PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 3
Strani 188–192

Janez Žerovnik:

TRI NALOGE ZA GENERATOR SLUČAJNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, računalništvo, generator slučajnih števil, število π, Galtonova plošča, volilna igra, protivolilna igra.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/884-Zerovnik.pdf

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

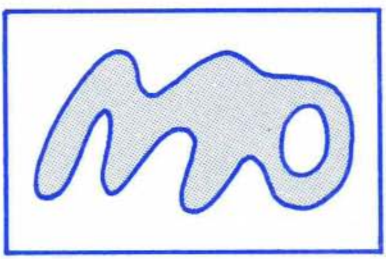
TRI NALOGE ZA GENERATOR SLUČAJNIH ŠTEVIL

Kako lahko top uporabimo za računanje površin

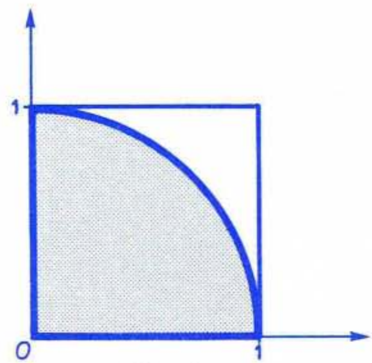
Recimo, da želimo izmeriti površino nekega kompliciranega krivočrtnega lika, na primer takega na sliki 1. Naš lik najprej pokrijmo s kakšnim likom, ki mu lahko določimo ploščino, na primer s pravokotnikom. Ustrelimo s topom velikokrat v različnih smereh na označeno polje. Sklepamo, da je razmerje med ploščino lika in ploščino pravokotnika približno enako razmerju med številom zadetkov in številom vseh strelov. Torej lahko iskano ploščino ocenimo takole: ploščina lika je približno enaka številu zadetkov lika, pomnoženemu s površino pravokotnika in deljenemu s številom vseh strelov.

Seveda ne predlagamo, da vam starši kupijo top in poskusite streljati na sosedov vrt! Manj nevarno, pa prav tako ali pa še bolj učinkovito, lahko takšne poskuse delamo na računalniku. Vse, kar potrebujemo, je generator slučajnih števil, ki ga večina računalnikov ima. Predpostavimo, da na našem računalniku obstaja funkcija RANDOM, ki nam vrne slučajno število med 0 in 1.

V nadaljevanju si bomo ogledali tri primere uporabe generatorja slučajnih števil.



Slika 1



Slika 2

Računanje števila π

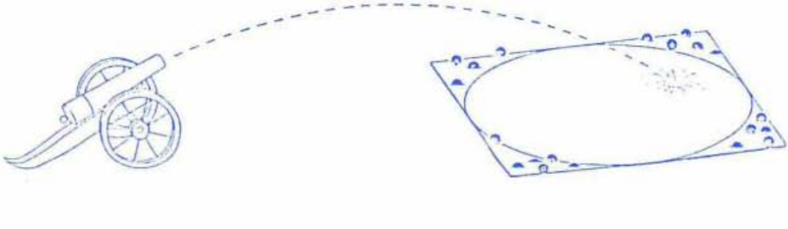
Redni bralci Preseka se bodo spomnili članka v Preseku XII/4, v katerem je opisano, kako lahko izračunamo približek števila π s simulacijo metanja Buffonove igle, imenovane po francoskem naravoslovcu in matematiku grofu Louisu de Buffonu. Še preprosteje izračunamo približek števila π z idejo streljanja s topom. Vzemimo za lik krog in mu očrtajmo kvadrat. Ker obe ploščini znamo izračunati, vemo, da je njuno razmerje enako $(\pi r^2) : (2r)^2 = \pi/4$. Če vzamemo samo četrtino kroga in kvadrata, kot kaže slika 2, se razmerje ploščin očitno ne spremeni. Razmerje med ploščinama lahko ocenimo tudi s streljanjem s topom, kot je opisano v začetku. Približek za π je torej 4 * zadetki/vsi streli.

Simulacijo naredimo s preprostim programom. Zaradi preprostosti programa naj imata stranica kvadrata in polmer kroga dolžino 1. Strel v kvadrat simuliramo z dvakratnim klicem generatorja slučajnih števil:

x := RANDOM;
y := RANDOM;

ki nam da točko s koordinatama v kvadratu $[0,1) \times [0,1)$. Ali smo zadeli notranjost kroga? Izračunati moramo samo razdaljo točke od izhodišča. Spomnimo pozabljivce, da razdaljo točke od izhodišča izračunamo preprosto z uporabo Pitagorovega izreka: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Če je ta manjša od 1, točka leži v krogu.

