

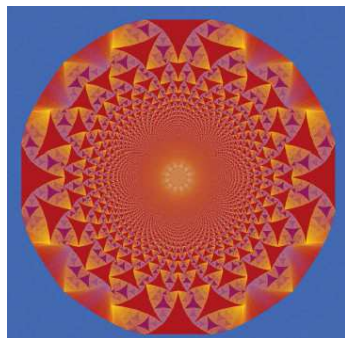
# PRESEK



- KONSTRUKCIJA PRAVILNEGA SEDEMKOTNIKA
- PREČNA FLAVTA
- PRIPRAVLJAMO SE NA TEKMOVANJE IZ ZNANJA ASTRONOMIJE
- ALGORITEM APRIORI IN POVEZOVALNA PRAVILA



# Kupčkanje peska



→ Ustvarjanje skulptur iz mivke ni le zabavno, porodilo je tudi živahne in privlačne raziskave o obnašanju kupov peska. Ugotoviti bi namreč želeli, kako se podirajo in kako spreminjajo obliko računalniško ustvarjene sipine. Kupi peska se

obnašajo po zelo enostavnih pravilih. Ko nasujemo nov pesek, se npr. kupčki, sestavljeni iz štirih kamenčkov, podrejo, prevrnjeni kamenčki pa se v vseh štirih smereh neba pridružijo najbližjim sosednjim kupčkom. Sosednji kupčki, ki so bili prej sestavljeni morda le iz treh kamenčkov, tako zrastejo, se podrejo, prispevajo kamenčke sosednjim kupčkom, ki spet zrastejo, se podrejo, razporedijo kamenčke sosednjim kupčkom in tako naprej brez konca. Kljub enostavnosti to pravilo vodi do neverjetno zapletenih fraktalskih vzorcev, ki jih ustvarjajo milijarde kamenčkov. Takšen model lahko ponazarja obnašanje različnih sistemov, od nevronskih mrež do gozdnih požarov.

Preprosto peskovniško pravilo, ki vodi v zelo zapleteno obnašanje, je primer samo organizirane kritičnosti, kar pomeni, da obstaja meja med popolnim kaosom in konstantnostjo. Zelo velike količine peska se ustalijo v stanju, ko je povprečni kupček velik le malo več kot dva kamenčka. Tudi v tem stanju pride do prevačanja, ki pa ga lahko do neke mere predvidimo. V primeru, ko je kamenčkov v kupčku več, pa lahko že dodatek enega samega kamenčka sproži plaz celotnega sistema. Raziskovalci trenutno s pomočjo geometrije in parcialnih diferencialnih enačb določajo lastnosti samo-organiziranih kritičnih sistemov. Razumevanje teh lastnosti bo pomagalo pri obvladovanju različnih področij, od finančnih trgov do vesolja in morda celo do izvora življenja.

Za več informacij si preberite članek *The amazing autotuning sandpile*, ki ga je napisal Jordan Ellenberg in objavil aprila 2015 v reviji *Nautilus*.



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 2

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

**Dopisi in naročnine:** DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA–založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1400 izvodov

© 2015 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1972

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Kupčkanje peska

## MATEMATIKA

- 4-7 Konstrukcija pravilnega sedemkotnika  
(*Marjan Jerman*)
- 7-8 Znete rešiti Leonardov problem o tetraedru?  
(*Jurij Kovič*)

## FIZIKA

- 9-14 Prečna flavta  
(*Tine Golež*)

## ASTRONAMIJA

- 23-25 Pripravljamo se na tekmovanje iz znanja astronomije  
(*Andrej Guštin*)

## RAČUNALNIŠTVO

- 26-29 Algoritem Apriori in povezovalna pravila  
(*Damjan Strnad*)

**SLIKA NA NASLOVNICI:** 28. septembra je bil v jutranjih urah tudi iz Slovenije viden popolni Lunin mrk. Slika na naslovnici prikazuje tri faze mrka: delni mrk pred vstopom Lune v Zemljino senco, popolno fazo mrka in videz Lune nekaj minut po koncu popolne faze mrka. Posnetki so nastali v Braniku z apokromatičnim refraktorjem 127/952 mm (f/7,5) in digitalnim fotoaparatom Pentax K5 II. Foto: Andrej Guštin

## RAZVEDRILO

- 7, 8 Križne vsote
- 22 Barvni sudoku
- 16-17 Nagradna križanka  
(*Marko Bokalič*)
- 29 Rešitev nagradne križanke Presek 43/1  
(*Marko Bokalič*)
- 30-31 Naravoslovna fotografija - Odsev  
(*Aleš Mohorič*)

## TEKMOVANJA

- 15, 18-22 Kresnička  
(*Barbara Rovšek, Sašo Žigon, Gregor Torkar in Dušan Krnel*)
- priloga** 14. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol - področno tekmovanje
- priloga** 14. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol - državno tekmovanje
- priloga** 14. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol - državno tekmovanje
- priloga** 6. tekmovanje iz znanja astronomije - šolsko tekmovanje
- priloga** 6. tekmovanje iz znanja astronomije - državno tekmovanje
- priloga** 14. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol - regijsko tekmovanje

# Konstrukcija pravičnega sedemkotnika



MARJAN JERMAN

## Konstrukcije pravičnih večkotnikov

Grški geometri so znali, tako kot bi znal vsak od vas, brez težav samo s pomočjo ravnila in šestila narisati enakostranični trikotnik, kvadrat in pravični šestkotnik. Precej več dela in premišljevanja so porabili za konstrukcijo pravičnega petkotnika, sedemkotnika pa nikakor niso uspeli narisati.

Da je bil njihov trud zaman, je šele v devetnajstem stoletju uspelo dokazati Pierru Wantzlu (1814–1848), ki je našel potrebne pogoje za konstrukcijo pravičnega  $n$ -kotnika. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) pa je pokazal, da so ti pogoji tudi zadostni.

Pravični  $n$ -kotnik je mogoče narisati samo s pomočjo ravnila in šestila natanko tedaj, ko je število njegovih stranic  $n$  oblike

$$\blacksquare n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdots p_m; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (1)$$

pri čemer so  $p_i$  različna Fermatova praštevila. *Fermatovo praštevilo* je število oblike

$$\blacksquare p = 2^{(2^t)} + 1; \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

ki je hkrati praštevilo. Pierre de Fermat (1601–1655) je domneval, da je vsako število te oblike praštevilo, a tega ni znal dokazati. Leonhard Euler (1707–1783) je njegovo domnevo ovrgel leta 1732, ko je pokazal, da je

$$\blacksquare 2^{(2^5)} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Ker število 7 ni oblike (1), pravičnega sedemkotnika ni mogoče konstruirati. Splošen rezultat je posledica izreka iz teorije obsegov, ki pove naslednje: Če je  $x$  ničla nerazcepne polinoma z racionalnimi koeficienti, ki ima stopnjo različno od  $2^m$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , daljice dolžine  $x$  ni mogoče narisati samo z ravnilom in šestilom.

Eden od najbolj pomembnih primerov je starogrški problem podvojitve kocke. Ta sprašuje, ali je mogoče konstruirati stranico kocke s prostornino 2. Število  $x = \sqrt[3]{2}$  je ničla polinoma

$$\blacksquare p(x) = x^3 - 2.$$

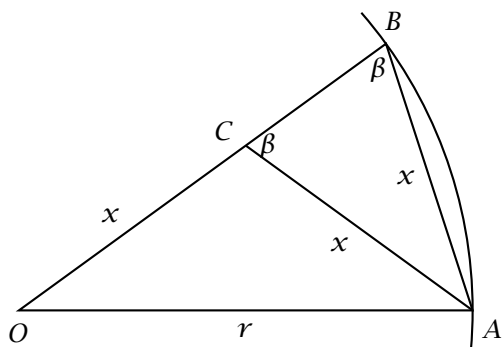
Če bi bilo mogoče polinom  $p$  razcepiti na produkt polinomov manjše stopnje z racionalnimi koeficienti, bi bil vsaj eden od faktorjev linearni polinom. Tedaj bi imel polinom  $p$  vsaj eno racionalno ničlo. Po znanih kriterijih so kandidati za racionalne ničle polinoma  $p$  ulomki, katerih števec deli prosti člen, imenovalec pa vodilni koeficient polinoma  $p$ . Ker nobeno od števil  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  ni ničla polinoma  $p$ , smo pokazali, da je  $x$  ničla nerazcepne polinoma stopnje  $3 \neq 2^m$ , zato problem podvojitve kocke ni rešljiv samo z ravnilom in šestilom.

Ker je vsak pravični večkotnik včrtan nekemu krogu, lahko problem konstrukcije pravičnega večkotnika prevedemo na iskanje zveze med dolžino stranice večkotnika in polmerom kroga.

## Evklidova ideja za pravični petkotnik

Idejo za zvezo med stranico pravičnega sedemkotnika in polmerom njegovega očrtanega kroga lahko najdemo v genialnem Evklidovem izračunu dolžine stranice pravičnega desetkotnika, ki ne uporablja trigonometričnih funkcij. Ker je samo s šestilom mogoče podvajati in razpolavljati kote, je pravični desetkotnik mogoče narisati natanko tedaj, ko je mogoče konstruirati pravični petkotnik.

Naj bo pravični desetkotnik s stranico  $x$ , včrtan v krog s središčem  $O$  in polmerom  $r$ . Izberimo enega od desetih enakokrakih trikotnikov, ki imajo za osnovnico  $AB$  stranico desetkotnika, njegova kraka  $AO$  in  $BO$  pa sta polmera očrtanega kroga.



SLIKA 1.

Enakokraki trikotnik v desetkotniku

Ker je vsota notranjih kotov v desetkotniku enaka  $10\pi - 2\pi = 8\pi$ , je kot

$$\beta = \angle ABO = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{10} = \frac{2}{5}\pi.$$

Na stranici  $OB$  (glej sliko 1) izberimo tako točko  $C$ , da bo  $AC = AB = x$ . Tako je tudi  $\angle ACB = \beta$ . Kot  $\angle AOB$  je enak  $\frac{1}{10}2\pi = \frac{1}{5}\pi$ . Poglejmo si trikotnik  $OAC$ . Ker je zunanji kot trikotnika enak vsoti notranjih nepriležnih kotov, je

$$\angle CAO = \angle ACB - \angle AOC = \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{1}{5}\pi.$$

Tako je  $\angle OAC = \angle AOC$  in trikotnik  $OAC$  je enakokrak. Zato je

$$OC = AC = AB = x.$$

Manjši trikotnik  $BCA$  ima enake kote kot večji trikotnik  $ABO$ , zato sta si trikotnika podobna. Za razmerji osnovnice in kraka velja

$$\frac{AB}{AO} = \frac{x}{r} = \frac{BC}{BA} = \frac{r-x}{x}.$$

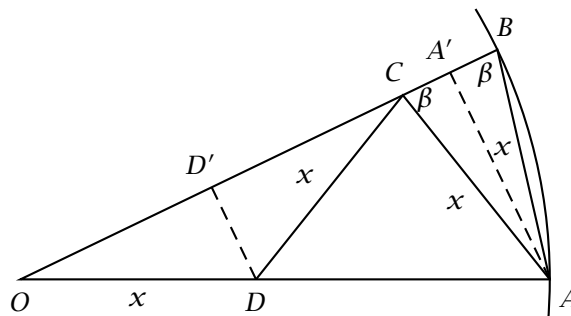
Tako smo našli zvezo med stranico desetkotnika in polmerom njegovega očrtega kroga:

$$x^2 = r^2 - rx.$$

Smiselna je le pozitivna rešitev te kvadratne enačbe

$$x = r \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right).$$

Naj bo, recimo,  $r = 1$ . Število  $\sqrt{5}$  lahko narišemo kot hipotenuzo pravokotnega trikotnika s stranicama 2 in 1. Od tega števila s šestilom odrežemo enoto



SLIKA 2.

Enakokraki trikotnik v štirinajstkotniku

1, nato pa daljico razpolovimo. Tako smo narisali stranico pravilnega desetkotnika, ki je včrtan v krog s polmerom 1. Stranico pravilnega petkotnika dobimo tako, da kot  $AOB$  s šestilom podvojimo.

Pokazali smo, da lahko le z ravnilom in šestilom narišemo pravilni petkotnik.

### Posplošitev ideje na sedemkotnik

Evklidovo idejo lahko uporabimo tudi za izračun dolžine stranice pravilnega štirinajstkotnika.

Enako kot prej izberimo enega od štirinajstih enakokrakih trikotnikov  $ABO$  z osnovnico  $AB = x$  in krakoma  $AO = BO = r$  (glej sliko 2). Na kraku  $OB$  izberimo točko  $C$ , tako da bo  $AC = AB = x$ , na kraku  $OA$  pa tako točko  $D$ , da bo tudi  $CD = x$ . Tokrat je

$$\beta = \angle ABO = \frac{3}{7}\pi = \angle BCA,$$

$\angle CAB = \pi - 2\beta = \frac{1}{7}\pi$  in  $\angle ADC = \angle DAC = \beta - \angle CAB = \frac{2}{7}\pi$ . Sedaj si pogledjmo trikotnik  $ODC$ . Ker je zunanji kot enak vsoti notranjih nepriležnih kotov, je

$$\angle OCD = \angle ADC - \angle COD = \frac{1}{7}\pi,$$

torej je trikotnik  $COD$  enakokrak. Zato je

$$OD = DC = CA = AB = x.$$

Ponovno sta podobna manjši trikotnik  $BCA$  in večji trikotnik  $ABO$ , zato je

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{x} = \frac{AB}{AO} = \frac{x}{r}$$



→ in  $BC = \frac{x^2}{r}$ . Narišimo višini  $DD'$  in  $AA'$  trikotnikov  $COD$  in  $BCA$ . Zaradi vzporednosti višin je

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{OD}{OA} = \frac{x}{r} = \frac{OD'}{OA'} = \frac{\frac{1}{2}(OB - CB)}{OB - \frac{1}{2}CB} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{2(r - \frac{x^2}{2r})} \\ = \frac{r^2 - x^2}{2r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Tako smo dobili kubično zvezo med stranico  $x$  pravilnega štirinajstkotnika in polmerom  $r$  njegovega očrtanega kroga:

$$\blacksquare 2r^2x - x^3 = r^3 - rx^2.$$

V primeru, ko je  $r = 1$ , je treba rešiti kubično enačbo z racionalnimi koeficienti

$$\blacksquare p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Enako kot v premisleku pri problemu o podvojitvi kocke vidimo, da  $-1$  in  $1$  nista rešitvi te enačbe, zato je polinom  $p$  nerazcepen polinom stopnje tri in daljice dolžine  $x$  ni mogoče narisati le z ravnilom in šestilom.

