K < \varepsilon$, $j_{m_y}(H)(y) = j_{m_y}(\varphi')(y)$ za vsak $y \in Y$ in $\inf_{\partial P_j} |H| > d_j$, $j \in \mathbf{N}$.

Za vsak $j \in \mathbf{N}$ definirajmo analitiči polieder Q'_j kot unijo (končnega števila) povezanih komponent množice $H^{-1}(B(d_j) \times \ldots \times B(d_j))$, ki ležijo v P'_j in naj bo Q''_j tista povezana komponenta množice $H^{-1}(B(d_j)\times\ldots\times B(d_j))$, ki vsebuje točko y_{j+1}. Zaradi izbire števil d_j je množica Q''_j podmnožica P''_j in zato tudi podmnožica U_{j+1}. Naj bo $Q_j := Q'_j \cup Q''_j$. Zlahka se prepričamo, da je $\{Q_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ normalno izčrpanje X in da velja $K \subset Q'_1$, $\partial Q_j \cap Y = \emptyset$ in $(Q_j \setminus Q_{j-1}) \cap Y = \{y_{j+1}\}$ za vsak $j \geq 2$.

Konstruirali bomo tako holomorfno preslikavo $G : X \to \mathbf{C}^q$, da bo $j_{m_y}(G)(y) = j_{m_y}(\varphi'')(y)$ za vsak $y \in Y$ in preslikava $(H,G) : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava, kar pomeni, da mora biti funkcija $|G|$ velika na množicah, kjer je funkcija $|H|$ premajhna. Te množice definiramo z naslednjim predpisom:

$$L_1 := Q_1 \text{ in } L_j := \{z \in Q_j \setminus \overline{Q_{j-1}},\ |H(z)| < n_{j+1} - 1/2\},\ j \geq 2.$$

Izbira števil d_j zagotavlja, da je vsaka množica $\overline{L_j}$ kompaktna podmnožica $(Q_j \setminus \overline{Q_{j-1}})$ in množica $L := \cup_1^\infty L_j$ je Rungejeva X. Če točka y_{j+1} leži v množici L_j, potem je povezana komponenta L_j, ki vsebuje y_{j+1}, podmnožica $Q''_j \subset U_{j+1}$. Označimo to komponento z L''_j. Če točka y_{j+1} leži v L_j, to pomeni, da je

$$n_{j+1} = |\varphi''(y_{j+1})| = |f_{j+1}(y_{j+1})|. \tag{11}$$

Če je $Y \cap L_j = \emptyset$, definiramo $L''_j := \emptyset$.

Definirajmo preslikavo $g : L \to \mathbf{C}^q$ s predpisom $g|_{L_1} = F''|_{L_1}$, $g|_{L''_j} := f_{j+1}$ če $L''_j \neq \emptyset$ in $g|_{L_j \setminus L''_j} := n_{j+1}$ za $j \geq 2$.

Po enačbi (11) je $|g(x)| > n_{j+1}/2$ za vsak $x \in L''_j$. Pišimo $K_1 := K$ in $K_j := \{z \in L_j,\ |H(z)| \leq n_{j+1} - 1\}$ za $j \geq 2$. Ker je L Rungejeva v X, obstaja taka preslikava $G : X \to \mathbf{C}^q$, da je $j_{m_y}(G)(y) = j_{m_y}(\varphi'')(y)$ za vsak $y \in Y$ in $|G - g|_{K_j} < \varepsilon$ za $j \in \mathbf{N}$. Ker velja

$$|(G,H)|_{Q_j \setminus Q_{j-1}} \geq \min\{n_{j+1} - 1 - \varepsilon, n_{j+1}/2 - \varepsilon\} \geq n_{j+1}/2 - \varepsilon - 1 \text{ za vsak } j \geq 2$$

in je $\lim_{j\to\infty} n_j = \infty$, je preslikava $(H,G) : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava. Po konstrukciji je $j_{m_y}(H,G)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)$ za vsak $y \in Y$ in $|(H,G) - F|_K < \varepsilon$. ♣

Trditev 2.3.4. *Naj bo X Steinova n-mnogoterost, $Y \subset X$ diskretna množica, $\varphi : X \to \mathbf{C}^n$ holomorfna preslikava in $q' = [\frac{n+1}{2}]$. Naj bo za vsak $y \in Y$ dano neko število $m_y \in \mathbf{N}_0$. Množica vseh skoraj pravih holomorfnih preslikav $F : X \to \mathbf{C}^n$, ki zadoščajo*

(1) *$j_{m_y}(F)(y) = j_{m_y}(\varphi)(y)$ za vsak $y \in Y$ in*

(2) *$dim\{x \in X \setminus Y,\ rang_x F \leq n - i\} < 2(q' - i + 1)$, $i = 1, \ldots, n$*

je residualna v množici $\mathcal{G}$ vseh holomorfnih preslikav G, ki zadoščajo $j_{m_y}(G) = j_{m_y}(\varphi)(y)$ za vsak $y \in Y$. Če je Y prazna ali pa je $m_y = 0$ za vsak $y \in Y$, lahko (2) nadomestimo z

$(2')dim\{x \in X,\ rang_x F \leq n-i\} < 2(q'-i+1),\ i = 1, \ldots, n$

Opomba. Analitična množica A z $dim\, A < 0$ je po definiciji prazna.

Dokaz. Po trditvi 2.3.2. je množica $\mathcal{G}_1$ vseh skoraj pravih holomorfnih preslikav, ki zadoščajo (1), residualna v $\mathcal{G}$. Pokazati moramo še, da je množica $\mathcal{G}_2$ vseh preslikav $F \in \mathcal{G}$, ki zadoščajo (2), residualna v $\mathcal{G}$.

Naj bo $T := TX$, $S := X \times \mathbf{C}^n$ in

$$V = Hom_{\mathbf{C}}(T, S) = \cup_{x \in X}\{L : T_x \to\ S_x,\ \text{L je } \mathbf{C}\text{-linearna}\}.$$

Označimo s $pr_X : V \to\ X$ sveženjsko projekcijo. Za vsak $p = 0, \ldots, n-1$ naj bo $V^p = \cup_{x \in X}\{L \in V_x,\ rang L = p\}$. Znano je, da je V^p mnogoterost kodimenzije $codim_V V^p = (n-p)^2$. Za vsako množico $A \subset X$ naj bo $V^p|_A := \cup_{x \in A}\{L \in V_x,\ rang L = p\}$.

Definirajmo preslikavo $\psi(f) : (X \setminus Y) \to\ V^p|_{(X \setminus Y)}$ s predpisom

$$\psi(f)(x) = D_x(f),$$

naj bo $\mathcal{H}^p$ množica vseh tistih holomorfnih preslikav f, za katere je $\psi(f)$ transverzalen na $V^p|_{X \setminus Y}$ in $\mathcal{H} := \cap_{p=0}^{n-1}\mathcal{H}^p$. Trdimo, da je vsaka izmed množic $\mathcal{H}^p$ (in s tem $\mathcal{H}$) residualna podmnožica $\mathcal{G}$. Privzemimo, da to velja, in dokončajmo dokaz trditve. Transverzalnost $\psi(f)$ na V^p pomeni

$$dim\{x \in X \setminus Y,\ \psi(f)(x) \in V^p\} = dim[\psi(f)(X \setminus Y)] - dim V + dim V^p.$$

Če enačbo preuredimo, dobimo

$$dim\{x \in X \setminus Y,\ \psi(f)(x) \in V^p\} = n - (n-p)^2,$$

za vsak $p = 0, \ldots, n-1$, oziroma, če vstavimo $i = n - p$,

$$dim\{x \in X \setminus Y,\ rang_x f \leq n - i\} = n - i^2$$

za $i = 1, \ldots, n$. Brez težav se prepričamo, da je $n - i^2 < 2(q' - i + 1)$ za $i = 1, \ldots, n$. Vsaka preslikava $f \in \mathcal{H}$ torej zadošča pogoju (2) iz trditve 2.3.4., zato je $\mathcal{H}$ podmnožica $\mathcal{G}_2$. Ker je $\mathcal{H}$ residualna v $\mathcal{G}$, je tudi $\mathcal{G}_2$ residualna v $\mathcal{G}$.

