PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 6
Strani 326–331

Marija Vencelj:

PREPROSTA RAZMIŠLJANJA O ČETRTI DIMENZIJI

Ključne besede: matematika, geometrija, dimenzije prostorov, Graham Denby Fitch, Evklidizacija četrte dimenzije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1458-Vencelj.pdf

PREPROSTA RAZMIŠLJANJA O ČETRTI DIMENZIJI

Pred leti smo v članku Tridimenzionalne težave gospoda Ploščaka (Presek, 23. letnik, št. 5, str. 257–263) že premišljali o mentalni sliki štiridimenzionalnega prostora, v katerega je vgrajen naš tridimenzionalni svet. Pomagali smo si s predstavo o naporih, ki bi jih imela dvodimenzionalna bitja, živeča v dvodimenzionalni deželi, katerih gibanje in opazovanje je omejeno samo na ravnino, če bi si hotela predstavljati tridimenzionalne predmete.

Idejo smo povzeli po knjigi Flatland Edwina A. Abbota, ki je izšla v viktorijanski Angliji leta 1884. Seveda so matematiki tedaj že poznali pojem poljubne dimenzije prostora. Toda to je bil pojem abstraktne teorije vektorskih prostorov, ni pa bilo preproste poljudne razlage zanj.

Januarja leta 1909 je neimenovani darovalec položil pri založbi Scientific American 500 dolarjev (kar je bil za tiste čase lep denar), ki jih je namenil kot nagrado najboljšemu eseju, ki bi na poljuden način približal laičnemu bralcu pojem četrte dimenzije. Mišljena je bila seveda četrta dimenzija takega prostora, katerega del je naš tridimenzionalni prostor. Dolžina eseja je bila omejena na 2500 besed.

Na razpis je pod psevdonimi prispelo kar 245 esejev. Poslali so jih iz Združenih držav Amerike, Turčije, Avstrije, Holandije, Indije, Avstralije, Francije in Nemčije. Očitno je šlo za privlačno temo, o kateri so avtorji premišljevali že tudi prej.

Eseje sta ocenila prof. Manning z Brown University in prof. Mitchel s Columbia University. Julija 1909 so v Scientific American objavili zmagoviti esej in tri, ki so prejeli častno nagrado. Med preostalimi jih je Henry P. Manning izbral še nekaj, ki so po njegovem zaslužili, da se ohranijo, in ki problem opisujejo s čimbolj različnih vidikov. Skupaj z nagrajenimi štirimi jih je izdal v knjižici The Fourth Dimension Simply Explained, ki jo je opremil tudi z nekaj deset strani dolgim uvodom.

Nagrado 500 dolarjev je prejel podpolkovnik inženirskih enot ZDA Graham Denby Fitch za esej Evklidizacija četrte dimenzije. Ogledali si bomo in dodatno komentirali nekaj njegovih idej. Lahko si preberete še Manningovo knjižico, katere izvod hrani tudi Matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Fitch začenja svojo razpravo z ugotovitvijo, da mentalna slika četrte dimenzije ni možna. Iz nadaljevanja je jasno, da mu matematični pojem dimenzije prostora ni bil tuj. Za osvojitev intuitivne delne predstave o četrti dimenziji namreč predlaga analogijo, s katero na poljuden način s četverkami realnih števil pravzaprav uvede pojem 4-elementne baze. Štiridimenzionalni prostor tudi opremi z 'evklidsko' geometrijo, v kateri je npr. analogon 5. aksiomu evklidske ravnine naslednje zaporedje lastnosti:

- V ravnini poteka skozi dano točko dane premice ena sama pravokotnica na to premico.
- V 3-dimenzionalnem prostoru poteka skozi dano točko dane premice neskončno mnogo pravokotnic na to premico. Te premice tvorijo ravnino (to je 2-dimenzionalni prostor), ki je pravokotna na dano premico.
- V 4-dimenzionalnem prostoru poteka skozi dano točko dane premice neskončno mnogo ravnin, ki so pravokotne na dano premico. Te ravnine tvorijo 3-dimenzionalni prostor, pravokoten na dano premico.
- 3-dimenzionalni prostor je lahko tudi pravokoten na ravnino ali na drug 3-dimenzionalni prostor.
- Dve ravnini sta lahko medsebojno pravokotni na dva različna načina. Če ležita v istem 3-dimenzionalnem prostoru in sta v njem pravokotni v običajnem smislu, gre za nepopolno pravokotnost. Ravnini pa sta popolnoma pravokotni, če je vsaka premica ene ravnine pravokotna na vsako premico druge ravnine.

