



 **Mag. Nadja Černetič,**
Osnovna šola Pivka


Ustvarjalno reševanje matematičnih problemov in formativna povratna informacija

POVZETEK: Ustvarjalno reševanje matematičnih problemov je proces, ki zajema tehnike ustvarjalnega in kritičnega mišljenja. Pri reševanju matematičnih problemov učenci veliko odkrijejo o samem problemu, če ga samostojno rešujejo, če se pri reševanju odločajo o poti reševanja in hkrati odkrivajo, kaj jih bo pripeljalo do rešitve. Pri uveljavljanju pozitivnih učinkov formativnega preverjanja in povratne informacije je bistvena učiteljeva didaktična spretnost za organizacijo situacij, predvsem pa poznavanje pomena povratne informacije. Slednja ima visoko uporabno vrednost za neposredno pedagoško delo v razredu, saj se dogaja, da učitelji in učenci še vedno poudarjajo pomen sumativnega ocenjevanja in podcenjujejo formativno preverjanje znanja.

Ključne besede: ustvarjalno reševanje matematičnih problemov, preverjanje s podporo učenja, formativna povratna informacija

Creative Solving of Mathematical Problems and Formative Feedback

Abstract: Creative solving of mathematical problems is a process that involves the techniques of creative and critical thinking. When solving mathematical problems, pupils learn much about the problem itself if they solve it on their own, if they decide which path to take while solving it, and simultaneously discover what will lead them to the solution. When pursuing the positive effects of formative assessment and feedback, it is essential that the teacher is didactically skilled in organising situations, and, above all, familiar with the importance of feedback. The latter is highly useful for direct pedagogical work in a classroom, because it sometimes happens that teachers and pupils still stress the importance of summative evaluation and underestimate formative knowledge assessment.

Keywords: creative solving of mathematical problems, assessment in support of learning, formative feedback 



Spretnosti in znanje, ki so potrebni v procesu reševanja problemov, vključujejo tako ustrezno vsebinsko znanje, miselne spretnosti kot tudi generalizacijo, zmožnost za spopasti se z neznanim ter spretnost samorefleksivnega mišljenja, kar se lahko razvije le v spodbudnem učnem okolju. Učitelj pri tem postopoma vodi učence k raziskovanju in evalviranju poti reševanja problemov in s tem spodbuja samorefleksivno mišljenje (Mršnik in Novak, 2015). V vseh fazah učnega procesa mora biti prisotna učinkovita povratna informacija. Bistvo povratne informacije (Black, Wiliam, 1998) je zaporedje dveh aktivnosti: najprej mora učenec ugotoviti (spoznati, ozavestiti) razliko med želenim oz. zahtevanim (ciljem, znanjem) in doseženim, nato pa mora dobiti napotek in usmeritev za aktivnost, ki mu bo pomagala (omogočila) odpraviti to razliko.

S formativnim spremljanjem učitelj spodbuja samokontrolo, samoevalvacijo in odgovornost pri učencu, sam pa postaja raziskovalec lastne prakse. Proces učenja se pri sprotne spremljanju spremeni in učenci se učijo vrednotiti lastno delo.

Razne raziskave so pokazale veliko prednosti formativnega spremljanja:

- preverjanje prinese dva- do trikrat **večji napredek** pri učenju;
- ustrezna povratna informacija **podvoji hitrost učenja**;
- **zmanjšuje razlike** med fanti in dekleti ter med učenci iz bolj ali manj spodbudnih okolij;
- **ocena vpliva na ego**, sproži čustveni odziv in **ima le malo vpliva na trud in dosežke; ocena zaustavi proces učenja** in ne prispeva k izboljšanju znanja, na učenje ima celo negativen vpliv (Wiliam, 2011 v Ada Holcar Brunauer, 2014).

Pri reševanju matematičnih problemov učenci veliko odkrijejo o problemu, če ga samostojno rešujejo, ko se pri reševanju odločajo o poti reševanja in hkrati odkrivajo, kaj jih bo pripeljalo do rešitve, saj je ustvarjalno reševanje problemov proces, ki zajema tehnike ustvarjalnega in kritičnega mišljenja (Mršnik in Novak, 2015).

Analiziranje matematičnega problema na listu z osmimi predali je ena izmed učinkovitih strategij reševanja, kot navajajo Benko, Loaiza, Sacharski in Winkler (1999, v Mršnik in Novak, 2015), ki je pripomogla k boljšemu razumevanju problema in ustrezni rešitvi.