Da bi dokazali, da je $\mathcal{H}^p$ residualna v $\mathcal{G}$ zadošča videti, da je za vsako kompaktno množico $C \subset V^p|_{(X \setminus Y)}$ množica $\mathcal{H}^p_C$ vseh tistih holomorfnih preslikav $f \in \mathcal{G}$, za katere je $\psi(f)$ transverzalna na V^p na C, odprta in gosta v $\mathcal{G}$ za vsak $p = 0, \ldots, n-1$. Fiksirajmo neko tako kompaktno množico C. Ker je transverzalnost nad kompaktom odprt pogoj, je množica $\mathcal{H}^p_C$ odprta podmnožica $\mathcal{G}$.

Da bo dokazali, da je gosta, izberimo poljubno preslikavo $F \in \mathcal{G}$, kompaktno množico $K \subset (X \setminus Y)$ in $\varepsilon > 0$. Privzeti smemo, da K vsebuje $pr_X(C)$ v svoji notranjosti. Izberimo take holomorfne funkcije $g_1, \dots, g_k : X \to \mathbf{C}$, da ima preslikava $g = (g_1, \dots, g_k)$ maksimalen rang v vsaki točki iz K in je $j_{m_y}(g_i) = 0$ za vsak $y \in Y$, $i = 1, \dots, k$. Če je $m_y = 0$ za vsak $y \in Y$ (ali $Y = \emptyset$), take funkcije obstajajo za vsako kompaktno množico $K \subset X$. Definirajmo preslikavo $\Psi : M^{n\times k} \times K \to V|_K$ s predpisom

$$\Psi(A, y) := D_y(F + Ag).$$

Preslikava Ψ je (odprta) afina surjektivna submerzija nad neko okolico K in zato transverzalna na vsako izmed množic $V^p|_K$. Thomov izrek o transverzalnosti pove, da je množica

$$M_C := \{A \in M^{n\times k},\ \Psi(A, \cdot) \text{ je transverzalna na } V^p \text{ nad } C\}$$

gosta v $M^{n\times k}$. Če izberemo $A \in M_K$ dovolj blizu ničelni matriki, bo preslikava $G := F + Ag$ blizu F na K in $\psi(F + Ag)$ transverzalna na V^p nad C, kar pomeni, da $F + Ag$ leži v $\mathcal{H}^p_C$.

Če je $Y = \emptyset$ ali $m_y = 0$ za vsak $y \in Y$, je dokaz enak, le da izbiramo kompaktne množice C kot podmnožice V^p (namesto $V^p|_{X\setminus Y}$).

♣

Posledica 2.3.1. *Naj bo X Steinova n-mnogoterost, $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset X$ diskretna množica, $\varphi : Y \to \mathbf{C}^n$ preslikava, $\{d_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ zaporedje pozitivnih števil in $\{P_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ tako normalno izčrpanje X s specialnimi analitičnimi poliedri, da je $\partial P_j \cap Y = \emptyset$ in (po morebitnem preštevilčenju y_j-jev) $(P_{j+1} \setminus P_j) \cap Y = \{y_j\}$ za vsak $j \in \mathbf{N}$. Potem obstaja skoraj prava preslikava $H : X \to \mathbf{C}^n$ z lastnostmi*

(1) *$H(y_j) = \varphi(y_j)$ za vsak $j \in \mathbf{N}$,*

(2) *$|H|_{\partial P_j} > d_j$ za vsak $j \in \mathbf{N}$ in*

(3) *$dim\{x \in X,\ rang_x H \le n - i\} < 2([\frac{n+1}{2}] - i + 1),\ i = 1, \dots n.$*

Dokaz. Naj bodo V in V^p, $p = 0, \dots, n-1$ kot v dokazu trditve 2.3.4. Tam smo dokazali, da je množica $\mathcal{H}$ vseh tistih holomorfnih preslikav $F : X \to \mathbf{C}^n$, za katere je preslikava $x \mapsto D_xF$ transverzalna na vsako izmed množic V^p, residualna v množici $\mathcal{G}$ vseh razširitev preslikave φ. V temle primeru je $m_y = 0$ za vsak $y \in Y$. Izrek o transverzalnosti pove, da za vsak $F \in \mathcal{G}$, vsako kompaktno množico $K \subset X$ in vsako relativno kompaktno odprto okolico U za K obstaja tak $\varepsilon > 0$, da velja:

$(*)$ če $G : X \to \mathbf{C}^n$ zadošča $|G - F|_U < \varepsilon$ potem je preslikava $x \mapsto D_xG$ transverzalna na V^p, $p = 0, \dots, n-1$ v x za vsak $x \in K$.

Za vsako število $j \in \mathbf{N}$ naj bo $U_j \subset P_{j+1}$ odprta okolica $\overline{P}_j$. Induktivno bomo konstruirali zaporedje holomorfnih preslikav $H^j : X \to \mathbf{C}^n$ in tako padajoče zaporedje $\{\varepsilon_j\}$, da bo $\varepsilon_j \in [0,1)$ za vsak $j \in \mathbf{N}$ in

(a_j) $|H^j|_{\partial P_i} > d_i + 1 - \sum_{k=i+1}^{j} \varepsilon_k / 2^{k+1}$ za $i = 1, \ldots, j$

(b_j) H^j leži v $\mathcal{H}$ in $|H^j - H^{j-1}|_{U_{j-1}} < \varepsilon_{j-1}/2^j$ za $j \geq 2$,

(c_j) ε_j zadošča $(*)$ za $F := H^j$, $U := U_j$ in $K := \overline{P}_j$.

$\underline{j = 1}$. Naj preslikava $h^1 : X \to \mathbf{C}^n$ zadošča (1). Ker je $\mathcal{H}$ residualna v $\mathcal{G}$, obstaja taka preslikava $H^1 \in \mathcal{H}$ da je $|H^1|_{\partial P_1} > d_1 + 1$. Po izreku o transverzalnosti obstaja tak $\varepsilon_1 \in [0,1)$, da velja tudi (c).
$\underline{j \to j+1}$. Recimo, da smo H^j že konstruirali. Obstaja taka preslikava $h^{j+1} : X \to \mathbf{C}^n$, da je $|H^j - h^{j+1}|_{U_{j+1}} < \varepsilon_j/2^{j+2}$ in $|h^{j+1}|_{\partial P_{j+1}} > d_{j+1} + 1$. Ker je $\mathcal{H}$ residualna v $\mathcal{G}$, obstaja taka preslikava $H^{j+1} \in \mathcal{H}$, da je $|h^{j+1} - H^{j+1}|_{U_{j+1}} < \varepsilon_j/2^{j+2}$. Preslikava H^{j+1} zadošča pogojema (a_{j+1}) in (b_{j+1}). Zaradi enakih razlogov kot zgoraj obstaja tudi tako število $\varepsilon_{j+1} \in [0,1)$, da velja (c_{j+1}).