Ker je mogoče pravilni sedemkotnik konstruirati natanko tedaj, ko lahko konstruiramo pravilni štirinajstkotnik, smo tako pokazali, da pravilnega sedemkotnika ni mogoče narisati le z ravnilom in šestilom.

Radovednega bralca vabimo, da enak trik z daljšo lomljeno črto z odseki dolžin  $x$  uporabi tudi v primeru osemnajstkotnika in pokaže, da sta stranica  $x$  in polmer  $r$  povezana z enačbo pete stopnje

$$\blacksquare x^5 - rx^4 - 4r^2x^3 + 3r^3x^2 + 3r^4x - r^5 = 0,$$

s pripadajočo nerazcepno enačbo

$$\blacksquare x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

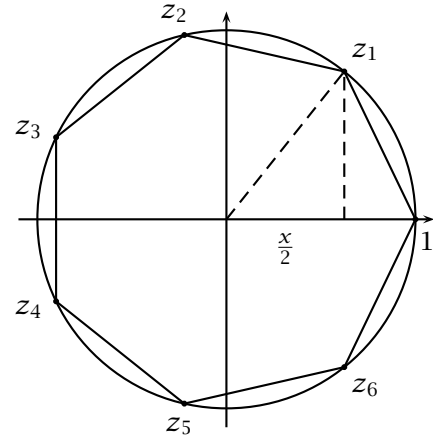
Zato ni mogoča niti konstrukcija pravilnega devetkotnika.

### Sedemkotnik v kompleksni ravnini

Kot zanimivost pokažimo, kako bi z modernim poznavanjem kompleksnih števil pokazali, da konstrukcija pravilnega sedemkotnika ni mogoča.

Vse kompleksne rešitve enačbe

$$\blacksquare z^7 - 1 = 0 \tag{2}$$



SLIKA 3.

Pravilni sedemkotnik kot rešitev enačbe  $z^7 = 1$

so števila oblike

$$\blacksquare z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{7}k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}k\right); \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

V kompleksni ravnini si jih lahko predstavljamo kot oglišča pravilnega sedemkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom 1, eno od oglišč pa ima v točki  $z_0 = 1 + 0i$  (glej sliko 3). Če bi znali narisati pravilni sedemkotnik, bi lahko narisali tudi pravokotno projekcijo števila  $z_1$  na realno os, torej realno točko  $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 0i$  in njen dvakratnik  $x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ .

Enačbo (2) lahko razstavimo in dobimo

$$\blacksquare (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Realno rešitev  $z_0 = 1$  že poznamo, zato lahko enačbo delimo z  $z - 1$ . Ostale rešitve so ničle polinoma s simetričnimi koeficienti. Takšnih enačb se lotimo tako, da enačbo delimo s sredinskim členom  $z^3$ :

$$\blacksquare z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0. \tag{3}$$

Ker rešitve ležijo na enotski krožnici, za vsako rešitev  $z$  velja

$$\blacksquare \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \bar{z},$$

zato je  $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ . Posebej, za prvo oglišče  $z_1$  velja

$$\blacksquare z_1 + \frac{1}{z_1} = x.$$

Sedaj lahko združimo sorodne simetrične člene in upoštevamo

$$\blacksquare z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2$$

in

$$\blacksquare z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Tako se enačba (3) v primeru  $z = z_1$  glasi

$$\blacksquare x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \quad (4)$$

Enako kot prej vidimo, da  $-1$  in  $1$  nista rešitvi enačbe (4). Zato je  $x$  rešitev nerazcepne enačbe stopnje 3 in daljice dolžine  $x$  ni mogoče narisati samo z ravnilom in šestilom.

Tako smo še na en način pokazali, da konstrukcija pravilnega sedemkotnika ni mogoča.

× × ×

## Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	15					
7						4	10
6			10		17		
	10			9			
		18					
			3				

× × ×

# Znate rešiti Leonardov problem o tetraedru?

↓↓↓

JURIJ KOVIČ

**Opreделитеv problema.** Leonardo da Vinci je v enem svojih spisov brez dokaza navedel, da se težišče  $T$  pravilnega tetraedra  $ABCD$  nahaja na eni četrtni razdalje od težišča  $T'$  osnovne ploskve do vrha  $D$  tetraedra ([2], str. 235). *Je to res? Kako bi to trditev dokazali ali ovrgli?*

**Rešitvi.** Oglejmo si dve rešitvi tega problema: prva, algebraična, uporablja *vektorje*, ki so univerzalno računsko orodje za reševanje geometrijskih nalog, zelo uporabni pa so tudi v fiziki, kjer z njimi ponazarjajo sile. Druga rešitev, geometrijska, temelji na neposrednem uvidu.

**Metoda 1.** (povzeta po [1], str. 214-215). Težišče točkastih mas  $t_1, \dots, t_k$  v točkah  $A_1, \dots, A_k$  je definirano takole: Izberimo izhodiščno točko  $O$ . Če je  $t_1 + \dots + t_k \neq 0$ , potem obstaja točka  $P$ , za katero je

$$\blacksquare t_1 \vec{OA}_1 + \dots + t_k \vec{OA}_k = (t_1 + \dots + t_k) \vec{OP}.$$

Ta točka  $P$ , ki ji pravimo *težišče* mas  $t_i$  v točkah  $A_i$ , je neodvisna od izbora izhodišča  $O$ , kar vidimo, če za neko drugo izhodišče  $O'$  dobimo po istem postopku namesto  $P$  točko  $P'$ , ki ustreza enačbi

$$\blacksquare t_1 \vec{O'A}_1 + \dots + t_k \vec{O'A}_k = (t_1 + \dots + t_k) \vec{O'P'}.$$

Potem z odštetjem druge enačbe od prve, upoštevaje  $\vec{OA}_i - \vec{O'A}_i = \vec{OO'}$ , dobimo

$$\blacksquare (t_1 + \dots + t_k) \vec{OO'} = (t_1 + \dots + t_k) (\vec{OP} - \vec{O'P'}),$$

od koder po krajšanju s  $(t_1 + \dots + t_k)$  sledi  $\vec{O'P'} = \vec{OP} - \vec{OO'}$  in zato  $\vec{OP'} = \vec{OO'} + \vec{O'P'} = \vec{OP'} + (\vec{OP} - \vec{OO'}) = \vec{OP}$  in  $P = P'$ .



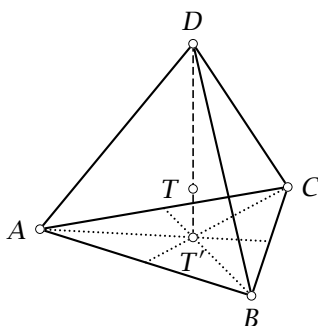
→ Če postavimo izhodišče  $O$  v točko  $P$ , dobimo  $\sum t_i a_i = 0$ . Če sta točki le dve, potem je  $t_1 \vec{PA}_1 = -t_2 \vec{PA}_2$ , tako da  $P$  leži na daljici  $A_1A_2$  in jo deli v razmerju  $t_2 : t_1$ . Če je  $t_1 = t_2$ , potem je  $P$  središčna točka daljice  $A_1A_2$ .

Pri trikotniku  $A_1A_2A_3$  imamo  $(t_1 + t_2 + t_3)\vec{OP} = t_1\vec{OA}_1 + t_2\vec{OA}_2 + t_3\vec{OA}_3 = t_1\vec{OA}_1 + (t_2 + t_3)\vec{OQ}$ , kjer je  $Q$  težišče mas  $t_2$  v  $A_2$  in  $t_3$  v  $A_3$ . Tako lahko nadomestimo dve masi z eno dvojno v njenem težišču. Če je  $t_1 = t_2 = t_3 (= 1)$ , potem je  $Q$  središče  $A_2A_3$ , in  $P$  deli daljico  $A_1Q$  v razmerju  $1 : 2$ , kar sledi iz formule za težišče dveh mas (dokazane v prejšnjem odstavku), saj je tedaj  $t_1\vec{OA} = -2t_1\vec{OQ}$ .

Argumenta zdaj ni težko posplošiti na štiri enake mase v ogliščih tetraedra in videti, da težišče tetraedra deli višino skozi vrh  $D$  tetraedra v razmerju  $1 : 3$ . Težišče tetraedra namreč leži na spojnici vrha tetraedra  $D$  (kjer je masa 1) in težišča osnovne ploskve  $ABC$  (kjer je masa 3).

**Metoda 2.** Spomnimo se izreka, ki pove, kako se sekajo težiščnice v trikotniku. Sekajo se v isti točki in delijo druga drugo v razmerju  $1 : 2$ . Ali znamo dokazati to vsaj za enakostranični trikotnik? V enakostraničnem trikotniku so težiščnice tudi višine. Zato lahko enakostranični trikotnik s ploščino  $av/2$  razdelimo na tri trikotnike z isto osnovnico  $a$  in isto višino  $x$ . Torej je  $av/2 = 3ax/2$  in  $x = v/3$ .

Analogen sklep je uporaben tudi za pravilni tetraeder. Njegovo prostornino izračunamo po formuli za prostornino piramide z osnovno ploskvijo  $O$  in višino  $v$  takole:  $O \cdot v/3$ . A tetraeder lahko razdelimo na štiri skladne piramide z osnovno ploskvijo  $O$  in (zaenkrat še neznan) višino  $y$ , torej je  $V = O \cdot v/3 = 4 \cdot O \cdot y/3$  in  $y = v/4$ . Preprosto, ali ne?



SLIKA 1.

**Analiza rešitev.** Katera rešitev vam je bolj všeč? Prva zahteva kar nekaj spretnosti pri računanju z vektorji. Druga temelji na uvidu, da pravilni tetraeder razpade na štiri skladne piramide z vrhom v težišču  $P$  in je torej razdalja težišča od vsake od ploskev tetraedra enaka višini  $y$  vsake od teh piramid. To sledi iz simetrije tetraedra  $ABCD$ ; rotacija za tretjino polnega kota okrog višine na ravnino trikotnika  $ABC$  skozi vrh  $D$  namreč preslika piramido  $ABPD$  v  $BCPD$ . Podobno vidimo, da so vse štiri piramide  $ABPD$ ,  $BCPD$ ,  $CAPD$  in  $ABCP$  skladne.

Literatura

- [1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [2] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

# Križne vsote

## REŠITEV S STRANI 7



	4	15					
7	<b>3</b>	<b>4</b>				4	10
6	<b>1</b>	<b>5</b>	10		17	<b>3</b>	<b>8</b>
	10	<b>6</b>	<b>4</b>	9	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
		18	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>9</b>		
			3	<b>1</b>	<b>2</b>		



# Prečna flavta



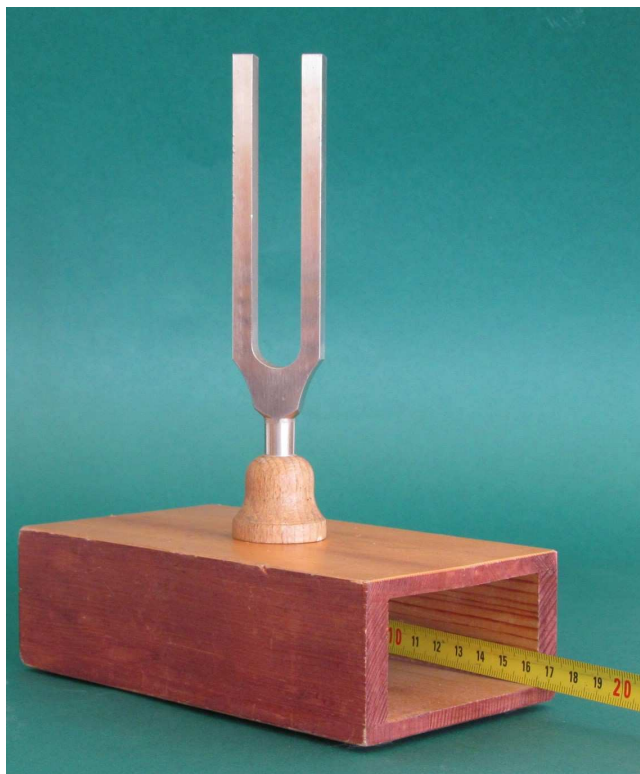
TINE GOLEŽ

→ Prečna flavta me spremlja že iz osnovne šole. Tedaj sem jo uporabljal le kot glasbilo. V gimnaziji pa sem skušal zvok flavte razumeti tudi z vidika fizike, zato sem si zastavil več vprašanj. Na nekatera sem znal odgovoriti, druga pa so morala še malo počakati. A začnimo s kratkim uvodom o piščalih.

## Piščali

Gotovo ste že videli leseno škatlo, na kateri so glasbene vilice za šolsko uporabo. Tej škatli pravimo resonančna škatla (slika 1). Za fizika je tudi trup dragocene violine le »resonančna škatla«, čeprav bi bil violinist nejevoljen ob takem poimenovanju ene izmed svojih največjih investicij, saj so dobra glasbila zelo draga. Vidimo torej, da poimenovanja v fiziki skušajo biti zelo splošna in z besedo ali dvema opišejo veliko različnih predmetov, ki imajo enake lastnosti. Tudi fizikalni izraz piščal zaobjame veliko različnih zvočil.

