

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **16** (1988/1989)

Številka 3

Strani 132-137

Janez Strnad:

JOJO

Ključne besede: fizika, energija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/930-Strnad.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

JOJO

Le kdo ne pozna igrače jojo (slika 1)? Vrvico navijemo na vreteno med kole-soma iz lesa ali iz kake druge snovi. Nato krajišče vrvice držimo v roki in jojo spustimo z vretenom v vodoravni legi. Jojo se spusti in zopet dvigne skoraj do enake višine. Igra se ponavlja, dokler jojo ne obmiruje. Po tem spominja jojo na žogo, ki odskakuje od tal do vse manjše višine. Ne samo, da je jojo počasnejši kot žoga; kar smo rekli, velja le, če roka, s katero držimo vrvico, miruje. Z gibanjem roke lahko dosežemo, da se jojo giblje zelo zapleteno.

Jojo ni edina igrača, katere delovanje lahko pojasnimo s fiziko. V času, v katerem očitajo fiziki, da se vse bolj oddaljuje od vsakdanjega življenja, utegne biti razpravljanje o jojoju prav osvežilno. Toda v fiziki vsakdanjega življenja in v fiziki igrač postanejo pojavi hitro preveč zapleteni.

Preden se lotimo gibanja jojoja, povejmo nekaj iz njegove zgodovine. Z njim so se igrali vsaj že v stari Grčiji pred okoli dva tisoč leti (slika 2). Poznali pa so ga tudi na Kitajskem. Od tam so ga v 18. stoletju zanesli najprej v Anglijo, nato v Francijo in Nemčijo. Tedanji jojoji iz stekla ali slonovine so bili precej dragoceni.

Ime jojo je skoval v prijavi patentnemu uradu ameriški poslovnež šele leta 1930. V sodelovanju z lastnikom časopisov je tedaj povzročil največjo jojojevsko mrzlico vseh časov. Časopisi so vsiljivo vabili na tekmovanja z jojojem; na tekmovanje pa se je lahko prijavil samo tisti, ki je pridobil tri nove časopisne naročnike. Poročajo, da so leta 1931 v tridesetih dneh v Philadelphii prodali kar tri milijone jojojev. Dandanes je mogoče kupiti jojo kot dokaj ceneno otroško igračo, nekatera podjetja pa jojoje z znamenji svojih izdelkov delijo v reklamne namene. Današnji jojoji so navadno iz lesa ali iz plastične snovi.

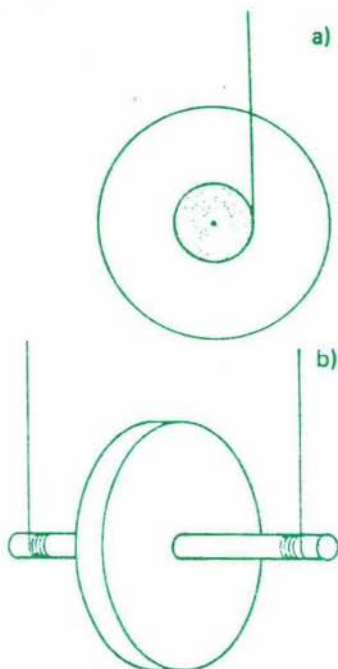


Slika 1. Jojoji iz zbirke profesorja W. Bürgerja. Iz njegovih člankov *Das Jojo – ein physikalisches Spielzeug*, *Physikalische Blätter* **39** (1983) 401 in *The Yo-yo: A toy flywheel*, *American Scientist* **72** (1984) 137 so prevzete slike tega prispevka.



Slika 2. Jojo na antični grški posodi (okoli leta 450 pred našim štetjem).

Slika 3. Jojo s tanko vrvico (a). Maxwelllovo kolo lahko obravnavamo kot jojo s tanko vrvico (b).