Zaradi (b_j) zaporedje $\{H^j\}$ konvergira enakomerno po kompaktih v X in ima zato limito $H : X \to \mathbf{C}^n$. Iz (a_j) sledi, da H zadošča (1). Ker je $|H - H^j|_{U_j} < \sum_j^\infty \varepsilon_i/2^{i+1} < \varepsilon_j$ za vsak $j \in \mathbf{N}$, je preslikava $x \mapsto D_x H$ transverzalna na vse množice V^p, $p = 0, \ldots, n-1$, kar pomeni, da H zadošča (2). ♣

2.4 Tehnikalije

Da se bomo lahko lotili še dokazov trditev (a) in (b) glavnega izreka, potrebujemo še nekaj tehničnih pripomočkov. Kot prej naj bo X n-dimenzionalna Steinova mnogoterost in $Y \subset X$ diskretna množica. Spomnimo se, da smo že definirali števili

$$\begin{aligned} N &:= \max\{[\tfrac{n+1}{2}] + 1, 3\} \text{ in} \\ N' &:= \max\{[\tfrac{n+1}{2}], 1\}. \end{aligned}$$

Naj bo $\varphi = (\varphi', \varphi'') : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava preslikava za nek $q \in \mathbf{N}$ in naj bo $H : X \to \mathbf{C}^n$ skoraj prava holomorfna razširitev $\varphi' : X \to \mathbf{C}^n$ iz posledice 2.3.1. V tem razdelku bodo število q in preslikavi H in φ fiksirani. Za $R > 0$ naj bo X^R poljubna unija končnega števila povezanih komponent množice $H^{-1}(B_n(R)) \subset X$ in naj bo $Z^R = H(X^R) = B_n(R)$. Preslikava $H_{X^R} : X^R \to Z^R$ je prava.

Lema 2.4.1. *Obstajata stratifikaciji* $X_n := X^R \supset X_{n-1} \ldots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$ *in* $Z_n := Z^R \supset Z_{n-1} \ldots \supset Z_0 \supset Z_{-1} = \emptyset$, *z* X_0 *in* $Z_0 \neq \emptyset$, *z lastnostmi*

(1) $X_0 \supset X^R \cap Y$ *in* $Z_0 \supset H(Y \cap X^R)$,

(2) $X_j = H^{-1}(Z_j) \cap X^R$,

(3) *analitični množici* X_j *in* Z_j *sta največ* j*-dimenzionalni in množici* $X_j^* := X_j \setminus X_{j-1}$, $Z_j^* = Z_j \setminus Z_{j-1}$ *sta* j*-dimenzionalni mnogoterosti (ali prazni),*

(4) *če* X_j^* *ni prazna, je preslikava* $H : X_j^* \to Z_j^*$ *imerzija* $j \in \{0, \ldots, n\}$,

(5) *rang* H *je konstanten na vsaki povezani komponenti množice* X_j^* *za vsak* $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Dokaz. Lema 6.1 iz [Sch1] da stratifikaciji $\{X_j'\}$ in $\{Z_j'\}$ z vsemi zahtevanimi lastnostmi, razen (1). Definirajmo:

$$\begin{aligned} X_n &:= X_n', \text{ in } Z_n := Z_n', \\ X_j &:= X_j' \cup [X^R \cap H^{-1}(H(Y \cap X^R))], \text{ in } Z_j := Z_j' \cup H(Y \cap X^R)\ j = 0, \ldots, n-1, \\ X_{-1} &:= X_{-1}' = Z_{-1} := Z_{-1}' = \emptyset. \end{aligned}$$

Novi stratifikaciji imata vse želene lastnosti. ♣

Sklicali se bomo še na dva rezultata iz [Sch1] (skoraj prava preslikava H in prava preslikava φ sta fiksirani).

Izrek 2.4.1. *Naj bo* $R > 0$ *in* X^R *unija končnega števila povezanih komponent množice* $H^{-1}(B_n(R))$*. Za* $r \in (0, R)$ *naj bo* $X^r := X^R \cap H^{-1}(B_n(r))$*. Če je* $q \geq N$ *in* $\varphi : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ *injektivna, potem obstaja preslikava* $G : X^r \to \mathbf{C}^q$*, ki zadošča pogojem*

$\alpha(r)$ *preslikava* $(H, G) : X^r \to \mathbf{C}^{n+q}$ *injektivna,*

$\beta(r)$ *preslikava* $(H, G_1, \ldots, G_{N'}) : X^r \to \mathbf{C}^{n+N'}$ *je imerzija,*

$\gamma(r)$ $(H, G)|_{Y \cap X^r} = \varphi|_{Y \cap X^r}$ *in*

$\delta(r)$ $((H, G)(X^r \setminus Y)) \cap (\varphi(Y \setminus X^r)) = \emptyset$.

Če je $q \geq N'$ *in* φ *ni nujno injektivna, obstaja preslikava* $G : X^r \to \mathbf{C}^q$ *zadošča le pogojema* $\beta(r)$ *in* $\gamma(r)$*.*

Dokaz. Sledimo dokazu izreka 3.3 v [Sch1] z majhnimi spremembami. Izberimo $r' \in (r, R)$ in pišimo $X^{r'} := X^R \cap H^{-1}(B_n(r'))$.

Najprej privzemimo, da je $q \geq N$ in preslikava φ injektivna. Na ničdimenzionalnem stratumu X_0 definiramo $g' : X_0 \to \mathbf{C}^q$ tako, da je $g'|_{X_0 \cap Y} = \varphi''|_{X_0 \cap Y}$, njene vrednosti v vsaki točki $X_0 \setminus Y$ ležijo v $\mathbf{C}^q \setminus ((\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+q})(Y))$ in je g' injektivna. Izrek 3.3 v [Sch1] nam da preslikavo $G' : X^{r'} \to \mathbf{C}^q$, ki se na X_0 ujema z g' in ima lastnosti $\alpha(r'), \beta(r')$ in

$\gamma(r')$. S perturbacijo, ki je nad X^r dovolj majhna, dobimo preslikavo $G : X^r \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\alpha(r), \beta(r), \gamma(r)$ in $\delta(r)$.

Če je $q \geq N'$ in preslikava φ ni nujno injektivna, definirajmo $g' : X_0 \to \mathbf{C}^q$ z $g'|_{X_0 \cap Y} = \varphi''|_{X_0 \cap Y}$ in $g'|_{X_0 \setminus Y} = 0$. Spet po izreku 3.3 v [Sch1] obstaja preslikava $G : X^r \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\beta(r)$ in $\gamma(r)$. ♣

Izrek 2.4.2. *Naj bo $R, r > 0$, X^R in X^r kot v izreku 2.4.1. Izberimo $r' \in (r, R)$ in pišimo $X^{r'} := X^R \cap H^{-1}(B_n(r'))$.*

Če holomorfna preslikava $G : X^r \to \mathbf{C}^q$ z $q \geq N'$ zadošča pogojema $\beta(r)$ in $\gamma(r)$ iz izreka 2.4.1., jo je na množici X^r mogoče poljubno dobro aproksimirati s preslikavo $G' : X^{r'} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\beta(r')$ in $\gamma(r')$ iz izreka 2.4.1.

Privzemimo, da je $q \geq N$ in $\varphi : Y \to \mathbf{C}^{n+q}$ injektivna. Naj bo $G : X^r \to \mathbf{C}^q$ preslikava, ki zadošča pogojem $\alpha(r), \beta(r), \gamma(r)$ in $\delta(r)$ iz izreka 2.4.1. *Potem jo je na množici X^r mogoče poljubno dobro aproksimirati s preslikavo $G' : X^{r'} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\alpha(r'), \beta(r'), \gamma(r')$ $\delta(r')$ iz izreka* 2.4.1.

Dokaz. Sledimo dokazu izreka 3.4 v [Sch1]. Če je $q \geq N'$ in preslikava φ ne nujno injektivna, definiramo $g' : X_0 \cup X^r \to \mathbf{C}^q$ z $g'|_{X_0 \cap Y} = \varphi''|_{X_0 \cap Y}, g'|_{X^r} := G$ $g'|_{X_0 \setminus (Y \cup X^r)} = 0$. Po izreku 3.4 v [Sch1] obstaja preslikava $G' : X^{r'} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\beta(r')$ in $\gamma(r')$ in aproksimira G.

