



- POPRAVA POPAČENJA
- YOUNGOV POSKUS Z BELO SVETLOBO
- UPORABA PROGRAMOV VIRTUALNEGA OBSERVATORIJA
- DREVESNO PREISKOVANJE MONTE CARLO

# Boljše kmetovanje



→ Kmetovanje že samo po sebi ni enostavno, zaradi zvečanih potreb po hrani pa potrebuje še bolj poglobljene analize in še več pomoči

tehnologije. V Kaliforniji so se zbrali matematiki, hidrologi in kmetje ter poskušali narediti načrt, ki bi zmanjšal porabo vode, potrebne za zalivanje pridelka, tako da bi s pridelkom še vedno ustvarili dobiček in zadostili povpraševanju potrošnikov. V matematičnem modelu so združili podatke o rasti različnih rastlin in o njihovi porabi vode. Tako so ugotovili, katere rastline je potrebno izbrati, kdaj jih je najboljšo saditi in katera polja je dobro pustiti neposejana. Kmetje so bili zelo zadovoljni z racionalno porabo virov, matematike pa je osrečilo delo s strokovnjaki na ustreznih področjih.

Uporabi matematike in visoko tehnoloških pristopov pri kmetovanju pravimo precizna agrokultura. Za razliko od preteklih metod je sedaj treba zbirati veliko več podatkov, na primer težo vsake kokoši in piščanca v jati. Nato uporabijo modele, ki omogočijo najboljši potek kmetovanja in sproti odpravljajo različne težave, ki se pojavijo med proizvodnjo. Eden od vidikov kmetovanja, ki se je zaradi novih metod izjemno izboljšal, je tudi poraba gnojil. Naprave, ki so opremljene z GPS napravami, zbirajo vzorce zemlje. Tako kmetje točno vedo, katere predele je treba bolj pognojiti, in se s tem izognejo običajni praksi pretiranega gnojenja. Rezultat je več hrane, manj porabljenih gnojil in posledično manj onesnaženja podtalnice z nitrati.

Za več informacij si preberite prispevek Eleanor Jenkins in Kathleen Fowler z naslovom *A Role for Modeling, Simulation, and Optimization in an Agricultural Water Crisis*, ki je bil decembra 2014 objavljen v reviji *SIAM News*.



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 44, šolsko leto 2016/2017, številka 6

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

**Dopisi in naročnine:** DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2016/2017 je za posamezno naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA–založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1300 izvodov

© 2017 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2030

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Boljše kmetovanje

## MATEMATIKA

- 4-10 Poprava popačenja  
(*Peter Legiša*)

## FIZIKA

- 11-13 Youngov poskus z belo svetlobo  
(*Andrej Likar*)

## ASTRONOMIJA

- 14-15, 18-20 Uporaba programov Virtualnega  
observatorija za študijo jate galaksij  
Berenikini kodri  
(*Dunja Fabjan*)

## RAČUNALNIŠTVO

- 21-27 Drevesno preiskovanje Monte Carlo  
(*Damjan Strnad*)

## RAZVEDRILO

- 10 Križne vsote  
13 Barvni sudoku  
16-17 Nagradna križanka  
(*Marko Bokalič*)  
27 Rešitev nagradne križanke Presek 44/5  
(*Marko Bokalič*)  
31 Naravoslovna fotografija - Nevihta se  
bliža  
(*Neža Golmajer Zima*)

## TEKMOVANJA

- 28-30 Bistroumi 2017  
(*Boštjan Kuzman*)  
priloga 16. tekmovanje v znanju matematike za  
dijake srednjih tehniških in strokovnih šol  
- državno tekmovanje  
priloga 16. tekmovanje v znanju matematike za  
dijake poklicnih šol - državno tekmovanje  
priloga 26. tekmovanje iz razvedrilne matematike  
- šolsko tekmovanje

**SLIKA NA NASLOVNICI:** Olje in kis sta tekočini različnih gostot, ki se med seboj ne mešata. Če ju nalijemo v isto posodo in močno pretresemo, nastane emulzija. Emulzija je zmes dveh nemešljivih tekočin. Notranja faza je tekočina, ki je v obliki kapljic dispergirana v drugi, zunanji fazi. Zaradi površinske napetosti med obema fazama, emulzija običajno ni stabilna in fazi se čez čas ločita. Ločitev lahko preprečimo z emulgatorji. Foto: Aleš Mohorič

# Poprava popačenja

↓↓↓

PETER LEGIŠA

→

## Uvod

Ta članek je nadaljevanje članka *Popačenje*. Fotografski objektiv včasih ukrivijo slike daljic, ki ne ležijo na premicah skozi središče slike. Ta napaka se imenuje *popačenje* in je najbolj opazna na robovih slike. Kot smo videli, lahko popačeno sliko opišemo kot transformacijo  $F$  neke virtualne idealne slike  $K$ , brez popačenja. Pri tem velja:

- Preslikava  $F$  ohranja izhodišče  $O$  (središče naše slike), sicer pa  $F(T) = T_1$  leži na poltraku iz izhodišča  $O$  skozi  $T$  (slika 1).
- Če je  $s = |OT|$  razdalja točke  $T$  od izhodišča ( $s$  je *polmer* ali *radij* točke  $T$ ) in  $r = |OT_1|$  polmer točke  $F(T)$ , označimo

$$r = |OT_1| = f(s) = f(|OT|) = s \left( 1 + \frac{d(s)}{100} \right), \quad (1)$$

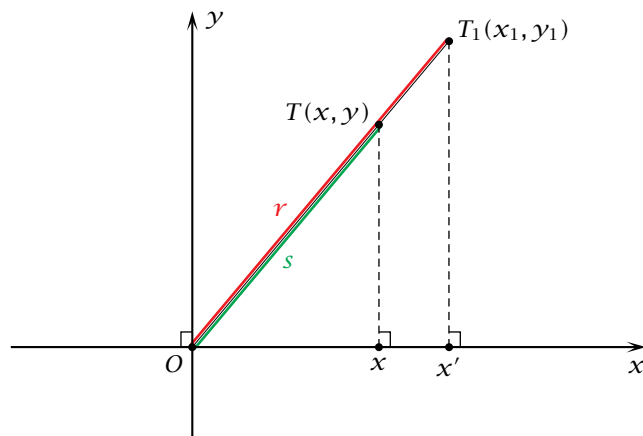
kjer je  $d(0) = 0$ .

- Funkcija  $s \mapsto f(s)$  strogo narašča.

Temu rečemo **radialno popačenje**, kakršno včasih vidimo na fotografijah. Seveda bomo privzeli, da ima funkcija  $d$  lep, »gladek« graf. Funkciji  $f$  in  $F$  sta očitno *injektivni*, se pravi, preslikata različne točke v različne točke. Zahteva, da je  $d(0) = 0$ , pomeni, da količnik  $f(s)/s$  stremi k 1, ko gre  $s$  proti 0. To pomeni, da preslikava  $F$  v bližini izhodišča skoraj ne premika točk in je tam praktično identična preslikava.

Naj bo  $T(x, y)$  in  $T_1(x_1, y_1) = F(T) = F(x, y)$ . Na sliki 1 vidimo, da je  $x : s = x_1 : r$ , torej  $x_1 = rx/s$  in podobno  $y_1 = ry/s$ . Torej je

$$F(x, y) = \left( \frac{rx}{s}, \frac{ry}{s} \right) = \frac{f(s)}{s} (x, y).$$



SLIKA 1.

Popačenje točko  $T$  preslika na točko  $T_1$ , ki leži na poltraku iz  $O$  skozi  $T$ .

Ker je  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ , smo dobili

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \left( x \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, y \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

## Odprava popačenja

Denimo, da poznamo funkcijo  $s \mapsto f(s)$  in ( $s$  to funkcijo) popačeno sliko  $L$ . Naj bo  $A$  točka v  $L$  z  $|OA| = t$ . Ker je  $s \mapsto f(s)$  injektivna, obstaja natanko eno število  $u$ , da je  $f(u) = t$ . Za  $t > 0$  naj bo  $A'$  točka, ki leži na poltraku iz  $O$  skozi  $A$  in ima polmer  $u$ . Torej je  $F(A') = A$ .

Preslikava  $g : t \mapsto u$  je dobro definirana in preslika zalogo vrednosti funkcije  $f$  nazaj na definicijsko območje. Spomnimo se, da je  $g$  *inverzna preslikava* k  $f$  in da lahko pišemo  $g = f^{-1}$ . Če je, recimo,  $f(1) = 1,05$ , je  $g(1,05) = f^{-1}(1,05) = 1$ .

Velja:

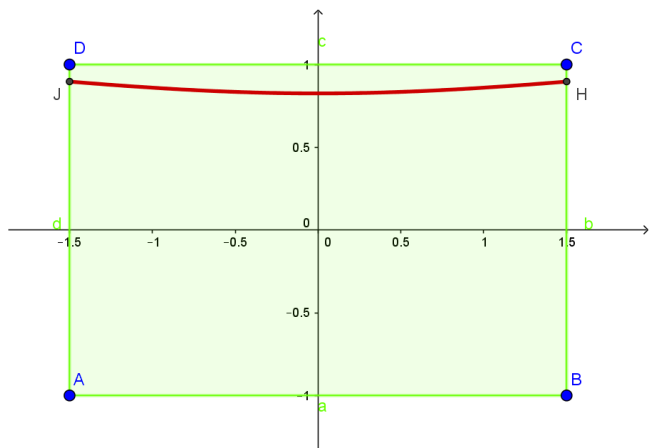
$f(u) = t$  natanko takrat, ko je  $g(t) = f^{-1}(t) = u$  in  $f(f^{-1}(t)) = t$  ter  $f^{-1}(f(u)) = u$ .

Graf za inverz  $f^{-1}$  injektivne funkcije  $f$  dobimo tako, da graf za  $f$  prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov.

Preslikava  $g : t \mapsto u$  je spet strogo naraščajoča. Če

to ne bi bilo res, bi lahko našli števili  $t_1 < t_2$  iz zaloge vrednosti za  $f$ , tako da je  $g(t_1) \geq g(t_2)$ . Od tod sledi, ker je  $f$  strogo naraščajoča, da je  $f(g(t_1)) = t_1 \geq f(g(t_2)) = t_2$ , kar je protislovje. Mogoče je videti, da je  $g(t) = t(1 + D(t))$ , kjer je  $D(0) = 0$ . Namreč: ker  $F$  v bližini izhodišča praktično ne premika točk, to velja tudi za inverzno preslikavo  $G$ .

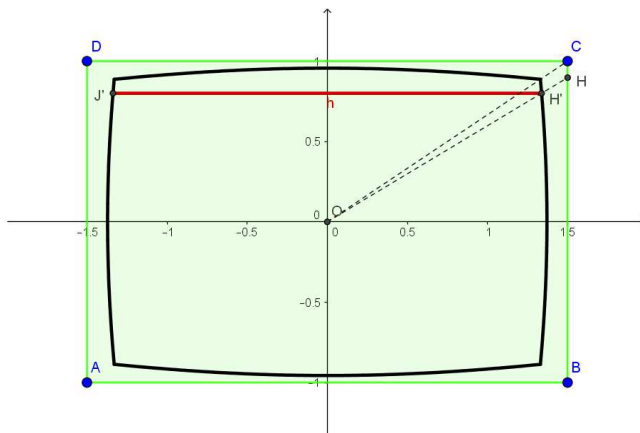
Preslikava  $G$ , ki vsako točko  $A = F(A')$  preslika nazaj na točko  $A'$ , popačeno sliko  $L$  na tipalu preslika na nepopačeno sliko  $K$ . Seveda je  $G$  inverzna preslikava k  $F$  in pišemo  $G = F^{-1}$ . Točko s polmerom  $t$  preslikava  $G$  preslika na točko s polmerom  $g(t)$ . Tako je  $G$  spet popačenje, ampak tokrat »dobro« popačenje, ki izniči vpliv originalnega popačenja  $F$ . Če so bili robovi originalne slike  $L$  ravni, pa to ne velja več za robove slike  $K$ .



SLIKA 2.

Zeleni pravokotnik predstavlja tipalo. Rdeča krivulja je popačena slika daljice.

Na sliki 2 zeleni pravokotnik predstavlja tipalo. Imamo *blazinasto* popačenje  $F$ , kar pomeni (kot smo povedali v prvem članku), da je funkcija  $d$  v enačbi 1 strogo naraščajoča. Funkcija  $F$  raztegne idealno sliko  $K$  na popačeno sliko na tipalu. Relativni delež raztega je največji v vogalih slike. Poglejte si ilustracijo v prvem članku in v [1]. Na sliki 2 je rdeča krivulja od  $J$  do  $H$  blazinasto popačena slika neke daljice. Inverzno popačenje  $G = F^{-1}$  je sodčkasto – relativno najbolj skrči prav vogale. Funkcija  $G$  nam zeleni pravokotnik preslika na črno obrobljeni sodček  $K$  na sliki 3.



SLIKA 3.

Poprava popačenja je zravnila rdečo krivuljo, a ukrivila robove originalne slike.

Množica  $K$  je idealna slika, zato so slike ravnih črt (s fotografirane scene) ravne. (Tudi naša rdeča krivulja se je zravnila v daljico od  $J'$  do  $H'$ ). To plačamo z dejstvom, da so robovi popravljene (idealne) slike  $K$  ukrivljeni. Ker je  $g(t) < t$ , preslikava  $G$  skrči originalno sliko.

Na sliki 2 ima zeleni pravokotnik  $ABCD$  tipala velikost  $3 \times 2$  in  $f(u) = u + 0,05u^3$ . Funkcija  $g = f^{-1}$  je dana, kot bomo izračunali malo kasneje, bolj zapleteno, s formulo:

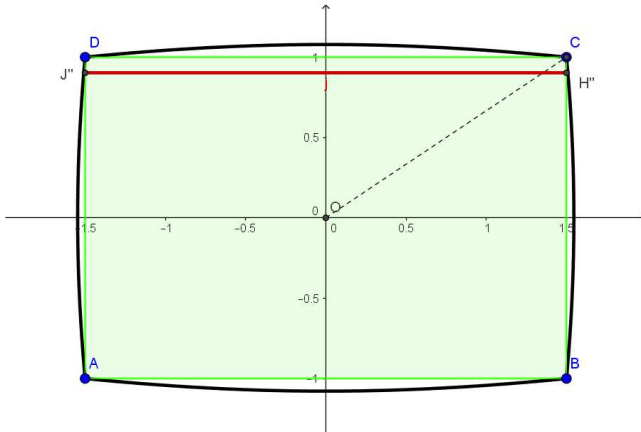
$$g(t) = \sqrt[3]{10t + \sqrt{100t^2 + \frac{8000}{27}}} + \sqrt[3]{10t - \sqrt{100t^2 + \frac{8000}{27}}}$$

Rdeča krivulja od  $J$  do  $H$  na sliki 2 je  $F(J'H')$ , kjer je  $J'H'$  rdeča daljica od  $J'$  do  $H'$  na sliki 3. Konkretno je ta daljica oddaljena za 0,8 od osi  $x$ .

Programi za popravljanje, kolikor vemo, poskušajo ohraniti velikost slike (v pikslih).