V fiziki govorimo o treh vrstah piščali: odprta piščal, zaprta piščal in piščal, ki je na eni strani odprta. V piščalih niha stolpec zraka. Fizične lastnosti (dolžina stolpca, temperatura ...) določajo, s katerimi frekvencami bo stolpec zraka nihal. Oglejmo si najprej piščal, ki je na obeh straneh zaprta, saj nas najbolj spominja na nihanje strune, ki ga pred tem obravnavamo pri pouku. Pri struni je šlo za odmike (nihanje) delov strune v prečni smeri, pri piščali pa nihajo plasti zraka v vzdolžni smeri. Na koncu piščali se zrak seveda ne more premakniti, saj je piščal zaprta. Tam se vselej pojavi vozec pomika zraka, kot se pri struni v pritrđišču vselej pojavi vozec (prečnega) pomika strune. Na sredini piščali pa plasti zraka najbolj izdatno nihajo.



SLIKA 1.

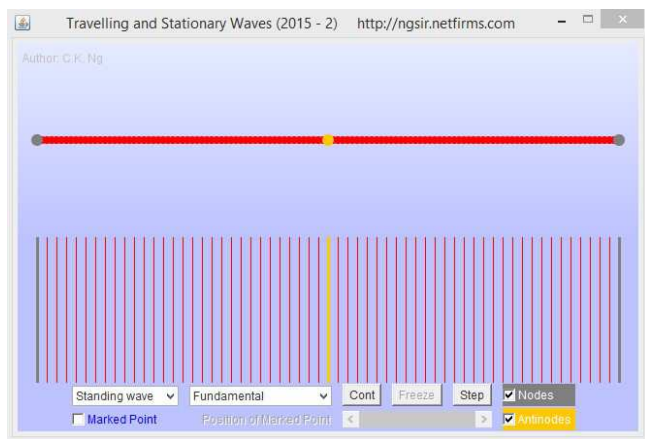
Podobnosti z nihanjem strune še ni konec. Tako kot struna niha z več lastnimi nihanji hkrati, niha tudi stolpec zraka v piščali. Zato je enaka tudi enačba za izračun teh frekvenc. Razlika je le v tem, da pri struni oznaka  $c$  pomeni hitrost potovanja motnje po struni (odvisna je od sile, ki napenja struno, mase strune in njene dolžine), pri piščali pa  $c$  pomeni hitrost zvoka v zraku.

Primerjajmo zaporedne slike nihajoče strune in zraka, ki je zaprt v piščali. Objavo slik, ki so zaslon-ski posnetki fizikalne simulacije, je dovolil avtor, gospod C. K. Ng.



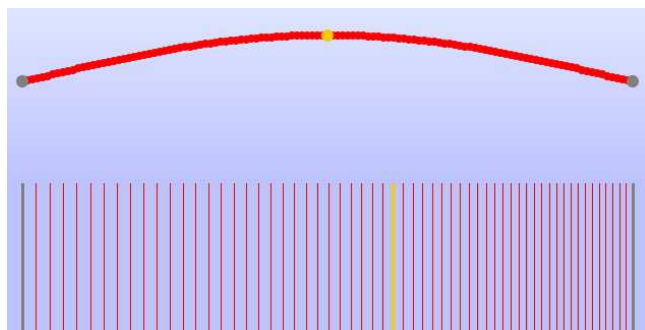


Struno (zgoraj) in zrak (spodaj, gre za plasti zraka) začnemo opazovati, ko potujeta skozi ravnovesno lego. Ob skrajnem robu je s sivo označen del strune, ki je pritrjen, in pri zraku plast zraka ob zaprtju piščali. Z rumeno je označen tisti del snovi (strune oz. zraka), ki najbolj niha in ga imenujemo hrbet (slika 2). Vse čase pri naslednjih slikah štejemo od tega trenutka naprej.



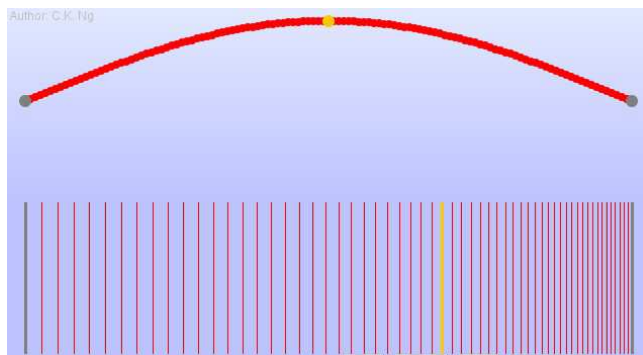
SLIKA 2.

Čez približno desetinko nihajnega časa deli snovi še niso dosegli največjega odmika. Struna niha navzgor, zgoščina v piščali nastaja na desni (slika 3).



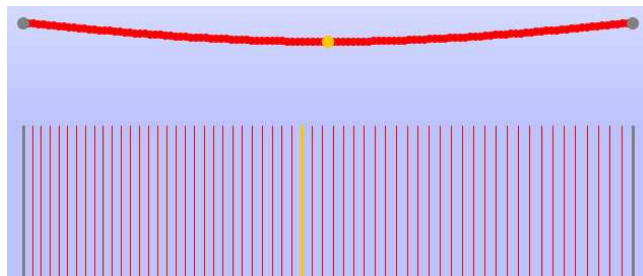
SLIKA 3.

Četrtni nihaja je mimo in deli strune so dosegli največji odmik od ravnovesne lege (navzgor). Hkrati so plasti zraka dosegle največje odmike od ravnovesne lega v desno. Seveda so vse slike močno pretirane, saj so odmiki sicer bistveno manjši (slika 4).



SLIKA 4.

Slika 5 kaže, kje so deli strune in plasti zraka, ko je minilo malo več kot polovica nihajnega časa. Bralcem priporočamo ogled simulacije <http://ngsir.netfirms.com>.



SLIKA 5.

Pri prvem lastnem načinu nihanja (t. j. stoječe valovanje, ki nastane z združitvijo dveh potujočih) je na struni opaziti polovico valovne dolžine, prav tako v piščali. Pri struni imamo (na tretji sliki) hrib, do polne valovne dolžina manjka še dolina vala. Pri piščali pa imamo razdaljo od sredine zgoščine do sredine razredčine. Če bi to razdaljo podaljšali v levo še do naslednje zgoščine, bi imeli celo valovno dolžino. Označimo dolžino strune (piščali) z  $b$ . Zaradi povedanega je valovna dolžina enaka  $2b$ . Za vsa valovanja pa velja:

- $c = \lambda v$

Zato je:

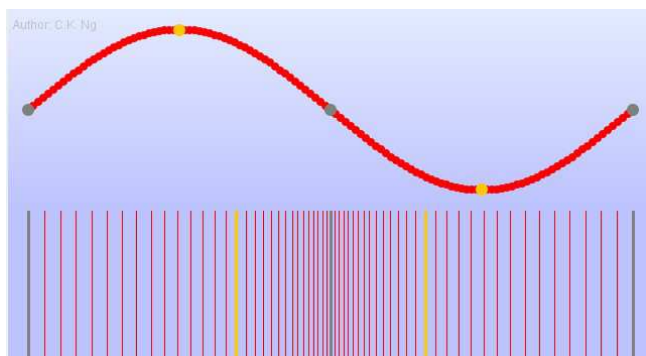
- $c = 2bv$

In končno:

$$\blacksquare v_1 = \frac{c}{2b}$$

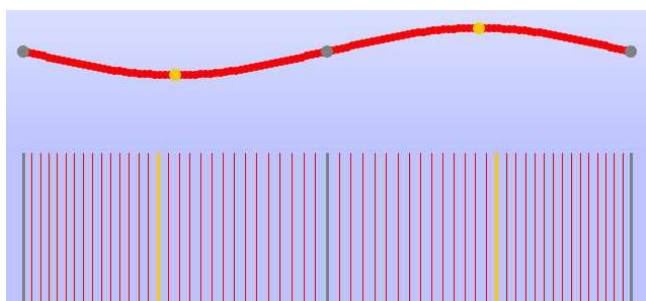
Indeks 1 smo dodali, ker gre za osnovno frekvenco, saj je v igri osnovno lastno nihanje. Poglejmo, kolikšna je lastna frekvenca pri naslednjem lastnem nihanju. Tokrat je na struni (ali v piščali) cela valovna dolžina.

Pri prvem višje harmonskem nihanju se na sredini strune pojavi vozle odmika, prav tako na sredini piščali. Tisti delček strune je ves čas pri miru, prav tako tista plast zraka v piščali, kar kaže slika 6.



SLIKA 6.

Od prejšnje slike je minilo malo več kot četrtnina nihajnega časa. Z rumeno označena točka niha proti nasprotni skrajni legi, s sivo označena točka (oz. črta pri piščali) pa ves čas miruje (slika 7).



SLIKA 7.

Ker je v piščali tokrat cela valovna dolžina, velja zveza  $\lambda = 2b$ . Zato je frekvenca drugega lastnega nihanja (ali prvega višje harmoničnega nihanja) enaka:

$$\blacksquare v_2 = \frac{c}{b}$$

Poljubna frekvenca lastnega nihanja je enaka:

$$\blacksquare v_n = N \frac{c}{2b}$$

Kadar je na struni pet vozlov (vozlov na pritrdiščih ne štejemo), gre za peto lastno nihanje ali četrto višje harmonsko nihanje strune (ali zraka v piščali). Meritve kažejo, da potrzana struna in piščali nihajo z več lastnimi nihanji hkrati. Pravzaprav to zaznajo tudi ušesa, saj ločijo zven glasbenih vilic (zveni le osnovna frekvenca) od zvoka inštrumenta, ki igra isti ton, kot ga oddajajo glasbene vilice. Tedaj poleg osnovne frekvence zvenijo še celoštevilski večkratniki osnovne frekvence.

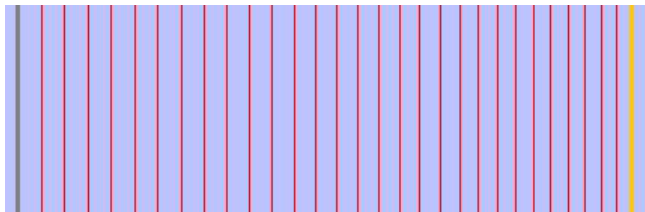
Pri piščali, ki je na obeh straneh odprta, bodo prav pri obeh odprtinah plasti zraka najbolj nihale. Na sredi piščali pa se bo pojavil vozle; tam plasti zraka ne nihajo. A tudi tokrat je v piščali točno polovica valovne dolžine, zato so lastne frekvence take piščali kar enake lastnim frekvencam piščali, ki je na obeh straneh zaprta in smo jih ravnokar zapisali.

Oglejmo si še lastne načine nihanja zraka v piščali, ki je le na enem koncu odprta. Orglavci ji pravijo tudi pokrita piščal. Na zaprtem koncu je seveda vozle pomika, medtem ko je na odprtem hrbet. Sedaj je v piščali samo ena četrtnina valovne dolžine. V jeziku glasbe to pomeni, da bomo dobili za oktavo nižji ton tako, da bomo (obojestransko odprto) piščal na enem koncu zaprli. A lastne frekvence tokrat niso več celoštevilski večkratniki osnovne frekvence, pač pa le lihi večkratniki. Zvok take piščali je nekoliko bolj zamolkel, saj v njem ni sodih večkratnikov osnovne frekvence. In kaj bi bila primerjava za tovrstno piščal? Struna seveda ne, kar dobra primerjava pa bi bilo daljše ravnilo, ki ga z eno roko tiščimo ob mizo, z drugo pa zanihamo, da niha čez rob mize. Tudi pri takem ravnilu gre za nihanja s frekvencami, ki so lihi večkratniki osnovne frekvence.

Siva črta predstavlja zaprti del piščali, kjer nastane vozle pomikov plasti zraka. Rumena črta pa kaže plast zraka tik ob ustju piščali (slika 8). Tam plasti zraka najbolj izdatno nihajo, tlak se tam ne



spreminja. V taki piščali imamo pri osnovnem lastnem nihanju le četrt vala, saj je skrajno leva razredčina, skrajno desna pa plast, kjer ni prišlo do spremembe gostote; ta razdalja je le četrtnina valovne dolžina.



SLIKA 8.

Tokrat velja  $\lambda = 4b$ . Zato je frekvenca prvega lastnega nihanja enaka:

$$\nu_1 = \frac{c}{4b}$$

Vrnimo se h glasbenim vilicam. Vemo, da je frekvenca 440 Hz. Ali je morda votlina resonančne škatle pod glasbenimi vilicami neke vrste piščal, ki je na eni strani zaprta?

Vsekakor bi morala biti tudi lastna frekvenca te piščali 440 Hz, če naj služi kot resonator. Upoštevamo še, da je hitrost zvoka 340 m/s.

$$\nu_1 = \frac{c}{4b}$$

in od tod dobimo  $b = 19$  cm. Votlina resonančne škatle pod glasbenimi vilicami je globoka le slabih 17 centimetrov. So se izdelovalci zmotili? Ne, a o tem malo pozneje.

Cenena škatla, ki je pod glasbenimi vilicami, omogoča prav lep zvok (slika 1). A violinist mora zaigrati več kot en sam ton. Violinist mora biti sposobna resonance pri zelo različnih frekvencah in zato je tako po obliki, izdelavi ter seveda ceni neprimerljiva s škatlo, ki je pod glasbenimi vilicami.

## Flavta

Sedaj smo razložili osnovne stvari o piščalih in zato bomo razumeli, za kaj gre pri vprašanjih, ki so bila napovedana v uvodnih vrsticah. Začnimo. Ali je prečna flavta – fizikalno gledano – piščal, ki je na obeh straneh odprta? Pri igranju flavte obstaja le

majhna reža med ustnicami in ustnikom. Smemo to režo zanemariti in obravnavati flavto kot piščal, ki je na enem koncu zaprta? Pot do odgovora je nadvse preprosta. Poprosimo flautista, da zaigra le na del flavte, ki mu pravimo glava. Ključna bo sprememba zvoka, ko bomo pokrili konec cevi. Premislimo! Če flavta deluje kot piščal, ki je na enem koncu zaprta, potem bo po zaprtju drugega konca to postala piščal, ki je na obeh straneh zaprta. Osnovna frekvenca se bo zato podvojila; v jeziku glasbe bi ugotovili, da gre za oktavo višji ton.