Če je $q \geq N$ in φ injektivna, definiramo $g' : X_0 \cup X_r \to \mathbf{C}^q$ tako, da je $g'|_{X^r} = G$, $g'|_{X_0 \cap Y} = \varphi''|_{X_0 \cap Y}$, $g'(x) \in \mathbf{C}^q \setminus ((\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+q})(Y))$ za vsak $x \in X_0 \setminus (Y \cup X_r)$ in g' injektivna. Izberimo $r'' \in (r', R)$. Izrek 3.4 v [Sch1] nam da preslikavo $G'' : X^{r''} \to \mathbf{C}^q$, ki ima lastnosti $\alpha(r''), \beta(r'')$ in $\gamma(r'')$ in aproksimira G na množici X^r. S perturbacijo, ki je na množici $X^{r'}$ dovolj majhna, dobimo preslikavo G, ki zadošča $\alpha(r'), \beta(r'), \gamma(r')$ in $\delta(r')$. ♣

Lema 2.4.2. *Naj bo $X \subset \mathbf{C}^N$ n-dimenzionalna analitična množica, $X_0 \subset X$ pa taka analitična podmnožica dimenzije največ $n-1$, da je $X \setminus X_0$ mnogoterost. Naj bo dano število $k \in \mathbf{N}$ in naj bo Σ taka zaprta podmnožica $X \times \mathbf{C}^k$, da je $pr_X : V := (X \times \mathbf{C}^k) \setminus \Sigma \to X$ sveženj nad $X \setminus X_0$ z $(n-1)$-povezanimi vlakni.*

Izberimo $d \in \mathbf{R}$ in pišimo $K := \{x \in X,\ \|x\| \leq d\}$ (K je lahko prazna). Vsak zvezen prerez $c' : X_0 \cup K \to V|_{X_0 \cup K}$ je mogoče razširiti do zveznega prereza $c : X \to V$.

Posebej je mogoče vsak zvezen prerez $c' : X_0 \to V|_{X_0}$ razširiti do zveznega prereza $c : X \to V$ (vzamemo $d < 0$).

Skica dokaza. Pišimo $a_0 := d$, $c_0 := c'$ in izberimo naraščajoče zaporedje pozitivnih realnih števil $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, ki gre v neskončnost z $a_0 < a_1$. Naj bo $K_i := \{x \in X,\ \|x\| \leq a_i\}$ za vsak $i \geq 0$ (opazimo, da je $K = K_0$.). Lemo bomo dokazali z indukcijo na i, natančneje, dokazali bomo, da je vsak zvezen prerez $c_i : (X_0 \cup K_i) \to V|_{X_0 \cup K_i}$ mogoče razširiti do zveznega prereza $c_{i+1} : (X_0 \cup K_{i+1}) \to V_{X_0 \cup K_{i+1}}$. V limiti bomo dobili globalni prerez $c := \lim_{i \to \infty} c_i : X \to V$, ki razširi $c_0 = c'$.

Začetni korak je trivialen, saj je prerez $c_0 : X_0 \cup K_0 \to V|_{X_0 \cup K_0}$ že definiran. Za indukcijski korak privzemimo, da smo že konstruirali prerez $c_i : X_0 \cup K_i \to V|_{X_0 \cup K_i}$. Naš cilj je razširiti prerez c_i do prereza $c_{i+1} : X_0 \cup K_{i+1} \to V$. Ker je $V = X \times \mathbf{C}^k \setminus \Sigma$, ima prerez c_i obliko $c_i(x) = (x, \gamma_i(x))$, kjer je $\gamma_i : X_0 \cup K_i \to \mathbf{C}^k$ zvezna preslikava. Po Tietzejevem izreku obstaja zvezna razširitev $\tilde{\gamma_i} : X \to \mathbf{C}^k$ preslikave γ_i. Ker je množica Σ zaprta in se c_i izogne Σ, obstaja taka odprta okolica $U \subset X$ množice $X_0 \cup K_i$, da se tudi prerez $\tilde{c_i} := (id_X, \tilde{\gamma_i})$ izogne Σ nad U. Zdaj moramo razširiti prerez $\tilde{c_i}$ z U na okolico $X_0 \cup K_{i+1}$. Naj bo L kompaktna množica, ki vsebuje K_{i+1} v notranjosti. Obstaja taka gladka funkcija $\rho : X \to \mathbf{R}$, ki ima 0 za regularno vrednost, da je $X_0 \cup K_i \subset \{\rho < 0\} \subset U$ in ρ strogo plurisubharmonična na okolici $L \setminus (X_0 \cup K_i)$. S perturbacijo funkcije ρ, ki je na množici $L \setminus \{\rho < 0\}$ dovolj majhna, lahko tako deformiramo ρ, da ima na $L \setminus \{\rho < 0\}$ samo nedegenerirane kritične točke in je še vedno strogo plurisubharmonična na okolici $L \setminus \{\rho < 0\}$. Po [HL] obstaja tako končno zaporedje funkcij $\rho_0 := \rho, \rho_1 \ldots, \rho_m$, ki so strogo plurisubharmonične na okolici $L \setminus \{\rho < 0\}$, da je $X_0 \cup K_{i+1} \subset \{\rho_m < 0\}$, za vsak $i = 1, \ldots, n$ je $supp(\rho_i - \rho_{i-1}) \subset (L \setminus X_0)$ in je vsaka podnivojska množica $\{\rho_i < 0\}$ homotopno ekvivalentna $\{\rho_{i_1} < 0\}$ s prilepljeno l-celico. To pomeni, da lahko v končno korakih deformiramo začetno podnivojsko množico $\{\rho < 0\}$ v podnivojsko množico $\{\rho_m < 0\}$ na tak način, da je vsaka deformacija ekvivalentna dodajanju l-celice ('pseudoconvex bumps' v [HL]). Ker so funkcije ρ_i strogo plurisubharmonične na okolici $L \setminus \{\rho < 0\}$, je $l \leq n$. Ker smo lepili celice izven množice X_0 in je $V|_{X \setminus X_0}$ sveženj z $(n-1)$-povezanimi vlakni, lahko na vsakem koraku razširimo naš prerez še nad prilepljeno celico do zveznega prereza V. Po zadnjem koraku dobimo zvezen prerez $\tilde{c}_{i+1} : \{\rho_m < 0\} \to V$, ki razširi c_0. Prerez $c_{i+1} := \tilde{c}_{i+1}|_{X_0 \cup K_{i+1}}$ je iskani prerez. ♣

Naslednji rezultat se nahaja v [Gr] in je poseben primer izreka 1.1.2.:

Izrek 2.4.3. (H-princip za mnogoterosti)
Naj bo X Steinova mnogoterost, Z kompleksna mnogoterost, $h : Z \to X$ pa taka submerzija, da ima vsak $x \in X$ tako okolico $U \subset X$, da h dopušča spray nad U. Naj bo d metrika na Z, kompatibilna z dano topologijo na mnogoterosti. Potem velja:

(a) *Vsak zvezen prerez $f_0 : X \to Z$ je mogoče s homotopijo deformirati v holomorfen prerez $f_1 : X \to Z$, t.j. obstaja enoparametrična družina zveznih prerezov $f_t : X \to Z$, $t \in [0, 1]$.*

(b) Če je $K \subset X$ kompaktna holomorfno konveksna množica in je začetni prerez f_0 holomorfen na okolici K, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka homotopija $f_t : X \to Z$, $t \in [0,1]$, da je $d(f_t(x), f_0(x)) < \varepsilon$ za vsak $x \in K$ in $t \in [0,1]$, vsak f_t je holomorfen na okolici K in f_1 je holomorfen na X. V tem primeru zadošča, da ima submerzija $h : Z \to X$ spray nad $X \setminus K$.