Z učenci petega razreda sem za način reševanja matematičnih problemov uporabila *strategije predalnika z osmimi »predali«*. Na predalih je pisalo: 1. Izpišem vse podatke iz problema. 2. Skiciram. 3. Kaj bi želel/-a izračunati? 4. Poimenujem računsko operacijo. 5. Oblikujem vprašanja. 6. Rešujem. 7. Oblikujem odgovor. 8. Zapišem rešitev in opišem postopek (Mršnik in Novak, 2015). **Glej priložo 1: Predalnik za reševanje matematičnih problemov.**

V pouk sem poskušala vnesti **5 ključnih strategij formativnega spremljanja**:

1. razjasnitev, soudeležnost pri določanju in razumevanje namenov učenja in kriterijev za uspeh;
2. priprava takšnih dejavnosti v razredu, s katerimi je mogoče pridobiti dokaze o učenju;
3. zagotavljanje povratnih informacij, ki učence premikajo naprej;
4. aktiviranje učencev, da postanejo drug drugemu vir poučevanja;
5. aktiviranje učencev za samoobvladovanje njihovega učenja (Wiliam, 2013).

Po Wiliamu (2013, v Ada Holcar Bruanauer, 2014) spremljane predvideva uporabo petih strategij, po katerih so potekale dejavnosti v razredu:

- a) Najprej je bila potrebna razjasnitev učencem: kaj bomo počeli; njihova soudeležnost pri določanju in razumevanju namenov učenja in kriterijev za uspeh. Nato smo, za učinkovito reševanje problemov pri matematiki, postavili skupaj z učenci cilje in želje učencev. Učence sem vodila z naslednjimi vprašanji: *Kaj želim doseči?, Kakšne so okoliščine mojih ciljev?, Katere sposobnosti potrebujem za reševanje problemov pri matematiki?, Kako bom vedel, da sem uspešno rešil probleme?*
- b) Sledilo je aktiviranje in ugotavljanje predznanja za reševanje matematičnih problemov. Preverila sem, katera znanja in veščine imajo učenci že razvite, usvojene, njihovo predznanje, ki je izhodišče za nadaljnje delo.
- c) Nadaljevali smo z načrtovanjem strategije reševanja problema. Učencem sem pomagala z vprašanji: *Kako bom to dosegel?, Kaj moram storiti, da bom dosegel cilj?, Katere dejavnosti bom izvedel, da lahko rešim problem?, Kdaj bom te dejavnosti izvajal?, S kom bom sodeloval?, Kaj bom potreboval?.* Učenci tega ne morejo vedeti sami od sebe, zato jih je treba sprva usmerjati in z njimi oblikovati nabore strategij, najboljše preko izkušenj (Mršnik in Novak, 2015).
- d) Sledilo je zbiranje in presojanje dokazov. Učence je vodil razmislek: *Kako bom/sem dokazal, da sem cilj dosegel?.* Zbrane dokaze v procesu učenja smo presojali skupaj, na osnovi vrednotenja svojega dela, pri čemer sem jim pomagala z vprašanji: *Kaj je dokaz mojega učenja? Kaj s tem dokazujem? Kako to dokazujem?.* V celotnem procesu sem jim zagotavljala povratne informacije, saj mora biti v vseh fazah učnega procesa prisotna učinkovita povratna informacija. Bistvo povratne informacije (Black, Wiliam, 1998, v Mršnik in Novak, 2015) je zaporedje dveh aktivnosti: najprej mora učenec ugotoviti (spoznati,



Priloga 1: Učni list

PREDALNIK ZA REŠEVANJE MATEMATIČNIH PROBLEMOV

1. Izpišem vse podatke.	2. Skiciram/narišem problem.
3. Kaj bi želel/a izračunati/ugotoviti/rešiti?	4. Poimenujem računske operacije
5. Oblikujem vprašanja o problemu.	6. Rešujem.
7. Oblikujem odgovore.	8. Zapišem rešitev ter opišem potek reševanja.
REŠEVANJE PROBLEMOV JE ...	DANES SEM BIL/-A USPEŠNA ...
DRUGIČ BOM ...	PREDALNIK JE ...



ozavestiti) razliko med želenim oz. zahtevanim (ciljem, znanjem) in doseženim, nato pa mora dobiti napotek in usmeritev za aktivnost, ki mu bo pomagala (omogočila) odpraviti to razliko. Velikokrat sem med delom aktivirala učence, da so postali drug drugemu vir poučevanja. Tako so učenci skupaj načrtovali in reševali probleme, načrtovali reševanje, vrednotili načrtovanje in reševanje ter drug drugemu bili vir povratne informacije.