Za končni rezultat navadno potrebujemo pravokotno sliko. Zato smo na sliki  $K$  naredili središčni razteg  $W$ , ki je vogale našega sodčka preslikal na oglišča pravokotnika  $ABCD$ . Točka  $C$  ima polmer  $s = |OC| = \sqrt{1,5^2 + 1} = \sqrt{3,25}$ . Vemo, da je  $|OC'| = g(s) = g(\sqrt{3,25})$ , kjer je  $C'$  ustrezní vogal slike  $K$  (sodčka na sliki 2). Raztegniti moramo torej za fak-





**SLIKA 4.**

Popravljeno sliko raztegemo, tako da ravno pokrije tipalo.

tor  $m = s/g(s) = \sqrt{3,25}/g(\sqrt{3,25})$ , tako da dobimo črno obrobljeno sodčkasto sliko  $W(K) = K_2$  na sliki 4, ki pokrije celotno tipalo. Velja  $W(x, y) = (mx, my)$ . Če odrežemo vse izven zelenega tipala, imamo na koncu pravokotno sliko brez popačenja. Pri tem smo se odpovedali nekaterim delom originalne slike  $L$  v bližini robov.

V praksi je stvar bolj zapletena, ker je slika sestavljena iz končnega števila pikslov. Naj bo točka  $T$  središče piksla na popravljeni sliki. Ta točka je enaka  $W(G(V))$  za neko točko  $V$  na originalni sliki. Prva ideja je, da jakosti rdeče, zelene in modre barve na tistem pikslu originalne slike, ki vsebuje  $V$ , prenesemo na piksel, v katerem leži točka  $T$ . To je gotovo idealna in neproblematična rešitev v (malo verjetnem) primeru, da je točka  $V$  središče piksla na originalni sliki. Kaj pa če  $V$  leži na meji med dvema piksloma? Zato programi za transformacijo slike delujejo drugače. (Angleško se postopku reče *resampling*, to je *ponovno vzorčenje*, ker moramo transformirano sliko spet kar se da dobro predstaviti kot množico pikslov.) Pogledajo, recimo, vrednosti v štirih pikslih, katerih središča so najbližje točki  $V$ . Nato naredijo nekakšno *uteženo povprečje* teh vrednosti, tako da bolj upoštevajo vrednosti v tistih od štirih pikslov, katerih središča so bližje točki  $V$ . Temu se reče *interpolacija*. O tem bi podrobneje govorili kdaj drugič.

V bližini izhodišča preslikava  $G$  deluje približno kot identiteta, preslikava  $W$  pa je središčni razteg za

faktor  $m$ . Naša korekcija popačenja torej v bližini izhodišča deluje približno kot središčni razteg s faktorjem  $m > 1$  in tako tam dejansko raztegne sliko. Ko sliko raztegemo, pa se gostota informacij na njej zmanjša.

Pri popravi popačenja se iz vseh teh razlogov kakovost slike nekoliko poslabša.

### Poprava enostavnega popačenja in Cardanove formule

Poglejmo si *enostavno popačenje*. Po prvem članku to pomeni:

$$\blacksquare f(s) = s(1 + as^2) = s + as^3. \quad (3)$$

Za  $a > 0$  imamo blazinasto popačenje, za  $a < 0$  pa sodčkasto.

Potem pri danem  $t$  iz  $f(u) = t$  dobimo kubično enačbo

$$\blacksquare u + au^3 = t$$

ali

$$\blacksquare u^3 + \frac{1}{a}u - \frac{t}{a} = 0.$$

Oglejmo si torej kubično enačbo

$$\blacksquare y^3 + py + q = 0. \quad (4)$$

Pišimo

$$\blacksquare y = z + w$$

in to vstavimo v enačbo 4, pa dobimo

$$\blacksquare z^3 + w^3 + (3zw + p)(z + w) + q = 0.$$

Oklepaj postavimo enak 0, se pravi  $zw = -(p/3)$ , da se stvari poenostavijo. Kot bomo videli, si to lahko privoščimo. Potem je

$$\blacksquare z^3 + w^3 = -q.$$

Od tod dobimo sistem enačb za  $z^3$  in  $w^3$ :

$$\blacksquare z^3 + w^3 = -q \quad \text{in} \quad z^3 w^3 = -p^3/27.$$

Od tod je  $(x - z^3)(x - w^3) = x^2 + qx - p^3/27$ .

Tako sta  $z^3$  in  $w^3$  korena kvadratne enačbe  $x^2 + qx - p^3/27 = 0$ . Torej

$$\blacksquare z^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}, w^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}}. \quad (5)$$

Od tod  $z, w$  dobimo s kubičnim korenem. Problem pa nastopi, če je pod kvadratnim korenem v 5 negativno število. Potem sta  $z^3$  in  $w^3$  kompleksni števili. Najti kubični koren iz kompleksnega števila pa je že bolj zapletena zgodba.

Formuli 5 sta **Cardanovi formuli**. Odkriti sta bili v renesančni Italiji in imata zelo zanimivo zgodovino. Enačbo  $x^3 + px = h$  je prvi rešil Scipione del Ferro, profesor na bolonjski univerzi, nekje med 1510 in 1515, vendar rezultata ni objavil. Takrat so namreč potekali nekakšni dvoboji med matematiki, ki so drug drugemu zastavljali probleme. Poraženec je pogosto izgubil službo. Del Ferro je imel za tak primer v rokavu aduta: rešitev enačbe, ki je bila za druge pretrd oreh. Leta 1535 je beneški matematik in inženir Niccolo Fontana Tartaglia neodvisno prišel do rešitve. Girolamo Cardano je iz Tartaglie izvelkel njegovo metodo, z obljubo, da tega ne bo razširjal. Cardano je na podlagi zaupanega šel naprej od Tartaglie: obdelal je vse možne primere ter ugotovil, da ima kubična enačba tri korene, ki so lahko tudi kompleksni. Cardano je dobil leta 1543 dostop do zapuščine Scipia del Ferra. Menil je, da ga spoznanje, da je del Ferro prvi rešil enačbo, odvezuje od obljube Tartagli. V knjigi *Ars Magna* (Velika umetnost), izdani leta 1545, je objavil rešitev kubične enačbe in jasno priznal zasluge tako del Ferru kot Tartagli. Tartaglia je bil vseeno skrajno ogorčen in prišlo je do velikega spora, izmenjave žaljivk. Zgodba o tem, da je Tartaglia ovadil Cardana inkviziciji, pa se je izkazala kot plod domišljije pisca iz 20. stoletja. Cardano je bil vsestranski in izredno ustvarjalen človek: zdravnik, izumitelj odlične kriptografske metode (Cardanova rešetka), avtor prve knjige o verjetnosti, *De Ludo Aleae* (O igri s kocko).

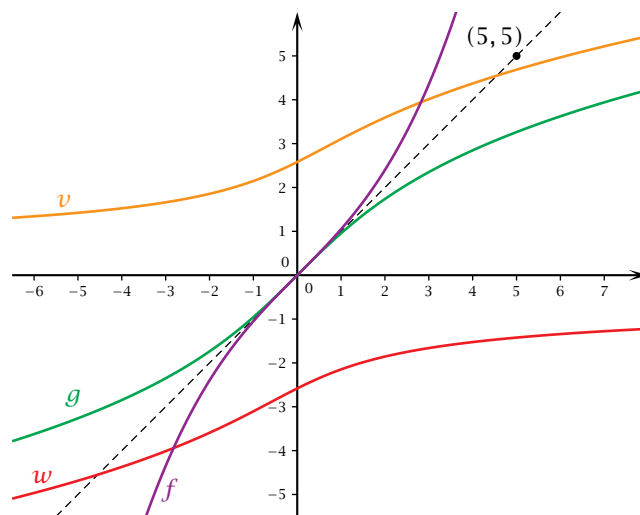
Poskusimo najti inverzno funkcijo  $g$  k strogo naraščajoči funkciji  $y \mapsto f(y) = y + 0,05y^3$ . Če je  $f(y) = x$ , je  $y = f^{-1}(x) = g(x)$ . Rešiti moramo torej enačbo  $y + 0,05y^3 - x = 0$  ali  $y^3 + 20y - 20x = 0$ . V 4 je torej  $p = 20$  in  $q = -20x$ . Tako je  $y = v + w$ ,

kjer je

$$\blacksquare v^3 = 10x + \sqrt{100x^2 + \frac{8000}{27}},$$

$$w^3 = 10x - \sqrt{100x^2 + \frac{8000}{27}}.$$

Očitno sta  $w^3$  in  $w$  negativna.



SLIKA 5.

Vijolični graf za kubični polinom  $f$  in njegov zeleni inverz sta simetrična glede na premico  $y = x$ .

Na sliki 5 si oglejmo oranžni graf za  $v$ , rdeči graf za  $w$ , zeleni graf za  $g$ . Ker sta vijolični graf za  $f$  in zeleni graf za  $g$  simetrična glede na črtkano simetralo lihih kvadrantov, to potrjuje, da smo inverz izračunali pravilno.

Tako smo si ogledali matematična orodja, ki omogočajo popravo enostavnega sodčkastega popačenja.

Kaj pa, če na sliki vidimo bolj ali manj enostavno popačenje, a nimamo nobenih natančnih podatkov o njem? To lahko poskusimo popraviti ročno, recimo v Photoshopu (Elements): Filter/Correct camera distortion/Remove distortion ali v Lightroomu, Lens corrections/Manual/Distortion.

Premikamo drsник, dokler v naravi ravne črte ob robu niso na sliki spet približno ravne. Z drsnikom v bistvu spreminjamo parameter  $a$  v enačbi 3. Na koncu bomo morali sliko še obrezati.

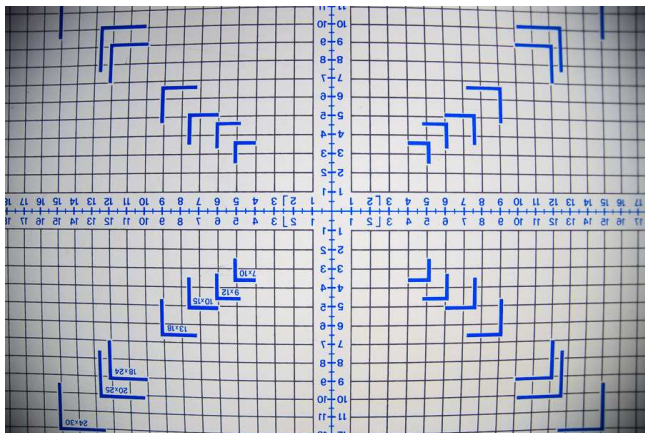


## → Poprava zapletenega popačenja

V prosto dostopnem programu Gimp imamo v Filters/Distorts/Lens Distortion celo dva drsnika za popravo popačenja. Eden od njiju deluje bolj na robu, tako da lahko bolj ali manj dobro popravimo tudi rahlo zapleteno popačenje.

Plačljivi programi za obdelavo slik imajo za mnoge objektivne tako imenovane *profile*, v katerih so tudi popravki za popačenja, ne glede na to, kako zapletena so. Zanimivo je opazovati, kako tak profil popravi popačenje. Zdi se, kot da bi se slika vbočila ali izbočila. Poprava je zelo udobna.

Profili vsebujejo tudi popravek za problem temnih vogalov - *vinjetiranje*. Vinjetiranje je najbolj opazno pri polno odprti zaslonki in pri širokokotnih objektivi. Jakost vinjetiranja je navadno odvisna samo od razdalje točke od središča slike, tako da je to popraviti sorazmerno lahko. Vinjetiranje lahko odpravljamo tudi ročno. (V Gimpu je odprava vinjetiranja na istem mestu kot poprava popačenja.) Posvetlitev vogalov lahko tam ojači *šum*.

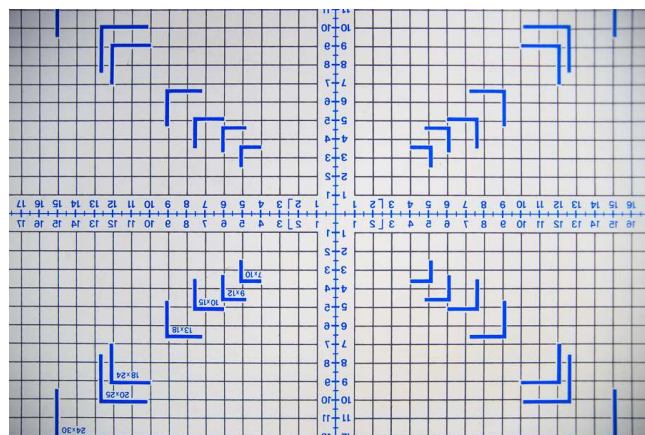


**SLIKA 6.**

Fotografija z izrazitim popačenjem in močnim vinjetiranjem, pri zaslonki 3.5.

Če gre za star objektiv, lahko profil naredimo tudi sami, le da to zahteva precej truda - mnogo posnetkov tarče po točno določenem protokolu. Te slike vnesemo v poseben program, ki izdelava profil in ga objavi.

Fotografija 7 ima opazno popačenje in močno vinjetiranje. Poskusili smo jo popraviti v programu



**SLIKA 7.**

S profilom dobimo zelo dobro popravo fotografije 7.

Lightroom z orodjem za korekcijo enostavnega popačenja, a smo bili le delno uspešni: na robu smo v najboljšem primeru dobili rahlo valovite črte. Originalno popačenje ni bilo enostavno in orodje za to delo niti ni bilo namenjeno. S profilom, ki ga je naredil fotograf-prostovoljec in dal na Adobe Lens Profile Downloader, je bila poprava popačenja neprimerno boljša, čeprav ne popolna. Bistveno zmanjšano je tudi vinjetiranje. Rezultat je na sliki 7. Poprava je odrezala nekaj malega, še največ na levem in desnem robu.

## Zrcalni in brezrcalni sistemi

Novi zrcalno refleksni aparati imajo za nekaj deset najbolj običajnih objektivov pri slikanju v JPEG formatu vključen popravek vinjetiranja.

Popravek popačenja lahko v meniju ponekod vključimo sami. Razlog, da to ni vključeno že tovarniško je ta, da imajo ti aparati optično iskalo, s katerim gledamo skozi objektiv. Če vključimo popravek popačenja, bo fotografija vsebovala le izrez tistega, kar vidimo v iskalu. Poprava lahko vzame tudi nekaj časa, tako da se hitrost zajemanja slik lahko upočasni. Popravki so boljši pri objektivih, ki aparatu sporočajo oddaljenost, na katero je naravnani objektivi. Funkcija  $s \mapsto f(s)$  v enačbi za popačenje 1 je namreč odvisna od razdalje med predmetno ravnino in ravnino tipala. Vključitev avtomatičnega popravka popačenja pri slikanju arhitekture, reprodukcijah. je



zelo smiselna. Če namreč JPEG sliko naknadno popravljamo ter rezultat vsakič shranimo (in s tem stisnemo), po več takih korakih kakovost začne vidno padati. Pri popravljanju originalne nestisnjene slike je padec kvalitete mnogo manjši.

Če slikamo v »surovem« RAW formatu, ki shranjuje maksimalno količino informacij o sliki, so podatki za popravo navadno vključeni v RAW datoteko. Tako lahko popravke izvedemo (odkljukamo) naknadno v obdelavi z RAW konverterjem proizvajalca kamere (ali pa recimo v programu Lightroom, ki ima tako in tako profile za skoraj vse novejšje objektivne). Programi za obdelavo RAW slik imajo še eno veliko prednost – ohranjajo originalno datoteko in kompresijo v format JPEG, ki pomeni izgubo dela informacij o sliki, izvedejo šele čisto na koncu, po prej omenjenih in po fotografovih popravkih. Seveda pa RAW datoteka zavzame nekajkrat več prostora.