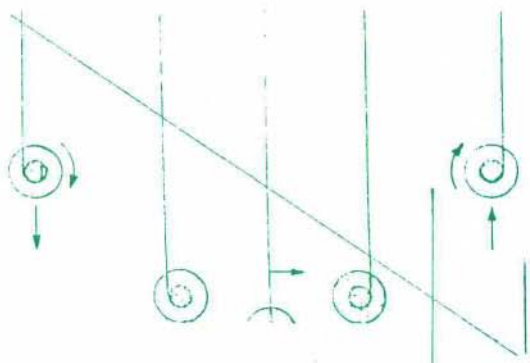


Najlaže je obravnavati jojo, če ima tako tanko vrvico, da lahko zanemarimo njeno debelino (slika 3). Tedaj lahko privzamemo, da se vrvica ves čas navija na vreteno z enako debelino, na katero je pritjena, ali se z njega odvija.

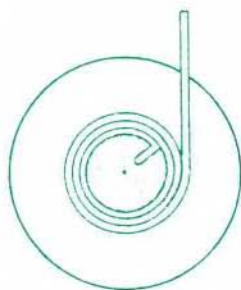
Najglobljo točko doseže jojo, ko se odvije vsa vrvica. V bližini najnižje točke preide vrvica z ene strani vretena na drugo, ko se jojo preneha spuščati in se začne dvigati (slika 4). To se zgodi tako hitro – v nekaj stotinkah sekunde – da lahko obravnavamo pojav kot trk, podobno kot odboj žoge od tal.

Nekoliko bolj zapleteno je obvladati jojo z debelo vrvico. Upoštevati moramo, da se vrvica pri dvigovanju jojoja navija na vreteno, na katerem je je navite čedalje več (slika 5). Tako z dvigovanjem narašča navidezna debelina vretena. Tudi v tem primeru je hitrost v najvišji točki enaka nič in v najnižji največja, in to enaka kot pri enakem jojoju z enako dolgo tanko vrvico. V vmesnih točkah pa je hitrost jojoja z debelo vrvico večja, zato pride ta hitreje iz najvišje točke v najnižjo in spet nazaj v najvišjo.

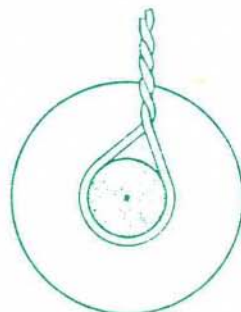
Novjši jojoji nimajo vrvice pritrjene na vreteno, ampak imajo okoli vretena navito zanko (slika 6). Zaradi tega se jojo v najnižji točki vrti, ne da bi se



Slika 4. Gibanje jojoja v bližini najnižje točke lahko obravnavamo kot trk. (zgoraj)

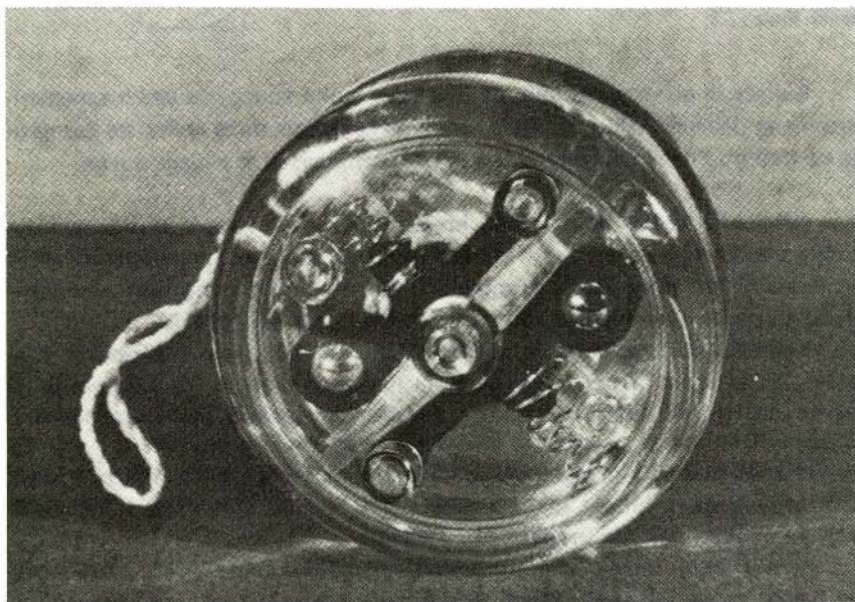


Slika 5. Jojo z debelo vrvico. (desno zgoraj)