- e) Na koncu sem aktivirala učence, da ovrednotijo svoje lastno delo. Učencem sem pomagala z vprašanji: *Ali sem dosegel cilj?, Kako sem ga dosegel?, Kako ocenjujem svoje delo glede na kriterije uspeha?, Kako moje delo ocenjujejo drugi?* Tako razvijamo sposobnost vrednotenja svojih dosežkov, in sicer gre za razmišljanje o tem, kaj sem naredil, kaj sem poskušal narediti in kako sem se ob tem počutil (SAMOREFLEKSIJA), samostojno presojanje lastnih dosežkov glede na poznane kriterije (SAMOOOCENJEVANJE) ter lastno presojanje vrednosti, identifikacije močnih in šibkih točk ter razmišljanje o načrtovanju aktivnosti, ki bodo izboljšale rezultate na osnovi notranjih kriterijev (SAMOVREDNOTENJE) (Mori, Sentočnik 2003, v Mršnik in Novak, 2015).

Vključevanje samorefleksivnega mišljenja in reševanja problemov v poučevanje matematike postavlja pred učence izziv, kjer ni dovolj samo, da o problemu razmišljajo, ampak ga morajo samostojno raziskati. Učence sem v uvodu ure seznanila, da bomo reševali matematične probleme na malo drugačen način. Pogovorili smo se, katere strategije reševanja matematičnih problemov že poznajo. Vsi so že sedeli po skupinah, kot običajno pri pouku. Vsak učenec je postavil svoje cilje (znotraj skupnega okvira) in jih predstavil razredu. Skupaj smo cilje pregledali in se dogovorili, katere cilje bomo vsi upoštevali.

Pogovorili smo se, kaj imamo na voljo oz. katere podatke imamo na voljo. Vprašali smo se, kaj moramo izvedeti, narediti in kako bomo to naredili. Na koncu smo si zastavili še vprašanje, kako bomo vedeli, da smo uspešni. Določili smo, kakšni bodo tokratni kriteriji, ki nam bodo dali vedeti, kdaj bomo pri reševanju matematičnega problema uspešni. Učenci so povedali, da bodo rešili besedilno nalogo, zapisali odgovore na vprašanja in poskušali dobiti enake rešitve kot ostali sošolci, ki rešujejo enak matematični problem. Kriterije smo zapisali na tablo, da so bili vidni vsem učencem. Skupaj z učenci je sledilo sooblikovanje kriterijev uspešnosti, ki so jim bili v pomoč pri samovrednotenju. Učence sem vodila in jim poskušala pomagati pri zastavljanju kriterijev:

- *Kako bom vedel, da je, to kar sem naredil, dobro?*
- *Ali sem imel ustrezno strategijo reševanja problemov?*
- *Kako bi mogoče nalogo opravil še bolje?*

- *Kako dobro sem sodeloval s sošolci?*
- *Kaj bi lahko naredil drugače?*
- *Ali sem dal pri uri vse od sebe?*

Skupine so dobile nalogo, ki se je glasila: »Maja in njena družina so bili na izletu. Cena izleta za eno osebo je bila 234 €, za otroke do 12. leta je bilo zastonj in za otroke od 12. do 18. leta je bila polovična cena. Izleta so se udeležili mama, oče, Maja in njena mlajša sestra. Koliko so plačali vsi skupaj? Odločili so se, da bodo plačali v 5 obrokih. Koliko je znašala cena enega obroka? Če so plačali meseca februarja prvi obrok, kdaj so plačali zadnji obrok?« (Mršnik, Novak, 2015, str. 121).