**Brezzrcalni** aparati z izmenljivimi objektivni postajajo bolj priljubljeni. Iskalo pri teh fotoaparatih (nekateri zaradi varčevanja z denarjem in prostorom iskala niti nimajo) je elektronsko. Zato je pri njih popravek popačenja (vsaj v JPEG formatu) tovarniško vključen.

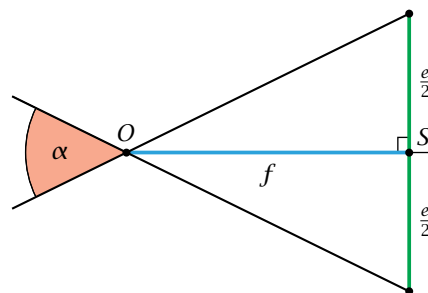
Še več: če je popravek popačenja avtomatičen, se pri konstrukciji objektivov ne trudijo zmanjšati te in druge naknadno odpravljive napake. Ker ni zrcala, je bajonet in s tem zadnji del objektivna lahko bližje tipalu. To pomeni tanjšje aparate in večjo svobodo pri konstrukciji objektivov. Nekateri brezzrcalni sistemi so tudi sicer konstruirani povsem na novo. Rezultat so manjši, lažji in včasih celo ostrejši objektivni z manj odsevi ob slikanju proti svetlobi.

Na področju brezzrcalnih aparatov je zelo znan konzorcij »Mikro štiri tretjine« (Micro Four Thirds, MFT ali M43), ker ima tipalo razmerje stranic 4 : 3. Vanj sta vključena dva večja proizvajalca kamer (Olympus, Panasonic) in več proizvajalcev objektivov in druge opreme. Senzorji so velikosti 17,3 mm × 13 mm. Pri MFT je vse konstruirano povsem na novo. Površina senzorja je nekako četrtnina površine senzorja *polnega formata*.

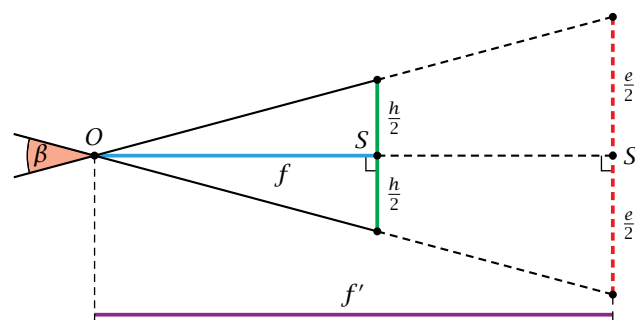
Tipalo za *polni format* (Full Format – FF) ima velikost približno 36 mm × 24 mm, to je enaka velikost kot slička na 35 milimetrskem filmu. Taka tipala so še zmeraj draga. Kamere polnega formata imajo velike (in težke) objektivne, ki zberejo mnogo svetlobe. Zato so prava izbira za slikanje v šibki sve-

tlobi. Podjetje Sony ima brezzrcalne aparate s FF tipalom. Večina kamer s takim tipalom pa sodi med zrcalno refleksne. Pogosto lahko uporabljamo tudi starejše objektivne iz filmskega obdobja.

Tipala velikosti APS-C imajo velikost 23,5 mm × 15,6 mm za znamke Nikon, Sony, Fuji. Podjetje Canon ima nekoliko manjše APS-C senzorje velikosti 22,2 mm × 14,8 mm. Format APS-C je cenovno dostopen in priljubljen pri lastnikih starih objektivov za zrcalno refleksne kamere. Objektivni, konstruirani za polni format, večinoma delujejo tudi na APS-C formatu istega proizvajalca. Manjše tipalo izkoristi le osrednji del slike, ki jo vrže tak objektiv. Zato so mnoge napake, kot sta popačenje in vinjetiranje, na malem tipalu bistveno manj izražene.



**SLIKA 8.** Tu je  $e$  diagonala tipala,  $f$ , goriščna razdalja objektivna in  $\alpha$  vidni kot objektivna.



**SLIKA 9.** Na manjšem senzorju z diagonalo  $h$  se objektiv z goriščno razdaljo  $f$  obnaša, kot bi imel goriščnico  $f' = ef/h$ .

Vendar pa bo vidni kot objektivna na manjšem tipalu zožen. Po definiciji je vidni kot  $\alpha$  objektivna kot,



→ pod katerim vidimo diagonalno  $e$  tipala s točke na osi objektivna, oddaljene za goriščno razdaljo  $f$  od tipala (slika 1). Na sliki 2 vidimo, da ima na manjšem tipalu, z diagonalno  $h$ , isti objektiv vidni kot  $\beta$ . To pa je kot, ki bi ga imel objektiv z goriščno razdaljo  $f' = ef/h$  na polnem formatu. Pišimo  $c = e/h$ , pa je  $f' = cf$ . Pravimo, da ima naš objektiv *ekvivalent* goriščne razdalje  $f'$  na polnem formatu. Ker sta oba senzorja pravokotnika z razmerjem stranic  $3 : 2$ , je kvocient  $c = e/h$  enak razmerju daljših stranic, torej  $c = 36/23,5 \approx 1,5$  za Nikon, Sony oziroma  $c = 36/22,2 \approx 1,6$  pri Canonu. Standardni 50 milimetrski objektiv za polni format se torej na »obrezanem« APS-C formatu obnaša približno kot 75 (ali pri Canonu 80) milimetrski objektiv na polnem formatu in tako postane »portretni« objektiv. Faktorju  $c$  pravijo angleško *crop* faktor. Ta faktor je dobra novica za lastnike teleobjektivov. Širokokotni objektivji za polni format pa na manjšem formatu žal niso več tako široki.

Predpostavimo, da primerjamo senzorje različnih razsežnosti, a s približno enakim številom pikselov. Grobo lahko ocenimo: če smo pri FF ravno še zadovoljni z rezultati pri ISO 2500–3200, se bomo pri MFT (senzor ima približno četrtno ploščine FF tipala) ustavili nekje pri ISO 800–900, pri APS-C pa pri ISO 1000–1300. FF tipalo ima namreč približno 2,4 krat do 2,6 krat tolikšno površino kot APS-C senzor.

Podatki za popravo popačenja in nekaterih drugih zgoraj omenjenih napak so v brezzrcalnih sistemih pogosto vgrajeni v elektroniko objektivna. Tako objektivji raznih proizvajalcev sporočajo ustrezne podatke kameram in dajejo JPEG slike skoraj brez popačenja. Na primerjalnih testih praktično vsi taki objektivji dobijo potem odlične ocene na preizkusih popačenja.

Tudi nove kamere, ki imajo fiksno vgrajen objektiv, skoraj brez izjeme dajejo JPEG slike brez vidnega popačenja – po zaslugi procesorja v aparatu. Prijubljeni so postali aparati z »1-colskim senzorjem«. Oznaka sloni na zastarelih standardih, saj je diagonala (14–17 mm) daleč od cole. Tipalo ima približno pol površine senzorja M43. Razpon gorišnic sega do približno  $1 : 25$ . Pri manjšem razponu ( $1 : 3$  ali  $1 : 4$ ) dobimo žepne aparate, ki lahko ob dobri svetlobi delajo odlične slike, a niso poceni. Kamere z najmanjšim senzorjem velikosti približno  $6,2 \text{ mm} \times 4,6 \text{ mm}$  ( $1 : 2,3''$ ) (približno četrtna površine 1-cols-

kega senzorja) omogočajo superzoome z razponom gorišnic do  $1 : 80$ . Vendar je pri teh in podobnih malih senzorjih po mojih izkušnjah najbolje, če ostanemo pri najnižji občutljivosti (ISO 80–160). Procesorji v aparatu sicer odstranijo šum pri visokih ISO vrednostih – hkrati s podrobnostmi. Pri portretih je to lahko celo ugodno, a marsikdaj iz fotografije nastane čudno obarvan »akvarel«. Še manjša so tipala pametnih telefonov (okrog  $5,5 \text{ mm} \times 4,1 \text{ mm}$  ali še manj). Za hitre procesorje v pametnih telefonih poprave popačenja, vinjetiranja niso problem.

### Literatura

- [1] Interaktivne ilustracije članka so na avtorjevi strani na GeoGebra Tube: <https://www.geogebra.org/peter.legisa>

## Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

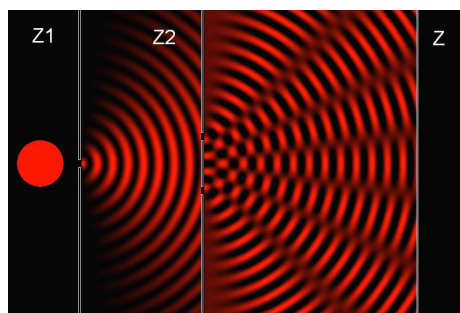
	8	6			
5			15		
16				11	
		12			11
			4		
			14		

# Youngov poskus z belo svetlobo

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Pri razmišljanju o interferenci svetlobe ne moremo mimo Youngovega poskusa. Danes ga z lahko pokažemo z lasersko svetlobo, v preteklosti pa poskus še zdaleč ni bil preprost. Obstaja celo dvom, da ga je Young sploh izvedel v napogosteje nevedeni inačici, kot je prikazana na sliki 1. Tu potrebujemo svetilo, ki oddaja monokromatično svetlobo. Svetilo zastremo z zaslonom Z1 in skozi drobno navpično režo osvetlimo oddaljen zaslon Z2 z dvema prav tako navpičnima, a tesno blizu zarezanima režama. Na oddaljenem zaslonu Z vidimo navpične interferenčne proge, neizpodbiten dokaz, da je svetloba valovanje.



SLIKA 1.

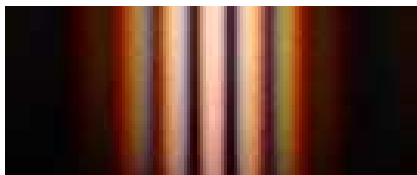
Postavitev Youngovega poskusa. Reži in valovna dolžina so zaradi preglednosti močno povečani.

Ta poskus je preprost le v mislih. Zares je njegova postavitve zahtevna. Najprej je potrebno imeti dovolj svetlo drobno monokromatično svetilo. Če odmislimo laser, takih svetil ni, približamo se jim z močnim belim svetilom s filtrom, ki prepušča svetlobo v ozkem pasu valovnih dolžin. Thomas Young in Augustin Jean Fresnel, ki sta v prvi polovici 19. stoletja prva izvajala take poskuse, sta uporabljala

svetlobo Sonca, ki sta jo z zrcali in drobnimi lečami skozi majhne luknjice ali zareze ustrezno usmerila. Nadaljnji izziv je izdelava dovolj ozkih rež, ki sta dovolj tesno druga ob drugi. Ne smemo pozabiti, da je valovna dolžina vidne svetlobe za naše izkušnje zelo majhna, v območju pod enim mikrometrom. Reži sta lahko narazen za nekaj desetink milimetra, njuna širina pa le eno do dve desetinki milimetra. Širini in razmak med režama so torej kar štiri velikostne stopnje manjši od razdalje med zasloni, ki so v območju metrov.

Prav ta metrska razdalja med zasloni pa zelo zmanjša količino svetlobe, ki pade na zaslon z režama in končno na zaslon, kjer opazujemo interferenčne proge. Te so še v popolni temi komaj vidne. Young je opazoval interferenčne proge v beli svetlobi Sonca, zato so bile obarvane. Pa postavimo Youngov poskus z belo svetlobo. Najbolje bi se odrezali, če bi znali eksperimentirati s svetlobo Sonca. Ker tega ne znamo, bomo morali nekoliko spremeniti sam poskus. Namesto oddaljenega zaslona Z, kjer opazujemo interferenčno sliko, bomo uporabili kar oko ali fotografski aparat. Tako se izognemo veliki razdalji med režama v zaslonu Z2 ter zaslonom Z in zato komaj opaznim interferenčnim progam. Oko namreč prislonimo tik ob reži in gledamo skoznju na kak meter oddaljen zaslon Z1 z ozko režo, ki jo z druge strani osvetljuje žarnica. Interferenčne proge so na tak način jasno vidne, tudi fotografiramo jih brez težav (glej sliko 2 in sliko 3). Oddaljeni zaslon Z smo torej nadomestili z mrežnico očesa, ki je zelo občutljiva in s katero zato dobro zaznavamo šibko svetlobo iz rež.

Kako narediti reži, ki bosta dovolj ozki in čim bliže druga drugi? Navodil je kar nekaj. Nekateri priporočajo tanko aluminijevo folijo, v katero s šivanko naredimo dve kar se da bližnji luknjici. Spet drugi priporočajo, da po s sajami zatemnjeni šipi potegnemo s tesno stisnjenima ostrima britvicama. Ker je debelina britvice  $80 \mu\text{m}$ , sta nastali reži prav toliko narazen. Nam sta se najbolje posrečili reži z lasom in dvema britvicama. Na lesen okvirček smo napeli las



**SLIKA 2.**

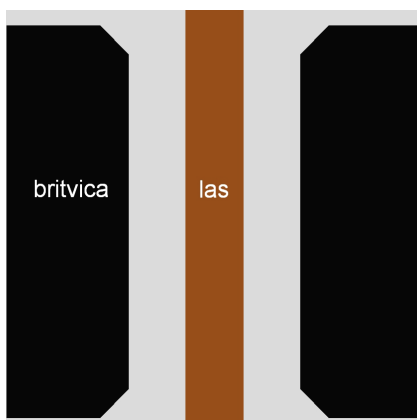
Posneta interferenčna slika dveh rež z belo svetlobo



**SLIKA 3.**

Močnejše eksponirana slika, da se vidijo tudi barvne proge.

z debelino  $60 \mu\text{m}$  in ga pritrdil s kapljicama sekundnega lepila. Nato smo z obeh strani pazljivo prislonili britvici tako, da sta bili reži prav tako široki kot las (glej sliko 4). Tako je bila razdalja med režama  $120 \mu\text{m}$ . Izdelava terja močnejšo lupo ali mikroskop z ne preveliko povečavo ( $\approx 10$  krat). Tudi britvici smo pritrдили s kapljicama sekundnega lepila.



**SLIKA 4.**

Izdelani reži pri našem poskusu

Z belo svetlobo interferenčnih prog ni prav veliko. Jasno pa sta vidni skoraj povsem temni progi med tremi belimi. Ostale proge so že obarvane in hitro ugašajo zaradi kar velike širine rež v primeri z valovni dolžino svetlobe. Prav ti dve temni in tri bele

proge pa so zelo izrazite in jih težko zgrešiti. To je bilo Youngu v prid, saj je kljub težavnemu poskusu proge lahko opazil. Pri svojem prvotnem poskusu ni uporabil rež pač pa tanko (malo manj kot  $1 \text{ mm}$ ) kartico, ki jo je postavil v ozek curek Sončeve svetlobe, in opazoval njeno senco na oddaljenem zaslonu. Valovne narave svetlobe pa kljub poskusom niso sprejeli še nekaj desetletij, vse do tedaj, ko je Fresnel ponovil nekatere Youngove poskuse in na novo prikazal interferenčne poskuse z zrcali in na okrogli in ravni oviri ter matematično podprl izide poskusov.