In še predpostavka, da flavta deluje kot piščal, ki je na obeh straneh odprta. V tem primeru bi po zaprtju enega konca flavte to postala polodprta piščal. Pričakovali bi, da se frekvenca prepolovi; glasbenik bi rekel, da se bo ton za oktavo znižal.

Razsodnik v fiziki je poskus. Flautist naj najprej zaigra le na glavo flavte (del flavte, na katerem je ustnik), potem pa še na zaprto glavo flavte. Hitro prepoznamo, da se je ton znižal skoraj točno za oktavo. Prva ugotovitev je kot na dlani: flavta deluje kot piščal, ki je na obeh straneh odprta. A poskus, ki je odgovoril na eno vprašanje, je odprl drugo: zakaj se frekvenca ni natančno prepolovila, zakaj se je zvok znižal za malo manj kot oktavo.

Odgovora na to vprašanje ne omenjamo prav pogosto. V (šolski) fiziki se največkrat zadovoljimo s »prvim približkom«, ki z bolj preprosto enačbo manj natančno opiše opazovani pojav. A tokrat povejmo, za kaj gre. Učinek piščali ni tak, kot je fizična dolžina same cevi. Morda si predstavljamo, kot da zrak na koncu piščali takoj po izstopu iz cevi ne »občuti«, da je prišel na svobodo. V resnici piščal deluje tako, kot da je cev malenkost daljša, približno za polovico polmera piščali. Na zaprtem delu piščali pa takega popravka ni.

In že lahko odgovorimo na vprašanje o velikosti resonančne škatle pod glasbenimi vilicami. Škatla je nekoliko krajša, saj je učinek tako široke piščali, kot bi lahko imenovali votlino v resonančni škatli, tak, kot da bi bila piščal še nekako dva centimetra daljša.

## Ogrevanje

Že v osnovni šoli sem vedel, da se stvari, ki jih se-grejemo, nekoliko podaljšajo. Pri igranju flavte pa se to ni ujemalo s tem, kar sem opažal. Vedel sem, da krajša cev pomeni višji ton in obratno. Po drugi

strani pa sem opažal, da se dogaja ravno nasprotno. Če je bila flavta še neogreta in sem zaigral izbrani ton, je ta po nekaj minutah igranja postal nekoliko višji; fizikalno bi rekli, da se je povečala frekvenca. Učinek je bil, kot da bi se cev skrčila in ne podaljšala. In to je že tretje vprašanje učenca flavte, ki razmišlja tudi fizikalno.

V glasbeni šoli so nas učili, da moramo flavto vselej najprej ogreti, potem pa se šele lotimo uglaševanja. Navadno je bilo potrebno nekoliko izvleči glavo flavte iz trupa flavte, morda za nekaj milimetrov, pa sta bila flavta in klavir uglašena. Čim bolj smo jo izvlekli, tem nižji je bil ton oz. manjša frekvenca. Ne znatno, za kak odstotek ali še manj.

Ugotovitev, da se s segrevanjem flavta nekoliko podaljša, je povsem točna. A podaljšek je zelo majhen, saj ne presega desetinke milimetra. V igri mora biti še nekaj, kar vpliva na višino intonacije, kot pravimo majhnim spremembam (glasbenega) tona. Odgovor na to vprašanje najdemo že v srednješolskih učbenikih. Hitrost zvoka je zelo odvisna od temperature. Če vemo, kolikšna je hitrost zvoka ( $c_0$ ) pri dani temperaturi ( $T_0$ ), potem hitrost pri poljubni temperaturi izračunamo kot

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Ne pozabimo, da je potrebno temperaturo vstaviti v kelvinih!



SLIKA 9.

<http://tupian.baikē.com/11221/1.html>

Ocenimo, da je temperatura zraka v flavti ob začetku igranja kakih 25 °C, po nekaj minutah pa naraste na 30 °C. To pomeni, da se je hitrost povečala skoraj za odstotek. Flavta se je ob tem zanemarljivo malo podaljšala. Zaradi stalne dolžine in s tem valovne dolžine se spremeni frekvenca za enako vrednost kot hitrost. Če je ton  $a$  zvenel na neogreti flavti s frekvenco 440 Hz, bo na ogreti višji, saj bo zvenel s frekvenco 443 Hz (pri omenjenih temperaturah). Uho je dokaj natančno in tolikšna razlika je hudo moteča. Ugotovili smo, da je za spremembo frekvenca odgovorna spremenjena hitrost in ne podaljšanje flavte. Hkrati pa smo še s fizikalnega vidika potrdili staro modrost, da je uglaševanje pihal (in trobil) smiselno šele tedaj, ko je inštrument ogret na delovno temperaturo.

### Delovanje flavte

Težko je verjeti, da najdemo odgovor o delovanju flavte lahko tudi v – oblakih! No, ne za celotno delovanje, pač pa za začetek nastanka tona. Oblaki na sliki so potovali po nebu, a so naleteli na oviro, precej špičast gorski vrh. Niso se enakomerno razporedili okoli ovire, pač pa so nekaj časa večinoma potovali po levi, pa spet po desni in tako naprej (slika 9). Vrtinci, ki so posledica izmeničnega »oblivanja« po levi in desni, nas ne zanimajo. Bistvena stvar je stalna menjava strani, po kateri mimo vrha gore potuje več zraka.

Natančno to se dogaja pri nastanku tona, ko igra mo flavto. Zrak pihamo v ozkem curku na rob ustnika. Tudi ta curek zraka ne potuje po obeh straneh roba tako, da bi bil nekako polovično razpolovljen. Kar naprej se menja delež zraka, ki pristane v flavti oz. ki ga pihnemo mimo. Bistvena razlika med oblaki in pihanjem v flavto je seveda frekvenca. Medtem ko menjava odločilne smeri obhoda pri gori traja najbrž nekaj minut, se pri flavti lahko zamenja tudi tisočkrat na sekundo.

Sedaj smo spregovorili o podobnosti, a kako bi si razložili vzrok za stalno nihanje curka zraka. Začnimo takole. V nekem trenutku malo več zraka zavije na eno stran. Tam se zaradi večje količine zraka hitrost zato zmanjša. Na drugi strani je hitrost ostala enaka. Toda kjer je manjša hitrost (in malenkost več zraka), je malo večji tlak. Zato se del zraka iz tega zastoja preusmeri na drugo stran. In zgodba se obrne.





Frekvenca zvoka, ki nastaja na robu ustnika, v kateremga pihamo zrak pri flavti, je odvisna tako od hitrosti curka zraka kot tudi od oddaljenosti ustnic od roba ustnika. Brez kakšne posebne misli na fiziko, le iz poskusov in učiteljevih nasvetov, to učenci flavte hitro spoznajo. Za višje tone poskrbijo tako, da ustvarijo nekoliko hitrejši curek zraka in se z ustnicami malo približajo robu ustnika. Po nekaj letih šolanja znajo oboje zares natančno uravnati, tako da z razmeroma malo »sape« (za lep ton ni potrebno veliko pihati, a do tega spoznanja se pride z vajo) igrajo flavto z lepim tonom. Seveda je v igri tudi spreminjanje napetosti ustnic in s tem odprtine, skozi katero pihamo zrak.

Celotna flavta deluje kot neke vrste povratni mehanizem. Lastna frekvenca stolpca zraka (in njeni celoštevilski večkratniki) v flavti je tisto, kar slišimo kot zvok flavte. Hkrati pa ravno to nihanje zraka povratno vpliva na frekvenco preusmerjanja zračnega curka ob robu ustnika, ki jo nekako stabilizira. A ko želi flavtist zaigrati drug ton, bo to stabilnost pokvaril ter »naciljal« novo frekvenco in to novo mu bo spet pomagal obdržati nihajoči zrak v flavti. Nekaj podobnega se dogaja pri vožnji kolesa. Vsi znamo kolesariti brez rok. Za stabilnost poskrbita kolesi. Potem se nekoliko nagnemo in zavijemo. In spet nam kolesi poskrbita za stabilnost.

### Še to in ono

Gotovo je v vsakem razredu vsaj en učenec ali dijak, ki igra prečno flavto. Res bi bilo škoda, da pouka ne bi popestrili z nekaj realistične fizike. Seveda je podroben opis fizike flavte tema, ki po zahtevnosti sodi v doktorske disertacije iz fizike; v šoli se pač zadovoljimo s približnimi razlagami.

Energija, ki jo flavta oddaja v obliki zvoka, je komaj odstotek energije, ki jo ima zrak (kinetična energija), ki ga pihamo. Tak izkoristek ni nič tragičnega, saj so naša ušesa zelo občutljiva za zvok. Če hočemo igrati bolj glasno, moramo povečati količino zraka, ki ga pihamo, kar največkrat pomeni tudi večjo hitrost. A večja hitrost bi pomenila tudi večjo frekvenco (in malenkost višji ton), kar pa preprečimo s tem, da z rahlim zasukom flavte zmanjšamo razdaljo med ustnicami in robom ustnika. Zato moramo za igranje flavte imeti dober posluš, da ustrezno popravljamo sicer majhne spremembe intonacije.

Pri kljunasti flavti je bolj nerodno. Kanal zraka je ves čas enako oddaljen od roba, na katerem niha curek zraka. Tudi zato je prečna flavta prevzela mesto sicer v baroku zelo razširjene kljunaste flavte. Novejša stilna obdobja so zahtevala večje razlike v glasnosti posameznih delov skladb, kar je bilo na prečni flavti mogoče doseči, ne da bi se znatno spremenila intonacija.

O eni stvari pa nismo spregovorili, a ta je najbrž vsem jasna. Dolžino stolpca zraka, ki niha v flavti, spreminjamo tako, da z zaklopkami pokrijemo luknje v flavti in tako je odločilna le dolžina flavte do prve odprtine. A teh odprtini je manj, kot lahko zaigramo tonov. Zato na koncu omenimo še prepričanje. Kar veliko prijemov na flavti je takih, ko z nekoliko močnejšim pihanjem ob nespremenjeni postavitvi prstov zazveni za oktavo višji ton.

Sedaj nekoliko razumemo delovanje prečne flavte. Morda pri prvem naslednjem poslušanju ali igranju nekoliko pomislite na to, kar ste ob branju tega članka spoznali. Potem se pa spet prepustite le tistemu posebnemu užitku, ki nam ga zmore nuditi samo glasba.

× × ×

## Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	8	13			
16			12		
14				12	
		9			17
			9		
			14		

× × ×

# Kresnička



BARBARA ROVŠEK, SAŠO ŽIGON, GREGOR TORKAR IN DUŠAN KRNEL

→ V šolskem letu 2015/2016 bo v organizaciji DMFA Slovenije potekalo drugo tekmovanje iz znanja naravoslovja za učence od 1. do 7. razreda, Kresnička. Že lani so pri eksperimentiranju in kasneje tekmovanju sodelovali učenci s polovice vseh slovenskih osnovnih šol, in želimo si, da bi jih letos privabili še več. Tako množična udeležba že v prvi sezoni nam postavlja visoka merila. Upamo, da bomo izpolnili pričakovanja sodelujočih: za začetek z dovolj zanimivimi poskusi. Dva poskusa (od skupno 12 za vse skupine) predstavljamo v tej številki Preseka. Vse poskuse najdete v razpisu tekmovanja na spletni strani <https://www.dmfa.si/NaOS/Razpis.html>.



SLIKA 1.

Pripomočki za poskus

## 6. in 7. razred / 1. poskus - Natega

**Pripomočki:** večja posoda, večji kozarec, manjši (ožji) kozarec, plastična cev (dolžina približno 1 m, premer odprtine približno 6 mm), merilo, štoparica, alkoholni flomaster, trajno-elastični kit (ali selotejp ali plastelin), podstavki (pručka, zabojček)

**Priporočilo.** Poskus opravljaj v kuhinji, kopalnici ali na vrtu, kjer ne narediš preveč škode, če vodo poliješ. Na slikah je voda obarvana, da se bolje vidi.

1. V posodo nalij vodo skoraj do vrha in jo postavi na podstavek (zabojček, pručko). V posodo potopi najprej samo eno krajišče cevke. To krajišče odprto drži pod vodo, da vanj ne zaide zrak. Potem previdno in postopoma potapljay cevko po dolžini tako, da jo povsem napolniš z vodo.



18

nadaljevanje  
na strani





15

nadaljevanje  
s strani

2. Ko je v celotni cevki voda (in ni v njej nobenih mehurčkov zraka) ter je vsa cevka pod vodno gladino, s prstom zatisni odprtino na enem krajišču cevke. Pazi, da v drugo odprtino ne zajameš zraka.



3. Krajišče cevke, ki ga zatiskaš s prstom, lahko zdaj dvigneš iz vode, pri čemer paziš, da ostane drugo krajišče ves čas pod vodno gladino. Voda ostane v cevki.



4. Zraven podstavka, na katerem je posoda z vodo, postavi velik kozarec. Krajišče cevke, ki si ga dvignil iz vode, namestiš nad velik kozarec in cevko odmašiš. Opazuj iztekanje vode iz cevke. Celoten postopek pretakanja vode na tak način se imenuje NATEGA. Spreminjaj višino, na kateri je krajišče cevke, kjer voda izteka. Ali višina, na kateri je to krajišče, vpliva na iztekanje vode? Kako?



5. Ugotovi, kako visoko iznad posode se lahko pne cevka, da voda še vedno lahko skozi izteka iz posode. Merilo pritrdiš na podstavek s trajno-elastičnim kitom. Ali lahko voda po cevi teče čez hrib?





6. Na majhnem ozkem kozarcu z alkoholnim flomastrom označi višino, do katere ga boš po cevki polnil z vodo iz posode. Meri čas, v katerem se kozarec napolni do oznake, v odvisnosti od višine, na kateri je krajišče cevke, kjer voda izteka. Razmisli, glede na kaj boš meril višino krajišča cevke.