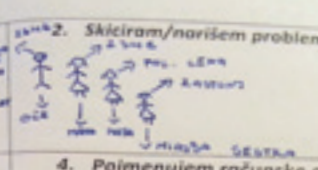
Izvedba učne ure

Že v začetku skupinskega dela so bile prve reakcije najboljših učencev, tistih najbolj glasnih, zelo burne, saj so trdili, da naloga ni rešljiva, ker ni danih vseh podatkov, nato pa so se pomirili in se začeli pogovarjati v skupinah. Ker so učenci tega razreda zelo konstruktivni, vedoželjni in se ne predajo že ob prvem problemu, se je že v naslednjem trenutku vnela zanimiva razprava o zastavljeni besedilni nalogi. Čeprav namenoma nisem dala navodil, da lahko delajo skupaj, v skupini, so se učenci samoiniciativno začeli pogovarjati med seboj, kako bi rešili problem, saj so ugotovili, da jim bo skupaj hitreje in lažje uspelo.

Spraševali so me in se po tihem jezili, ker sem jim dala tak »nemogoč« problem, nato dobili idejo, da bi si starosti članov družine lahko izmislili. Še vedno so čakali na moj odziv. Ko sem jim potrdila, da to lahko naredijo, za njih ni bilo več ovir. Skupine so se zmenile in se same dogovorile za starost otrok. Moj namig (sprotne povratne informacije) je bil dovolj, da so učenci uspešno nadaljevali z delom. Vsaka skupina se je drugače odločila. Prva je menila, da bo najbolje, če bo mlajša sestra mlajša od 12 let in bo imela polovične stroške, starejša pa bo stara med 12 in 18 let. Druga skupina je določila, da sta obe sestri stari med 12 in 18 let: prva je stara 13 let, druga pa 16 let. Tretja skupina se je odločila, da sta obe sestri stari manj kot 12 let in imata izlet zastonj, kar so argumentirali z vplivi trenutne krize v Sloveniji, ki jo žal občutijo tudi otroci. Neka učenka je izjavila, da so si tako tudi malo olajšali delo in da imajo starši manj stroškov. Ob koncu ure smo skupaj še enkrat pregledali kriterije na tabli in ugotovili, da so bile, kljub različnim rešitvam, vse skupine zelo uspešne, saj smo ugotovili, da lahko pridemo do rešitev z različnimi strategijami reševanja matematičnih problemov.

Učence sem opazovala in jih le po potrebi usmerila, saj nisem želela prekiniti njihovih miselnih tokov in konstruktivnih pogovorov, ki so občasno prerasli v resna razmišljanja posameznikov in skupine kot celote. V skupinah so enakopravno sodelovali tako fantje kot dekleta in tudi tisti najbolj tihi in neopazni so poskušali podati dobro

PREDALNIK ZA REŠEVANJE PROBLEMOV

<p>1. Izpišem vse podatke. 234 € - ZA ODRASLO POLOVIČNA CENA ZA OTROKA DO 12. LET ZA MLADŠO DO 12 LET ZASTONJ</p>	<p>2. Skiciram/narišem problem.</p> 
<p>3. Kaj bi želel/a izračunati, ugotoviti/rešiti? KOLIKO SO PLAČALI? KOLIKO JE CENA OTROKA DO 12 LET KOLIKO JE STARA EN OBROK? KDAJ SO PLAČALI ZADNI OBROK?</p>	<p>4. Poimenujem računske operacije. SEŠTEVANJE, ODKLON</p>
<p>5. Oblikujem vprašanja o problemu. KOLIKO JE STARA MAJA? KOLIKO JE STARA NJENA MLADŠA Sestra? KOLIKO JE BILA CENA ENEGA OBROKA?</p>	<p>6. Rešujem.</p> $\begin{array}{r} 234 \\ + 234 \\ \hline 468 \\ \hline 468 \\ \hline 936 \end{array}$ <p>585 : 5 = 117 08 35</p>
<p>7. Oblikujem odgovore. VSI SKUPAJ SO PLAČALI 936 €. ZADNI OBROK SO PLAČALI JUNJA. EN OBROK JE 117 €.</p>	<p>8. Zapišem rešitev ter opišem potek reševanja.</p>

Reševanje problema je ... ZAHTEVNO in VSENO ZABAVNO.	Danes sem bil/a uspešna ... ZASTAVLJANU RAČUNOV, ODGOVOROV, DRUGO POKATROV IN ŠKICIL.
Drugič bom boljše ... V ZASTAVLJANJU PRAŽANU	Predalnik je ... ZELO ZAMIRIV

Slika 1: Primer reševanja problema učenca prve skupine

misel ali idejo, ki bi lahko pripomogla k rešitvi problema, saj so se v skupini počutili varno in brez občutka sramu, da bodo kaj narobe povedali in bili ob tem zasmehovani.