Na sliki 5 je izračunana in barvno predstavljena interferenčna slika dveh zelo drobnih rež na oddaljenosti  $120 \mu\text{m}$  z belo svetlobo. Podobnost s posneta sliko je kar dobra, če se zavemo končne širine pravih rež. Uklonska slika ene same reže (glej sliko 6 in 7) pa ni barvno izrazita in zato njeno opazovanje za Younga ni bilo kaj prida navdihujoče.



**SLIKA 5.**

Izračunana interferenčna slika dveh zelo ozkih rež v beli svetlobi

Omenili smo, da je prikaz Youngovega poskusa z lasersko svetlobo zelo preprost: na reži posvetimo z laserskim kazalnikom in sredi belega dne vidimo na oddaljenem zaslonu izrazite interferenčne proge. Ob tem se šele zavemo, kako neznansko močno svetilo je laser v primeri z drugimi svetili, s katerimi je opazovanje interferenčnih prog na zaslonu tudi v popolnoma zatemnjeni sobi skoraj nemogoče, še posebej, če gre svetloba skozi barvni filter. Zelo ozek enobarvni curek svetlobe iz laserja se zelo malo razširja. Pri običajnih svetilih dobimo tak curek le, če usmerimo svetlobo iz zelo oddaljenega svetila skozi barvni filter in skozi drobne luknjice v zaslonu Z1, kar curek dodobra oslabi. Opazovanje interferenčnih prog z lasersko svetlobo je na način, ki smo ga uporabili pri beli svetlobi iz žarnice, lahko usoden za oči – že pri opazovanju, ki traja le kakšno sekundo, si lahko pokvarimo vid, tudi če uporabimo šibke laserske kazalnike.

# Barvni sudoku

↓↓↓

→ V  $8 \times 8$  kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih  $2 \times 4$ ) nastopalo vseh 8 števil.

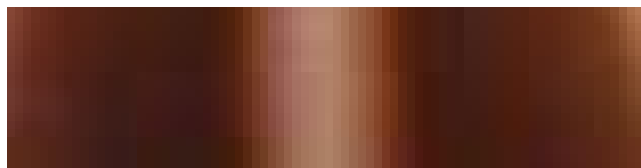
					2	1	
	3						
					4	3	
	7	4					5
		6		7	8		
2		5					
5					1		
	1			5		8	

→  
→  
→  
→  
REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	1	3	2	5	7	8	6
5	6	7	8	2	1	4	3
2	8	5	7	4	3	6	1
3	4	6	1	7	8	5	2
8	7	4	3	1	6	2	5
6	2	1	5	8	4	3	7
1	3	2	4	6	5	7	8
7	5	8	6	3	2	1	4

× × ×

× × ×



SLIKA 6.

Posneta interferenčna slika ene reže v beli svetlobi



SLIKA 7.

Izračunana interferenčna slika ene reže v beli svetlobi



SLIKA 8.

Pogled skozi dve reži na nekoliko razprto kljunasto merilo

# Uporaba programov Virtualnega observatorija za študijo jate galaksij Berenikini kodri

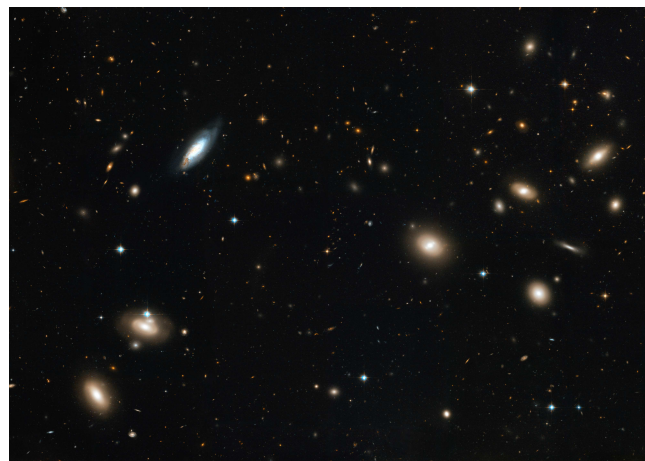
↓↓↓

DUNJA FABJAN

→ Galaksije, ki jih opazujemo na nočnem nebu, niso naključno razporejene po nebesnem svodu. Med razvojem vesolja se pod vplivom gravitacije združujejo v večje sestave, ki jim pravimo skupine in jate galaksij. Skupine sestavlja manj članic, okrog 50 različnih galaksij, jate pa so bogatejše in vsebujejo tudi do tisoč galaksij. To je tudi primer jate Berenikini kodri (uradno Abell 1656), kjer bomo z vzorcem približno 500 galaksij ocenili nekatere njene osnovne lastnosti.

Pri opazovanjih jat moramo najprej razčistiti, ali se na sliko ni prikradla kakšna bližnja ali bolj oddaljena galaksija, ki se po naključju nahaja vzdolž smeri pogleda. Potrebna so torej dodatna opazovanja gostote svetlobnega toka posamične galaksije v različnih valovnih dolžinah (spekter galaksije). V razčlenjeni svetlobi so prisotne črte, iz katerih lahko s pomočjo Hubblovega zakona razberemo razdaljo galaksije.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Preizkusite sami učinek rdečega premika na spekter galaksije na spletni strani skupine za astronomsko izobraževanje Univerze Nebraska-Lincoln: <http://astro.unl.edu/classaction/animations/cosmology/galacticredshift.html>.



**SLIKA 1.**

Jata galaksij Berenikini kodri (Abell 1656), ki jo je posnel vesoljski teleskop Hubble. Jata se nahaja na razdalji približno 300 milijonov svetlobnih let, v premeru pa meri okrog 20 milijonov svetlobnih let. Avtorstvo: NASA, ESA in Hubble Heritage Team (STScI/AURA).

Hubbllov zakon nam namreč pove, da se zaradi širjenja vesolja galaksije od nas oddaljujejo. Hitrost oddaljevanja galaksij vzdolž smeri pogleda (radialna hitrost galaksij,  $v_{rad}$ ) je premo sorazmerna oddaljenosti galaksije,  $v_{rad} = H_0 \cdot d$ , kjer premo sorazmerje določa Hubblova konstanta  $H_0$ . Zaradi samega širjenja vesolja pa se spreminja valovna dolžina svetlobe, ki jo prejemamo od galaksije. Pri oddaljevanju ga-

laksije so karakteristične črte v spektru pomaknjene proti višjim valovnim dolžinam, torej proti rdeči svetlobi (zato to označujemo z besedno zvezo rdeči premik). Rdeči premik  $z$  lahko opišemo s formulo

$$\blacksquare z = \frac{\lambda_{op} - \lambda_{odd}}{\lambda_{odd}} \simeq \frac{H_0 \cdot d}{c},$$

kjer sta  $\lambda_{op}$  in  $\lambda_{odd}$  opazovana oziroma oddana valovna dolžina objekta (galaksije),  $H_0 \cdot d$  je radialna hitrost galaksije,  $c$  hitrost svetlobe. Skrajni desni del enačbe velja pri dovolj majhnih rdečih premikih.

Z meritvijo rdečega premika lahko sklepamo, ali je galaksija del jate: galaksije na približno istem rdečem premiku so tudi na približno isti razdalji, in če se nahajajo na istem območju neba, so zelo verjetno del jate.

Poleg hitrosti zaradi širjenja vesolja pa imajo galaksije tudi svoje lastno gibanje. Znotraj jate so namreč njihove hitrosti reda velikosti več 100 km/s, gibljejo pa se neurejeno v vse smeri. Meritve radialnih hitrosti bodo zato pokazale (Maxwellovo) porazdelitev okrog središčne vrednosti. Vrh porazdelitve bo na povprečnem rdečem premiku jate (oziroma pri hitrosti  $v_{rad} = z \cdot c$ ). Povprečno hitrost galaksij znotraj jate pa določimo s pomočjo polovične širine porazdelitve na polovični višini,  $\sigma_{rad}$ .<sup>2</sup>

Pri opazovanjih moramo biti pozorni, da je naš vzorec čimbolj popoln in da se nam ne izmuznejo šibkejše galaksije. Če je vzorec nepopoln, bi lahko bile naše končne ugotovitve napačne. V primeru jate Berenikini kodri, ki so jo opazovali v pregledu neba SDSS, so ocenili, da je popolnost vzorca dovolj visoka do mejne magnitude 17,77 (v r filtru). Pri višjih magnitudah pa so zaznali premalo šibkih galaksij in zato vzorec ni več popoln.

Z uporabo jat galaksij je leta 1933 švicarski astronom Fritz Zwicky prvi sklepal o prisotnosti temne snovi in to približno 40 let, predno je svoje meritve in ugotovitve o prisotnosti temne snovi v galaksijah zapisala astronomka Vera Rubin. Zwicky je svojo razlago podal takole. Na nebu lahko opazimo veliko jat galaksij. Sklepamo, da ne gre za objekte šele v razvoju, marveč za stabilne strukture in si lahko za oceno njihove mase pomagamo z virialnim teo-

remom. Pri tem predpostavimo, da je porazdelitev galaksij v jati sferna in da je jata v dinamičnem ravnovesju. Virialni teorem nam pove, da je povprečna gravitacijska energija takega sistema ( $W_g$ ) enaka negativni vrednosti dvakratnika povprečne termične (kinetične) energije sistema ( $W_k$ ), torej  $W_g = -2W_k$ . Ker sta gravitacijska energija  $W_g = -\frac{3}{5} \frac{G \cdot M^2}{R}$  in kinetična energija galaksij  $W_k = \frac{1}{2} M \cdot 3\sigma_{rad}^2$ , lahko izrazimo maso sistema  $M$  kot

$$\blacksquare M = \frac{5\sigma_{rad}^2 R}{G},$$

kjer sta  $R$  radij jate in  $G$  gravitacijska konstanta.

V prvem približku bi lahko maso takega objekta ocenili s seštevanjem mase galaksij, ki jih vidimo na astronomskem posnetku in za katere sklepamo, da pripadajo jati. Toda Zwicky je opazil, da je masa, izračunana z virialnim teoremom, bistveno (v njegovi oceni celo nekaj 100-krat) večja. Sklepal je, da mora obstajati temna snov, ki jato drži skupaj, saj bi se galaksije v obratnem primeru porazgubile po prostoru. Danes vemo, da je okrog 85% mase jate galaksij v obliki temne snovi, nekaj več kot 10% v obliki vročega plina, manj kot 5% pa v zvezdah in galaksijah.

Virialni teorem na podoben način uporabimo za oceno mase gravitacijsko vezanih sistemov, kot so zvezde ali kroglaste zvezdne kopice, le da pri prvih upoštevamo termično energijo plina, pri drugih pa kinetično energijo zvezd.

V nadaljnjem besedilu predstavljamo vajo za izračun povprečnega rdečega premika jate, povprečne hitrosti galaksij v jati ter maso celotne jate. Vaja je razdeljena na devet točk, vsaka pa vsebuje še navodila za uporabo ukazov dveh programov Virtualnega observatorija. **Virtualni observatorij** je mednarodna mreža, pri kateri sodelujejo astronomska podatkovna središča, ki razvijajo skupno programsko opremo in platformo in nam omogočajo, da obilico podatkov zemeljskih in vesoljskih teleskopov raziščemo, povežemo, obdelamo in prikažemo.

### Študij jate galaksij Berenikini kodri (Abell 1656)

Avtorja: Giulia Iafate in Massimo Ramella, Tržaški astronomski observatorij

<sup>2</sup>V astronomiji s črko  $\sigma$  označimo »disperzijo hitrosti« (angl. *velocity dispersion*), ki je enaka standardni deviaciji porazdelitve hitrosti v primeru, ko je povprečna hitrost objektov enaka nič.





15

nadaljevanje  
s strani

Uporabljeni programi: Aladin<sup>3</sup>, TOPCAT<sup>4</sup>

**Cilj.** Raziskati jato galaksij Berenikini kodri (Abell 1656) z uporabo podatkov in orodij Virtualnega observatorija (VO) ter s hitrim postopkom oceniti povprečni rdeči premik jate in disperzijo hitrosti galaksij v jati ter tako pridobiti oceno njene mase.

1. **Odpri sliko jate A1656** v vsenebnem barvnem atlasu (*Allsky color atlas*) programa Aladin.
  - Vnesi napis A1656 v okno Location, nato klikni SDSS.
2. Predlagamo uporabo funkcije zoom za **prikaz vidnega polja velikosti približno 1,5°**.
  - Zoom drsnik najdeš na dnu strani desno, velikost vidnega polja FOV (angl. *field of view*) je zapisana v spodnjem delu slike.

Na razdalji, kjer se nahaja jata Berenikini kodri, je 40' enakovrednih 1,1 Mpc<sup>5</sup> (pri uporabi sledečih kozmoloških parametrov:  $H_0 = 71$  km/s/Mpc,  $\Omega_\Lambda = 0.73$ ,  $\Omega_M = 0.27$ ), kar je dovolj veliko območje za našo vajo.

*Namig.* Velikost območja na sliki lahko preveriš tako, da s pomočjo gumba »dist« narišeš črto dolžine 40'.

*Namig.* Klikni na gumb pan v primeru, da bi želel sliko premakniti oziroma jo znova postaviti na sredino ekrana.

3. **Naloži katalog SDSS-DR9** iz serverja All Vizier catalog.
  - **File** → **Open...**; **Surveys** (desno na seznamu Catalog servers) izberi SDSS-DR9; radij 40', odkljukaj »retrieve all columns« (pridobi vse stolpce in klikni SUBMIT).

S filtrom v SDSS katalogu izberi samo galaksije (odstrani zvezde in ostale izvore):

<sup>3</sup>Interaktivni nebesni atlas Aladin (beri Aladèn, po francosko) je prosto dostopen na spletni povezavi <http://aladin.u-strasbg.fr/>.

<sup>4</sup>Program TOPCAT je prostodostopen na spletni povezavi <http://www.star.bris.ac.uk/~mbt/topcat/>.

<sup>5</sup>Mpc označuje 10<sup>6</sup> parsekov (pc) oziroma en mega parsek. Parsek (paralaksa ene ločne sekunde) je ena izmed osnovnih astronomskih enot za razdaljo in meri  $3,08 \cdot 10^{16}$  m.

- **Catalog** → **Create a filter** → **Advanced mode**; **Columns** → **Columns in loaded catalogs**; izberi »CL« in vnesi ukaz  $\{c\}=3 \{draw\}$ . Uporabi funkcijo »MATH«, če potrebuješ vnos oklepajev »{}«; klikni **Apply**.

V okencu filtra izvozi (*Export*) filtrirani katalog na novo ravnino in ga preimenuj v SDSSGalaxies (z desnim klikom na izbrano ravnino lahko spreminjaš ime, barvo ter simbole v oknu lastnosti – *properties*). Za bolj jasen prikaz svetujemo, da pušiš na desnem seznamu samo obarvano ravnino SDSS9 in ravnino SDSSGalaxies.

#### 4. Prenesi filtrirani katalog v aplikacijo TOPCAT.

- Zaženi program TOPCAT; izberi ravnino SDSSGalaxies v Aladinu in klikni na malo parabolično anteno v spodnjem desnem kotu aplikacije Aladin.

#### 5. Ustvari niz galaksij s fotometričnimi podatki (rPmag) v SDSS.

Ustvari niz galaksij (poimenuj ga MAG\_LIMITED), ki ga bodo sestavljale galaksije z magnitudami rPmag, ki so svetlejše od omejitve v popolnosti za spektroskopski vzorec SDSS,  $rPmag_{lim} = 17,77$ .

