

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 16 (1988/1989)

Številka 1

Strani 41-47

Mojca Lokar:

ČAROVNA SEDMICA

Ključne besede: matematika, naloge.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/923-Lokar.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ČAROVNA SEDMICA

Veliki matematiki se ne ukvarjajo le s težkimi problemi. Tako je tudi v zbirki romunskega matematika Dmitrija Pompeiuja zanimiva naloga:

Veš, da je stotilijonsko število $ABC398246$ deljivo s 317. Poišči cifre A , B in C !

Kako bi rešili nalogo? Lahko bi ugibali in naredili preizkus. Če je prava zadnja možnost, ne bi omagali? Imamo kar 900 možnosti, ker na mesto A lahko postavimo devet cifer (1 ali 2 ali 3...9), na mesti B in C pa po deset cifer (0 ali 1 ali 2...9). Tudi deljenje s tako velikim (trimestnim) številom je zamudno. Z računalniškim programom ne bi bilo težko. Vendar računalnika nimamo vedno pri roki, hišni računalniki pa tudi običajno ne morejo računati s tako velikimi celimi števili. V slednjem primeru si lahko pomagamo drugače, a o tem kdaj drugič. Danes bomo računali brez pomoči računalnika.

Pompeiu, bistra glava, je rešil nalogo s preprostim sestavljanjem cifer. Problem je prevedel na množenje in uporabil nenavadno lastnost števila 7, enice v številu 317.

Najprej si oglejmo število 7. Množimo ga po vrsti z vsemi enomestnimi števili:

$$\begin{array}{r} 7777777777 \\ \times 0123456789 \\ \hline 071421283542495663 \end{array}$$

Pozabimo na desetice, pogledjmo le enice: 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3. Dobili smo zopet vsa enomestna števila vendar v drugem vrstnem redu. To imenujemo permutacija (prerazporeditev).

$$\begin{array}{c} 0123456789 \\ 0741852963 \end{array}$$

Vsa enomestna števila nimajo te lastnosti. Recimo število 6:

	...RSTUVWXY8	
×	3 1 7	
<hr/>		
	2 5 3 6	8 množeno s 317
	...----H J K L	Y množeno s 317
	...-----	X množeno s 317
	..	Nadaljujemo z W V U T S R ...
<hr/>		
	ABC398246	

Jasno je, da mora biti:

$$L + 3 = 4$$

Zato mora biti

$$L = 1$$

Poglejmo naprej: 7 krat Y mora biti (L) 1. Permutacija nam pove, da je to možno le, če je Y enak 3. Ko dopolnimo še drugo vrstico (množimo z Y oziroma 3), dobimo:

	...RSTUVWX38	
×	3 1 7	
<hr/>		
	2 5 3 6	8 množeno s 317
	9 5 1	3 množeno s 317
	...----DEFG	X množeno s 317
	..	Nadaljujemo z W V U T S R ...
<hr/>		
	ABC398246	

Zdaj mora biti

$$5 + 5 + G = \sim 2 \text{ (število, ki ima enico 2)}$$

$$G = 2$$

Tabela permutacije nam pove, da 2 dobimo, če 7 množimo s 6, zato

$$X = 6$$

Nadaljujmo:

$$\begin{array}{r} \dots RSTUV638 \\ \times \qquad \qquad 317 \\ \hline \qquad \qquad 2\ 536 \quad 8 \text{ množeno s } 317 \\ \qquad \qquad 9\ 51 \quad 3 \text{ množeno s } 317 \\ \qquad 1\ 9\ 0\ 2 \quad 6 \text{ množeno s } 317 \\ \dots --- EJK \quad W \text{ množeno s } 317 \\ \dots \qquad \qquad \text{Nadaljujemo z } V\ U\ T\ S\ R \dots \\ \hline ABC398246 \end{array}$$