Lema 2.4.3. *Naj bo d pozitivno število, $pr_{\mathbf{C}^n} : V = B_n(d) \times \mathbf{C}^q \to B_n(d)$ trivialen sveženj in $\Sigma \subset V$ taka zaprta analitična podmnožica, da je zožitev preslikave $pr_{\mathbf{C}^n} : V \to B_n(d)$ na Σ prava preslikava. Naj obstaja tako število $k \in \mathbf{N}$, da ima vsako vlakno $\Sigma_y := (\Sigma \cap (\{y\} \times \mathbf{C}^q))$ največ k točk za vsak $y \in B_n(d)$. Naj točka $x_0 = (x_0', x_0'') \in V \setminus \Sigma$ zadošča $\|x_0\| < d$. Definirajmo $c = \frac{\|x_0\|}{2}$ in privzemimo, da je $q \geq 3$. Potem obstaja holomorfen prerez $C : B_n(d) \to V \setminus \Sigma$ lastnostmi*

(1) *$C(x_0') = x_0$ in*

(2) *$\|C(x)\| > c$ za vsak $x \in B_n(c)$.*

Opomba. Če je U Steinova mnogoterost, $q \geq 3$ in Σ graf take preslikave $(g_1, g_2) : U \to B_n(d') \times \mathbf{C}^q$, da je $g_1 : U \to B_n(d')$ prava, potem za vsak $d < d'$ trivialni sveženj $B_n(d) \times \mathbf{C}^q$ in $\Sigma|_{B_n(d)}$ zadoščata predpostavkam leme 2.4.3.

Dokaz. Ukvarjati se moramo z dvema problemoma: prvi je, kako poiskati prerez $V \setminus \Sigma$ skozi predpisano točko in drugi, kako doseči, da bo prerez dovolj velik nad množico $B_n(c)$. Da bi rešili prvi problem, bomo uporabili h-princip (izrek 2.4.3., trditev 1.11.2.). Očitno množica Σ zadošča predpostavkam trditve 1.11.2., torej lahko najdemo holomorfen prerez, ki se izogne Σ, če obstaja zvezen prerez, ki se izogne Σ. Ker pa h-princip ne da nobenih ocen za velikost prereza, bomo iskali prerez nekega 'afinega podsvežnja', natančneje, prerez $B_n(c) \times (z + L)$, kjer bo $z \in \mathbf{C}^q$ točka in $L \leq \mathbf{C}^q$ vektorski podprostor kodimenzije 1. Pri prehodu na večjo kroglo bomo uporabili aproksimativno verzijo h-principa (izrek 2.4.3. (b)). Glede na položaj točke x_0 moramo obravnavati dva primera.
Primer 1. Privzemimo, da je $x_0' \in \overline{B_n(c)}$. To pomeni, da je $\|x_0''\|^2 \geq 3c^2$. Pišimo $d' := (c+d)/2$ in naj bo L ortogonalni komplement x_0'' in $\mathbf{C}^q$. Najprej konstruiramo prerez C' nad $B_n(d')$, ki zadošča (1) in (2). Definirajmo $V' := B_n(d') \times (x_0'' + L)$, $\Sigma' := \Sigma \cap V'$. Po 1.11.2. ima submerzija $pr_{\mathbf{C}^n} : V' \setminus \Sigma' \to B_n(d')$ spray, saj so vlakna Σ_x' (če niso prazna) končne množice, torej algebraične množice kodimenzije $q - 1 \geq 2$ in je $pr_{\mathbf{C}^n}|_\Sigma$ prava. Iz transverzalnosti sledi, da je (analitična) množica $pr_{\mathbf{C}^n}(\Sigma')$ dimenzije (največ) $n-1$ za skoraj vse izbire L (izbrani L lahko po potrebi malo premaknemo).

Naj vektorji $v_1, \ldots, v_{q-1}$ tvorijo bazo za L in naj bodo $g_1, \ldots, g_m : B_n(d') \to \mathbf{C}$ holomorfne funkcije z x_0' kot edino skupno ničlo. Prerez C iščemo v naslednji obliki:

$$C'(x') = (x', x_0'' + \sum_{i=1}^{q-1} v_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}(x')g_j(x')),$$

kjer je $a = (a_{i,j})$ prerez trivialnega svežnja $B_n(d') \times \mathbf{C}^{m\times(q-1)}$. Oglejmo si preslikavo

$$S_1 : B_n(d') \times \mathbf{C}^{m\times(q-1)} \to V',$$

definirano z

$$S_1(x', a) := (x', x_0'' + \sum_{i=1}^{q-1} v_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} g_j(x'))$$

in pišimo $\Sigma_1 := S_1^{-1}(\Sigma')$. Preslikava $S_1 : B_n(d') \times \mathbf{C}^{m\times(q-1)} \setminus \Sigma_1 \to V' \setminus \Sigma'$ je surjektivna submerzija povsod, razen nad točko x_0'. Zato je preslikava

$$S := pr_{\mathbf{C}^n} \circ S_1 : W := B_n(d') \times \mathbf{C}^{m\times(q-1)} \setminus \Sigma_1 \to B_n(d')$$

submerzija, ki ima spray nad okolico vsake točke $x \neq x_0'$; če je namreč $U \subset B_n(d')$ taka okolica x, da obstaja spray $s : (V'\setminus\Sigma')|_U \times \mathbf{C}^N \to (V'\setminus\Sigma')|_U$ (za nek $N \in \mathbf{N}$), je preslikava $W_U \times \mathbf{C}^N \to W_U$, definirana z $(y, z, t) \mapsto s(S_1(y, z), t)$ spray na W_U $((y, z) \in W|_U,\ t \in \mathbf{C}^N)$.

Ničelni prerez a_0 nad $B_n(d') \times \mathbf{C}^{m\times(q-1)}$ je prerez W nad majhno okolico x_0' (ker x_0 ni in Σ). Zdaj smo v naslednji situaciji: $dim(pr_{\mathbf{C}^n}(\Sigma_1)) \leq n-1$, vlakna Σ_1 so (če niso prazna) algebraične množice kodimenzije $q-1$, kar pomeni, da so vlakna W vsaj $(n-2)$-povezana. Obstaja taka stratifikacija $B_n(d') = B_n \supset B_{n-1} \ldots \supset B_0 \neq \emptyset$, da je za vsak $j = 1, \ldots, n$ množica $B_j \setminus B_{j-1}$ taka j-dimenzionalna mnogoterost (ali prazna), da je število točk v $\Sigma_{1,x}$ konstantno na vsaki povezani komponenti $B_j \setminus B_{j-1}$, točka x_0 leži v B_0 in je $\Sigma_{1,x}$ prazna za vsak $x \in B_n \setminus B_{n-1}$.

Najprej z indukcijo po stratumih konstruiramo zvezen prerez. Za začetek razširimo naš prerez a_0 do zveznega prereza a_0' nad okolico B_0, kar ni težko, saj je množica Σ zaprta. Zdaj pa lahko uporabimo lemo 2.4.2. (a) induktivno po stratumih. Indukcijski korak je naslednji. Privzemimo, da smo že konstruirali zvezen prerez a_j' v W, definiran nad okolico množice B_j, ki je holomorfen na okolici x_0'. Po lemi 2.4.2. obstaja zvezen prerez a_{j+1} v $W|_{B_{j+1}}$, ki se ujema z a_j' na okolici B_j. Ker je Σ zaprta, je prerez a_{j+1} mogoče razširiti do zveznega prereza a_{j+1}' v W, ki je definiran nad neko okolico B_{j+1} in je holomorfen na okolici x_0'.

Rezultat je zvezen prerez a_n' v W nad $B_n(d')$, ki je holomorfen na okolici x_0'. Iz izreka 2.4.3. dobimo želen holomorfni prerez a (in C').

Primer 2. Naj bo zdaj $x_0' \in B_n(d) \setminus \overline{B_n(c)}$ in definirajmo $d' = (\|x_o'\| + c)/2$. Ker $\Sigma \cap V|_{B_n(d')}$ leži v $B_n(d') \times B_q(R)$ za nek dovolj velik $R > c$, lahko definiramo kar $C'(x) = (x, R+1)$ za $x \in B_n(d')$.