- **Views** → **Row Subsets** ter v oknu subset klikni na zeleni križec. Vnesi ime niza ter izraz  $\$83 \leq 17.77$ .

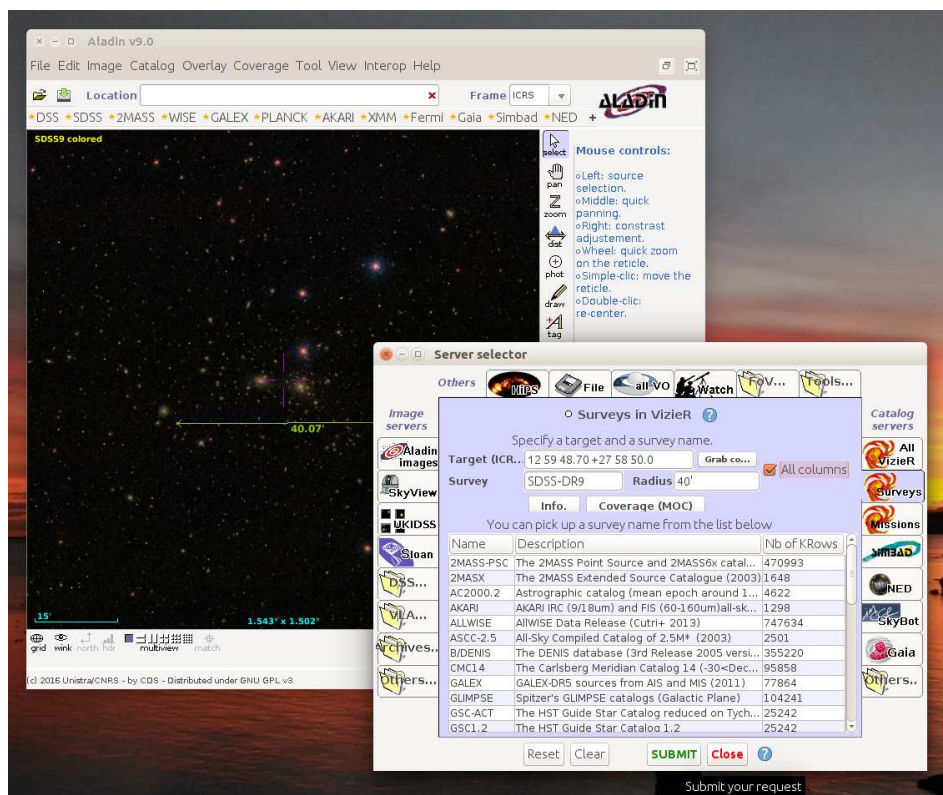
Preveri velikost svojega vzorca ( $N_{MAG\_LIMITED} = 648$ ).

*Pozor.* TOPCAT ne razlikuje med velikimi in malimi črkami, SDSS pa vsebuje tako magnitude rPmag kot rPmag. V tem primeru je potrebno uporabiti \$ID (identifikacijsko polje) posamičnega stolpca raje kot njegovo ime. \$ID stolpcev si lahko ogledate z **Views** → **Column Info**.

Ustvari manjši vzorec iz vzorca galaksij, omejenih v magnitudi in za katere obstaja vrednost rdečega premika (zsp) v SDSS. Ustvari podvzorec Z znotraj te omejitve v popolnosti vzorca in za galaksije z rdečim premikom.

- Klikni na zeleni križec in vnesi izraz  $MAG\_LIMITED \& \text{zsp} > 0$ ; subset name Z.





SLIKA 2.

Slika jate A1656 v programu Aladin. Na sliki je označena velikost polja ter okno za izbiro kataloga pregleda neba SDSS-DR9.

Preveri velikost vzorca ( $N_Z = 482$ ). Opaziš lahko, da je vzorec manj kot 100% popoln v rdečem premiku ( $482/648 = 74\%$ ).

## 6. Posreduj vzorec Z Aladinu.

- V glavnem oknu programa TOPCAT izberi **Row Subset: Z; Interop → Broadcast table**.

Preimenuj ga v Z v Aladinovem desnem seznamu in pregledj. Za boljši pregled lahko odstraniš SDSSGalaxies.

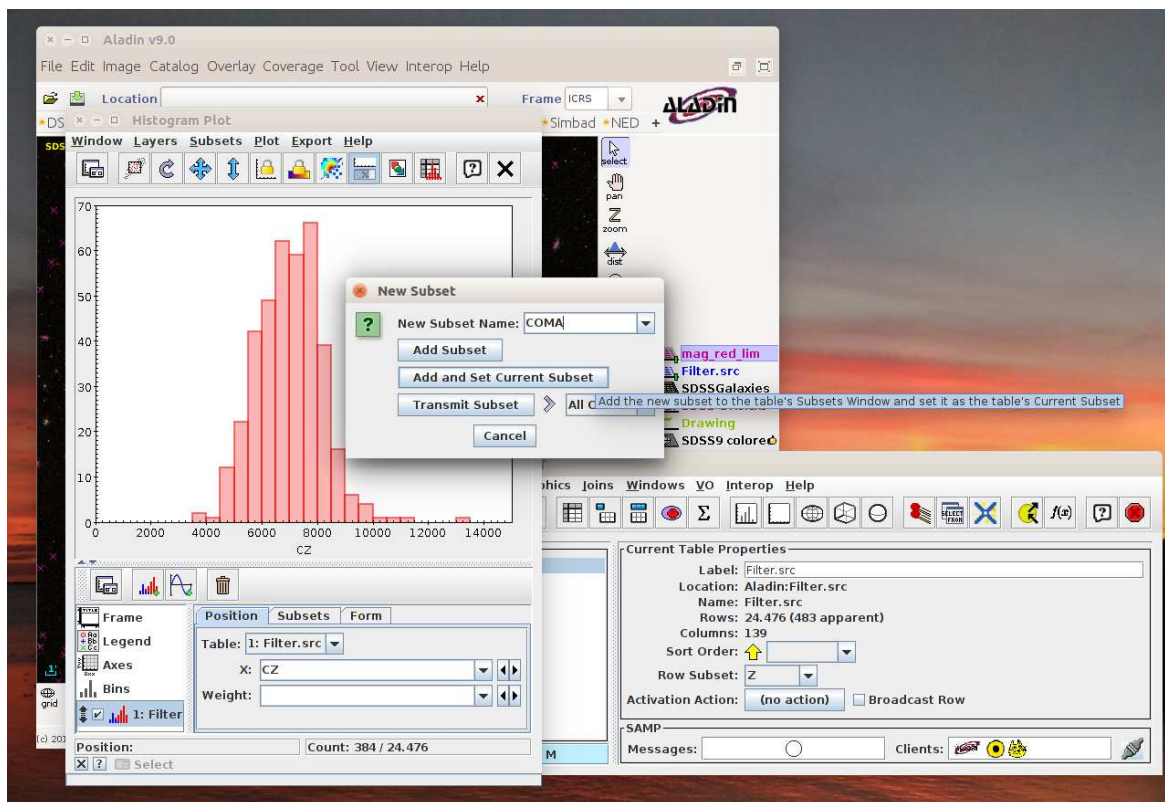
## 7. Pridobi povprečno radialno hitrosti in disperzijo hitrosti za jato galaksij Berenikini kodri. V TOPCATu spremeni rdeči premik v radialne hitrosti ( $v = c \cdot zsp$ ).

- **Views → Column info**; v novem oknu klikni na zeleni križec; ime (*name*) CZ ; izraz (*expression*)  $zsp * toDouble(300000)$ .
- **Views → Table data**; preveri prisotnost in pravilnost novega stolpca (na zadnjem mestu v tabeli).

8. **Izoliraj vrh radialne hitrosti jate** v oknu porazdelitve (*histogram window*), ustvari nov podvzorec COMA. TOPCAT je zmožen ustvarjanja podvzorcev iz predela histograma, ki je trenutno prikazan. Porazdelitev hitrosti jate je podobna krivulji v obliki zvonca z vrhom pri približno 7000 km/s in se razteza do nekaj 1000 km/s stran od vrha. Ko jo boš videl jasno in dobro izolirano v svojem oknu, boš lahko ustvaril seznam galaksij, ki sestavljajo jato.

- **Graphics → Histogram Plot**; v novem oknu izberi **Position → X → CZ; Subsets → Z**;
- razišči histogram s premikanjem miške in sočasnim pritiskom na levo tipko;
- izberi vrh v grafičnem oknu s premikom miške in pritiskom na desno tipko (lahko tudi izbereš **Axes → Range** in ročno vneseš mejne vrednosti  $X_{min}$ ;  $X_{max}$ ,  $Y_{min}$ ,  $Y_{max}$ ).
- na koncu še **Subsets → New Subset from visible → ime COMA; Add and Set Current Subset**.





**SLIKA 3.**  
Prikaz histograma porazdelitve hitrosti galaksij v programu TOPCAT.

**9. Pridobi povprečno hitrost in disperzijo hitrosti v jati galaksij Berenikini kodri.**

- **Views** → **Column statistics** v glavnem oknu TOPCATa izpiše  $n_{Good} = N_{members} = 381$ ,  $\langle cz \rangle = 6977$  km/s in disperzijo hitrosti  $\sigma = 1120$  km/s, kar se odlično sklada z bolj natančnimi analizami.

*Pozor.* Prikažeš lahko več statističnih lastnosti in jih pregledaš v seznamu **Display**.

Bolj natančne statistične analize galaksij, ki sestavljajo jato, in sistematičnih napak pokažejo, da je disperzija hitrosti jate  $\sigma = 947 \pm 31$  km/s. Skupaj z oceno radija jate,  $R_{200} = 2.23 \pm 0.08$  Mpc, je ocenjena jatna masa  $M_{200} = 1.29 \pm 0.15 \cdot 10^{15} M_{\odot}$  (Soncevih mas). Podatki so iz članka Sohn J., Geller, M. J., Zahid, H. J. et al. 2016, arXiv:1612.06428.

Vajo Študij jate galaksij Berenikini kodri sta sestavila avtorja v sklopu projekta Asterics, ki ga podpira okvirni program EU Obzorje 2020 (Horizon 2020).

Več podobnih vaj (v angleščini) najdete na spletnih straneh Euro-VO (<http://www.euro-vo.org/?q=science/scientific-tutorials> ter [http://vo-for-education.oats.inaf.it/index\\_eng.html](http://vo-for-education.oats.inaf.it/index_eng.html)).

**Literatura**

- [1] Sohn J. idr. 2016, *The Velocity Dispersion Function of Very Massive Galaxy Clusters: Abell 2029 and Coma*, dostopno na: <https://arxiv.org/abs/1612.06428>, ogled: 20. 4. 2017.
- [2] program Aladin Sky Atlas, dostopno na: <http://aladin.u-strasbg.fr/>, ogled: 20. 4. 2017.
- [3] program TOPCAT, dostopno na: <http://www.star.bris.ac.uk/~mbt/topcat/>, ogled: 20. 4. 2017.



# Drevesno preiskovanje Monte Carlo



DAMJAN STRNAD

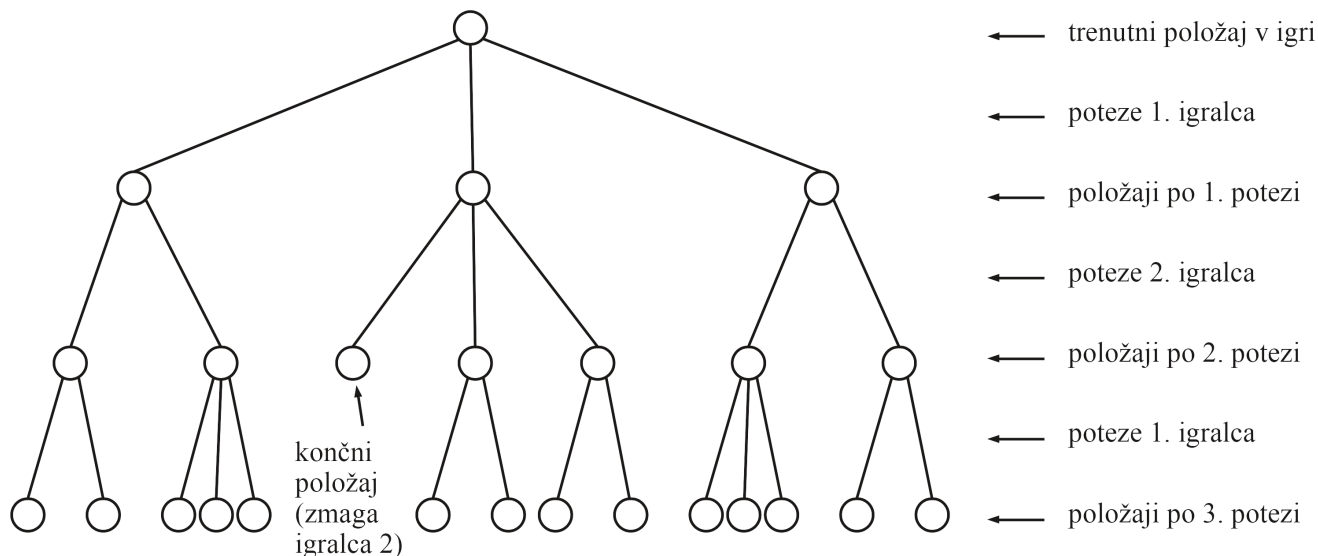
→ Bralec tega prispevka se je najbrž že kdaj preizkusil proti računalniku v kateri od iger, kot so šah, dama ali vsaj križci-krožci. V omenjenih igrah je računalnik že zdavnaj presegel človeka, kar je delno zasluga napredka strojne opreme, predvsem pa algoritmov, ki v vsakem stanju igre precej zanesljivo določijo najboljšo naslednjo potezo.

To naredijo z izgradnjo *drevesa igre* za določeno število potez v prihodnost. Vozlišča v drevesu igre so položaji v igri (npr. položaji na šahovnici), povezave med njimi pa poteze, ki jih izmenično vlečeta nasprotnika (glej sliko 1). Algoritem zgradi drevo igre iz trenutnega položaja, ki je v korenu drevesa, do določene globine (npr. pet mojih in pet nasprotnikovih potez). Položaji v listih drevesa igre so torej položaji, do katerih nas pripeljejo vse možne kombinacije naših in nasprotnikovih potez. Algoritem zatem z uporabo vgrajenega strokovnega znanja o igri oceni te položaje, od katerih so nekateri lahko tudi končni (npr. zmaga enega od igralcev). Ocena položaja pove, za katerega od igralcev je ta vsaj navidez bolj ugoden. Na podlagi ocen položajev se po posebnem postopku določi poteza, ki igralcu na potezi v korenu zagotavlja najboljše nadaljevanje ob najslabšem možnem scenariju (tj. optimalni igri nasprotnika). Osnovna metoda na tem področju je algoritem alfa-beta in njegove številne optimizacije, ki so ob vsesplošni paralelizaciji izvajanja na sodobnih elektronskih napravah in uporabi obsežnih zbirk specifičnega znanja o posamezni igri (t. i. hevristično znanje) prisilili človeka, da je že pred leti priznal premoč računalniku.

