Sonderabdruck aus der Monatsschrift «Die Erdbebenwarte», Jahrg. VII, 1908.

Über die Bestimmung dynamischer Elastizitätskonstanten.

Von **M. P. Rudzki.**

Im sechsten Jahrgang dieser Zeitschrift (S. 65 bis 73) habe ich die Bestimmung statischer Elastizitätskonstanten besprochen. In diesem Aufsatze werde ich mich den dynamischen Elastizitätskonstanten zuwenden. Um diese letzten zu bestimmen, muß man natürlich dynamische Methoden verwenden, man kann nämlich dynamische Elastizitätskonstanten aus Schwingungszeiten schwingender Stäbe ermitteln.

Anweisungen zu den Experimenten mit schwingenden Stäben werde ich nicht geben, dieselben können in speziellen Lehrbüchern und Aufsätzen* gefunden werden. Nur ganz allgemein will ich bemerken, daß diese Experimente nicht leicht sind. Schon die Bestimmung der Schwingungszeit, welche gewöhnlich indirekt aus der Länge eines mitschwingenden Fadens berechnet wird, bietet manche Schwierigkeit.

Außer den Schwierigkeiten technischer Natur begegnet man auch theoretischen Schwierigkeiten. Man darf nicht vergessen, daß eine vollständige Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe endlicher Dicke und Breite eigentlich nicht existiert. Man muß sich mit vereinfachten Differentialgleichungen begnügen, die nur die wichtigsten Faktoren berücksichtigen. Es existieren zwar Differentialgleichungen, in denen gewisse sekundäre Faktoren berücksichtigt werden, sie flößen aber kein besonderes Vertrauen ein. Bei einer eingehenden Diskussion findet man Widersprüche, auch ist es leicht zu erkennen, daß unter den Größen derselben Ordnung einige berücksichtigt, andere über Bord geworfen werden. So z. B. wird in der Theorie der Biegungsschwingungen nur die Korrektion wegen der sogenannten rotatorischen Trägheit eingeführt, während doch andere Faktoren existieren, deren Wirkung mit der Wirkung der genannten Trägheit ganz vergleichbar ist.

Infolgedessen habe ich mich entschlossen, nur die einfachsten Differentialgleichungen zu gebrauchen, was um so mehr gestattet erschien, als die Korrektionen einen merklichen Einfluß nur auf Perioden höherer

* Speziell mit Gesteinstäben hat Kusakabe Versuche angestellt. Man vergl. darüber seinen Aufsatz unter dem Titel: Kinetic measurements of the Modulus of Elasticity. Journal of the College of Sc. Tokyo. Bd. XX, Art. 10, S. 1—29. — Man vergl. ferner: W. Voigt, Bestimmung der Konstanten der Elastizität ..... Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XXXVIII (1892).

wo
$$M_1 = G - \frac{E_1^2}{E - C} \text{ den Modul,}$$

ϱ die Dichte und

$$k_y^2 = \frac{\int x^2\,dx\,dy}{\int dx\,dy} = \frac{D.B}{12}$$

den Quadrat des Schwingungsradius bezeichnet. Dabei, wie man leicht erraten kann, bezeichnet D die Dicke, B die Breite des Stabes.

Die Bedingungen am festgeklemmten Ende*

$$z = 0$$

sind:
$$u = 0 \qquad \frac{du}{dz} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV}$$

Am freien Ende, wo
$$z = L$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \qquad \frac{d^3u}{dz\,dt^2} - \frac{M_1}{\varrho}\frac{d^3u}{dz^3} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{V}$$

Das Glied
$$k_y^2 \frac{d^4u}{dz^2\,dt^2}$$

in der Differentialgleichung III kann** vernachlässigt werden, wenn D und B gegenüber L klein sind, denn es hat wenig Einfluß auf die Periode des Grundtones sowie der nächsten Obertöne. Die genannte Vereinfachung ist um so mehr gestattet, als die Gleichung III ohnehin nicht genau ist, es fehlen in derselben kleine Glieder von derselben Größenordnung wie

$$k_y \frac{d^4u}{dz^2\,dt^2}$$

Somit werden wir weiter die vereinfachte Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2 \frac{d^4u}{dz^4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III bis}$$

wo der Kürze halber

$$a^2 = M_1 \frac{k_y^2}{\varrho} = \left[G - \frac{E_1^2}{E - C}\right] \frac{k_y^2}{\varrho}$$

gesetzt wurde, betrachten. Dabei müssen wir bemerken, daß statt der Bedingungen V jetzt am freien Ende $z = L$ die Bedingungen

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \qquad \frac{d^3u}{dz^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V bis}$$

zur Geltung kommen.

---

* Natürlich darf z vom Orte der Klemmung gerechnet werden.