V obeh primerih prerez C' zadošča $\|C'(x')\| > c$ in v primeru 1 zadošča še $C'(x_0') = x_0$.

Zdaj pa iščemo holomorfen prerez $C : B_n(d) \to V \setminus \Sigma$ skozi predpisano točko, ki aproksimira C' nad $\overline{B_n(c)}$. Ideja je podobna kot v primeru 1. Naj bodo $g_1, \ldots, g_m : B_n(d) \to \mathbf{C}$ holomorfne funkcije z x_0' kot edino skupno ničlo. Prerez C iščemo v obliki

$$C(x') = (0, x_0'') + (x', \sum_1^m a_{1,j}(x')g_j(x'), \ldots, \sum_1^m a_{q,j}(x')g_j(x')),$$

kjer je $a = (a_{i,j})$ prerez trivialnega svežnja $B_n(d) \times \mathbf{C}^{m \times q}$. Definirajmo preslikavo

$$S_1 : B_n(d) \times \mathbf{C}^{m \times q} \to V,$$

s predpisom

$$S_1(x', a) := (0, x_0'') + (x', \sum_1^m a_{1,j}(x')g_j(x'), \ldots, \sum_1^m a_{q,j}(x')g_j(x'))$$

in naj bo $\Sigma_1 := S_1^{-1}(\Sigma)$. Preslikava $S_1 : B_n(d) \times \mathbf{C}^{m \times (q-1)} \setminus \Sigma_1 \to V \setminus \Sigma$ je surjektivna submerzija povsod, razen nad x_0'. Kot v primeru 1 je preslikava $S := pr_{\mathbf{C}^n} \circ S_1 : W := B_n(d) \times \mathbf{C}^{m \times q} \setminus \Sigma_1 \to B_n(d)$ submerzija s sprayem nad okolico vsake točke $x' \neq x_0'$.

Ker je C' holomorfen prerez nad $B_n(d')$, obstaja tak holomorfen prerez b' v $W|_{B_n(d')}$, da je $C'(x') = (0, x_0'') + (x, \sum_1^m b_{1,j}'(x')g_j(x'), \ldots, \sum_1^m b_{q,j}'(x')g_j(x'))$. Prerez b' je, če je U dovolj majhna, prerez $W|_{B_n(d')}$. Podobno kot v primeru 1 naj bo $B_n := B_n(d) \supset B_{n-1} \ldots \supset B_0 \neq \emptyset$ stratifikacija glede na število točk v $\Sigma_{x'}$, le da v tem primeru $\Sigma_{x'}$ ni prazna za $x' \in B_n \setminus B_{n-1}$. Ker je B_0 diskretna množica, je trivialno razširiti prerez b' do holomorfnega prereza b_0 nad okolic $B_0 \cup \overline{B_n((c + d')/2)}$. Če lemo 2.4.2. (b) uporabimo induktivno, dobimo zvezen prerez b_n v W, ki sovpada z b' nad okolico $B_0 \cup \overline{B_n((c + d')/2)}$. Prerez b_n je holomorfen na okolici $B_0 \cup B_n(c)$. Po izreku 2.4.3. (b) obstaja holomorfen prerez $b : B_n(d) \to W$ ki aproksimira b' nad $B_n(c)$. Prerez

$$C(x') = (0, x_0'') + (x, \sum_1^m b_{1,j}(x')g_j(x'), \ldots, \sum_1^m b_{q,j}(x')g_j(x'))$$

ima vse želene lastnosti. ♣

Opomba. Če je $n = 1$, lema velja za $q \geq 2$, ker je množica $pr_{\mathbf{C}}(\Sigma')$ diskretna in za konstrukcijo holomorfnega prereza nad $pr_{\mathbf{C}}(\Sigma')$ ni potrebno uporabiti h-principa na afinih podsvežnjih, za kar smo potrebovali $q - 1 \geq 2$. Za dokaz vložitvenega izreka z interpolacijo za $n = 1$ zato zadostuje $q \geq 2$, kar pa je znan rezultat ([ABT]).

2.5 Dokaz glavnega izreka

Dokaz izreka 2.1.1. Najprej bomo dokazali trditev (a) izreka 2.1.1. Privzemimo, da je $q \geq N$ in pišimo $Y = \{y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, $\varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Izberimo tako izčrpanje $\{P_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ mnogoterosti X s specialnimi analitičnimi poliedri, da je $\partial P_i \cap Y = \emptyset$ za vsak $i \in \mathbf{N}$ in $(P_{i+1} \backslash P_i) \cap Y = \{y_{i+1}\}$ za vsak $i \geq 2$ (modulo preštevilčenje y_i-jev). Naj bo $m_i := \|\varphi(y_i)\|$ in izberimo tako naraščajoče zaporedje števil $\{d_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, ki zadošča

(i) $d_1 > \max\{1, m_1, m_2\} + 1$,

(ii) $d_{i+1} > \max\{m_{i+2}, d_i\} + 1$ za $i \in \mathbf{N}$.

Ker je φ prava, gre zaporedje $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ v neskončnost (ko gre i v neskončnost) in prav tako zaporedje $\{d_i\}_{i \in \mathbf{N}}$. Če izberemo primeren koordinatni sistem v $\mathbf{C}^{n+q}$, lahko privzamemo, da je $m_i \geq 2$ za vsak i. Fiksirajmo skoraj pravo razširitev $H : X \to \mathbf{C}^n$ preslikave φ' iz posledice 2.3.1., ki zadošča

(1) $|H|_{\partial P_i} > d_i$ za vsak $i \in \mathbf{N}$, in

(2) $dim\{x \in X,\ rang_x H \leq n - i\} < 2([\frac{n+1}{2}] - i + 1)$ za $i = 1, \ldots, n$.

Za vsak $j \in \mathbf{N}$ izberimo take konstante a_j, b_j, c_j in e_j, da je $\max\{d_{j-1}, m_{j+1}\} < e_j < a_j < b_j < c_j < d_j$. Definirajmo Q_j kot unijo (končno mnogo) tistih povezanih komponent množice $H^{-1}(B_n(d_j))$, ki ležijo v P_j. Potem je $\{Q_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ normalno izčrpanje X z $(Q_j \setminus Q_{j-1}) \cap Y = \{y_j\}$. Preslikava $H : Q_j \to B_n(d_j)$ je prava za vsak $j \in \mathbf{N}$. Definirajmo:

$$\begin{aligned}
K_j &:= \{x \in Q_j,\ \|H(x)\| \leq a_j\}, \\
U_j &:= \{x \in Q_j,\ \|H(x)\| < c_j\}, \\
K_j' &:= \{x \in Q_{j+1} \setminus Q_j,\ \|H(x)\| \leq a_j\}, \\
U_j' &:= \{x \in Q_{j+1} \setminus Q_j,\ \|H(x)\| < c_j\}, \\
L_j &:= \{x \in Q_{j+1} \setminus Q_j,\ \|H(x)\| \leq \frac{m_{j+1}}{2}\}.
\end{aligned}$$

Očitno sta U_j in U'_j disjunktni odprti okolici K_j in K'_j po vrsti, $y_{j+1} \in K'_j$ in $L_j \subset K'_j$ za vsak $j \in \mathbf{N}$.

Iščemo tako holomorfno preslikavo $G : X \to \mathbf{C}^q$, da je $(H, G) : X \to \mathbf{C}^{n+q}$ prava holomorfna vložitev, ki razširi φ. Da bo (H, G) prava, zadošča, da je $\|G\|$ dovolj velika na množicah L_j (kjer je $\|H\|$ premajhna), recimo $\|G\|_{L_j} > \frac{m_{j+1}}{2}$ za vsak $j \in \mathbf{N}$. Potem bo $\|(H, G)\|_{Q_{j+1} \setminus Q_j} \geq \frac{m_{j+1}}{2}$ in ker gre zaporedje m_j v neskončnost, bo preslikava (H, G) prava. Preslikava G bo limita zaporedja holomorfnih preslikav $G^{(j)}$.