Obstajajo pa tudi igre, ki jim na sistematičnem pregledovanju drevesa igre temelječi algoritem alfa-beta in njegove izpeljanke niso kos. Za prvo takšno igro je veljala Arimaa, ki se igra s posebnimi figurami na standardni šahovnici, a je pred dvema letoma najmočnejše človeške igralce, tesno pa vendar, z uporabo algoritma alfa-beta premagal program Sharp. Morda je k temu pripomoglo tudi dejstvo, da Arimaa nikoli ni dosegla pretirane priljubljenosti in je zato tudi število vrhunskih človeških igralcev omejeno.

Druga in precej bolj znana tovrstna igra je go, ki se igra s polaganjem kamenčkov dveh barv na ploščo velikosti  $19 \times 19$  polj. V zadnjih letih je igra go postala že kar slavna zaradi svoje vloge zadnjega stebra obrambe človeške inteligence pred hladno igralno logiko računalnikov. Slednji so namreč pri igranju igre go dosegali nivo povprečnega amaterja. Vse to se je spremenilo lani, ko je računalniški program po imenu AlphaGo prepričljivo premagal človeškega svetovnega prvaka. Algoritem, ki ga uporablja AlphaGo, je vsekakor daleč prekompleksen, da bi ga v celoti opisali tukaj, zainteresirani bralec pa najde podroben opis v članku [1]. V tem prispevku bomo opisali algoritem za gradnjo drevesa igre, ki je eden od sestavnih elementov programa AlphaGo in se imenuje drevesno preiskovanje Monte Carlo (*Monte Carlo tree search*, MCTS). MCTS ne temelji na hevrističnem ocenjevanju nekončnih položajev v listih drevesa igre kot alfa-beta, temveč kakovost naslednje poteze ocenjuje z velikim številom simulacij naključnih iger računalnika samega s sabo (t. i. *self-play*). Ker pa bi izključno naključne simulacije v omejenem času za potezo težko zanesljivo določile najboljšo potezo, algoritem MCTS kombinira med naključnim vlečenjem potez in prednostno izbiro potez, ki so se v predhodnih simulacijah izkazale kot potencialno dobre v posameznih položajih igre. Temu mehanizmu, ki je





**SLIKA 1.**  
Drevo igre

prisoten v praktično vseh iskalnih algoritmih ume-  
tne inteligence, rečemo uravnovežanje med *razisko-  
vanjem* (naključne poteze) in *izkoriščanjem* (znane  
dobre poteze).

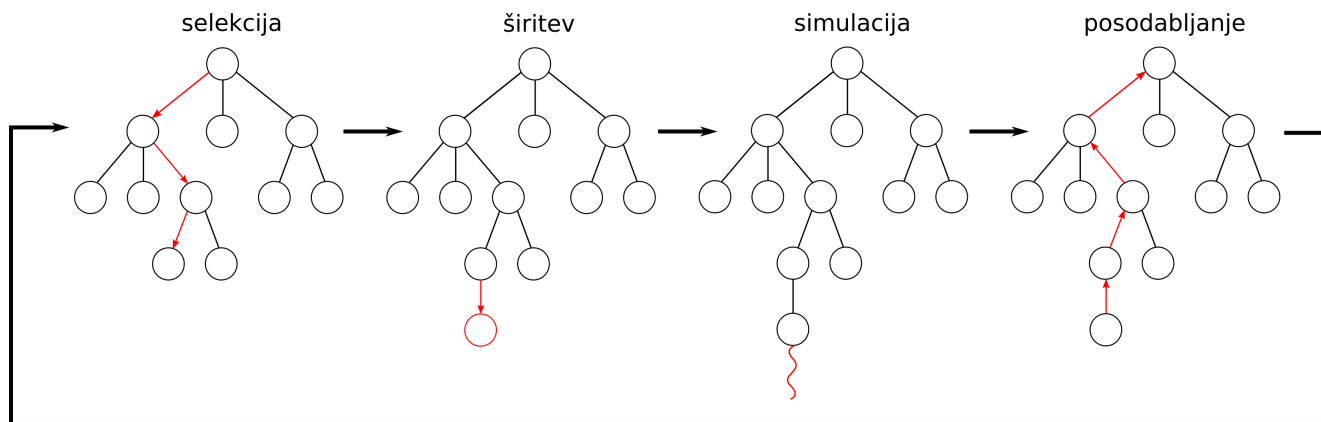
Osnovna značilnost iger, pri katerih se je MCTS  
uveljavil pred ostalimi algoritmi, je visok povprečni  
*vejitveni faktor*, tj. povprečno število možnih potez  
v poljubnem položaju igre. Pri igri Arimaa je ta oce-  
njeno na več kot 15000, pri igri go pa naj bi znašal  
skromnejših 250. Druga posebnost algoritmu alfa-  
beta neprijaznih iger je ta, da je v splošnem težko  
zanesljivo oceniti, kateri igralec in za koliko je v ne-  
kem položaju v prednosti. Z drugimi besedami, he-  
vristično oceno je težko definirati samo na podlagi  
situacije na plošči.

V nadaljevanju prispevka bomo najprej opisali al-  
goritem MCTS, zatem pa prikazali osnovni koncept  
delovanja na praktičnem primeru. Ironija praktič-  
nega primera bo v tem, da bomo zanj uporabili igro  
križci-krožci, ki je morda najpreprostejša od vseh  
možnih iger in najlepši primer igre, pri kateri upo-  
raba MCTS ni potrebna. Bo pa zato zgled dovolj pre-  
prost in bo jasno ponazoril princip delovanja algo-  
ritma, ki ga je mogoče prenesti neposredno na vse  
druge podobne in veliko bolj kompleksne igre.

### Drevesno preiskovanje Monte Carlo

Naloga algoritma MCTS je poiskati najboljšo nasle-  
dno potezo za igralca na potezi v trenutnem polo-  
žaju pri igri. Podobno kot vsi sorodni algoritmi za  
igranje iger tudi MCTS trenutni položaj predstavi kot  
koren drevesa igre, drevo pa nato v več ciklih počasi  
dograjuje. Vsak cikel algoritma je sestavljen iz štirih  
korakov, ki si sledijo v naslednjem zaporedju (glej  
sliko 2):

- **Selekcija** - v tem koraku MCTS s pomočjo strate-  
gije selekcije izbira poteze, s katerimi se pomika  
od korena drevesa igre proti listom. Če v nekem  
vozlišču strategija izbere potezo v smeri nasle-  
dnjega stanja, ki že ima pripadajoče vozlišče v  
drevesu igre, se premaknemo v to vozlišče in s se-  
lekcijo nadaljujemo. Če pa strategija izbere novo,  
še neuporabljeno potezo, se izvajanje algoritma  
prestavi v naslednji korak, tj. v širitev drevesa igre.
- **Širitev** - v tem koraku se ustvari oziroma *razvije*  
novo vozlišče za doslej neobstoječi položaj v dre-  
vesu igre, ki je bil izbran v koraku selekcije. Raz-  
vito vozlišče se doda v drevo igre kot nov list, tako  
da se drevo igre v vsakem ciklu algoritma MCTS  
poveča za natanko eno vozlišče. Sledi izvajanje  
naslednjega koraka, tj. simulacije.



**SLIKA 2.**  
Koraki algoritma MCTS

- **Simulacija** - v tem koraku se izvede simulacija igre od trenutnega položaja do zaključka igre, pri čemer za izbiro potez uporabljamo t. i. simulacijsko strategijo. Ta je ponavadi zelo preprosta in izbira poteze za oba nasprotnika povsem naključno, lahko pa vključuje hevrstiko in daje prednost potezam, ki običajno veljajo za dobre v določeni igri (npr. igranje v sredino ali vogal pri igri križci-krožci, če ta seveda še ni zaseden). Simulacija se zaključi, ko je dosežen kateri od končnih položajev igre (npr. trije križci ali krožci v vrsti).
- **Posodabljanje** - v fazi posodabljanja se najprej ovrednoti dosežen končni rezultat simulacije s stališča igralca na potezi. Pri igri križci-krožci bi bila možna vrednost igre npr. 1 za zmago, 0.5 za neodločen izid in 0 za poraz. Nato se pomikamo nazaj po verigi obiskanih vozlišč od nazadnje dodanega lista do korena in popravljamo nekatere pri vozliščih shranjene vrednosti. Te vrednosti uporablja strategija selekcije pri izbiri potez v naslednjih ciklih algoritma.

Izvajanje algoritma MCTS lahko omejimo z maksimalnim številom ciklov ali pa z omejitvijo časa za potezo. V slednjem primeru bo MCTS izvajal simulacije do izteka časa za potezo in nato na podlagi vrednosti vozlišč-naslednikov korena v drevesu igre predlagal najboljšo naslednjo potezo.

V zgornjem opisu algoritma manjka nekaj ključnih informacij, predvsem to, kako strategija selekcije izbira poteze pri pomikanju navzdol po obstoje-

čem delu drevesa igre ter kako se povsem na koncu določi najboljša poteza. Da lahko pojasnimo oboje, moramo najprej vedeti, katere informacije se hranijo pri vsakem vozlišču drevesa igre. Pravzaprav jih ni tako veliko. Poleg seznama kazalcev na naslednike, od katerih so tisti na še nerazvite enostavno prazni (nil), in podatka o tem, kateri igralec je v vozlišču na potezi, sta za osnovni MCTS potrebna samo še dva števca. Prvi je števec obiskov vozlišča, ki pove, v koliko dosedanjih ciklih algoritma smo med fazo selekcije šli preko tega vozlišča. Drugi števec je vsota vrednosti iger, ki so šle preko tega vozlišča. Če smo torej neko vozlišče v dosedanjem poteku algoritma obiskali desetkrat in smo pri tem sedemkrat zmagali ter trikrat izgubili, bomo to na kratko zapisali z oznako 7/10 znotraj vozlišča. Slika 3 prikazuje primer dela drevesa igre (celotno drevo bi imelo 21 vozlišč) med igralcem s črnimi figurami, ki je na potezi, in njegovim nasprotnikom z belimi figurami. Algoritem MCTS je doslej izvedel 20 simulacij, od katerih se jih je 14 končalo z zmago za črnega, kar nam pove oznaka 14/20 v korenu drevesa (predpostavimo, da neodločen izid ni možen)<sup>1</sup>. Številke ob vozliščih predstavljajo enolične oznake vozlišč, da se bomo nanje lažje sklicevali. V nadaljevanju bomo za število obiskov vozlišča  $i$  uporabljali oznako  $n_i$ ,

<sup>1</sup>Če je pozoren bralec opazil, da je število obiskov vozlišča enako vsoti obiskov v njegovih naslednikih samo v korenu, naj spomnimo, da vsako razvito vozlišče razen korena prvič obiščemo že ob njegovem razvoju.

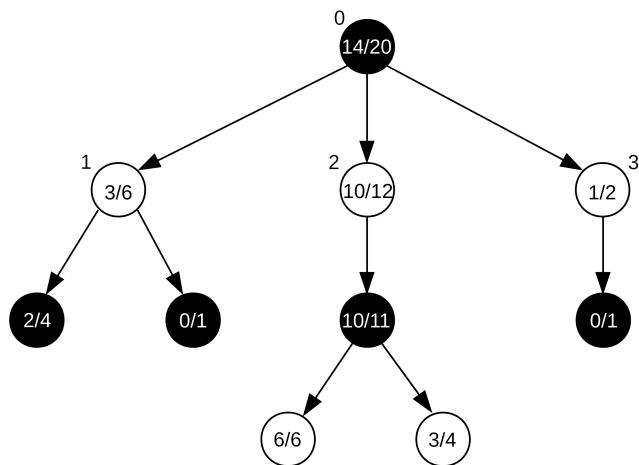


→ za njegovo vrednost pa  $v_i$ .

Sedaj se lahko posvetimo problemu izbire potez med fazo selekcije algoritma MCTS. Daleč najbolj priljubljena strategija selekcije v obstoječih izvedbah osnovnega MCTS je strategija UCT (Upper Confidence bound for Trees). Naj bo  $i$  indeks trenutnega vozlišča, v katerem v koraku selekcije izbiramo naslednjo potezo za premik po drevesu igre navzdol, in naj bo  $j$  indeks kateregakoli od njegovih naslednikov, tudi tistih, ki jih še nismo razvili in torej še nimajo pripadajočega vozlišča v drevesu igre. Vrednost UCT naslednika  $j$  izračunamo po naslednji enačbi:

$$\blacksquare UCT_j = \frac{v_j}{n_j} + c \cdot \sqrt{\frac{\ln n_i}{n_j}}. \quad (1)$$

Ob enačbi (1) se velja nekoliko pomuditi. Prvi člen enačbe je razmerje med doseženo vrednostjo naslednika in številom iger, ki so potekale preko njega. Ta bo višja pri tistih vozliščih, ki so sodelovala v večjem številu zmagovalnih iger. Na primeru s slike 3 je, recimo, vrednost prvega člena enačbe (1) za najbolj levega naslednika korena enaka  $\frac{3}{6} = 0.5$ . Med dvema naslednikoma z istim številom doseženih točk bo višje ocenjen tisti, pri katerem nam je to uspelo v manjšem številu poskusov. In podobno, med dvema vozliščema naslednikoma z istim številom obiskov bo višje ocenjeno tisto, pri katerem smo ob tem dosegli višji izkupiček. Namen prvega člena enačbe (1) je torej favorizirati naslednike, ki so se v dosedanjih



**SLIKA 3.**  
Primer dela drevesa igre za MCTS

simulacijah izkazali za boljše. To je t.i. izkoriščevalski del prej omenjenega mehanizma uravnovežanja med raziskovanjem in izkoriščanjem.

Bralcu je najbrž jasno, da drugi člen enačbe (1) potemtakem predstavlja raziskovalni del mehanizma. To lahko potrdimo s tem, da razmislimo o vplivu ulomka pod korenomo. V števcu ulomka nastopa število obiskov trenutnega vozlišča  $i$ , ki je enako za vse njegove naslednike. V imenovalcu nastopa število obiskov posameznega naslednika. Če je to višje, bo vrednost ulomka, s tem pa tudi celotnega drugega člena, nižja. Drugi člen bo torej favoriziral redkeje obiskane naslednike, kar ustreza raziskovalnemu elementu iskalnih algoritmov. Še nerazvitim naslednikom, pri katerih je  $n_j$  v obeh imenovalcih enak 0, priredimo vrednost  $UCT = 1$ . Eksperimentalno določena konstanta  $c$  je utež, s katero lahko poudarimo raziskovalno ali izkoriščevalno plat strategije UCT oziroma določamo ravnotežje med njima.

Strategija selekcije UCT v vsakem vozlišču izbere potezo v smeri naslednika, ki ima najvišjo ali najnižjo vrednost UCT. Če je takih naslednikov več (npr. vsi še nerazviti nasledniki), potem med njimi izbere naključno. V smeri najvišje ocenjenega naslednika igramo v tistih vozliščih, v katerih je na potezi igralec, ki je na potezi tudi v korenu (torej igralec, ki dejansko gradi drevo igre). V smeri najnižje ocenjenega naslednika igramo v vozliščih, kjer je na potezi nasprotnik. Bralec naj sam razmisli, zakaj je takšna strategija selekcije smiselna. Kot namig naj samo ponovimo, da vrednosti  $v$  v vozliščih odražajo višino izkupička s stališča igralca, ki je na potezi v korenu.