- Krajišče cevke, iz katerega voda izteka, namesti v kozarec tako, da bo voda iztekala pri dnu kozarca, kot kaže slika. Opazuj, kako zdaj poteka pretakanje. Je kaj drugače kot prej? Meriš lahko tudi čas, v katerem se kozarec napolni do oznake – kot pri prejšnjem poskusu (ko si risal graf).
- Vodo pretakaj z natego med posodo in kozarcem, ki stojita na istem podstavku (dno kozarca in dno posode sta na isti višini). Krajišče cevke, iz katerega voda v kozarcu izteka, naj bo pri dnu kozarca. Kdaj se pretakanje ustavi? Kako bi z natego lahko pretočil več vode?
- Krajišče cevke, iz katerega voda izteka, namesti v kozarec tako, da bo na začetku pretakanja nad gladino vode v kozarcu in kasneje, ko se gladina vode v kozarcu dvigne, pod gladino vode. Lege nobenega od krajišč cevke med pretakanjem ne spreminjaj. Kdaj se pretakanje ustavi?
- Kdaj in kje je v uporabi tak postopek pretakanja kapljev, kot si ga spoznal pri tem poskusu?

Razmisli, preizkusi, poišči, vprašaj ...

- Ali voda iz cevke izteka pri poljubni višini, na kateri je odprto krajišče cevke? Kako visoko je lahko odprto krajišče, da voda izteka? Kdaj se tok prekine?
- Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da lahko voda po cevki izteka iz posode? Kako visoko je lahko krajišče cevke, ki vodo iz posode zajema? Ali lahko posodo izprazniš?
- Ali na iztekanje vode po cevki vpliva to, kako visoko se mora voda po cevki vzpeti (čez hrib)?
- Nariši graf, ki kaže, kako je čas, v katerem z natego po cevki napolniš kozarec, odvisen od višine, na kateri je odprto krajišče cevke. Običajno v koordinatnem sistemu prikažemo količino, ki jo (neodvisno) spreminjamo, na vodoravni osi, in drugo količino, ki je od te odvisna, na navpični osi. Kateri dve količini sta to v tem primeru?



[www.obzornik.si](http://www.obzornik.si)



## → 6. in 7. razred / 3. poskus – Pokovka

**Pripomočki:** kozarec ali skledica, 200 g koruznih zrn za pokovko, kuhinjska tehtnica, jeklena ponev (s pokrovom), (prenosni) električni kuhalnik, kuhalnica, skleda, metrski trak, risalni žebliček.

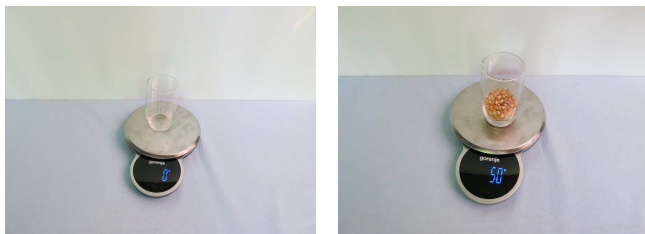


**SLIKA 2.**

Pripomočki za poskus

**Opozorilo.** Poskuse na štedilniku opravljaj v prisotnosti odrasle osebe. Pazi, da se ne dotakneš vroče ponve in kuhalne plošče. Pazljivo rokuj tudi z risalnim žebličkom. Pri poskusu ne smeš uporabiti ponve, prevlečene z neoprijemljivo plastjo (teflon), ker to plast s segrevanjem na previsoko temperaturo uničiš.

1. Odmeri 50 g koruznih zrn za pokovko. Lahko tudi manj (ali več), odvisno od velikosti posode, ki jo boš uporabil za pripravo pokovke.



2. Koruzna zrna stresi v ponev, ponev postavi na štedilnik. Med mešanjem koruzna zrna segrevaj. Ko se prvo zrno razpoči, posodo pokrij in med stresanjem posode počakaj, da se razpočijo še ostala zrna.



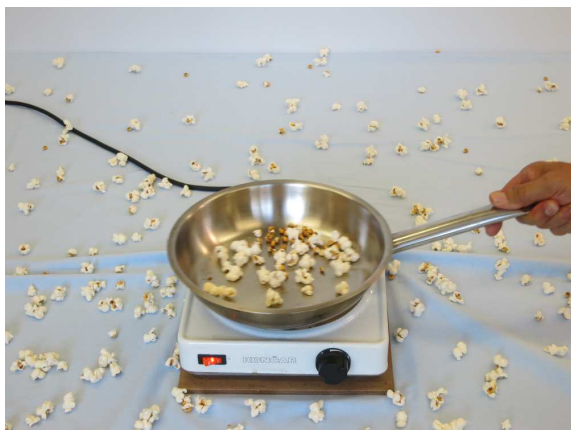
3. Ko je pokovka narejena, vso pretresi v skledo in jo ponovno stehtaj.



4. Drugo porcijo pokovke pripraviš v odprti ponvi. Stresi v ponev toliko koruznih zrn, da z njimi prekriješ dno ponve (kot na sliki 2). Če imaš prenosni kuhalnik, ga postavi na tla na sredini kuhinje. Če prenosnega kuhalnika nimaš, odstrani predmete v okolici štedilnika, na delovnem pultu zraven štedilnika naj bo prazen prostor.



5. Koruzna zrna segrevaj na kuhalniku v odprti ponvi in opazuj dogajanje. Posodo narahlo stresaj (premikaj jo sem in tja po kuhalni ploskvi), da se zrna ne oprimejo dna (in tam ne zažgejo). Zrna, ki ob razpoku odletijo iz ponve, pusti tam, kjer pristanejo. Ko koruzna zrna prenehajo pokati, izključi kuhalnik in z njega odstrani ponev.



6. Počakaj, da se kuhalnik ohladi. Potem previdno umakni še kuhalnik in pri tem pazi, da ne spremeniš lege razpocenih zrn pokovke.



7. V nadaljevanju boš preštel zrna, ki so med kuhanjem skočila iz ponve in pristala različno daleč. Razdaljo  $r$  meriš od točke, kjer je bila pri kuhanju sredina ponve (oziroma kuhalne plošče). Kot primer je na sliki prikazan pas, omejen z dvema krožnicama, v katerem so zrna, ki so v daljavo skočila več kot  $R_1 = 20$  cm in manj kot  $R_2 = 30$  cm.



8. Razdeli področje, kjer ležijo razpocena zrna koruze, na koncentrične pasove s širino 10 cm in s središčem v točki, kjer je bila pri kuhanju sredina kuhalne ploskve. Način, kaka boš to naredil, izberi sam. Zberi zrna, ki ležijo v posameznem pasu, ter jih preštej. Število zrn vpiši v razpredelnico.

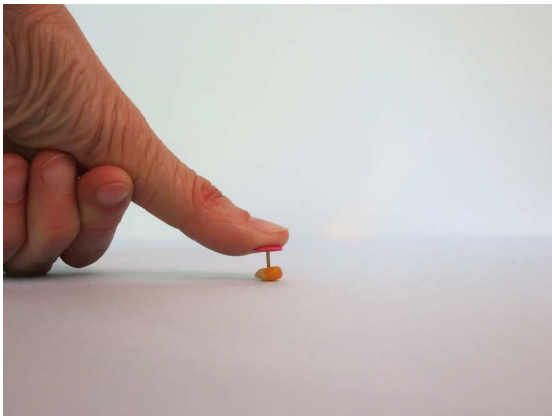


9. Nariši stolpčni diagram (histogram), ki kaže porazdelitev zrn pokovke po doseženih razdaljah  $r$ . Na vodoravno os nanašaj  $r$  in na navpično  $N$ .

pas	pas, kjer je $r$	število zrn $N$
1	manj kot 20 cm	
2	med 20 cm in 30 cm	
3	med 30 cm in 40 cm	
4	med 40 cm in 50 cm	
5	med 50 cm in 60 cm	
6	med 60 cm in 70 cm	
7	med 70 cm in 80 cm	
8	med 80 cm in 90 cm	
9	več kot 90 cm	



- 10. Ponovi poskus še enkrat (od koraka 4 do 9), le da tokrat predhodno lupine vseh zrn koroze prelu-knjaš z risalnim žebličkom.



Razmisli, preizkusi, poišči, vprašaj ...

- Zakaj se koruzna zrna ob segrevanju razpočijo in poskočijo?
- Primerjaj grafa, ki prikazujeta rezultate poskusa v obeh primerih, ko koruznih zrn nisi naluknjaj in ko si jih. Pojasni opažene razlike.
- Kaj se je v zrnju spremenilo, ko si v lupino izvrtal luknjico?
- Čez noč namoči koruzno zrno in ga vzdolžno pre-reži. Oglej si notranjo zgradbo zrna.
- Nekaj zrn namoči za daljši čas. Opazuj, kaj se z zrnjom dogaja.
- Kaj je naloga (funkcija) zrn pri korozi?
- Kako nastane koruzno zrno?
- Na internetu, v knjigi ali učbeniku poišči razlago o zgradbi koruznega zrna.
- Zakaj pred pečenjem zarežemo v ovojnico kosta-njevih semen (kostanjev)?
- Katere hranilne snovi prevladujejo v založnem tkivu koruznega zrna, beljakovine, lipidi, ogljikovi hidrati ali vitamini in minerali? Katero tkivo ime-nujemo založno?

× × ×

[www.obzornik.si](http://www.obzornik.si)

## Barvni sudoku

↓↓↓

→ V  $8 \times 8$  kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih  $2 \times 4$ ) nastopalo vseh 8 števil.

		6					1
8			2	4			
	7			2	6		
			8	3			
		3	7				2
4							3
2				6			8
	4					7	

REŠITEV BARVNI SUDOKU

2	7	5	1	3	8	4	6
8	4	3	6	1	7	5	2
6	3	1	7	5	2	8	4
4	2	8	5	7	3	6	1
7	1	4	3	8	6	2	5
5	8	6	2	4	1	7	3
3	6	7	4	2	5	1	8
1	5	2	8	6	4	3	7

→  
→  
→

× × ×

# Pripravljamo se na tekmovanje iz znanja astronomije



ANDREJ GUŠTIN

→ Tokrat predstavljamo nekaj nalog, ki bodo dobrodošle pri delu v astronomskih krožkih, pri izbirnih astronomskih predmetih in pri pripravah na tekmovanje iz znanja astronomije.

## Opazovanje Sonca

**Pripomočki:** ura, svinčnika, ravnilo, kotomer – geotrikotnik.

List papirja položi vodoravno. Nanj navpično postavi svinčnik in natančno nariši njegovo senco. Zapiši točen čas opazovanja oz. risanja sence. Na podlagi risbe izračunaj in na sliki označi smer sever-jug.

Zemljepisno širino in dolžino svojega opazovališča poišči sam.

**Namig:** Morda potrebuješ še časovno enačbo.

## Opazovanje Lune

Luno na sliki 1 opazuj z dvogledom ali majhnim teleskopom. Na karto Lune:

- vriši potek terminatorja na Luni,
- napiši smeri neba,
- s križcem označi južni pol Lune,
- obkroži položaj kraterja Tycho.

## Mednarodna vesoljska postaja

Astronoma, ki sta drug od drugega oddaljena 24 km in na isti zemljepisni dolžini (v Sloveniji), sta posnela



SLIKA 1.

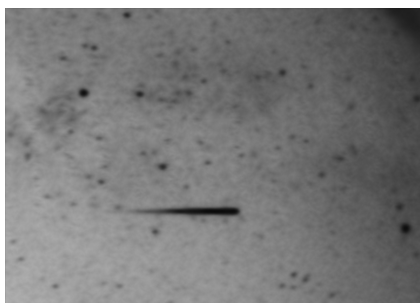
prelet Mednarodne vesoljske postaje (ISS), ki je na fotografijah (v negativu) vidna kot temna sled med zvezdami.

- Označi ozvezdja na sliki 2.
- Izračunaj polmer orbite in obhodni čas ISS.
- Oцени teoretično kotno velikost dolžine sledi ISS na sliki 3 in jo primerjaj s posneto dolžino sledi. Čas osvetlitve slike je 120 sekund.

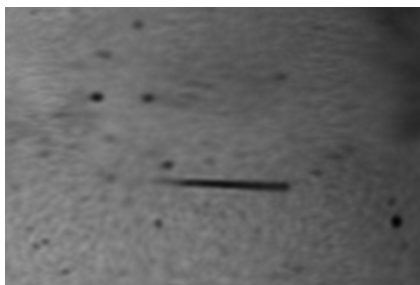
Pri računanju predpostavi:

- Orbita ISS je krožna.
- Kotna velikost slike je približno  $35^\circ \times 30^\circ$ .
- Kameranista začeli snemati povsem sočasno.
- Čas osvetlitve slike 2 je 120 sekund.





SLIKA 2.



SLIKA 3.

### Naloga

Meritve magnitud dveh zvezd v ozvezdju Kasiopeja z ozkopasovnimi filtri *BVRIJHKLMN* so podane v tabeli 1. Zelo verjetno na svetlobo obeh zvezd vpliva samo ekstinkcija difuzne medzvezdne snovi. Predpostavimo, da so bile meritve narejene nad ozračjem.

- Iz podatkov v tabelah 1 do 5 za obe zvezdi nariši grafa  $E_{X-V}/E_{B-V}$  v odvisnosti od  $1/\lambda_X$  za filtre *B, V, R, I, J, H, K, L, M, N*. Skozi točke ročno nariši najbolj prilegajočo se krivuljo. (Bodi pozoren, da je  $E_{X_V}/E_{B_V} \sim \text{konst}$ , ko gre  $1/\lambda_X \rightarrow 0$ ). Indeks *X* je spektralno območje posameznega filtra.  $E_{B-V}$  je barvni presežek.
- Z grafi, ki si jih dobil v prejšnji točki, oceni  $R_V$  in  $R_R$  za vsako od zvezd.

$$R_V = A_V/E_{B-V} \quad \text{in} \quad R_R = A_R/E_{R-I}$$

( $A_V$  je absorbcija v spektralnem območju *V*).

S temi rezultati izračunaj še oddaljenost spiralne galaksije IC 342 v Kasiopeji, ko jo zastira Rimska Cesta. Upoštevaj tudi, da je difuzna medzvezdna snov v galaksiji IC 342 podobna tisti v naši Galaksiji.