Z indukcijo bomo konstruirali tako zaporedje holomorfnih preslikav

$$G^{(j)} : \{x \in U_j,\ \|H(x)\| < b_j\} \to \mathbf{C}^q,\ j \in \mathbf{N}$$

in tako zaporedje pozitivnih realnih števil, $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ da velja:

(1) $G^{(j)}$ zadošča $\alpha(b_j)$,$\beta(b_j)$, $\gamma(b_j)$ in $\delta(b_j)$ iz izreka 2.4.1.;

(2) če je $G : \{x \in U_j,\ \|H(x)\| < b_j\} \to \mathbf{C}^q$ taka holomorfna preslikava, da je $\|G(x) - G^{(j)}(x)\| \leq \varepsilon_j$ za vsak $x \in K_j$, potem G zadošča $\alpha(e_j)$, $\beta(e_j)$ in $\delta(e_j)$;

(3) $1 \geq \varepsilon_{j-1} \geq \varepsilon_j > 0$ za $j \geq 2$;

(4) za $G^{(j+1)} = (G_1^{(j+1)}, \ldots, G_q^{(j+1)})$ je $\|G^{(j+1)}(x)\| > \frac{m_{j+1}}{2} - 2^{-j}$ za vsak $x \in L_j$;

(5) $\|G^{(j+1)}(x) - G^{(j)}(x)\| \leq 2^{-j}\varepsilon_j$ za vsak $x \in K_j$.

$\underline{j = 1}$. Izbrati moramo tako preslikavo $G^{(1)}$ in ε_1, da bosta izpolnjena pogoja (1) in (3). Izrek 2.4.1. za $(r, R) = (b_1, c_1)$ in $X^{c_1} := U_1$ nam da holomorfno preslikavo $G^{(1)} : \{x \in U_1,\ \|H(x)\| < b_1\} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\alpha(b_1) - \delta(b_1)$. Ker sta pogoja 'biti regularen in injektiven na kompaktni množici' in 'izogniti se diskretni množici nad kompaktom' odprta, obstaja tak $\varepsilon_1 \in (0, 1)$, da velja (2).
$\underline{j \to j + 1}$. Recimo, da smo ε_j in $G^{(j)}$ že izbrali. Do preslikave $G^{(j+1)}$ pridemo v dveh korakih. V prvem konstruiramo tako holomorfno preslikavo $\tilde{G} : \{x \in U'_j, \|H(x)\| < b_j\} \to \mathbf{C}^q$, da $(H, \tilde{G})$ vloži to množico v $V := B_n(b_j) \times \mathbf{C}^q$ na tak način, da slika ne seka množice $\Sigma = (H, G^{(j)})(\{x \in U_j, \|H(x)\| < b_j\})$ (slike prejšnje vložitve). Preslikavi $\tilde{G}$ in $G^{(j)}$ skupaj sestavljata vložitev množice $\{x \in Q_{j+1},\ \|H(x)\| < b_j\}$. V drugem koraku uporabimo izrek 2.4.2. za aproksimacijo te preslikave s preslikavo $G^{(j+1)} : \{x \in U_{j+1},\ \|H(x)\| < b_{j+1}\} \to \mathbf{C}^q$, ki ima želene lastnosti.

Najprej pojasnimo konstrukcijo preslikave $\tilde{G}$. Po izreku 2.4.1. za $(r, R) = (b_j, c_j)$ in X^{c_j} kot unijo tistih končno mnogo povezanih komponent množice U'_j, ki sekajo množico $\{x \in U'_j,\ \|H(x)\| \leq b_j\}$, obstaja holomorfna preslikava $\overline{G} : \{x \in U'_j,\ \|H(x)\| < b_j\} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\alpha(b_j)$ in $\beta(b_j)$. Problem z $\overline{G}$ je, da slika $(H, \overline{G}) : \{x \in U'_j,\ \|H(x)\| < b_j\} \to \mathbf{C}^{n+q}$ lahko seka $\Sigma := (H, G^{(j)})(\{x \in U_j,\ \|H(x)\| < b_j\})$. Da bi ju potegnil narazen, človek najprej poskusil dodati dovolj veliko konstanto eni od komponent preslikave $\overline{G}$, kar pa seveda ne gre, saj moramo zadostiti interpolacijskemu pogoju. Namesto tega s pomočjo leme 2.4.3. poiščemo holomorfen prerez $C : B_n(b_j) \to V \setminus \Sigma$. Ko pa enkrat tak prerez imamo, lahko sliko $\overline{G}$ stisnemo v neko majhno cevasto okolico C, ki se tudi ogne Σ; vzamemo lahko kar konveksno kombinacijo $\tilde{G}(x) := C(H(x)) + \delta(\overline{G}(x) - \overline{G}(y_{j+1}))$.

Očitno sveženj $pr_{\mathbf{C}^n} : V \to B_n(b_j)$, Σ in $x_0 = (x'_0, x''_0) := \varphi(y_{j+1})$ ustrezajo predpostavkam 2.4.3., zato obstaja holomorfen prerez $C : B_n(b_j) \to V \setminus \Sigma$ z lastnostmi

(i) $C(x'_0) = x_0$ in

(ii) $\|C(x)\| > \frac{\|x_0\|}{2} = \frac{m_{j+1}}{2}$ za vsak $x \in B_n(\frac{m_{j+1}}{2})$.

Če C malo perturbiramo, lahko dosežemo, da je $(C(B_n(b_j))\setminus\{x_0\}) \cap \varphi(Y \setminus \{y_1, \ldots, y_{j+1}\}) = \emptyset$. Izberimo število $r_j \in (a_j, b_j)$. Obstaja tak $\delta > 0$, da za

$$\tilde{G}(x) := C(H(x)) + \delta[\overline{G}(x) - \overline{G}(y_{j+1})]$$

velja:

$$\begin{aligned}
&\Big[(H, \tilde{G})(\{x \in U'_j,\ \|H(x)\| < r_j\})\Big] \cap \big[(H, G^{(j)})(\{x \in U_j,\ \|H(x)\| < r_j\})\big] = \emptyset,\\
&\|\tilde{G}(x)\| > \frac{m_{j+1}}{2} \text{ za vsak } x \in L_j \text{ in}\\
&(H, \tilde{G})(\{x \in U'_j \setminus \{y_{j+1}\},\ \|H(x)\| \leq b_j\}) \cap \varphi(Y \setminus \{y_1, \ldots, y_{j+1}\}) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Pišimo $A = \{x \in U_{j+1},\ \|H(x)\| < r_j\}$ in naj bo $G' : A \to \mathbf{C}^q$ preslikava, definirana z

$$G'(x) := \begin{cases} G^{(j)}(x), & x \in U_j \cap A, \\ \tilde{G}(x), & x \in U'_j \cap A. \end{cases}$$

