

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 26 (1998/1999)

Številka 5

Strani 294-301

Roman Drnovšek:

ERDÖS-MORDELLOVA NEENAKOST

Ključne besede: matematika, ravninska geometrija, trikotniki.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/26/1381-Drnovsek.pdf>

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ERDÖS–MORDELLOVA NEENAKOST

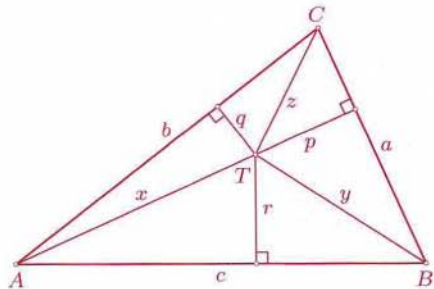
Leta 1996 preminuli Paul Erdős je bil izjemno plodovit matematik, saj je avtor okoli 1500 znanstvenih člankov. Ob njegovi smrti je več matematičnih revij pisalo o njem in njegovem delu. V slovenskem jeziku je v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, letnik 44 (1997), številka 1, izšel krajši zapis prof. A. Suhadolca. Bolj podrobno je Erdős predstavljen v glasilu Ameriškega matematičnega društva *Notices of the American Mathematical Society*, letnik 45 (1998), številka 1.

V tem prispevku se bomo ukvarjali z neenakostjo v trikotniku, ki jo je Erdős odkril leta 1932, vendar je ni dokazal. Spoznali bomo tudi nekaj iz nje izpeljanih neenakosti.

1. Naj bo T poljubna točka v trikotniku ABC ali na njegovem robu. Z x, y, z in p, q, r v zaporedoma označimo razdalje te točke do oglišč A, B in C, s, p, q in r pa razdalje do (nosilk) stranic $a = BC, b = CA$ in $c = AB$ (glej sliko 1). Paul Erdős je domneval, da za te razdalje velja neenakost

$$x + y + z \geq 2(p + q + r). \quad (1)$$

To domnevo je preskusil na precejšnjem številu trikotnikov, vendar je ni uspel dokazati. Nadalje je domneval, da v neenakosti velja enačaja le tedaj, ko je točka T središče enakostraničnega trikotnika ABC . Prvi dokaz neenakosti (1) je leta 1935 našel L. J. Mordell, zato se ta neenakost sedaj imenuje *Erdős-Mordellova neenakost*.



Slika 1.

Povzemimo dokaz te neenakosti po članku z naslovom *A short proof of the Erdős-Mordell theorem*, ki ga je v matematičnem mesečniku *American Mathematical Monthly* 104 (1997), str. 57–60, v spomin na Paula Erdösa napisal V. Komornik.

Dokažimo najprej, da velja neenakost

$$bq + cr \leq ax \quad (2)$$

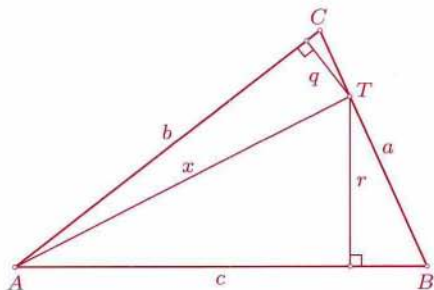
celo za poljubno točko T , ki leži znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Iz dokaza bo razvidno, da velja enačaja v (2) natanko takrat, ko točka T

leži na nosilki višine na stranico a . Če točka T leži na stranici a (glej sliko 2), potem (2) sledi iz očitne ocene za ploščino trikotnika ABC

$$P_{ABC} \leq \frac{ax}{2}$$

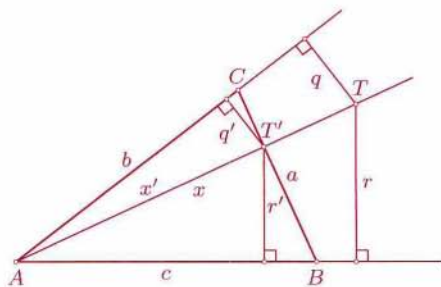
in zveze

$$P_{ABC} = P_{ATC} + P_{ABT} = \frac{bq}{2} + \frac{cr}{2}.$$



Slika 2.

Denimo sedaj, da je T poljubna točka znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Naj bo T' presečišče premice skozi točki A in T s stranico BC . Z x' , q' in r' zaporedoma označimo razdalje točke T' do oglišča A , stranice b in stranice c (glej sliko 3). Potem za točko T' velja neenakost (2), torej imamo $bq' + cr' \leq ax'$. Ker je zaradi podobnih trikotnikov $x' = kx$, $q' = kq$ in $r' = kr$ pri nekem $k > 0$, od tod sledi veljavnost neenakosti (2) tudi za točko T .