** Eine Diskussion der vollständigen Gleichung III und ihrer Integrale befindet sich bei Searle. Phil. Magazine, VI. Ser. Bd. 14, Nr. 79. Juli 1907, p. 35—60.

3.) Man schneidet ein Prisma so aus, daß seine Längsachse den Winkel Θ mit der Symmetrieachse bildet. Während es bei den Experimenten 1 und 2 ganz gleichgültig war, wie die zwei anderen Dimensionen orientiert waren, hängt jetzt die Gestalt der Differentialgleichung von der Orientation der Dicke und Breite ab. Vernachlässigt man aber die kleinen Glieder, so verfällt man wieder auf die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2 \frac{d^4u}{dz^4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIII}$$

nur hat a^2 wieder eine andere Bedeutung, es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} a^2 = \frac{k_y{}^2}{\varrho}\Big[\frac{1}{M_1} cos^4\,\Theta + sin^2\,\Theta \,.\, cos^2\,\Theta\left(\frac{1}{A} - \frac{E_1}{G(E-C) - E_1{}^2}\right) + \\ + \frac{1}{M_2} sin^4\,\Theta\Big] \end{aligned}\right\} \text{XIV}$$

Setzt man z. B.

$$\Theta = 45^0$$

dann kommt

$$a^2 = \frac{k_y{}^2}{4\varrho}\left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{A} - \frac{E_1}{G(E-C) - E_1{}^2}\right] \quad \ldots \quad \text{XV}$$

Wie man a^2 aus der Schwingungsperiode bestimmt, was die Symbole $k_y{}^2$ und ϱ bedeuten, das braucht nicht mehr wiederholt zu werden.

Wir sehen somit, daß die Versuche mit Biegungsschwingungen drei Funktionen der elastischen Konstanten zu bestimmen gestatten, nämlich: M_1, M_2 und

$$\frac{1}{A} - \frac{E_1}{G(E-C) - E_1{}^2}$$

Da fünf Konstanten zu bestimmen sind, brauchen wir noch zwei Gleichungen. Um dieselben zu erhalten, muß man zu Versuchen mit Torsionsschwingungen greifen.

Torsionsschwingungen.

1.) Versetzt man einen Stab, dessen Längsachse mit der Symmetrieachse des Gesteins zusammenfällt, in Torsionsschwingungen um die Längsachse, so kann man A bestimmen. Bezeichnet man nämlich den Torsionswinkel mit τ, dann lautet die Differentialgleichung, welche diese Schwingungen beschreibt,

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\tau}{dz^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XVI}$$

wobei b^2 nur die Konstante A enthält. Am einfachsten gestaltet sich die Beziehung zwischen b und A, wenn man, was auch aus anderen Gründen vorteilhaft ist, einen kreisrunden Zylinder verwendet, denn es wird dann

$$b^2 = \frac{A}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XVII}$$

und die Konstante A bestimmt sich aus der Periode T mit Hilfe der Gleichung

$$A = \varrho \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XVIII}$$

2.) Nehme man jetzt wieder einen kreisrunden Zylinder, dessen Längsachse aber normal zur Symmetrieachse des Gesteins steht. Die Differentialgleichung ist wieder

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = b^2 \frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$\text{aber} \quad b^2 = \frac{2AC}{\varrho(A+C)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIX}$$

$$\text{und} \quad \frac{2AC}{A+C} = \varrho \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XX}$$

Die Gleichungen XVIII und XX liefern A und C. Sobald diese Konstanten bekannt sind, kann man aus IX, XII und XV die übrigen drei Konstanten E, G und E_1 berechnen. Sind nämlich M_1, M_2 und sagen wir

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{A} - \frac{E_1}{G(E-C) - E_1^2} \quad \ldots \quad \text{XXI}$$

direkt aus Versuchen bekannt und setzt man noch der Kürze halber

$$\frac{E_1}{G(E-C) - E_1^2} = K = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{1}{A} - \frac{1}{D} \quad \ldots \quad \text{XXII}$$

so erhält man nach leichten Rechnungen:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{C^2[K^2 M_1 M_2 - 4]}{M_2 + C(K^2 M_1 M_2 - 4)} \\ E_1 &= -\frac{CKM_1 M_2}{M_2 + C(K^2 M_1 M_2 - 4)} \\ G &= \frac{M_1(M_2 - 4C)}{M_2 + C(K^2 M_1 M_2 - 4)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{XXIII}$$

Dilatationale (extensionale) Schwingungen lassen wir außer Betrachtung, da sie nichts anderes als die Biegungsschwingungen liefern.

Bemerkung. Die Schwingungsperiode ist überall als volle Periode verstanden, also die Zeit eines vollen Hin- und Herganges.

Buchdruckerei Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg, Laibach