Preverjanje povratne informacije in vrednotenje

Reševanje problemov s strategijo predalnika je bilo za večino učencev zabavno in sproščujoče.

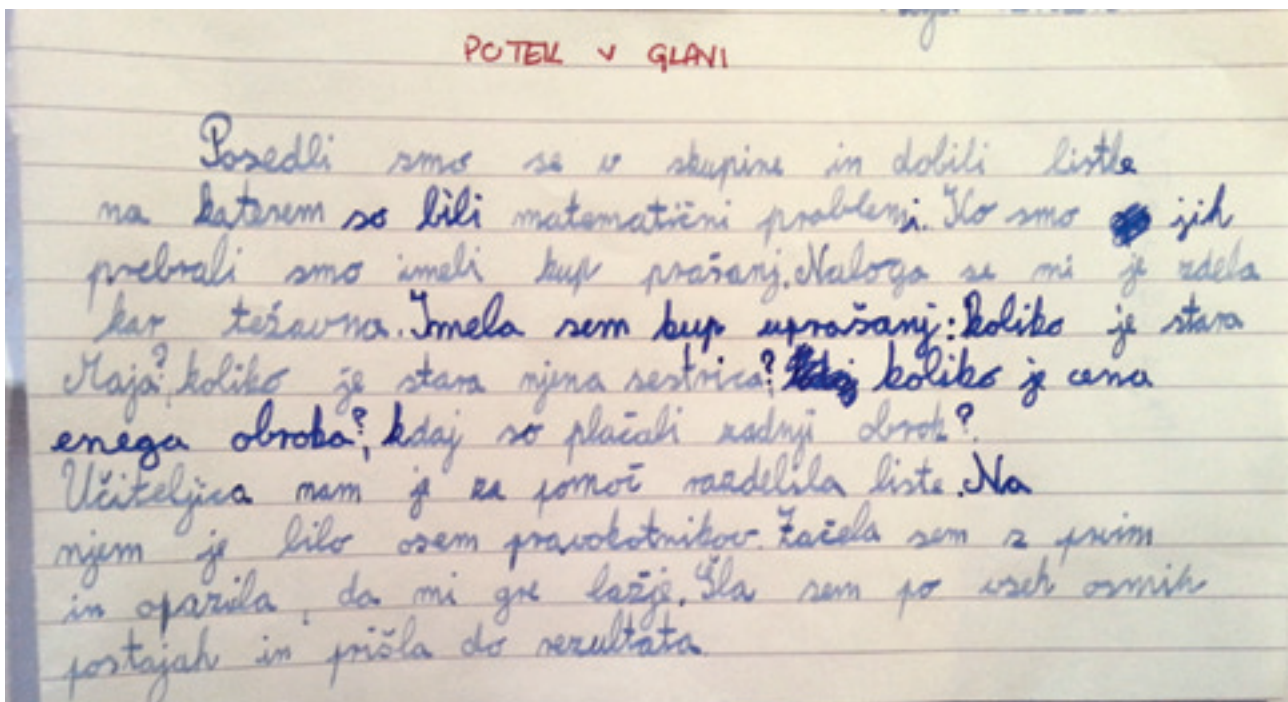
Navdušenja nad »Predalnikom za reševanje problemov« niso skrivali. Sam predalnik učencem ni bil nerazumljiv. Kar hitro so se znašli in ga pogumno uporabili za oporo, kar me je presenetilo, saj je splošno znano, da učenci neradi rešujejo matematične probleme, ne glede na ponujene strategije reševanja.

Večina učencev je menila, da jim je bil predalnik v veliko pomoč, ker jih je postopoma vodil po nalogi do uspešnega konca in rešitve problema. Zelo jim je pomagala druga točka predalnika, kjer so si problem skicirali (takega načina

»Maja in njena družina so bili na izletu. Cena izleta za eno osebo je bila 234 €, za otroke do 12. leta je bilo zastonj in za otroke od 12. do 18. leta je bila polovična cena. Izleta so se udeležili mama, oče, Maja in njena mlajša sestra. Koliko so plačali vsi skupaj? Odločili so se, da bodo plačali v 5 obrokih. Koliko je znašala cena enega obroka? Če so plačali meseca februarja prvi obrok, kdaj so plačali zadnji obrok?«