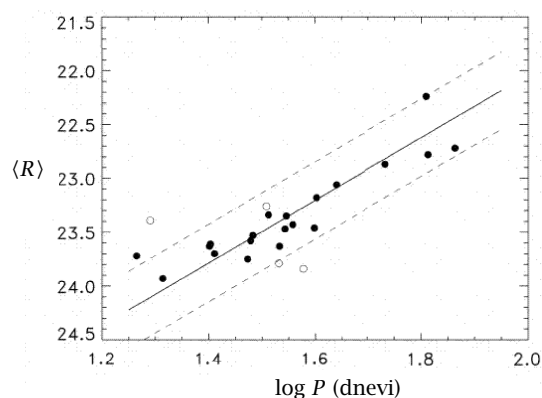
- Izračunaj oddaljenost galaksije IC 342 na podlagi diagramov odvisnosti period od magnitude 20 kefeid iz galaksije IC 342 (sliki 4 in 5) in predpostavko za zvezo perioda-izsev kefeid ( $P$  je perioda):

$$\langle M_R \rangle = -2,91 \left( \log \left( \frac{P}{\text{dan}} \right) - 1 \right) = -4,04$$

in

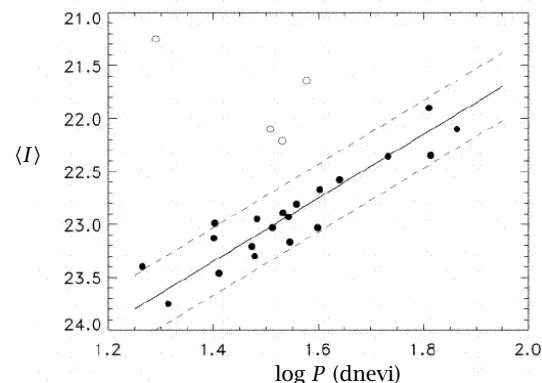
$$\langle M_I \rangle = -3,00 \left( \log \left( \frac{P}{\text{dan}} \right) - 1 \right) = -4,06$$

kjer sta  $\langle M_R \rangle$  in  $\langle M_I \rangle$  srednji vrednosti absolutne magnitude v filterih *R* in *I* kefeid v galaksiji IC 342.



SLIKA 4.

$\langle R \rangle$  je srednja vrednost navidezne magnitude v filtru *R*.



SLIKA 5.

$\langle I \rangle$  je srednja vrednost navidezne magnitude v filtru *I*.

Zvezda	MK tip	$\frac{B}{mag}$	$\frac{V}{mag}$	$\frac{R}{mag}$	$\frac{I}{mag}$	$\frac{J}{mag}$	$\frac{H}{mag}$	$\frac{K}{mag}$	$\frac{L}{mag}$	$\frac{M}{mag}$	$\frac{N}{mag}$
HD 4817	K3lab	8,08	6,18	4,73	3,64	2,76	1,86	1,54	1,32	1,59	-
HD 11092	K4II	8,66	6,57	-	-	3,10	2,14	1,63	1,41	1,65	1,44

	$\frac{(B-V)_0}{mag}$	
	II	lab/la
F0	-	0,15
G0	0,73	0,82
K0	1,06	1,18
K3	1,40	1,42
K4	1,42	1,50

	$\frac{(V-R)_0}{mag}$	$\frac{(V-I)_0}{mag}$	$\frac{(V-J)_0}{mag}$	$\frac{(V-H)_0}{mag}$	$\frac{(V-K)_0}{mag}$	$\frac{(V-L)_0}{mag}$	$\frac{(V-M)_0}{mag}$	$\frac{(V-N)_0}{mag}$
F0	0,20	0,31	0,36	0,51	0,60	0,64	0,65	0,82
G0	0,55	0,95	1,14	1,52	1,71	1,72	1,72	1,98
K0	0,95	1,59	2,01	2,64	2,80	2,87	2,79	3,13
K3	1,13	1,96	2,41	3,14	3,25	3,39	3,25	3,63
K4	1,20	2,13	2,59	3,37	3,44	3,62	3,46	3,84

	$\frac{(V-R)_0}{mag}$	$\frac{(V-I)_0}{mag}$	$\frac{(V-J)_0}{mag}$	$\frac{(V-H)_0}{mag}$	$\frac{(V-K)_0}{mag}$	$\frac{(V-L)_0}{mag}$	$\frac{(V-M)_0}{mag}$	$\frac{(V-N)_0}{mag}$
K0	0,60	1,03	1,23	1,72	1,94	1,97	1,90	1,92
K3	0,86	1,39	1,84	2,40	2,69	2,82	2,70	2,73
K4	0,96	1,61	2,16	2,77	3,05	3,22	3,08	3,02

	B	V	R	I	J	H	K	L	M	N
$\lambda_F/nm$	450	555	670	870	1200	1620	2200	3500	5000	9000

**TABELA 1.**

*BVRIJHKLMN* fotometrične meritve dveh zvezd v Kasiopeji

**TABELA 2.**

Srednje vrednosti indeksa  $(B-V)_0$  za izbrane spektralne tipe zvezd in izsevne razrede

**TABELA 3.**

Srednje vrednosti različnih infrardečih barvnih indeksov za nekatere tipe nadorjakinj

**TABELA 4.**

Srednje vrednosti različnih infrardečih barvnih indeksov za nekatere tipe orjakinj

**TABELA 5.**

Srednja vrednost valovne dolžine izbranih fotometričnih filtrov

× × ×

# Algoritem Apriori in povezovalna pravila



DAMJAN STRNAD

→ Morda ste se kdaj vprašali, na kakšen način trgovci uporabijo znanje o nakupovalnih navadah strank za izboljšanje kakovosti svoje ponudbe, posledično pa tudi za dvig prometa. Ko na blagajni v trgovini plačate za nakup, se seznam artiklov v vaši košarici zabeleži kot *transakcija* (transaction). Z zbiranjem transakcij si trgovec ustvari obsežno bazo nakupovalnih navad svojih kupcev, s pomočjo t. i. kartic zvestobe pa jih lahko vodi celo za vsako gospodinjstvo posebej. Poznavanje nakupovalnih navad lahko trgovec s pridom uporabi za oblikovanje akcijskih ponudb, ki bodo bolj verjetno pritegnile kupce. Prav tako lahko artikle, ki jih stranke pogosto kupujejo v paketu, trgovec na policah postavi blizu skupaj, kar bo strankam olajšalo nakup in hkrati pospešilo prodajo. V tem prispevku bomo opisali algoritem oz. metodo, s pomočjo katere lahko trgovec iz zbirke transakcij izlušči tovrstne koristne informacije. Opisani postopki so uporabni tudi pri ugotavljanju navad uporabnikov v drugih situacijah, ki omogočajo beleženje neke vrste transakcij (npr. hranjenje brskalnih navad uporabnikov svetovnega spleta za prikazovanje reklam).

Označimo s  $\mathcal{T}$  seznam vseh zabeleženih transakcij. Posamezna transakcija  $T_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, m$ , je množica *postavk* (items), t. j.  $T_i = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_i}\}$  za  $x_i \in X$ , kjer je  $X = \{x_i; i = 1 \dots n\}$  množica vseh možnih postavk. V primeru nakupovalne košarice je npr. postavka posamezen tip kupljenega artikla (dva ali več enakih artiklov štejemo kot eno postavko). Prvi korak, ki ga lahko izvedemo pri obdelavi  $\mathcal{T}$ , je is-

kanje *pogostih množic postavk* (frequent itemsets), t. j. stvari, ki jih pogosto kupujemo skupaj. Pogostost neke množice postavk  $S$  je določena kot delež transakcij v  $\mathcal{T}$ , pri katerih  $S$  nastopa kot podmnožica. Tak delež imenujemo *relativna podpora* (relative support) množice postavk in ga bomo označevali z  $r_S$ . Formalno bi to lahko zapisali kot

$$r_S = \frac{|\mathcal{T}_S|}{|\mathcal{T}|},$$

kjer je  $\mathcal{T}_S = \{T_i \in \mathcal{T} | S \subset T_i\}$ . Vrednost v števcu je velikost množice  $\mathcal{T}_S$  in se imenuje *podpora* (support) za množico postavk  $S$ .

Množica postavk je pogosta, če je njena podpora enaka ali večja od določene vnaprej postavljene meje  $r_{\min} \in (0, 1)$ . Pojasnimo to s preprostim zgledom, v katerem množico vseh postavk  $X$  sestavlja pet artiklov, ki jih bomo označevali s črkami od  $a$  do  $e$  (bralec si lahko predstavlja, da  $a$  pomeni *ananas*,  $b$  *banane* itd.). Podana naj bo naslednja zbirka  $\mathcal{T}$  desetih transakcij:

Transakcija	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$T_1$	x	x			x
$T_2$	x	x	x		
$T_3$		x	x		x
$T_4$		x			
$T_5$	x	x		x	x
$T_6$	x		x		
$T_7$			x	x	
$T_8$		x			x
$T_9$	x		x		x
$T_{10}$	x	x			x

V tabeli oznaka 'x' v določenem stolpcu in vrstici pomeni, da je pripadajoči artikel prisoten v ustrezni transakciji. Tako lahko npr. transakcijo  $T_1$  zapišemo kot  $T_1 = \{a, b, e\}$ .



Iskanje pogostih množic postavk z grobim pristopom bi pomenilo pregledovanje vseh nepraznih podmnožic množice  $X$ . Za množico postavk  $S = \{a, b, c\}$  bi tako ugotovili, da je njena relativna podpora enaka  $r_{\{a,b,c\}} = 0.1$ , saj se artikli  $a$ ,  $b$  in  $c$  skupaj nahajajo samo v eni ( $T_2$ ) izmed desetih transakcij. V nadaljevanju bomo zaradi preglednosti množice postavk zapisovali v strnjeni obliki, npr.  $abd \equiv \{a, b, d\}$ .

Število nepraznih množic postavk pri  $n$  postavkah je enako  $2^n - 1$  (t.j. moč potenčne množice  $\mathcal{P}(X)$  brez  $\emptyset$ ), zato je časovna zahtevnost grobega pristopa eksponentna. V zgornjem primeru s petimi postavkami je grobi pristop še izvedljiv, v realnih situacijah z več 100 ali 1000 artikli pa bi bilo pregledovanje celotne potenčne množice praktično neobvladljivo. Algoritem *Apriori* je preprosta izboljšava grobega pristopa, ki potrebno število pregledanih množic postavk zmanjša z upoštevanjem naslednjega dvodelnega pravila:

**Pravilo Apriori** a) Vse podmnožice pogoste množice postavk so pogoste in b) nobena nadmnožica ne pogoste množice postavk ni pogosta.

Označimo z  $\mathcal{F}$  seznam vseh pogostih množic postavk, ki jih algoritem *Apriori* poišče. Za vsako množico postavk bomo vodili tudi njeno relativno podporo, zato bodo elementi seznama  $\mathcal{F}$  pari oblike  $\langle S, r_S \rangle$ . Delovanje algoritma povzema naslednja psevdokoda:

---

**Algoritem 1 Apriori**( $\mathcal{T}, X, r_{\min}$ )

---

```

1:  $\mathcal{F} = \emptyset$  # inicializiraj prazen seznam pogostih množic postavk
2:  $\mathcal{D}_0 = \{\emptyset\}$  # inicializiraj delovni seznam množic postavk
3:  $j = 0$  # števec iteracij
4: ponavljaj
5:    $j = j + 1$ 
6:    $\mathcal{D}_j = \{Q \cup \{x\} \mid Q \in \mathcal{D}_{j-1} \wedge x \in X \setminus Q\}$ 
7:   odstrani iz  $\mathcal{D}_j$  vse množice  $S$ ,
     za katere velja  $\exists y \in S : S \setminus \{y\} \notin \mathcal{D}_{j-1}$ 
8:   izračunaj relativno podporo množicam postavk v  $\mathcal{D}_j$ 
9:   odstrani iz  $\mathcal{D}_j$  vse množice  $S$ ,
     za katere velja  $r_S < r_{\min}$ 
10:   $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{D}_j$ 
11:  dokler  $\mathcal{D}_j \neq \emptyset$ 
12:  vrni  $\mathcal{F}$ 

```

---

Algoritem za svoje delovanje uporablja delovni seznam  $\mathcal{D}$ , v katerem hrani pogoste množice postavk, najdene v zadnjem koraku. Za lažje sledenje algoritmu bomo z  $\mathcal{D}_i$  označevali stanje delovnega seznama po izvedbi  $i$ -te iteracije zanke. V prvi iteraciji algoritem *Apriori* poišče pogoste množice posameznih postavk in jih v kasnejših iteracijah razširja. Pri vsakem nadaljevanju iskanja algoritem upošteva prvi del prej zapisanega pravila v koraku 7, kjer obdrži samo tiste razširjene množice postavk, ki ne vsebujejo nobene nepogoste podmnožice. Drugi del pravila algoritem upošteva v koraku 9, kjer iz nadaljnje obravnave izloči vse nepogoste množice postavk, saj tudi nobena njihova nadmnožica ne more biti pogosta.

Delovanje algoritma demonstrirajmo na prejšnjem primeru za  $r_{\min} = 0.3$ . Po začetni inicializaciji algoritma med izvajanjem prvega cikla zanke tvori naslednje množice postavk z njihovimi relativnimi podporami:

$S$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$r_S$	0.6	0.7	0.5	0.2	0.6

Množico postavk  $\{d\}$  algoritem v koraku 9 odstrani, ker nima zadostne podpore, tako da ob zaključku prve zanke velja

- $\mathcal{D}_1 = \{a, b, c, e\}$  in  $\mathcal{F} = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.5 \rangle, \langle e, 0.6 \rangle\}$ .