Slika 3.

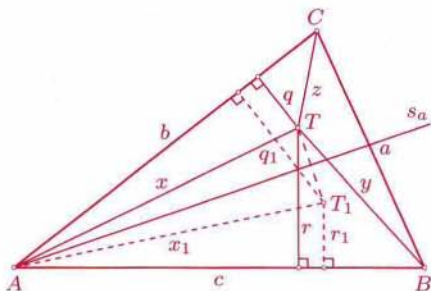
Pri dokazu Erdős-Mordellove neenakosti lahko predpostavimo, da je kvečjemu eno od števil p , q in r enako 0. Če je namreč T eno izmed oglišč trikotnika ABC , denimo $T = C$, potem veljata neenakosti $a \geq r$ in $b \geq r$. Ker je vsaj ena izmed teh dveh neenakosti stroga, je $a + b > 2r$, torej v tem primeru velja (1).

Vzemimo najprej, da je trikotnik ABC enakostraničen. Tedaj je neenakost (1) enostavna posledica neenakosti (2). Res, zaradi $a = b = c$ je $x \geq q + r$. Analogno veljata še oceni $y \geq r + p$ in $z \geq p + q$, ki ju dobimo s ciklično permutacijo trojic x, y, z in p, q, r . Če te neenakosti seštejemo, dobimo neenakost (1). Prav tako je iz dokaza razvidno, da v neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko točka T leži na vseh višinah trikotnika, torej le tedaj, ko je T središče enakostraničnega trikotnika ABC .

Denimo sedaj, da trikotnik ABC ni enakostraničen. Prezrcalimo točko T preko simetrale s_a kota $\sphericalangle BAC$ in dobljeno točko označimo s T_1 . Razdalje te točke do oglišča A , stranice b in stranice c zaznamujmo

zaporedoma z x_1 , q_1 in r_1 (glej sliko 4). Očitno je $x_1 = x$, $q_1 = r$ in $r_1 = q$. Ker točka T_1 leži znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu, lahko zanjo uporabimo neenakost (2), ki nam da neenakost $ax \geq br + cq$. Po analogiji veljata še neenakosti

$$by \geq cp + ar \quad \text{in} \quad cz \geq aq + bp.$$



Slika 4.

Iz vseh treh neenakosti dobimo oceno

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r.$$

Iz neenakosti $(u - 1)^2 \geq 0$, ki velja za poljubno realno število u , hitro sledi, da za $u > 0$ velja neenakost $u + 1/u \geq 2$, v kateri velja enačaj le pri $u = 1$. Torej so vsi trije izrazi v oklepajih večji oziroma kvečjemu enaki 2. Ker po predpostavki trikotnik ABC ni enakostraničen, sta vsaj dva izraza v oklepajih strogo večja od 2. Prav tako po predpostavki je kvečjemu eno od števil p , q in r enako 0. Zato velja stroga neenakost

$$x + y + z > 2p + 2q + 2r.$$

S tem je Erdős-Mordellova neenakost dokazana.

2. Če neenakost (2) pomnožimo s $\frac{p}{a}$, dobimo neenakost

$$px \geq \frac{b}{a}pq + \frac{c}{a}rp.$$

Analogno veljata neenakosti

$$qy \geq \frac{c}{b}qr + \frac{a}{b}pq$$

in

$$rz \geq \frac{a}{c}rp + \frac{b}{c}qr.$$

Če vse tri neenakosti seštejemo, dobimo

$$px + qy + rz \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)pq + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)qr + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)rp.$$

Ker za poljubno pozitivno število u (tako kot prej) velja neenakost $u + 1/u \geq 2$, smo dokazali še neenakost

$$px + qy + rz \geq 2(pq + qr + rp). \quad (3)$$

Z uporabo neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo iz (2) tudi oceno $ax \geq 2\sqrt{(bq)(cr)}$. Podobno veljata neenakosti $by \geq 2\sqrt{(cr)(ap)}$ in $cz \geq 2\sqrt{(ap)(bq)}$. Po množenju vseh treh neenakosti dobimo

$$xyz \geq 8pqr. \quad (4)$$

3. Naj bodo v_a , v_b in v_c zaporedoma višine na stranice a , b in c . Z R označimo polmer trikotniku ABC očrtane krožnice, z ρ pa polmer včrtane krožnice.