(Mršnik, Novak, 2015, str. 121)





Slika 2: Izpolnjevanje tretjega predalnika in zapis vprašanj

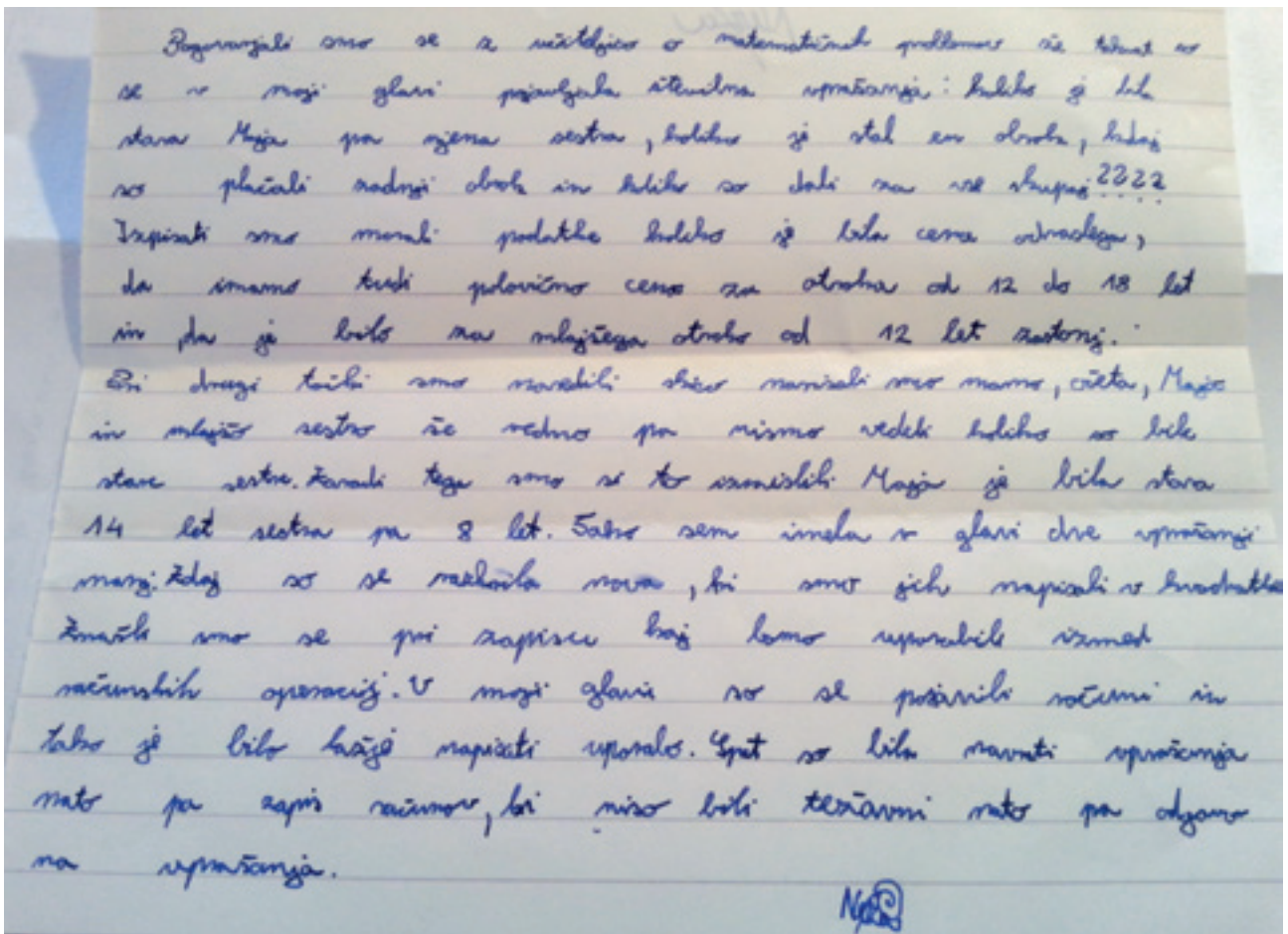
reševanja so bili vajeni že od prej). S predalnikom so pridobili pomembne podatke, ki so jim pomagali rešiti nalogo do konca. Tako je večina učencev izjavila, da je bilo, kljub težkim besedilnim nalogam, »... reševanje problemov na ta način lahko, saj so jim bili predali kot neke oporne točke, ki so jih vodile do rešitve, in na koncu, ko so prišli do rešitve problema, so se zato počutili bolj uspešni oz. ko so rešili problem, so se počutili, kot da bi prišli na vrh gore, zmago-slavno«. Mršnik in Novak (2015) menita, da tako vključevanje samorefleksivnega mišljenja in reševanja problemov v poučevanje matematike postavlja pred učence izziv, kjer ni dovolj samo, da o problemu razmišljajo, ampak ga morajo samostojno raziskati. Največ težav so imeli učenci pri 3. predalu, ko niso vedeli, kaj zapisati, in je večina prepisala kar vprašanja naloge. Neki učenec je zapisal vprašanja o problemu: »Koliko so stare hčerke in kje bom dobil to starost?«. Nato sem jih poskušala usmeriti tako, da sem jim namignila, da naj pomislijo, kaj bi si želeli ugotoviti pri tej nalogi, kaj jih morebiti najbolj zanima.