Slika 6. Novejši jojo z zanko. (desno)

Slika 7. "Jomega, jojo z možgani." (spodaj)



spuščal ali dvigal. V tej točki jojo "spi" — je "len". "Zbudimo" ga tako, da se udarimo po roki ali hitro sunemo z roko navzgor, in s tem povečamo trenje med vrstico in vretenom. Zanka tedaj neha drseti po vretenu, se navije nanj in jojo se začne dvigati enako kot navadni jojo. Tako ima izkušen igralec več možnosti pri izbiri gibanja jojoja. Ker ni lahko s nenadnim gibom roke "zbuditi" jojo, so si zamislili leni jojo s centrifugalno sklopko. Pod imenom jomega ga prodajajo v ZDA za okoli 10 dolarjev (slika 7). Vrvica je pritrjena na zunanji del ležaja, v katerem se vrti vreteno v najnižji točki. Dokler se jojo hitro vrti, je torej sklopka odprta. Ko postane vrtenje dovolj počasno, se sklopka zapre, prepreči vrtenje vretena v ležaju in jojo se začne dvigati.

To še ni vse. Patentni uradi dobivajo nove prijave. Poleg jojoja s trakom namesto vrvice so začeli izdelovati še druge, bolj zapletene vrste. Razmišljanje o jojoju ni samo igračkanje, saj so jojoju podobno napravo uporabili pri evropskih umetnih satelitih ESRO I in ESRO II. Raketa, ki je dvignila satelit, se je zavrtela stokrat v minuti. To je bilo za satelit sam preveč, ta naj bi se zavrtel samo dvajsetkrat v minuti. Po ločitvi od rakete so zadnjo stopnjo zavrtli z napravo podobno jojoju. Okoli nje sta bili naviti vrvice s telesoma na krajiščih. Satelit se je začel vrteti počasneje, ko sta se vrvice odvila in telesi odleteli v vesolje.

Izkušeni igralci z jojojem se ravnaajo po občutku. Glavni podatek zanje je napetost vrvice. Jojoju dovajajo energijo tako, da roko pospešeno premikajo navzgor, ko se jojo spušča, in navzdol, ko se jojo dviga. Pri tem zmorejo vragolije, ki jim celo z zapletenimi računi ni lahko slediti (slika 8).



Pospremimo prejšnje razmišljanje z nekaj enačbami. Izhajamo od izreka o kinetični in potencialni energiji. Če zanemarimo trenje in upor, ne opravlja dela nobena zunanja sila razen teže. Zato je vsota kinetične in potencialne energije konstantna. Če spustimo jojo, ko miruje, vzamemo, da je vsota kinetične in potencialne energije enaka nič:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgz = 0$$

Pri tem v potencialni energiji — mgz merimo globino $z > 0$ navpično navzdol. $\frac{1}{2}mv^2$ je translacijska kinetična energija, v kateri je m masa jojoja in v hitrost njegovega težišča. $\frac{1}{2}J\omega^2$ je vrtilna kinetična energija, v kateri je J vztrajnostni moment jojoja okoli osi vretena in ω kotna hitrost okoli te osi.

Najprej obdelajmo jojo s tanko vrstico z vretenom s konstantnim radijem r_0 . Hitrost težišča določa enačba $v = \omega r_0$. Dobimo jo, ko upoštevamo, da se

vrvica odvijne za obseg vretena, ko se vreteno enkrat zavrti: $v = 2\pi r_0/t_0$. Pri tem je t_0 čas enega vrtljaja in $\omega = 2\pi/t_0$ kotna hitrost.