Oglejmo si, kako bi strategija selekcije izbirala poteze na primeru s slike 3 pri  $c = 1$ . V korenu izračunamo vrednosti UCT za naslednike in dobimo:

$$\blacksquare UCT_1 = \frac{3}{6} + \sqrt{\frac{\ln 20}{6}} = 1,207,$$

$$UCT_2 = \frac{10}{12} + \sqrt{\frac{\ln 20}{12}} = 1,333,$$

$$UCT_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\ln 20}{2}} = 1,724.$$

Strategija selekcije v korenu izbere potezo v smeri najvišje ocenjenega naslednika, kar je vozlišče 3. To stori tudi v primeru, če ima koren še kakšne nerazvite naslednike, katerih vrednost UCT je enaka 1. Ker vozlišče 3 ni končni položaj, v nadaljevanju stra-

tegija selekcije naključno izbere med njegovimi še nerazvitimi nasledniki, katerih vrednost UCT je enaka 1. Vrednost UCT že razvitega naslednika je namreč nižja, saj znaša  $\sqrt{\ln 2} = 0,833$ .

Preostane samo še vprašanje izbire končne poteze. Ko se čas za izbiro poteze izteče, vrnemo potezo v smeri največkrat obiskanega naslednika korena. Zakaj ne v smeri najbolje ocenjenega? Lahko tudi to, izkaže se namreč, da gre v večini primerov za eno in isto vozlišče, sicer pa se je izbira najpogosteje obiskanega naslednika korena izkustveno bolj uveljavila v praksi.

### Zgled križci-krožci

Da teoretično razlago podkrepimo še s praktičnim zgledom, vzemimo primer dobro znane igre križci-krožci. Naj bo trenutni položaj v igri takšen, kot je prikazan v korenu drevesa na sliki 4, na potezi pa je križec. Pri izbiri naslednikov bomo upoštevali, da so preko horizontale, vertikale ali diagonale prezrcaljena stanja igre enakovredna. Med zrcalno enakovrednimi nasledniki bomo zato vedno upoštevali le enega, kar bo poenostavilo obravnavo in prikaz. Prav tako zaradi poenostavitve računanja uporabimo  $c = 1$ .

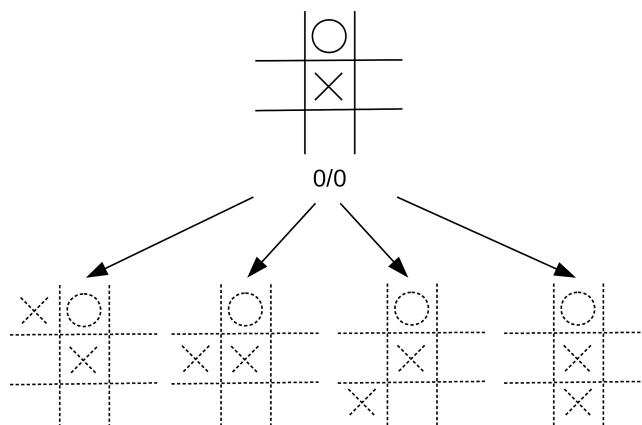
V prvem ciklu algoritma MCTS v korenu izbiramo med štirimi nerazvitimi nasledniki (izrisanimi črtkano na sliki 4) z oceno UCT enako 1. Med njimi zato izberemo naključno in denimo, da je izbrana poteza za križca v sredino levega roba.

Drevo igre razširimo z novim vozliščem, iz katerega izvedemo naključno simulacijo igre. Predpostavimo, da se ta konča v položaju, kjer je zmagovalec križec (slika 5). Izid simulacije zato ovrednotimo z 1 in novorazvitemu listu ter korenu po poti nazaj posodobimo vrednosti  $n$  in  $v$ . V našem primeru to storimo tako, da oba števca povečamo za ena (slika 6).

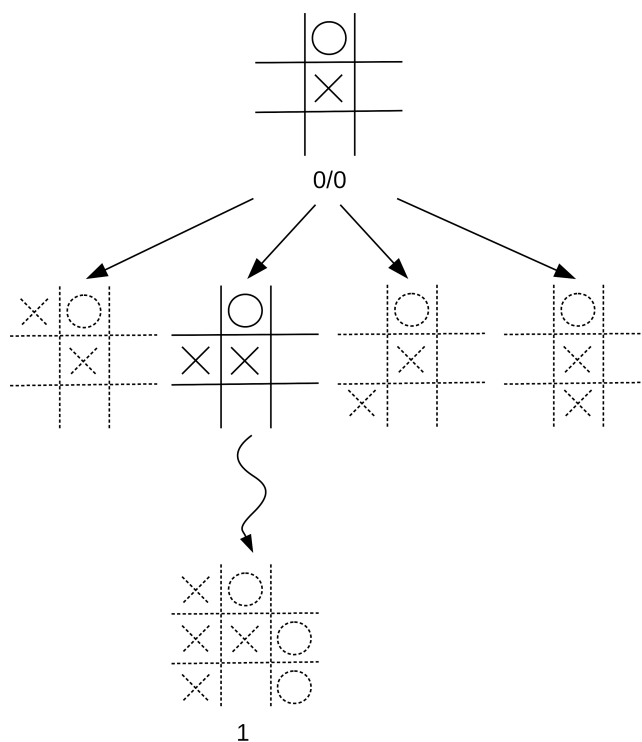
V drugem ciklu algoritma v korenu s strategijo UCT spet izbiramo med štirimi nasledniki. Trije nerazviti nasledniki  $b$ ,  $d$  in  $e$  imajo še vedno vrednost UCT enako 1, prav tolikšno pa ima že razviti naslednik  $c$ , saj velja:

$$UCT_c = \frac{1}{1} + \sqrt{\frac{\ln 1}{1}} = 1.$$

Če tokrat naključno izberemo naslednika  $e$  in od tam

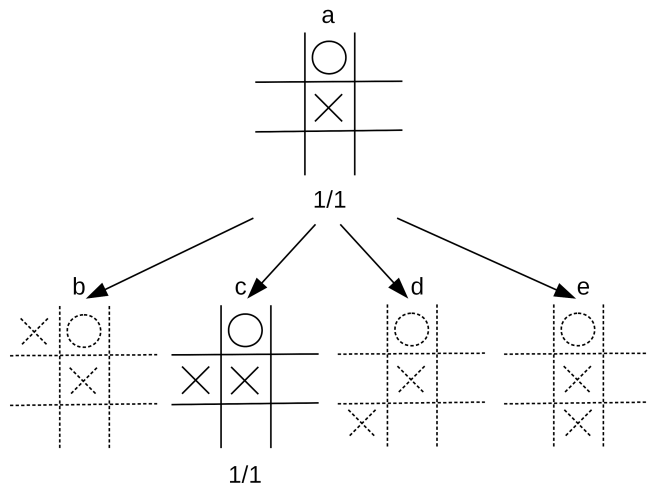


SLIKA 4. V korenu strategija selekcije naključno izbere med štirimi nerazvitimi nasledniki.



SLIKA 5. Naključna simulacija iz novega lista se konča v položaju, kjer je zmagovalec igralec na potezi, tj. križec.

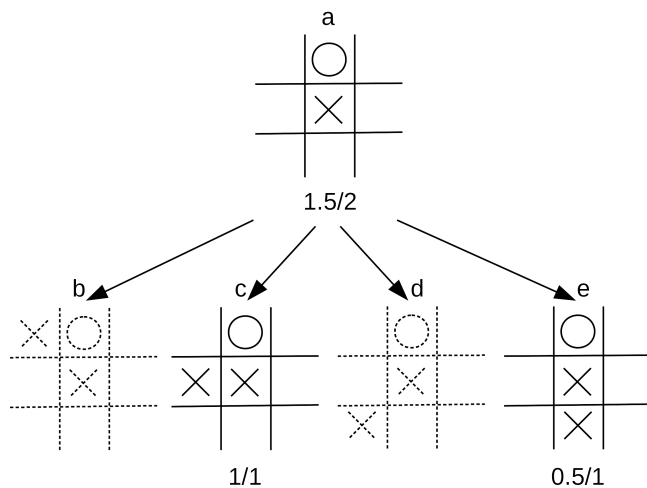




**SLIKA 6.**

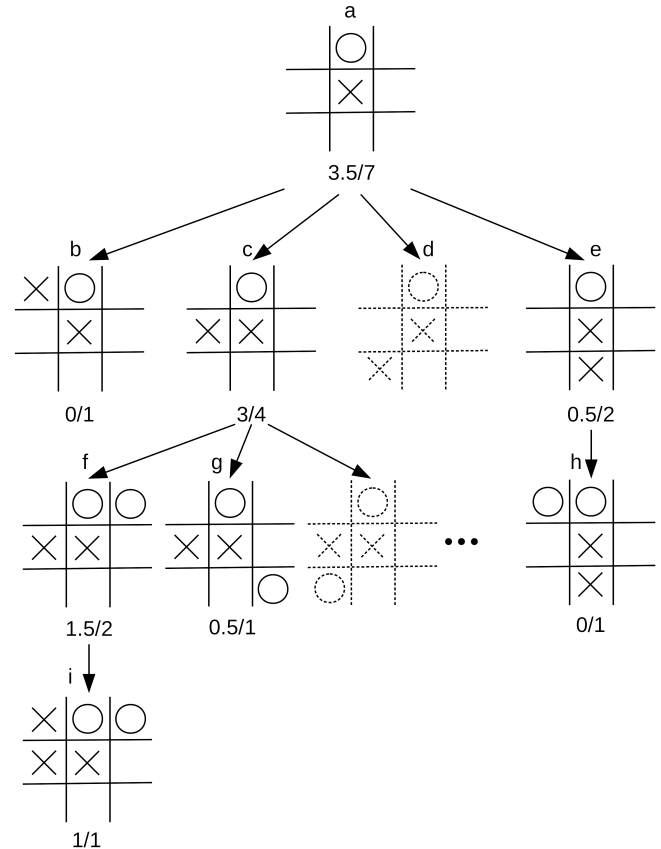
V fazi osvežitve novemu listu in korenu povečamo oba števca.

naprej s simulacijo dosežemo neodločen končni izid, po posodobitvi vrednosti vozlišča *e* in korena dobimo situacijo s slike 7.



**SLIKA 7.**

Stanje drevesa igre po dveh ciklih algoritma MCTS



**SLIKA 8.**

Stanje drevesa igre po sedmih ciklih algoritma MCTS

V tretjem ciklu bomo v korenu izbirali med nerazvitima naslednikoma *b* in *d* z vrednostjo  $UCT = 1$ , naslednikom *c* z vrednostjo  $UCT_c = 1 + \sqrt{\ln 2/1} = 1,833$  ter naslednikom *e* z vrednostjo  $UCT_e = 0.5 + \sqrt{\ln 2/1} = 1,333$ . Izbrano bo vozlišče *c*, v katerem se bomo potem odločali med šestimi možnimi nadaljevanji, od katerih še nobeno ni vključeno v drevo igre. Izбира novega lista na globini 2 drevesa igre bo torej spet naključna.

Da se primer ne zavleče preveč, skočimo na zadnji cikel algoritma - naj bo to cikel 8. Predpostavimo, da je drevo igre po sedmih izvedenih ciklih takšno, kot ga prikazuje slika 8. Vrednosti UCT vozlišč naslednikov korena so naslednje:







BOŠTJAN KUZMAN

→ Letošnja slavnostna podelitev nagrad tekmovalcem v matematiki, fiziki in astronomiji je potekala v soboto, 13. maja, v Unionski dvorani v Ljubljani. V letu 2016/17 je na tekmovanjih v organizaciji DMFA Slovenije sodelovalo 133139 tekmovalcev in 8116 mentorjev iz 709 šol, podeljenih je bilo 948 zlatih priznanj, na zaključno prireditev pa je bilo povabljenih 213 nagrajencev in 172 mentorjev, ki so osvojili skupaj 252 nagrad.

V praznično urejeni dvorani je nagrajence na velikem platnu pozdravila ilustracija popotniškega para, ki z bistrimi očmi opazuje zvezdno nebo. Najbolj pozorni so morda opazili, da popotnika v prtljagi nosita tudi knjigi prof. Vidava in prof. Strnada. Ko so se ugasnile luči, je na platnu zasijalo zvezdno nebo, na odru pa se je z Meditacijo za mali boben predstavil prvi od dveh dijakov, nagrajencev letošnjega tekmovanja mladih glasbenikov. Med njegovim virtuosnim nastopom so se pred gledalci na platnu zvr-

stili prizori iz letošnjih tekmovanj in obudili njihove tekmovalne občutke.

Za uvod sta s krajšim nagovorom pričela prof. dr. Dragan Mihajlovič, predsednik DMFA Slovenije, in ministrica prof. dr. Maja Makovec Brenčič. Po predstavitvi osnovnih statističnih podatkov je voditeljica Mojca Delač napovedala prve podelitve. V prvem delu so bile podeljene nagrade za srednješolska tekmovanja iz matematike, fizike in astronomije, ki so jih podelili predstavniki tekmovalnih komisij skupaj z vodji ustreznih ekip za mednarodne olimpijade. Sledila je še ena glasbena točka z virtuosno lirčno skladbo za vibrafon.

Ob napovedi, da je čas za posebno gostjo, je voditeljica prebrala nekaj stavkov iz revije Presek, v kateri so leta 1975 poročali o republiškem tekmovanju v matematiki. Povedala je, da je tedanja zmagovalka med četrtošolci, dijakinja Mirjam Cvetič, danes med nabolj uglednimi znanstveniki na področju teorije strun na svetu, in prof. dr. Cvetičevo ob aplavzu povabila na oder. Na odru je prof. Cvetičevo najprej na kratko predstavila kot vrhunsko znanstvenico, nato pa jo prosila, če lahko tudi laikom v dvorani pred-

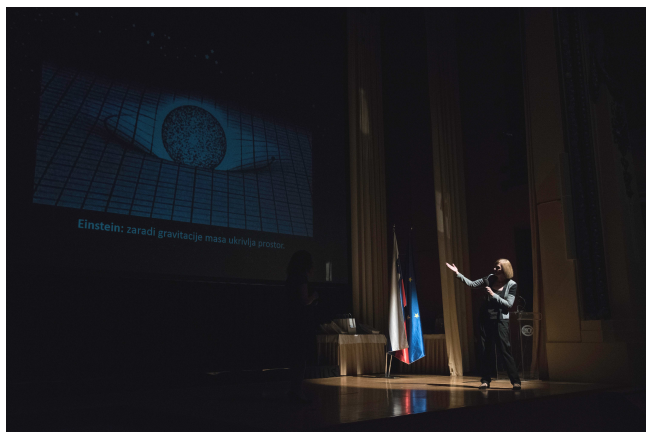
stavi vsaj delček svojega znanstvenega dela. S pomočjo prosojnic je dr. Cvetičeva na odru v kratkem predavanju orisala, kako teorija gravitacije po Einsteinu predvideva nastanek črnih lukenj in kako poskuša teorija strun pojasniti vrzeli med kvantno mehaniko in teorijo relativnosti. Po gromkem aplavzu je Cvetičeva mlade spodbudila, naj sledijo svojim sanjam in izpostavi, kako pomembna sta bila zanjo njena učitelja matematike Niko Kontler v osnovni šoli Maksa Durjave in prof. Marija Munda na Drugi gimnaziji v Mariboru. V zaključni sceni prvega dela podelitve je prof. Cvetičeva skupaj z ministrico sprejela dijake, ki so se uvrstili v katero od olimpijskih ekip, medtem ko so ob ritmičnih brazilske sambe (matematična olimpijada bo letos v Braziliji!) in glasnem aplavzu publike stopali na oder za nagrajence.