Po poskusni pedagoški uri uvajanja nove strategije reševanja matematičnih problemov ugotavljam, da je predalnik dobro zastavljen in enostaven, kar se je pokazalo pri učencih, saj so kljub novi strategiji našli rešitev problema. Ugotavljam, da so učenci še vedno preveč vezani na neke rutinske matematične probleme, ki imajo vedno po večini dane vse podatke, v nasprotnem primeru so izgubljeni. Učitelji pa si včasih lahko priznamo, da učenci nimajo niti možnosti reševanja takšnih oz. podobnih nalog. V prihodnje bom poskušala takšne naloge večkrat integrirati v proces pouka matematike in tudi ostalih predmetov.

Pri tej uri so imeli učenci avtonomijo, saj so lahko sami določili, katere podatke bodo uporabili in vsi uspešno prišli do zastavljenega cilja. Na koncu je večina učencev menila, da bi lahko bolje skicirali problem, kar je zelo pomembno za nadaljnje uspešno reševanje naloge. Predalnik so pozitivno sprejeli in si močno želijo še takšnega načina reševanja matematičnih problemov. Formativno spremljanje z ustrezno oblikovano povratno informacijo neposredno in močno vpliva na učenje še predvsem takrat, ko se dopolnjuje z ustreznimi metodami poučevanja in z vključevanjem učencev v samovrednotenje (Razdevšek Pučko, 2004).

Sklep

Za uveljavljanje pozitivnih učinkov povratne informacije je bistvena vloga učiteljev in njihovo poznavanje tega delovanja. Pomembno je, da se učitelji zavedajo pomena povratne informacije, seveda pa morajo najprej znati organizirati situacije preverjanja znanja, nato pa oblikovati informacije na način, ki bo vplival na proces učenja, na izboljšanje pristopov, na odpravo napak in bo usmerjen na nalogo in ne na učenca ter učencev ne bo naredil odvisnih od teh informacij. Zato je treba tudi učence vključiti, jih spodbujati in jim ponuditi konkretne izkušnje, kjer se bodo lahko naučili sami opazovati, nadzorovati ali vrednotiti svoje dosežke in svoje napredovanje ter bodo znali sprejeti in uporabiti povratne informacije v formativnem pomenu besede (Razdevšek Pučko 2004, str. 137).



Slika 3: Refleksija o reševanju problema

Viri in literatura:

Holcar Brunauer, A. (2014). *Formativno spremljanje znanja*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo. Dostopno na: http://www.zrss.si/pdf/250414102957_4_gradivo_-_ada_holcar_brunauer.pdf (10. 1. 2015).

Mršnik, S., Novak, L. (2015). Samorefleksivno mišljenje in formativno spremljanje pri reševanju matematičnih problemov, V: Kmetič, S. et. al, *Mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike [elektronski vir], KUPM, 2014: zbornik prispevkov*. Čatež, 21. in 22. avgust 2014. (str. 117-132), Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Razdevšek Pučko C. (2004). Formativno preverjanje znanja in vloga povratne informacije. *Sodobna pedagogika* 33 (1), str. 126-139.

Wiliam, D. (2013). *Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih*. V: Dumont, H. in drugi (ur.), *O naravi učenja: uporaba raziskav za navdih prakse* (str. 123-144). Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