Lega posamezne točke je v ravnini določena (površno povedano) z razdaljama od dveh pravokotno se sekajočih premic in v našem tridimenzionalnem prostoru z razdaljami od treh paroma pravokotnih ravnin. Po Fitchu je zato analogno lega točke v 4-dimenzionalnem prostoru določena z njenimi razdaljami od štirih paroma pravokotnih 3-dimenzionalnih prostorov. Te razdalje merimo vzdolž štirih paroma pravokotnih premic, ki, po dve in dve, določajo 6 paroma pravokotnih ravnin, po tri in tri pa 4 paroma pravokotne 3-dimenzionalne prostore.

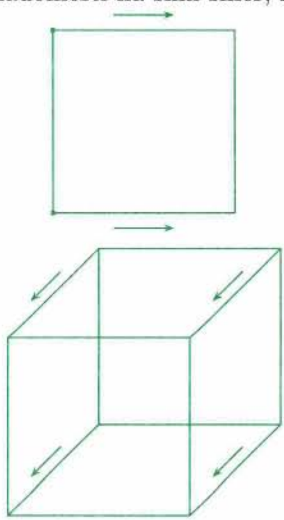
Fitch uvede tudi pojem geometrijskega telesa v 4-dimenzionalnem prostoru. Telesa v našem tridimenzionalnem prostoru so omejena z ravnimi ali krivimi ploskvami, telesa v 4-dimenzionalnem prostoru pa so deli tega prostora, omejeni 3-dimenzionalnimi ravnimi ali ukrivljenimi hiperploskvami. Hiperóbla je množica vseh točk, ki so v 4-dimenzionalnem prostoru enako oddaljene od dane točke, središča hiperóble. Njeni preseki z ravninami so krogi, preseki s 3-dimenzionalnimi prostori pa naše oble. Če bi hipersfera s polmerom r potovala skozi naš prostor, bi jo dojeli kot oblo, katere polmer bi najprej postopoma naraščal od 0 do r in nato postopoma padal od r do 0.

Medtem ko je v našem prostoru vsega 5 pravilnih poliedrov (tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder), lahko po analogiji dobimo v 4-dimenzionalnem prostoru 6 pravilnih hiperpoliedrov, ki jih omejujejo pravilni poliedri. To so C_5 (omejen s 5 tetraedri), C_8 (omejen z 8 kockami), C_{16} (omejuje ga 16 tetraedrov), C_{24} (omejen s 24 oktaedri), C_{120} (omejuje ga 120 dodekaedrov) in C_{600} (površje sestavlja 600 tetraedrov).

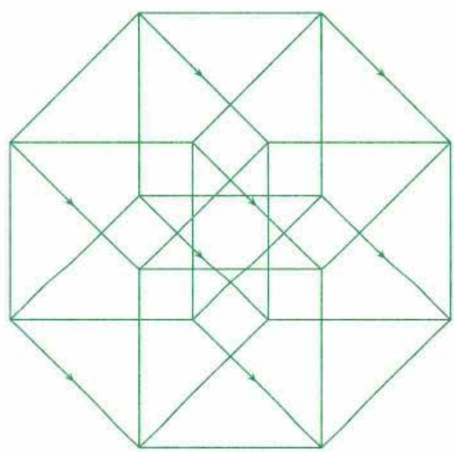
Najpreprostejši med njimi je C_8, imenovan tudi hiperkocka, čeprav ga omejuje več teles kot C_5. Ima 16 vogalov, 32 robov, 24 lic (kvadratov, ki so stranske ploskve mejnih kock) in 8 mejnih kock. V vsakem njegovem vogalu se stikajo 4 paroma pravokotni robovi, 6 kvadratov in 4 kocke. Vsak rob je skupen 3 kvadratom in 3 kockam, vsak kvadrat je stranska ploskev dveh kock. Vsaka mejna kocka ima torej po en skupni kvadrat s šestimi kockami od preostalih sedem.