Jasno je, da je preslikava (H, G') injektivna in regularna na A (po konstrukciji $\tilde{G}$) in da je $\|G'(x)\| > \frac{m_{j+1}}{2}$ za vsak $x \in L_j$. Iz definicije $\tilde{G}$ sledi, da je preslikava (H, G') razširitev φ z $A \cap Y$ na A in $((H, G')(A \setminus Y)) \cap (\varphi(Y \setminus A)) = \emptyset$, kar pomeni, da G' uztreza predpostavkam 2.4.2. za $(r, r', R) := (r_j, b_{j+1}, c_{j+1})$ in množico U_{j+1} kot unijo končnega števila povezanih komponent množice $H^{-1}(B_n(c_{j+1}))$. Zato lahko preslikavo G' na množici $\{x \in U_{j+1},\ \|H(x)\| < r_j\}$ poljubno dobro aproksimiramo s preslikav $G^{(j+1)} : \{x \in U_{j+1},\ \|H(x)\| < b_{j+1}\} \to \mathbf{C}^q$, ki zadošča $\alpha(b_{j+1})$, $\beta(b_{j+1})$, $\gamma(b_{j+1})$ in $\delta(b_{j+1})$. Izberimo $G^{(j+1)}$ tako blizu G', da za vsak $x \in U_{j+1}$ z $\|H(x)\| \leq a_j$ velja $\|G^{(j+1)}(x) - G'(x)\| \leq 2^{-j}\varepsilon_j$. Ker G' in $G^{(j)}$ sovpadata na množici $A \cap U_j$, preslikava $G^{(j+1)}$ zadošča (5). Za vsak $x \in L_j$ je

$$|G^{(j+1)}(x)| \geq |G'(x)| - |G^{(j+1)}(x) - G'(x)| > \frac{m_{j+1}}{2} - 2^{-j}\varepsilon_j > \frac{m_{j+1}}{2} - 2^{-j},$$

(spomnimo se, da je $\varepsilon_j \leq 1$) kar pomeni, da velja (4). Podobno, kot v primeru $j = 1$, obstaja tak $\varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j$, da velja tudi (2).

Zaradi (3) in (5) je preslikava $G = (G_1, \ldots, G_q) : X \to \mathbf{C}^q$,

$$G(x) := \lim_{j \to \infty} (G^{(j)}(x))$$

holomorfna in ker preslikave $G^{(j)}$ zadoščajo $\gamma(b_j)$, je preslikava $(H, G^{(j)})$ razširitev φ na $U_j \cap H^{-1}(B_n(b_j))$. Iz (3) in (5) sledi, da je

$$\|G(x) - G^{(j)}(x)\| \leq \varepsilon_j, \; x \in \{x' \in U_j, \; \|H(x')\| \leq a_j\}$$

za vsak $j \in \mathbf{N}$. Zaradi (2) preslikava G zadošča pogojema $\alpha(e_j)$, $\beta(e_j)$ za vsak $j \in \mathbf{N}$, kar pomeni, da je (H, G) injektivna imerzija. Iz pogojev (3)$-$(5) sledi, da je $\|G(x)\| > \frac{m_{j+1}}{2} - 1$ za vsak $x \in L_j$, torej je (H, G) prava. S tem je trditev (a) iz izreka 2.1.1. dokazana.

Dokaz trditve (b) je podoben, vendar precej enostavnejši. V tem primeru se nam ni treba ukvarjati z injektivnostjo, natančneje s pogojema $\alpha(r)$ in $\delta(r)$, in za vsak $j \in \mathbf{N}$ lahko najdemo holomorfen prerez C (tiskega, ki je nad L_j dovolj velik in gre skozi predpisano točko kot v lemi 2.4.3.) z aproksimacijo primerne konstante nad L_j. ♣

Literatura

[ABT] Aquistapace, F., Broglia F., Tognolli, A.: A Relative Embedding Theorem for Stein Spaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, str. 507-522 (1975)

[Bi] Bishop, E.: Mappings of partially analytic spaces. Amer. J. Math. 83, str. 209 -242 (1961)

[BFo] Buzzard, G., Forstnerič, F.: An interpolation theorem for holomorphic automorphisms and embeddings in $\mathbf{C}^n$. J. Geom. Anal. 10, (2000)

[EG1] Eliashberg, Y. in Gromov, M.: Nonsingular mappings of Stein manifolds. Funct. Anal. and Appl. 5, str. 156-157 (1971)

[EG2] Eliashberg, Y. in Gromov, M.: Embeddings of Stein manifolds. Annals of Math. 136, str. 123-135 (1992)

[Fi] Fischer, G.: Complex Analytic Geometry. LNM 538, Springer-Verlag (1976)

[FG] Fornaess, J.E., Gavosto, E.: The Cauchy Riemann equation on singular spaces. Duke Math. J. Vol. 93, No.3 (1998)

[Fr1] Forster, O.: Some remarks on paralellizable Stein manifolds. Bull. Amer. Math. Soc.73, str. 712-716 (1967)

[Fr2] Forster, O.: Plongements des varietes de Stein. Comm. Math. Helv. 45, str. 170-184 (1970)

[FR] Forster, O., Ramspott, K.J.: Analytische Modulgarben und Endromisbündel. Invent. Math. 2, str. 145-170 (1966)

[FL] Forstnerič, F. in Low, E.: Global Holomorphic Equivalence of Smooth Submanifolds. Indiana Univ. Math. J., Vol. 46, str. 133 -153 (1997)

[Fo] Forstnerič, F.: Interpolation by holomorphic automorphisms and embeddings in $\mathbf{C}^n$. J. Geom. Anal., no.1, str. 93-118 (1999)

[FP1] Forstnerič, F., Prezelj, J.: The Oka's principle for sections of holomorphic fiber bundles with sprays. Math Ann 317 (2000) 1, 117-154

[GS] Globevnik, J., Stensones, B.: Holomorphic embeddings of planar domains into $\mathbf{C}^2$. Math. Ann. no. 4, str. 579-597 (1995)

[GG] Golubitsky, M., Guillemin, V.: Stable mappings and their singularities. Grad. Texts in Math. 14, Springer - Verlag (1973)

[Gra] Grauert, H.: Holomorphe funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. 133, str. 450 - 472 (1957)

[GR1] Grauert, H. in Remmert, R.: Theory of Stein Spaces. Grundl. Math. Wiss. 227, Springer-Verlag (1977)

[GR2] Grauert, H. in Remmert, R.: Coherent analytic sheaves. Grundl. Math. Wiss. 265, Springer-Verlag (1984)

[Gr] Gromov, M.: Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. J. of the AMS 2, p. 851-897 (1989)

[GuR] Gunning, C.R., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables. Prentice - Hall (1965)

[Ha1] Hamm, H.: Zum Homotopietyp Steinscher Räume. J. Reine Angew. Math. 338, str. 121-135 (1983)

[Ha2] Hamm, H.: Zum Homotopietyp q-vollständiger Räume. J. Reine Angewandte Math. 364, str. 1-9 (1986)

[Hen] Henkin, G.M.: Continuation of bounded holomorphic functions from submanifolds in general position in a strictly pseudoconvex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36, str. 540-657 (1972)

[HL] Henkin, G.M., Leiterer, J.: The Oka-Grauert principle without induction over the basis dimension. Math. Ann. 311, str. 71-93 (1998)

[HL1] Henkin, G.M. in Leiterer, J.: Theory of functions on Complex manifolds. Matematische monographien, Band 60, Akademie - Verlag, Berlin (1984)

[Na] Narasimhan, R.: Imbedding of holomorphically complete spaces. Amer. J. Math. 82, str. 917-934 (1960)

[Pr] Prezelj, J.: Vložitve Steinovih mnogoterosti v afine prostore minimalne dimenzije. Magistrsko delo (1998)

[RR] Rosay, J. -P., Rudin, W.: Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 310, str. 47-86 (1988)

[Scn] Schneider, M.: Tubenumgebungen Steinshcer Räume. Manuscripta Meth. 18, str. 391-397 (1976)

[Sch1] Schürmann, J.: Einbettungen Steischer Räume in affine Räume minimaler Dimension. Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, 3.Serie, Heft 7 (1992)

[Sch2] Schürmann, J.:
Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension
Math. Ann. 307, p. 381-399 (1997)

[Siu] Siu, Y.T.: Every Stein subvariety admits a Stein neighbourhood. Invent. Math. 38, str. 89-100 (1976)

[Wie] Wiegmann, W.: Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume. Invent. Math. 1, str. 229-242 (1966)

IZJAVA

Izjavljam, da je disertacija avtorsko delo.

Jasna Prezelj