Kratkemu odmoru je sledil še drugi del prireditve. Najprej smo si ogledali kratek videoposnetek avtorice Maje Pečar, ki je zabeležila trenutke preseñenja in navdušenja mlajših otrok pri izvajanju fizikalnih eksperimentov v okviru priprav na tekmovanje Kresnička. Sledile so podelitve nagrad v preostalih tekmovalnih kategorijah, pri katerih so poleg članov tekmovalnih komisij sodelovali tudi predstavniki različnih fakultet in prof. dr. Peter Legiša kot urednik revije Presek. Kot novost so bila prvič podeljene tudi nagrade za matematično tekmovanje študentov. Na odru je bila predstavljena še nagradna Poletna šola za devetošolce v Plemljevi vili na

Bledu, katere ponovni zagon je po več letih premora omogočil Turizem Bled. Na poletno šolo bodo junija povabljeni vsi nagrajeni devetošolci tekmovanj iz matematike, fizike in astronomije (žal brez razvedrilne matematike). Srednješolci, ki želijo preživeti teden dni v dobri družbi in ob zanimivih matematičnih izzivih pa so bili povabljeni na že 12. raziskovalni tabor MARS, ki bo potekal avgusta v Čatežu pri Litiji. Ob sklepu prireditve je voditeljica vsem zaželela uspešen zaključek leta in prijetne počitnice, ustvarjalci prireditve in njeni gostje pa so bili enotnega mnenja, da je bila letošnja podelitev ena najbolj izpeljanih doslej. Upamo, da bodo podobno uspešni tudi vsi dijaki, ki se bodo v poletnih mesecih udeležili mednarodnih tekmovanj.



Prof. dr. Mirjam Cvetič je leta 1975 kot dijakinja 4. letnika zmagala na republiških tekmovanjih v matematiki in fiziki. Za izjemne študijske in znanstvene dosežke je bila nagrajena že v času diplomskega in magistrskega študija fizike v Ljubljani. V želji po raziskovalnem delu na področju tedaj povsem nove teorije strun je odšla na doktorski študij na univerzo Maryland, kjer je prejela nagrado za najuspešnejšo doktorsko študentko v generaciji in bila izbrana med najizjemnejše mlade ženske v ZDA. Sledila je bleščeča znanstvena in akademska kariera, v kateri je prejela vrsto nagrad tako za znanstveno kot tudi za pedagoško delo. Prof. Cvetičeva je soavtorica več kot 300 znanstvenih člankov z izjemno citiranostjo. Nekaj njenih najpomembnejših znanstvenih dosežkov je s področja teorije črnih lukenj, nekatere so tudi poimenovane po njej, kot črna luknja Cvetič-Youm in Chong-Cvetič-Lu-Pope.



#### SLIKA 1.

Častna gostja prof. dr. Mirjam Cvetič na odru pojasnjuje osnove teorije strun, foto: Jana Jocif.



Zahvala v imenu olimpijcev  
Aleksej Jurca, večkratni udeleženec olimpijad iz fizike in astronomije

#### SLIKA 2.

V imenu olimpijcev se je staršem, mentorjem in vodjem ekip za podporo zahvalil Aleksej Jurca, foto: Jana Jocif.

### Člani ekip za mednarodna tekmovanja 2017:

#### Mednarodna matematična olimpijada, 12.–23. julij 2017, Brazilija

- LUKA HORJAK, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- ANDRAŽ MAIER, Gimnazija Jesenice, A. Miler
- DAVID OPALIČ, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- DAVID POPOVIČ, Gimnazija Bežigrad, V. Domajnko
- DOMEN VREŠ, ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija, S. Vreš
- NEJC ZAJC, ŠC Velenje, Gimnazija, S. France.

Vodja ekipe: dr. Gregor Dolinar

Pomočnik vodje: Venio Mramor

Tehnični sodelavec IMO: dr. Matjaž Željko.

#### Mednarodna fizikalna olimpijada, 16.–24. julij 2017, Indonezija, in Evropska fizikalna olimpijada, 20.–24. maj 2017, Estonija

- KLEMEN BOGATAJ, Gimnazija Škofja Loka, A. Erman
- MARKO ČMRLEC, Gimnazija Bežigrad, C. Dominko
- URBAN DUH, II. gimnazija Maribor, M. Jagodič
- LUKA GOVEDIČ, II. gimnazija Maribor, M. Jagodič
- ALEKSEJ JURCA, Gimnazija Bežigrad, C. Dominko.

Vodji ekipe: dr. Jure Bajc in dr. Barbara Rovšek

#### Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, 12.–21. november 2017, Tajska

- MARKO ČMRLEC, Gimnazija Bežigrad, V. Domajnko
- LUKA GOVEDIČ, II. gimnazija Maribor, G. Žiberna
- ALEKSEJ JURCA, Gimnazija Bežigrad, S. Zamuda
- ROK KOVAČ, Gimnazija Vič, Ljubljana, V. Kariž Merhar
- URBAN OGRINEC, Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik, S. Perhavec.

Vodja ekipe: dr. Maruša Žerjal

#### Srednjeevropska matematična olimpijada, 21.–27. avgust 2017, Litva

- MARKO ČMRLEC, Gimnazija Bežigrad, V. Domajnko
- ANA META DOLINAR, Gimnazija Bežigrad, V. Domajnko
- LUKA HORJAK, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- ANDRAŽ MAIER, Gimnazija Jesenice, A. Miler
- DAVID OPALIČ, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- NEJC ZAJC, ŠC Velenje, Gimnazija, S. France.

Vodja ekipe: Jakob Jurij Snoj

#### Evropska dekliška matematična olimpijada, 6.–12. april 2017, Švica

- ANA META DOLINAR, Gimnazija Bežigrad, V. Domajnko
- KLARA DROFENIK, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- ANA OPALIČ, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek
- ŠPELA POLAK, I. gimnazija v Celju, K. Kocbek.

Vodja ekipe: Venio Mramor

#### Pridi na MARS!

Bi radi preživeli pester počitniški teden v dobri družbi ob zanimivih matematičnih izzivih? Pridite na raziskovalni tabor MARS za srednješolce, ki bo od 13.–19. avgusta v ČŠOD Čebelica. Več informacij najdete na spletnem naslovu [mars.dmf.si](http://mars.dmf.si).

× × ×

# Nevihta se bliža

↓↓↓

NEŽA GOLMAJER ZIMA

→ Zrak se med dviganjem prilagaja vse nižjemu zračnemu tlaku v višinah in se ob tem razpenja. Za razpenjanje mora odrivati okolico, kar pomeni, da opravlja delo na račun notranje energije. Torej se zrak ob dviganju *adiabatno ohlaja*. Z ohlajanjem se mu temperatura zniža in pri ohladitvi do rosišča nastanejo oblaki. Ob dviganju prav do meje med spodnjo *troposfero* in *stratosfero* nad njo, kjer se dviganje zaustavi, nastanejo oblaki, katerih vrh je razširjen v nakovalo (*incus*). Eden od takih oblakov je *kumulonimbus capillatus*. Beseda *nimbus* po latinsko pomeni oblak, latinska predpona *cumulus* pomeni kopicico, dodatni opis *capillatus* pa pravi, da vrh videti vlaknat, kot nekaki lasje (*capillus* – lasje). Obstajajo še druge vrste *kumulonimbusov*, ki se med seboj razlikujejo po obliki.

Kumulonimbusi so nevihtni oblaki in so lahko precej nevarni, saj s seboj prinašajo močen dež in vetrove, včasih tudi točo in strele. Ob njih nastajajo lahko tudi tornadi, nad morjem pa trombe. Spodnji rob teh oblakov je lahko precej nizko. Navzgor segajo do vrha *troposfere*, to je najnižji del atmosfere, ki sega od površja Zemlje do višine kakih 11 km v zmernih zemljepisnih širinah, nad ekvatorjem nad 15 km, sem in tja do 20 km, nad polarnimi območji pa tudi manj kot 10 km. Za troposfero je značilno, da v njej temperatura z višino pada.

Kumulonimbusi imajo lahko obliko nakovala, ali pa so brez njega. Nakovalo nastane, ko se zrak dvigne prav do *tropopavze*, to je meje med troposfero in

stratosfero. Od tam navzgor skozi stratosfero temperatura ne pada več z višino, temu rečemo *izotermija*. Nekaj višje se pojavi temperaturna inverzija, torej se temperatura začne z višino celo povečevati. Tak potek temperature z višino pomeni močno stabilnost za vertikalne premike, zato se tam dviganje ustavi. Namesto izraza, da se je dviganje ustavilo, ob poljudnem izražanju lahko rečemo, da se je zrak »zaletel« ob stabilno plast. Značilno obliko nakovalu daje torej širjenje zraka vstran, ko se ne more več dvigati navzgor. Kadar so kumulonimbusi brez nakovala, so njihovi vrhovi kot ogromne kupole – takim rečemo *calvus* (gol). Ti se torej še »niso zaleteli« ob stabilno plast nad njimi.

Sestava oblaka se spreminja z višino: v bazi prevladujejo vodne kapljice, v nakovalu, kjer je temperatura zelo nizka (okrog  $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), pa se para neposredno pretvarja v ledene kristale. Zaradi močnih vertikalnih gibanj vodnih kapljic in ledenih kristalov znotraj oblaka, le ti pri večkratnem kroženju pridobivajo na masi. Pri visokih oblakih v višinah torej vedno sneži: pozimi in poleti. Ko imajo padavinski delci dovolj veliko maso, padejo iz oblaka in če je spodaj dovolj toplo, da se stalijo, pada dež, sicer pa (pozimi) sneg, sodra ali celo toča...

Včasih vidimo iz oblakov padavine, ki pa ne dosežejo tal, saj v nenasičenem zraku pod oblakom izhlapijo, še preden padejo na tla. Padavinam, ki ne dosežejo tal, rečemo *virga* (vejica), saj so njihovi pasovi zgoraj široki, navzdol pa vse ožji. Pri kumulonimbusih so padavine močne, zato izpod baze oblaka do tal ne izhlapijo – torej pod temi oblaki ni padavin v obliki *virge*. So pa možne *virge* iz stranskih delov nakovala, pod katerimi je nenasičen zrak – seveda so to kristalčki in ne kapljice.



## SLIKA 1.

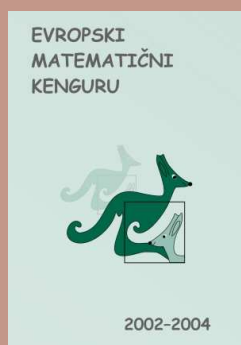
Fotografija je bila posneta na Medvedjem Brdu, 8. 8. 2010.

× × ×

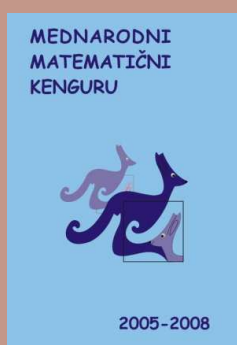
# Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

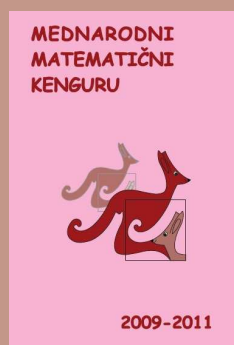
Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



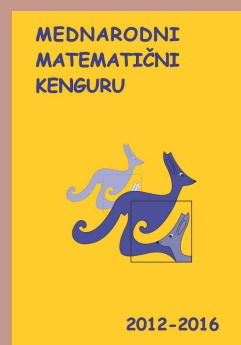
10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:


- *Evropski matematični kenguru 2002-2004,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016 (novost).*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga!



	OZNAKA, KI DOLOČA NAJVEČJI UGREZ LADJE	NAŠ MISIJONAR V AFRIKI IN RAZISKOVALEC OBMOČJA OB BELEM NILU (IGNACIJ)	KANARSKI OTOK	NAŠ IZBOR PESMI EVROVIZIJE	VALJASTA MERILNA POSODA ZA TEKOČINE	?, DVA, TRI	SOL DUŠIKOVE KISLINE	FIZIKALNA KOLIČINA, KOLIČNIK SILE IN PLOSKVE	OBSIJANOST POVRŠINE S SONCEM, OSONČENJE	Z NJO SE KAJ ZASIJE	STARA LUKA NA SEVERU IZRAELA
		SORTA MANDARINE									
		GLAGOLSKA OBLIKA, KI IZRAŽA PREMIKANJE									
		JUDOV SIN, KI SE JE POROČIL Z BRATOVO VDOVO	2				TIPKA				
							OSEBNI ZAIMEK				
		BRALNA ZNAČKA			SL. DIALEKTOLGINJA (ZINKA)					NEPRIJETNA SLADKOKBA	ZELO SPLOŠENA MORSKA RIBA HRUSTANČICA
					GORSKA ŽIVAL						
		MORJE ZNOTRAJ ATOLA						ARKTIČNI JELEN			
	DRŽAVNI ZAKLAD							PREDSTAVNIK RURALIZMA			
	BOGO-SLOVEC					JUNAK IZ VZHODNO OD RAJA (ADAM)					
						ZAP. ČRKI					
							UNIVERZA V LOS ANGELESU	8			
							TROPSKA MRZLICA				
	NAŠ PISATELJ (FRANCE)	RAZHOD	VLASTA NUS-DORFER	IRSKI PESNIK IN DRAMATIK (WILLIAM) VENEZUEL. DRŽAVNIK, KI JE NASLEDIL HUGA CHAVEZA (NICOLAS)	5		STROGO ISLAMSKO PRAVO				
MOSTIČEK ČEZ VODO				AMERIŠKI REŽISER (MICHAEL) UDELEŽENKA POHODA							
MADŽAR. PESNIK ARANY						LESENA KOČA	EGON ZAKRAJSEK	PREDSEDNIK SAZU (TADEJ)		IMETJE, KI GA NEVESTA DOBI OD STARŠEV	
					TEŽKA PRIPRAVA, KI LADJO DRŽI NA MESTU	OTROŠKI ZABAVIŠČNI PARK Z LEGO KOČKAMI					
						BEGUNCI IZ ISTRE					
			RAZMERJE, RELACIJA			KAN.-AM. IGRALEC (LESLIE)			ENAKA SAMOGLASNIKA		
			ANGLEŠKI ASTROFIZIK (WILLIAM) SL. IGRALKA (NINA)				NASPROTJE TENORISTA		IRIDIJ		
	FR. MODNI KREATOR (CHRISTIAN) IZUMITELJ (NIKOLA)				AMERIŠKI REŽISER HOWARD	POSEBNA PREHRANA					
		VLOM, VPAD				IT. SLIKAR (GUIDO)					
		NEMŠKI PESNIK (GOTTFRIED)				TELOVADNO ORODJE ZA PRESKOKE					
NEKDANJI IZRAELSKI ZUNANJI MINISTER (ABA)				SVET, KI OBDAJA ČLOVEKA							
KRAJ PRI GOLNIKU	9			IZREDNA LEPOTA							
SPLETNA DOMENA IZRAELA						DRUGI NAJVEČJI PRITOK VISLE					
						RIBIŠKA DRUŽINA				3	
					TERME POD ROGLU						
					BELGIJSKI NOGOMETŠA BOSAN. POREKLA JANUZAJ						

**NAGRADNI RAZPIS**

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani [www.presek.si/krizanka](http://www.presek.si/krizanka)

ter ga oddajte do **15. avgusta 2017**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×