Tudi do generacije hiperkocke lahko pridemo z analogijo. Če daljico premaknemo za eno njeno dolžino (enoto) v smeri, pravokotni na daljico, dobimo kvadrat. Ko tega premaknemo za enoto v smeri, pravokotni na njegovo ravnino, opiše kocko (slika 1). Hiperkocko generiramo tako, da 3-dimenzionalno kocko vodimo za dolžino ene njene stranice v smeri, pravokotni na naš prostor.

Vendar že 3-dimenzionalne kocke na 2-dimenzionalnem listu papirja ne moremo zares predstaviti. Tretjo smer – pravokotnico na prvi dve – nadomesti na sliki smer, ki poteka poševno na prvi dve smeri.



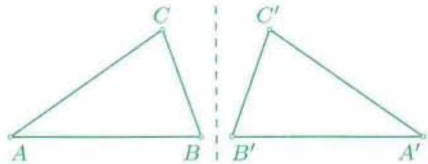
Slika 1.



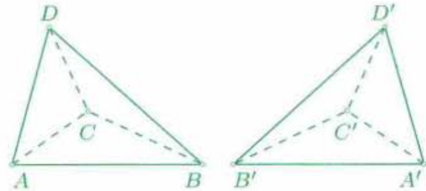
Slika 2.

Pri sliki hiperkocke lahko četrto smer, ki je pravokotna na vsakega od treh medsebojno pravokotnih robov kocke, narišemo pravokotno na našo tretjo, poševno smer. Sliko 2 smo povzeli po arhitektu Claudu Bragdonu, ki jo je leta 1913 objavil v učbeniku Osnove višjega prostora.

Fitchev esej govori tudi o tem, da je svoboda gibanja v 4-dimenzionalnem prostoru večja kot v našem prostoru. Problema se spet loti z analogijo. Medtem ko je v ravnini edini tip rotacije zasuk okrog točke, imamo v 3-dimenzionalnem prostoru rotacijo okrog premice in v 4-dimenzionalnem prostoru rotacijo okrog ravnine. Dveh simetričnih ravninskih likov, kakršna sta trikotnika na sliki 3, ne moremo prevesti drugega v drugega z gibanjem zgolj v njuni ravnini. Če pa enega od njiju zavrtimo za 180° skozi 3-dimenzionalni prostor okrog črtkane osi, se pokrijeta. Podobno velja za dve simetrični telesi (slika 4). Z nobenim premikanjem po našem prostoru ne moremo doseči, da bi sovpadli. Z rotacijo enega od njiju za 180° okrog ravnine v 4-dimenzionalnem prostoru pa to lahko dosežemo. Med rotacijo telo izgine iz našega prostora (če se telesi sekata, ostaja v našem prostoru le njuna presečna ploskev).



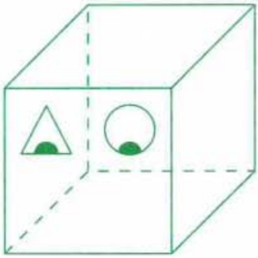
Slika 3.



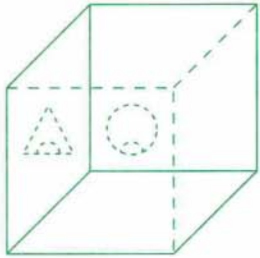
Slika 4.

Dober model, kako naj bi izgledala rotacija 3-dimenzionalnega objekta skozi 4-dimenzionalni prostor, najdemo v knjižici Geometry, Relativity and the Fourth Dimension, avtorja Rudyja Ruckerja (Dover Publications, 1977).

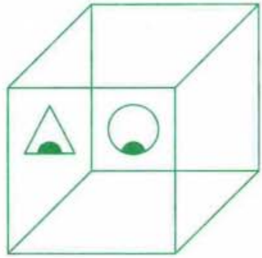
Oglejmo si sliko kocke, ki nas gleda **izza** tega lista papirja (slika 5a). Njeno desno oko je trikotno, levo okroglo.



Slika 5a.