Iz zapisanih enačb sledi preprosta zveza med hitrostjo težišča in globino

$$v^2 = 2gz/(1 + J/mr_0^2)$$

Enačba se le po dodatku v imenovalcu loči od zveze med hitrostjo in globino pri prostem padanju. Težišče jojoja se spušča ali dviga s pospeškom $g/(1 + J/mr_0^2)$, ki je manjši od pospeška prostega padanja g .

Najgloblje točko doseže jojo, ko se odvijne vsavrvica z dolžino l in je $z = l$. V tej točki se gibanje težišča sunkovito obrne. Pri tem debelina vrvice ni pomembna.

Pač pa je treba pri jojoju z debelo vrvico upoštevati debelino vrvice pri dvigovanju iz najnižje lege. Razmik med kolesoma je navadno precej večji od širine vrvice, zato moramo vpeljati efektivno debelino vrvice d . Dobimo jo tako, da ploščino efektivnega osnega preseka vrvice ld izenačimo s ploščino kolarbarja med vretenom z radijem r_0 in največjim krogom, ki ga pokrije vrvica, z radijem r_1 . Velja torej $ld = \pi r_1^2 - \pi r_0^2$. S tem postane efektivna debelina vretena r odvisna od globine. V najnižji točki velja enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2$ in je $r = r_0$, v najvišji točki enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2 + ld$ in je $r = r_1$, vmes, v globini z , pa enačba $\pi r^2 = \pi r_0^2 + d(l - z)$ in je $r = \sqrt{r_0^2 + zd/\pi}$ (slika 10).



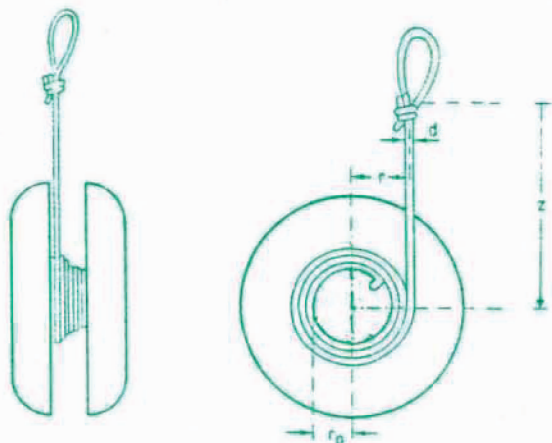
Slika 8. Figura z jojojem, znana kot "nebeška raketa".



Slika 10. Efektivni radij vretena r in efektivna debelina vrvice d .

Za jojo z debelo vrvico velja tedaj enačba

$$v^2 = 2gz / (1 + J/mr^2)$$



Slika 9. Odvisnost hitrosti od globine za jojo s tanko vrvico (sklenjeno) in za jojo z debelo vrvico (črtkano). Sklenjena krivulja je parabola

$v = \sqrt{2gz / (1 + J/mr_0^2)}$,
črtkana krivulja je precej bolj zapletena.

Upoštevati je potrebno spremenljivi radij vretena r . V zapleteno računanje se ne moremo spuščati, zato raje premislimo. Hitrost težišča je v najvišji točki enaka nič, ker je globina enaka nič. To velja za jojo s tanko vrvico in za jojo z debelo vrvico. Hitrost težišča je enaka za obe vrsti jojoja tudi v najnižji točki, saj je tedaj $r = r_0$. V vmesnih točkah pa je hitrost jojoja z debelo vrvico večja od hitrosti jojoja s tanko vrvico. Jojo z debelo vrvico torej v krajšem času pride iz najvišje točke v najnižjo kot jojo s tanko vrvico, če ima sicer enake lastnosti (slika 9). Pospešek pri jojoju z debelo vrvico najprej močno naraste, pade na nič in je naposled celo negativen, ne ostane pa konstanten kot pri jojoju s tanko vrvico.

Janez Strnad