V naslednji iteraciji algoritma v koraku 6 vsako od množic postavk iz  $\mathcal{D}_1$  razširimo na vse možne načine z eno dodatno postavko. Iz tako dobljenega delovnega seznama  $\mathcal{D}_2$  sproti izločimo podvojene množice postavk (npr.  $\{a\} \cup \{b\}$  in  $\{b\} \cup \{a\}$ ), v koraku 7 pa še tiste, katerih podmnožice niso v  $\mathcal{D}_1$  (vse kombinacije s postavko  $d$ ). Po izračunu relativne podpore dobimo

$S$	$ab$	$ac$	$ae$	$bc$	$be$	$ce$
$r_S$	0.4	0.3	0.4	0.2	0.5	0.2

Zaradi prenizke podpore tokrat izločimo množici postavk  $bc$  in  $ce$ , tako da je stanje seznamov po zaključku druge iteracije algoritma naslednje:

- $\mathcal{D}_2 = \{ab, ac, ae, be\}$  in  $\mathcal{F} = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.5 \rangle, \langle e, 0.6 \rangle, \langle ab, 0.4 \rangle, \langle ac, 0.3 \rangle, \langle ae, 0.4 \rangle, \langle be, 0.5 \rangle\}$ .





V tretji iteraciji algoritma Apriori računamo podporo samo še za množico postavk  $abe$ , saj je edina, katere vse podmnožice so v  $\mathcal{D}_2$ . Z relativno podporo  $r_{abe} = 0.3$  množica postavk  $abe$  izpolnjuje pogoj za obstoj v seznamu  $\mathcal{D}_3$ . V četrti iteraciji algoritma pogoja v koraku 7 ne izpolni več nobena razširitev množice postavk  $abe$  in algoritem se zaključi. Končni seznam pogostih množic postavk je tako

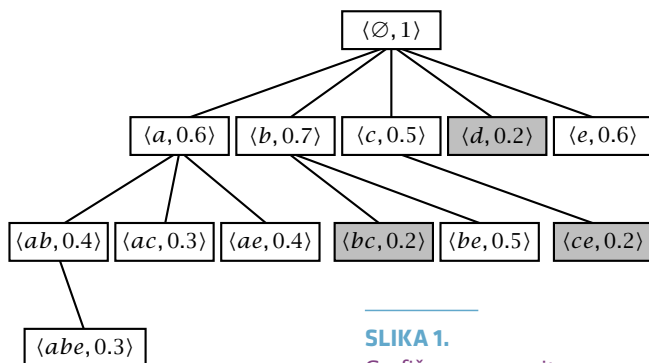
- $\mathcal{F} = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.5 \rangle, \langle e, 0.6 \rangle, \langle ab, 0.4 \rangle, \langle ac, 0.3 \rangle, \langle ae, 0.4 \rangle, \langle be, 0.5 \rangle, \langle abe, 0.3 \rangle\}$ .

Delovanje algoritma lahko ponazorimo tudi grafično z drevesom, kakršno je za naš primer prikazano na sliki 1. Algoritem Apriori začne v korenu in drevo razvija po nivojih. Vsa vozlišča, obarvana s sivo, predstavljajo nepogoste množice postavk, ki se odstranijo v koraku 9. Izmed vozlišč sinov vsakega vozlišča starša so zaradi preglednosti prikazana samo tista, ki jih ne odstranimo v koraku 7.

Računska zahtevnost algoritma Apriori je v najslabšem primeru še vedno eksponentna, vendar v realnih primerih število pogostih množic postavk z nivoji drevesa hitro upada, zato je praktična časovna zahtevnost običajno precej manjša.

Pridobitev seznama pogostih množic postavk je ponavadi samo prvi korak do praktične uporabe teh informacij. Iz pogoste množice postavk  $Z_i \in \mathcal{F}$  lahko izpeljemo eno ali več *povezovalnih pravil* (association rules) oblike  $P_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow Y_{i,j}$ , kjer  $X_{i,j} \subset Z_i$  in  $Y_{i,j} = Z_i \setminus X_{i,j}$ . Veljavnost posameznega pravila  $P_{i,j}$  izražamo z *zaupanjem* (confidence)  $c_{i,j}$ , ki se izračuna po naslednji enačbi:

- $c_{i,j} = C_{X_{i,j} \rightarrow Y_{i,j}} = \frac{r_{Z_i}}{r_{X_{i,j}}}$ .



**SLIKA 1.**  
Grafična ponazoritev delovanja algoritma Apriori

Pogosto določimo prag zaupanja  $c_{\min} \in (0, 1)$  in obdržimo samo pravila s  $c_{i,j} \geq c_{\min}$ . Takim pravilom rečemo, da so *zanesljiva* (strong). S povezovalnim pravilom  $P$  in pripadajočim zaupanjem  $c$  izražamo verjetnost, da se bo v seznamu, ki že vsebuje množico postavk  $X$ , pojavila tudi množica postavk  $Y$ , npr. da bo kupec ob artiklih  $X$  kupil še artikla  $Y$ . S pomočjo takšnih pravil lahko trgovec oblikuje politiko akcijskih cen (npr. zniža ceno samo artiklom  $X$ , ker pričakuje, da bo kupec potem kupil še neznižane artikla  $Y$ ) ali postavitev artiklov na policah (npr. postavi artikla  $Y$  blizu artiklov  $X$ , da vzpodbudi večji nakup).

Izčrpno iskanje vseh zanesljivih povezovalnih pravil lahko optimiziramo s preprosto izboljšavo. Ko izpeljemo povezovalna pravila iz pogoste množice postavk  $Z$ , pričnemo z maksimalno podmnožico  $X$ . Če po izračunu zaupanja ugotovimo, da  $c_{X \rightarrow Y} < c_{\min}$ , potem lahko iz nadaljnje obravnave izločimo vse podmnožice od  $X$ . Za vsak  $W \subset X$  namreč velja  $r_W \geq r_X$  in posledično  $c_{W \rightarrow Z \setminus W} \leq c_{X \rightarrow Z \setminus X}$ .

Poiščimo zanesljiva povezovalna pravila za naš primer, če je  $c_{\min} = 0.75$ :

- $P_1 : a \rightarrow b$  z zaupanjem  $c_1 = \frac{0.4}{0.6} = 0.67$
- $P_2 : b \rightarrow a$  z zaupanjem  $c_2 = \frac{0.4}{0.7} = 0.57$
- $P_3 : a \rightarrow c$  z zaupanjem  $c_3 = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$
- $P_4 : c \rightarrow a$  z zaupanjem  $c_4 = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- $P_5 : a \rightarrow e$  z zaupanjem  $c_5 = \frac{0.4}{0.6} = 0.67$
- $P_6 : e \rightarrow a$  z zaupanjem  $c_6 = \frac{0.4}{0.6} = 0.67$
- $P_7 : b \rightarrow e$  z zaupanjem  $c_7 = \frac{0.5}{0.7} = 0.71$
- $P_8 : e \rightarrow b$  z zaupanjem  $c_8 = \frac{0.5}{0.6} = 0.83$
- $P_9 : ab \rightarrow e$  z zaupanjem  $c_9 = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$
- $P_{10} : ae \rightarrow b$  z zaupanjem  $c_{10} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$
- $P_{11} : be \rightarrow a$  z zaupanjem  $c_{11} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$
- $P_{12} : a \rightarrow be$  z zaupanjem  $c_{12} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$

Od vseh izpeljanih pravil bi obdržali samo pravila  $P_8$ ,  $P_9$  in  $P_{10}$ . Zaupanja za pravili  $b \rightarrow ae$  in  $e \rightarrow ab$  nismo računali, potem ko smo ugotovili, da  $c_{11} < c_{\min}$ .

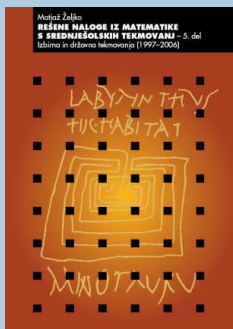
## Literatura

[1] M. J. Zaki in W. Meira Jr., *Data Mining and Analysis: Fundamental Concepts and Algorithms*, Cambridge University Press, 2014.



# Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju matematike in fizike. Za lažjo pripravo vam ponujamo nekaj zbirke tekmovalnih nalog z rešitvami, ki so na voljo pri DMFA-založništvu.



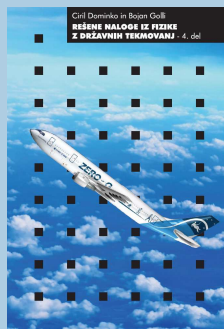
Matjaž Željko:

**REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSКИH TEKMOVANJ**

**Izb. in dr.ž. tekm. 1997-2006**

142 strani, format 14 x 20 cm

12,49 EUR



Ciril Dominko in Bojan Golli

**REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ - 4. del**

**Državna tekmovanja 1999-2013**

408 strani, format 14 x 20 cm





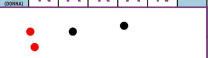





25,00 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirke nalog. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvu 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



	AMSTERDAM		OBSERVATORIJ
	GALAKSIJA		DREVESNA MEJA
	ORIKS MAT		METANURALSKE
	PREPLETENI		ECAS MESSO
	OSA AGENT		ARHIMEDAVES
	KASUBI KOMENZAL		TATRE ADIALT
	LAMARR MINATTI		ELEKTRO
	URBI OKEMIK AJDOVŠČINA		ASCONA ASTMA
	BIELČADKA KAO NINA		ANDREJA SOLONAN
	NETOPIRUSNJE METAL		INKASOTEŠJORA
	IRENA BOČALFIOPATRICK		MAXIBANKLANSON
	KARANOPLESKANO DARAKE		SKOPORITKA
	NAJBLIŽJITOČKI		MAKOSISAKOS
	TIRIJ DOKAZROČ		POSKAJUTA
	IVONANAVADA		ADSTRAT
	JOČRT		ITALIJANALO
	ASTENIKCOLIN		TECAJNIK
	TRKELJERIKAG		AGAEETNA

## REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 43/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke 43. letnika Preseka je **Čestitamo mladim astronomom**. Izmed pravih rešitev so bili izzrebani ŠPELA ŠKOF iz Medvod, KLARA GOLUBIČ iz Celja in JUSTINA PAVLIŠIČ iz Črnomlja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.



# Odsev



ALEŠ MOHORIČ

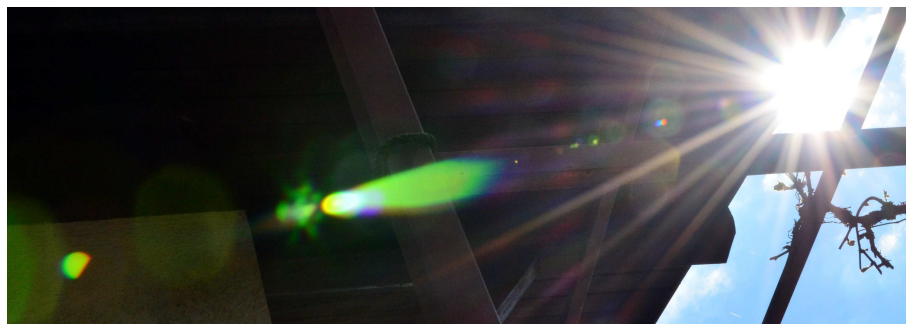
→ Na tokratni naravoslovni fotografiji opazimo poleg Sonca še niz svetlejših lis po diagonalah. Svetle lise so posledica odseva sončne svetlobe na lečah, ki sestavljajo objektiv.

Svetloba po snovi potuje z manjšo hitrostjo kot v vakuumu. Žarki so v homogeni snovi ravni. Ko svetloba doseže drugo prozorno snov, se deloma vanjo lomi, del pa se je na mejni ploskvi odbije: npr. na meji med zrakom in steklom z lomnim kvociantom 1,5 se npr. pri pravokotnem vpadu odbije 4% energije, ostalo pa gre skozi. Med prehodom skozi steklo svetloba prečka dve mejni ploskvi in odbije se približno 8% vpadne svetlobe. Odbita svetloba je šibkejša od vpadne in odboj svetlobe na prozornem telesu imenujemo tudi odsev.

Odseva običajno ne opazimo, ker je odbita svetloba šibkejša od svetlobe, ki prehaja skozi telo od zadaj. Odseva ne opazimo, ko podnevi zremo skozi okno. Soba je temnejša od okolice. Drugače je ponoči, ko je okolica temna. Odsev opazimo, če v sobi prižgemo luč. Odsev njene svetlobe je močnejši od svetlobe iz okolice in v steklu opazimo zrcalno podobo sobe. Na sliki 2 sta po diagonalah zlepljeni dve fotografiji pogleda skozi okno moje jedilnice. Fotografiji sta bili narejeni zvečer, takoj druga za drugo. Nad diagonalo je posnetek narejen iz zatemnjene sobe, pod diagonalo pa iz sobe s prižgano lučjo. Nad diagonalo vidimo zunanost, pod njo pa stene sobe

in kamero na stativu. Če bi podoben posnetek naredi podnevi, ne bi opazili razlike, saj je dnevna svetloba iz zunanosti močnejša od odsevane svetlobe luči v sobi.