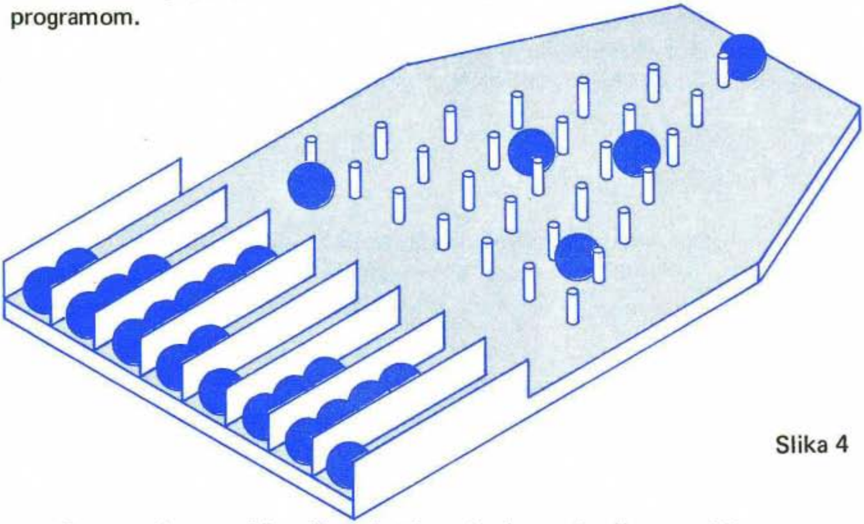
Strel večkrat ponovimo in štejemo zadetke. Pri dovolj velikem številu poskusov bi moralo biti razmerje zadetkov in strelov blizu $\pi/4$. Poskusite s programom simulirati na primer 1000 strelov in nam sporočite rezultate. Ob rezultatu navedite tudi računalnik in generator slučajnih števil, ki ste ju uporabili. Če se razmerje nikakor ne bo hotelo ustaliti pri $\pi/4$, je mogoče, da uporabljeni generator slučajnih števil ni najboljši. O testiranju slučajnih generatorjev je Presek že pisal v četrti številki letnika XII.



Slika 3

Galtonova plošča

je dobila ime po enem prvih statistikov viktorijanske Anglije, plemiču Francisu Galtonu. Na sliki 4 vidimo nagnjeno ploščo, na kateri je trikotni gozd čepkov, na dnu plošče pa nekaj predalov. Kroglo postavimo na vrhnji čepek in jo spustimo. Odbijala se bo od čepkov zdaj levo, zdaj desno in končala v enem od predalov. Če to ponovimo z več kroglami, se nam v predalih pokaže značilna porazdelitev. Poglejmo, kako bi Galtonovo ploščo simulirali z računalniškim programom.



Slika 4

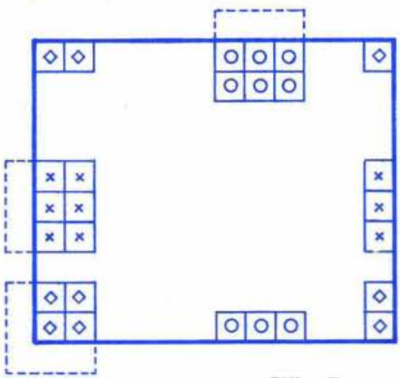
Spremembo smeri kroglice ob trku s čepkom simuliramo s klicem generatorja slučajnih števil. Če je dobljeno število manjše od 0.5, kroglica nadaljuje v levo, sicer v desno. Kateri čepek je zadela kroglica in h kateremu nadaljuje? Ni pomembno! Vemo, da se bo vsaka kroglica odbila od natanko n čepkov, kjer je n višina (in hkrati širina) gozda čepkov. Hitro vidimo tudi, da je predal, v katerem kroglica konča, kar enak številu trkov, pri katerih se je kroglica odbila v desno. To pa pomeni, da v programu ne potrebujemo nobenega polja spremenljivk, ki bi ustrezale čepkom na plošči. Potrebno je samo simulirati n trkov in seveda šteti število odbojev v desno. Nauk zgodbe: Malo analize problema pred programiranjem nam lahko prihrani veliko truda pri njem!

Opisano zanko vložimo v večjo, ki bo določala število krogel, spuščenih po plošči. Vsakič, ko se notranja zanka izvede, ne pozabimo povečati števila kroglic v pravkar zadetem predalu. Če programu dodamo nekaj grafičnih ukazov, bomo lahko na zaslonu sproti opazovali nastanek hribčka, značilnega za binomsko porazdelitev.