Veljati mora

$$2 + 9 + 0 + K + 1 = \sim 8$$

Zaradi prenosa desetice ($5 + 5 + 2 = 12$), je prišteta še 1. Torej mora biti

$$K = 6$$

Iz permutacije vidimo, da moramo množiti z 8, če hočemo dobiti enice 6, zato mora biti

$$W = 8$$

$$\begin{array}{r} \dots RSTUV8638 \\ \times \qquad \qquad 317 \\ \hline \qquad \qquad 2536 \quad 8 \text{ množeno s } 317 \\ \qquad \qquad 951 \quad 3 \text{ množeno s } 317 \\ \qquad 1\ 9\ 0\ 2 \quad 6 \text{ množeno s } 317 \\ \qquad 2\ 5\ 3\ 6 \quad 8 \text{ množeno s } 317 \\ \dots - FEJ \quad V \text{ množeno s } 317 \\ \dots \qquad \qquad \text{Nadaljujemo z } U\ T\ S\ R \dots \\ \hline ABC398246 \end{array}$$

Veljati mora

$$9 + 3 + J + 1 = \sim 9 \implies J = 6 \text{ in } V = 8$$

	...R S TU88638	
x	317	
<hr/>		
	2536	8 množeno s 317
	951	3 množeno s 317
	1902	6 množeno s 317
	2 536	8 množeno s 317
	2 536	8 množeno s 317
	...FE	U množeno s 317
	...	Nadaljujemo z T S R ...
<hr/>		
	A B C398246	

Zdaj je

$$1 + 5 + 3 + E + 1 = \sim 3 \implies E = 3 \quad U = 9$$

	...RST988638	
x	317	
<hr/>		
	2536	8 množeno s 317
	951	3 množeno s 317
	1902	6 množeno s 317
	2536	8 množeno s 317
	2536	8 množeno s 317
	2853	9 množeno s 317
<hr/>		
	313398246	

Že imamo rešitev.

$$A = 3 \quad B = 1 \quad C = 3$$

Neznano število, s katerim smo množili, je šestmestno. Toliko mest smo potrebovali, da smo s podpisovanjem prišli dovolj v levo (nad A).

Preprosto, kaj? Ali se da tako "računstvo" uporabiti tudi v drugih primerih?

Tak postopek smo lahko uporabili, ker pri množenju števila 7 s števili med 0 in 9 vedno dobimo različno število za enico. Ampak, ali je 7 edino enomestno število s to lastnostjo? Da vsa niso taka, smo že videli. Tudi vsa sode lahko takoj izločimo, ker pri množenju ne dobimo lihih števil. 7 ni edino enomestno število s to lastnostjo, saj nam da

množenje s 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

množenje z 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tudi množenje z 1 nam da permutacijo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ker je spodnja vrstica popolnoma enaka zgornji (ni nobene spremembe), to permutacijo imenujemo identiteta.

Pompeiujevo "sestavljanko" lahko razširimo še na množenje števil z enicami 1, 3 ali 9.

Poskusi še ti! Najdi cifre A, B in C v številu ABC8682, ki je deljivo natančno z 213. (Rešitev: A = 1, B = 9, C = 1)

Kaj je nenavadnega v številih 1, 3, 7 in 9, da nam dajo permutacijo? Zdi se da lihost. Pa vendar, tudi 5 je liho število, te lastnosti pa nima. 1, 3, 7 in 9 so natančno tista enomestna števila, ki so si tuja z 10. (Števili sta si tuji, če razen 1 ni nobenega števila,

ki bi delilo obe.) Odkod sedaj 10? Računali smo v desetiškem sistemu in gledali le enice.

Ali imamo v drugih sistemih, naprimer dvojiškem, trojiškem, tudi taka zanimiva števila?

Pompeiujevo "sestavljanko" lahko razširimo, ker velja:

Vsa števila v sistemu z osnovo N , ki so si z N tuja, nam dajo, ko jih množimo s številom tega N -tega sistema, permutacijo cifer (gledamo le enice).

Če si za osnovo sistema izberemo praštevilo, imajo vsa števila tega sistema permutacijo.

Prevod in priredba *Mojca Lokar*
po knjigi P. J. Davis and W. G. Chinn, 3.1416 and all that