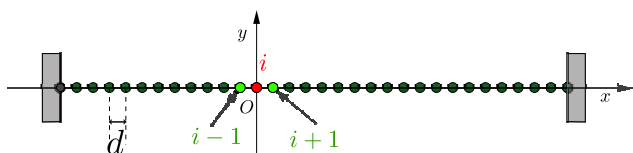


Valovni vozli na kvadratni opni



ANDREJ LIKAR

→ Na poti do velike fizikalne predavalnice so postavili začasno pregrado - med količka so napeli tanjšo verigo. Nisem si mogel kaj, da je pri hoji ne bi rahlo udaril ob količku in opazoval val, ki se je širil vzdolž verige, se na oddaljenemu koncu odbil in prihitel nazaj. Valovanje je pač pojav, ki nas vedno znova prevzame. Ko pa se zavemo, da so svetloba, vseh vrst drugih elektromagnetnih valov, zvok v zraku in snoveh, seizmično gibanje zemeljske skorje, pojavi na vodni gladini in skrivnostno gibanje mikroskopskih delcev snovi tudi valovanja, se zavemo, da valovanje ni le zanimivo, je v jedru fizike. Pa se poigrajmo z valovanjem na nizu in v mrežo medsebojno povezanih kroglic. Poskusi s praviimi kroglicami bi bili prezahtevni, zato bomo v igro pritegnili računalnik.

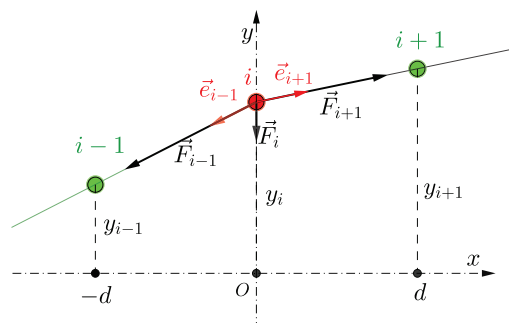


SLIKA 1.

Niz elastično spetih kroglic med nepremičnima stenama.

Enako velike kroglice v mislih povežemo v niz z elastično vrvico. Razdalja d med sosednjima kroglicama naj bo povsod enaka. Niz nekoliko napnemo in krajiščni kroglici pritrdimo med nepremični steni, glej Sliko 1. Teža niz nekoliko upogne, a to bomo zanemarili. Sedaj nekaj kroglic malo zmotimo, izmaknemo jih navpično iz ravnotežne lege in pustimo,

da se gibljejo po svoje. Kako se bodo kroglice v nizu odzvale na to motnjo?



SLIKA 2.

K izpeljavi zakona gibanja kroglic v nizu.

Če želimo ponazoriti gibanje kroglic v nizu z računalnikom, moramo poznati enačbo njihovega gibanja. Ta bo seveda sledila iz Newtonovega zakona, ki pravi, da je pospešek izbrane kroglice sorazmerno vsoti vseh sil, ki nanjo delujejo. Na Sliki 2 je prikazana izbrana, denimo i -ta kroglica, ter njeni sosedi z oznakama $i - 1$ in $i + 1$. Edino ti dve sosedi preko elastične vrvice delujeta na izbrano kroglico i . Vsote njunih sil s slike ni težko določiti. Enotska vektorja (vektorja brez enote in dolžino 1, nakazujeta le smer) od kroglice i proti sosedama sta:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{i-1} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}} (-d, y_{i-1} - y_i)^T, \\ \vec{e}_{i+1} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} (d, y_{i+1} - y_i)^T. \end{aligned}$$

Odmike kroglic v navpični smeri smo označili z y_{i-1} , y_i in y_{i+1} , T pa je znak za transpozicijo vrstice v

stolpec. Normirna faktorja:

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}}$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

poskrbita, da sta $\vec{e}_{i-1}$ in $\vec{e}_{i+1}$ res enotska vektorja. Poenostavimo ju, saj so odmiki y majhni, njihove razlike pa še veliko manjše in jih zanemarimo, zato je ta faktor kar enak d^{-1} . Sili na kroglico i sta torej preprosto

$$\vec{F}_{i-1} = F_0(-1, \frac{y_{i-1} - y_i}{d})^T,$$

$$\vec{F}_{i+1} = F_0(1, \frac{y_{i+1} - y_i}{d})^T.$$

S F_0 smo označili velikost sile, s katero napnemo kroglični niz. Razdalje med sosednjimi kroglicami so zaradi njihovih odmikov iz ravnovesne lege sicer nekoliko večje kot d , a to tudi zanemarimo. Njena vsota je torej enaka:

$$\vec{F} = F_0(0, \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{d})^T.$$

Vsota sil ima od nič različno le navpično komponento, ki ima velikost

$$F_i = \frac{F_0}{d}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}).$$

Ko poznamo silo na kroglico, lahko določimo njen pospešek:

$$a_i = \frac{F_i}{M} = \frac{F_0}{Md}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}). \quad (1)$$

Z M smo označili maso kroglice.

Gibanju kroglic bomo sledili v zaporednih trenutkih $t_m = m\Delta t$ s časovnim presledkom med njimi Δt . Odmik kroglice i v času t_m bomo označili takole:

$$y_i(t_m = m\Delta t) \equiv y_i^m.$$

Sposodili smo si mesto, kjer sicer postavimo eksponent, ker eksponentov pri odmikih ne bomo potrebovali. Za določitev pospeška potrebujemo zaporedni

hitrosti kroglice v časih t_{m-1} in t_{m-2} . Hitrost kroglice izračunamo iz zaporednih odmikov v sosednjih časih. Tako v času

$t_{m-2} = (m-2)\Delta t$ uporabimo odmika y_i^{m-1} in y_i^{m-2} :

$$v_i^{m-2} = \frac{y_i^{m-1} - y_i^{m-2}}{\Delta t},$$

v času $t_{m-1} = (m-1)\Delta t$ pa odmika y_i^m in y_i^{m-1} :

$$v_i^{m-1} = \frac{y_i^m - y_i^{m-1}}{\Delta t}.$$

Pospešek pa je potem:

$$a_i^{m-1} = \frac{v_i^{m-1} - v_i^{m-2}}{\Delta t}$$

Zapisano z odmiki je pospešek:

$$a_i^{m-1} = \frac{y_i^m - 2y_i^{m-1} + y_i^{m-2}}{(\Delta t)^2}. \quad (2)$$

Sedaj imamo vse potrebno, da zaporedoma izračunavamo lege kroglic y_i^m iz njihovih prejšnjih dveh leg in leg sosednjih kroglic. Osnovno Newtonovo enačbo:

$$a_i^{m-1} = \frac{F_i^{m-1}}{M},$$

zapišemo z odmiki y iz enačb (1) in (2) :

$$y_i^m = 2y_i^{m-1} - y_i^{m-2} + \frac{F_0\Delta t^2}{Md}(y_{i-1}^{m-1} - 2y_i^{m-1} + y_{i+1}^{m-1}). \quad (3)$$

Tako so na desni strani enačbe vse lege znane. Ko izračunamo za vse kroglice lege y_i^m , $i = 1, 2, \dots, K$, potisnemo m za ena dalje in ponovno izračunamo novo lego y_i^{m+1} v času t_{m+1} . Odmikom najpregledneje sledimo, če si vsako naslednjo izračunano lego izrisujemo na zaslon, prejšnjo lego pa zberemo.

Po mili volji se lahko igramo in opazujemo odmike kroglic v zaporednih časih, potem ko smo nekatere nekoliko odmaknili od njihove ravnovesne lege. Vidimo, da se motnja širi proti obema stenama. Opisani račun zelo dobro opiše valovne pojave na nizu kroglic, zato lahko mirno rečemo, da je enačba (3) "valovna enačba". Z manjšanjem razdalje d med kroglicami in ustreznim manjšanjem njihove mase M se