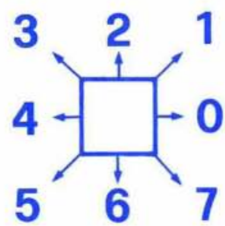
Volilna in protivolilna igra

Naslednji primer je simulacija dveh iger, ki sta ju nedavno študirala profesorja Peter Donnely in Dominic Welsh. Kvadratke pravokotne šahovnice na začetku poljubno pobarvajmo s črno in belo barvo. Ali, če želite opravičiti ime igre, na vsak kvadratek postavimo volilca, barva pa naj predstavlja stranko, ki jo namerava voliti na naslednjih volitvah. Ob vsakem udarcu ure (slučajno) izberemo enega od volilcev, ki bo morda zamenjal stranko. V ta namen (spet slučajno) izberemo še enega od osmih sosedov. V igri velja pravilo, da se prvi izbrani volilec vedno pusti prepričati izbranemu sosedu. Barva izbranega volilca postane enaka sosedovi, ne glede na prejšnjo barvo.

Da bodo imeli vsi volilci osem sosedov, se dogovorimo, da šahovnico zlepimo po robovih takole: volilec na robu naj ima tri sosede na nasprotni strani šahovnice. Na sliki 5 so narisane soseščine nekaterih značilnih kvadratkov šahovnice. Mimogrede: premislite, kakšno ploskev v prostoru dobimo, če na opisani način zares zlepimo nasprotne stranice pravokotnika. Če premislek ne gre, poskusite s papirjem in lepilnim trakom.



Slika 5



Slika 6

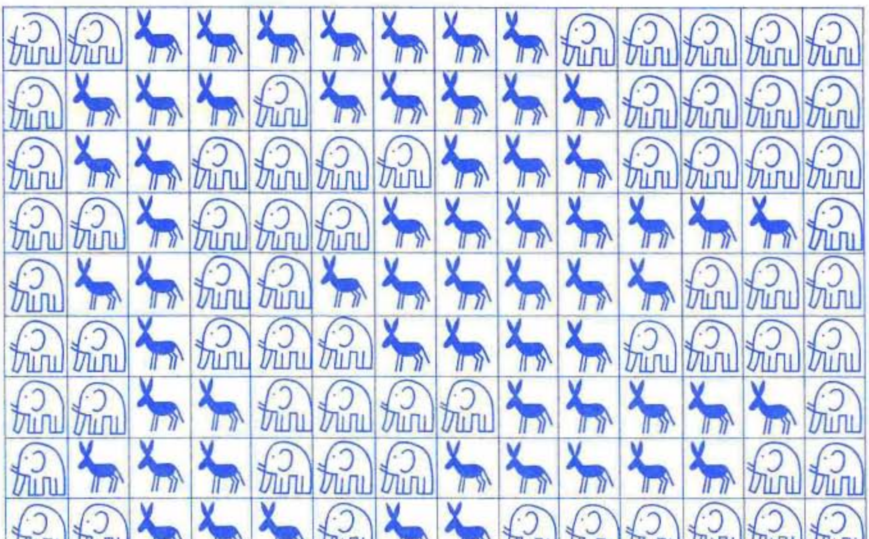
Ko opisani preprosti model dvostrankarskega volilnega sistema zaživi, se začno dogajati zanimive stvari. Najprej se namesto razpršenih belih in črnih polj pojavijo večja področja, pobarvana z isto barvo. Potem se enobarvna področja nekaj časa premikajo po šahovnici in se borijo za prevlado. Na koncu ena barva preplavi vso šahovnico.

Volilno igro simuliramo s preprostim programom. V dvodimenzionalno polje, ki nam predstavlja šahovnico, vnesemo začetne barve polj. Če ne drugače, jih določimo slučajno. Z dvema klicema generatorja slučajnih števil izberemo polje, ki mu bomo v naslednjem koraku spreminjali barvo. Slučajno celo število, ki z enako verjetnostjo zavzame vrednosti 0, 1, 2, ..., $n-1$, dobimo takole:

s := INT (n * RANDOM); kjer je INT funkcija celi del. Celi del realnega števila x je največje celo število, ki ni večje od števila x. (Na primer: INT(0.5) = = 0, INT(3.14) = 3, INT(−4.5) =−5.) En korak igre sprogramiramo takole: izberemo celi slučajni števili i med 0 in $n-1$ ter j med 0 in m, kjer smo z m in n označili širino in dolžino šahovnice. Par števil (i, j) nam podaja koordinate nekega polja s šahovnice. Potem izberemo še eno celo slučajno število k med 0 in 7, ki nam določi soseda, na primer tako, kot je narisano na sliki 6. Popravimo barvo polja (i, j) in en korak igre je zaključen.

Program bo zanimivejši, če bo stanje sproti risal na zaslon. Že z uporabo dveh kontrastnih znakov, na primer zvezdice in pike, dosežemo dober učinek.

Druga igra, ki je model nekoliko bolj pluralistične družbe, je protivolilna igra. V tej igri se izbrani volilec ne pusti prepričati sosedu, pač pa vedno zavzame stališče, nasprotno sosedovemu. Kako pa se model obnaša v tem primeru?



Slika 7

Janez Žerovnik