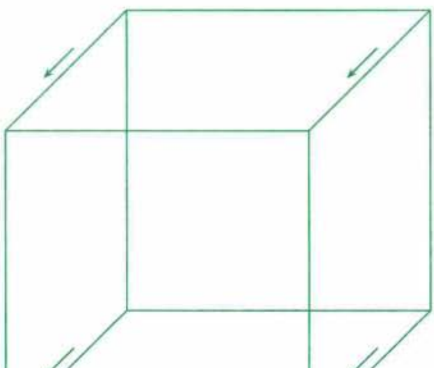


Slika 5b.



Slika 5c.

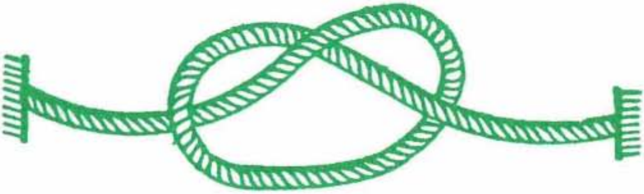
Pa predpostavimo, da bi bil ta list papirja ogledalo. V tem primeru bi bila zrcalna slika kocke na **naši** strani lista, obrnjena z zadnjo stranjo proti nam (slika 5b). Očitno ni mogoče obrniti kocke v 3-dimenzionalnem prostoru tako, da bi prešla v svojo zrcalno sliko. Njeno desno oko bi ostalo trikotno, medtem ko je desno oko zrcalne kocke okroglo. Če pa pogledamo sliko 5c, je videti, kot da prehaja med sliko kocke in njeno zrcalno sliko. To figuro, narisano brez oči (slika 6), poznamo pod imenom Neckerjeva kocka. Če nekaj časa strmo gledate vanjo, spontano preide v svojo zrcalno sliko in nazaj (preverite!). Če poskrbimo, da se slika večkrat zamenja, se nam hipna menjava položajev zazdi kot zvezno gibanje. Toda to je lahko zvezno gibanje le, če gre za rotacijo v 4-dimenzionalnem prostoru. Morda smo s tem v resnici sprožili 4-dimenzionalni pojav v svoji zavesti.



Slika 6.

Fitch v svojem eseju še pove, da ima v 3-dimenzionalnem prostoru gibanje 6 prostostnih stopenj, namreč 3 translacije vzdolž treh premic in 3 rotacije okrog njih, v štiridimenzionalnem pa kar 10, in sicer 4 translacije vzdolž štirih premic in 6 rotacij okrog šestih ravnin.

Na koncu se Fitch dotakne se tudi topoloških problemov. Če bi bila obla upogljiva (gibka), bi lahko v 4-dimenzionalnem prostoru, brez raztezanja ali raztganin, obrnili njeno notranjost navzven, kot npr. obrnemo rokav pri obleki. Dva člena verige bi lahko ločili brez lomljenja. Naši vozli so v 4-dimenzionalnem svetu neuporabni. Tako bi lahko vozel s slike 7 razvozljali, ne da bi premaknili pritrjena konca.



Slika 7.

Mi pa zaključimo razmišljanje o četrti dimenziji še z eno predstavo, ki vodi do hudomušnega zaključka, na katerega sem naletela v knjižici Rudyja Ruckerja.

- Točka deli premico na dva ločena dela.
- Premica deli ravnino na dva ločena dela.
- Ravnina deli 3-dimenzionalni prostor na dva ločena dela.
- 3-dimenzionalni prostor deli 4-dimenzionalni prostor na dva ločena dela.

Torej tudi naš prostor deli 4-dimenzionalni prostor, katerega del je, na dva ločena dela. Da bi prešli iz enega v drugi del, moramo nujno skozi naš tridimenzionalni prostor.

Stare religiozne slike prikazujejo Zemljo kot neskončno ravnino, ki deli 3-dimenzionalno vesolje na dva dela: zgornjo ali nebeško polovico in spodnjo polovico, pekel. Boljša je predstava, da je naš 3-dimenzionalni svet, ki ga zasedamo, prav tisti 3-dimenzionalni prostor, ki ločuje nebesa in pekel, sestavna dela 4-dimenzionalnega hiperprostora. Vsak padli angel, vržen iz nebes, je moral skozi naš svet na svoji poti v pekel.

Marija Vencelj