Z odbojem svetlobe na meji med steklom in zrakom lahko pojasnimo tudi svetle lise na diagonalah fotografije na naslovnici. Najprej si oglejmo, kako nastane slika Sonca pri preslikavi z zbiralno lečo. Zaradi lažjega risanja obravnavamo plan-konveksno lečo. Sonce je tako daleč stran, da njegova slika nastane v goriščni ravnini objektiva. Enega od žarkov kaže slika 3 zgoraj. Vpadni žarek je narisano zeleno. Po vpadu na lečo se žarek zlomi in je narisano rdeče. Ta žarek se na zadnji strani leče delno odbije (rjavi žarek), delno pa lomi (vijolični žarek). Slika 3 spodaj kaže vzporedni snop žarkov, ki se lomijo na leči. Žarki se po lomu ne sekajo v eni točki, saj prehajajo skozi krogelno lečo, ki ima krogelno napako (sferna aberacija). Žarki se na zaslonu sekajo v nekoliko razpotegnjeni lisi, ki ima obliko komete in jo imenujemo koma. Koma je izrazita zato, ker žarki vstopajo na lečo pod velikim kotom. Rep kome je šibek in ga na fotografiji Sonca ne opazimo. Žarek narisano z rjavo se na sprednji ploskvi leče ponovno lomi in delno odbije (narisano modro). Modri žarek se na zadnji strani leče lomi in rumeni žarki, ki ustrezajo dvojemu odsevu na leči, se sekajo na podoben način kot vijolični žarki. Odsevni žarki se običajno ne sekajo v goriščni ravnini (odvisno od lastnosti leče in vpadnega kota), zato na zaslonu dajo neostro sliko Sonca, ki pa jo

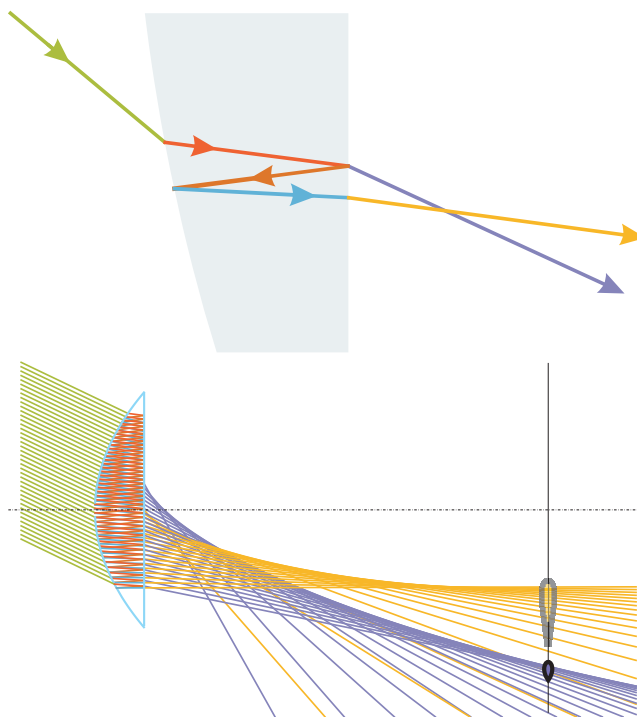


SLIKA 1.

Fotografija Sonca, na kateri so svetlejšje lise na diagonalah odsevi Sonca na lečah objektiva.


**SLIKA 2.**

V eno sliko zlepljeni fotografiji pogleda skozi šipo v mraku: nad diagonalo posnetek iz zatemnjene sobe, pod diagonalo posnetek iz osvetljene sobe. Na zgornjem delu vidimo zunanost, na spodnjem pa zrcalno sliko notranjosti sobe, ki nastane zaradi odseva svetlobe na sprednji in zadnji ploskvi šipe.


**SLIKA 3.**

Zgoraj: Potek žarka (zeleni), ki se lomi na leči (rdeča in vijolična) in prispeva k sliki, ter odseva (rjava in modra). Spodaj: Snop vzporednih vpadnih žarkov se seka približno v točki na zaslonu, ki je zaradi krogelne napake razpotegnjena v komo. Odsevani žarki (rumeni) se sekajo pred slikovno ravnino in dajo na zaslonu večjo liso z neostrimi robovi.

**Lomni kvocient  $n$ :** svetloba potuje v snovi  $n$ -krat manjšo kot v vakuumu.

**Odbojni zakon:** vpadni in odbojni žarek ležita v ravnini skupaj z vpadno pravokotnico in oklepata z njo enaka kota.

**Lomni zakon:** razmerje sinusa vpadnega kota in sinusa lomnega kota je enako razmerju lomnega kvocienta lomne snovi  $n_2$  in lomnega kvocienta vpadne snovi  $n_1$ .

**Odbojnost  $R$**  je razmerje med gostoto odbitega in vpadnega svetlobnega toka.

**Prepustnost** je enaka  $1 - R$ , če je absorpcija zanemarljiva. Odbojnost je odvisna od lomnih kvocientov vpadne in lomne snovi ter od vpadnega kota. Pri pravokotnem vpadu je odbojnost enaka

$$R = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}^2$$

zaslonka objektivna običajno zasenči in na fotografiji opazimo senco zenične odprtine. Žarkovna slika je narisana v ravnini, ki seka lečo v temenu. Žarki, ki vpadajo v to ravnino pod kotom, se po lomu ne sekajo. Zato se odsevi svetlega telesa na fotografiji nanizajo po diagonali, ki teče skozi sredino slike.

Pojav odseva leč pri fotografiji moti in ga odpravimo s primernimi senčniki, ki jih namestimo na objektiv. V nekaterih računalniško generiranih slikah odsev dodajo med procesiranjem slike zato, da ustvarijo vtis, da so posnetki narejeni s kamero.

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

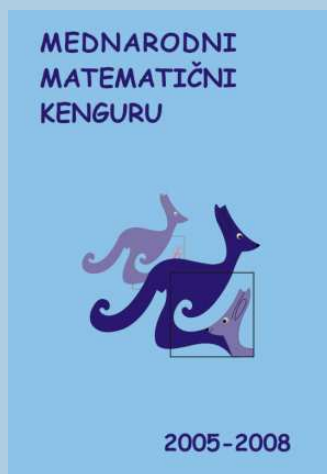
# Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996-2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002-2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011*.

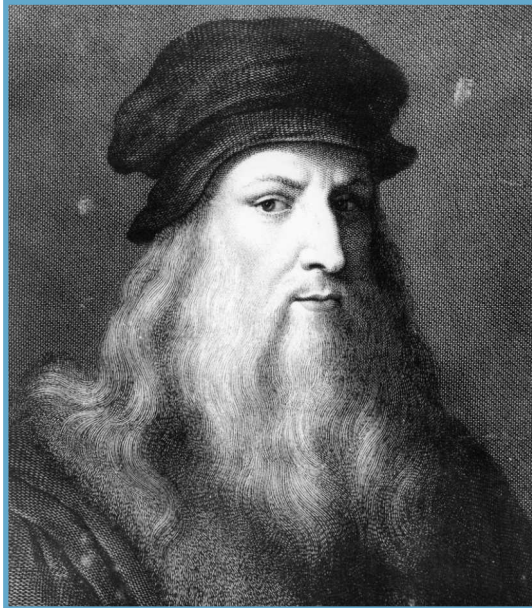
Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

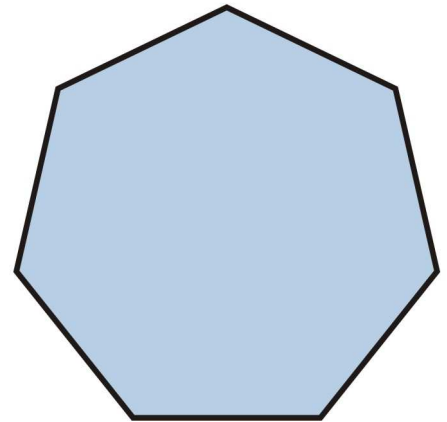
Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.




# Nagradna križanka



	AVTOR: MARKO BOKALIČ	BAGROVA ZAJEMALKA Z ZOBČI	MEHANIZEM ZA ZMANJŠANJE ŠTEVILA OBRATOV	JAPONSKI REZISER KUROSAVA	SOŠEDNJI CRKI	SLOVAŠKO-MADŽAR. MEJNA REKA, IPOLY	VRH GLAVE, KUPOLE ALI OBOKA	NEDKANJI FINSKI DIRKAC VATANEN	GLAVNO MESTO NEVADE (? CITY)	MAJHEN JONSKI OTOK, ZNAN PO ODISEJU	JED IZ ZELJA, KROMPIRA IN FIZOLA
	PRIVLAK MED TELESI ZARADI NJIHOVE MASE		5								
	TOPLOTNI IZMENJEVALNIK										4
	KANT-AVTOR SMOLAR					ZDRUŽENI ARABSKI ?					
	ORODJE ZA PREMIKANJE LONCEV V PEČI					ZADNJI DEL LADJE	2		UMETNO USNJE		
	GRŠKI MITIČNI LETALEC, DEDALOV SIN						PISATELJ HEMINGWAY	UDAV ŽENSKA NA ZAČAS. DELU V TUJINI			POKOJNI GRŠKI LADJAR (ARISTOTELES)
	LITVA					NESTABIL. DELEC				14	OLIVER HARDY
	VODA V TRDNEM STANJU					LJUBLJAN. SPOMINSKO POKOPAL.					RIMSKA LJUBLJANA
											NEVTRAL ZA MNOŽENJE SPANSKA NEZA
<b>dMFA</b>	DELJIVO JE LE Z 1 IN SAMIM SEBOJ	POVZROČITELJ POGAŠI NAPREDUJ. BOLEZNI	NIANSA, TANCINA	NAŠ IGRALEC (JANEZ)	SKANDIN. KRITINA PEVKA ALENKA SMID			NAŠ KAJAKAŠ (ANDREJ) VZHODNI SLOVAN			
	PRAZEN RAVEN PROSTOR PRED POSLOPJEM						ZDRAVNIK ZA DUŠEVNE BOLEZNI	METEO-ROLOG DELAVEC V LAKIRNICI			
	VRTNINA Z UŽITNIM CRNIM PODZEM. DELOM						UDAREC VODNEGA VALA OB OVIRO	11			FILO-ZOFSKI POJEM
	POLJSKI DIRIGENT WIT						OPOLDAN. POČITEK V SREDOZ. OBRAZNA KOST				NEKDANJI AVSTRILJ SMUČAR (TONI)
	NAŠ FILM. KRITIK IN TV VODITELJ (MARCEL)										
	OBZIDAN POMOL IZ HISNEGA ZIDU, IZZIDEK	6		NAŠ SLIKAR IN GRAFIK (VLADIMIR)	ZNESEK ZA PIJAČO V GOSTILNI, ZAPITEK						PTIČJA USTA
	AMERIŠKI KASKADER Z MOTORJEM KNIEVEL				PREDNIK ALBANČEV OZNAKA INDO-NEZIJE						AMERIŠKI REZISER (GEORGE)
	NAMESTNIK CERKVE-NEGA PREDSTOJNIKA					LJUDSKA PRITR-DILNICA		JUNAKINJA DARROW IZ FILMA KING KONG			IVAN VIDAV
	IRIDIJ		ČASOVNA ALI KOTNA ENOTA			DEL OBRAZA					SNOV Z NIZKO VREDNOSTJO pH
	ROMUNSKI PIANIST (RADU)		PASCAL		OKVARA NA FOTO-GRAFSKI EMULZIJI						MORJE MED CELINAMI
	BODEČA RASTLINA				DRN IN ?						SUROVINA ZA TEKOČA GORIVA



ODPADLI ALEKSANDRUSKI DUHOVNIK				GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	STAR CITROENOV AVTO	ŽIVALSKI ORGAN	NEKDANJA RUSKA ZADRŽNA ORGANIZACIJA	NATAŠA LACEN	JELKA Z "NAPAKO"	PRITOK SAVE IZ SEVERO-ZAHodne BOSNE	NIZOZEM. GROF. GOETHEJEV JUNAK (LAMORAL)	DLESEN (NAREČNO PRIMORSKO)
				ŠP. MESTO OB TAJU KAMNINA IZ SPRIJETIH DROBEČEV			1				3	
				KARDINAL, KI NADOMEŠČA PAPEŽA DO IZVOLITVE NOVEGA					ANG. FIZIK (WILLIS EUGENE) KOROZIJA NA ZELEZU			
	DRŽAVA OB NILU											
	NIZOZEMSKA				KMET, KI PRIPOVEDUJE O MARTINU KRPANU	EPOKA REKA IN DEPARTMA V NORMATIJI				ORANJE PREŠERNOVA HČI, AVTORICA SPOMINOV		
AMERIŠKI FIZIK (EDWIN HERBERT)	ODEBELJEN PODZEMNI DEL RASTLINE								NEKD. AVS. SMUČAR (HANS) CERKVENO GLASBILO			
	NAKLEPNI UBOJ						GLAVNA ARTERIJA					
	ANSAMBEL IZ TUHINJ. DOLINE						GR. MATEMATIK IN FIZIK					
								RAFAEL NADAL			ELEKTRONSKA NAPRAVA, KI PRETVORI SLIKO V DIGITALNO OBLIKO, OPTIČNI BRALNIK	
	KRATKOTRAJNA IZGUBA ZAVESTI	NA NJEJ SEDI SOVA V LJUDSKI PESMI	? , DVA, TRI	NASELJE V KOTLINI MED HRIBI V ZAHODNI SLOVENIJI	FR. MATEMATIK IN FIZIK (JOSEPH; VRSTE)		12		TON MED F IN G			KRAJ PRI RAKI PRI KRŠKEM
					ENAKI ČRKI				BOŠENSKI KUSTURICA			
					FR. SKLADATELJ DELIBES	ALUMINIJ		PAS KOPNINE V GDANSKEM ZALIVU				
HELENIN MOZ	9							GR. BOGINJA MLADOSTI				13
ENCIKLOPEDIČNI PRIROČNIK												
			BOJZLJIVEC									
			EG. BOGINJA Z JASTREB. GLAVO			KOŽNA BOLEZEN, RIBJA KOŽA	DELITEV TOČKE PRI SAHU	MONGOLSKI VLADAR			AZIJSKI VELETOK	
										GARI KASPAROV		15
								AVSTRIJ. IGRALKA (ELISABETH)				
								ANG. FIZIK (CHARLES)				10
					GL. MESTO TURKME-NISTANA					ŠKOTSKI TEKSTILNI VZOREC		
			7		NASELJE PRI ZADRU							
						EVROPSKI VULKAN						
						ZGORNJI DEL STOPALA						
		JEKLENA OMARICA ZA DENAR	MOŠKO SOCVETJE PRI KORUZI	JUŽNOAM. INDIJAN. LJUDSTVO	REKA NA SZ. POLJSKE		16					
								OTROŠKE OČI				
								100 m²				
		8										
					PRIPRAVA S CEVKAMA ZA DOLČ. VIŠINSKIH RAZLIK							
					RIMSKI CESAR							

**NAGRADNI RAZPIS**

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

[www.presek.si/krizanka](http://www.presek.si/krizanka)

ter ga oddajte do **1. decembra 2015**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