Ker očitno veljajo ocene $x + p \geq v_a$, $y + q \geq v_b$ in $z + r \geq v_c$, je

$$x + y + z + p + q + r \geq v_a + v_b + v_c.$$

Z uporabo neenakosti (1) od tod dobimo neenakost

$$\frac{x + y + z}{2} \geq \frac{v_a + v_b + v_c}{3}. \quad (5)$$

Ocenimo vsoto vseh višin navzdol! Po neenakosti med aritmetično in harmonično sredino je

$$\frac{v_a + v_b + v_c}{3} \geq \frac{3}{1/v_a + 1/v_b + 1/v_c}.$$

Ker velja

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a}{a v_a} + \frac{b}{b v_b} + \frac{c}{c v_c} = \frac{a + b + c}{2P_{ABC}} = \frac{1}{\rho},$$

dobimo tako neenakost

$$v_a + v_b + v_c \geq 9\rho$$

in z uporabo (5) še

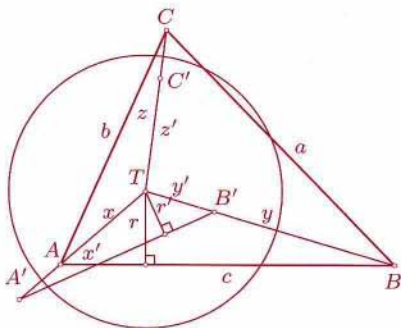
$$x + y + z \geq 6\rho.$$

V primeru, ko je točka T središče trikotniku ABC očrtane krožnice, torej velja

$$9\rho \leq v_a + v_b + v_c \leq \frac{9}{2}R,$$

kjer smo še enkrat uporabili (5). Od tod trivialno sledi znana neenakost $R \geq 2\rho$.

4. Predpostavimo, da je T poljubna točka v notranjosti trikotnika ABC . Preslikajmo poljubno točko S , ki ni enaka T , z inverzijo glede na krožnico s središčem v točki T in polmerom 1. Preslikana točka S' leži na poltraku, ki ima izhodišče v točki T in gre skozi točko S , za razdaljo do točke T pa velja $TS \cdot TS' = 1$. Z x', y' in z' zaporedoma označimo razdalje točke T do oglišč A', B' in C' , s p', q' in r' pa razdalje do stranic $B'C', C'A'$ in $A'B'$ (glej sliko 5). Po definiciji inverzije je



Slika 5.

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y} \quad \text{in} \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Ker zaradi $xx' = yy' = 1$ velja $y'/x' = x/y$ oz. $B'T/A'T = AT/BT$, sta si trikotnika ABT in $B'A'T$ podobna. Potemtakem velja $r/x = r'/y'$ oz. $r = r'xy$. Po analogiji torej veljajo enakosti

$$p' = \frac{p}{yz}, \quad q' = \frac{q}{zx} \quad \text{in} \quad r' = \frac{r}{xy}.$$

To pomeni, da velja naslednja trditev:

Če neka neenakost velja za razdalje x, y, z, p, q in r v poljubnem trikotniku ABC , potem velja tudi po substituciji

$$I : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}; \frac{p}{yz}, \frac{q}{zx}, \frac{r}{xy} \right).$$

Ko substitucijo I uporabimo na Erdős-Mordellovi neenakosti, dobimo neenakost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2 \left(\frac{p}{yz} + \frac{q}{zx} + \frac{r}{xy} \right)$$

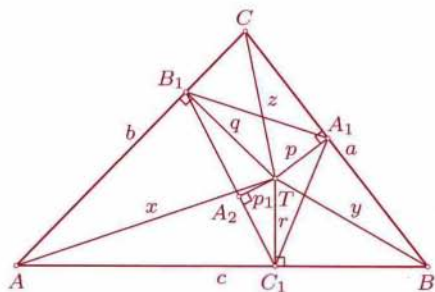
oziroma

$$xy + yz + zx \geq 2(px + qy + rz). \quad (6)$$

Če združimo neenakosti (3) in (6), imamo še

$$xy + yz + zx \geq 4(pq + qr + rp).$$

5. Tudi sedaj vzemimo, da točka T leži v notranjosti trikotnika ABC . Naj bodo A_1 , B_1 in C_1 zaporedoma pravokotne projekcije točke T na stranice a , b in c . Z x_1 , y_1 , z_1 , p_1 , q_1 in r_1 označimo zaporedstjo razdalje točke T do oglišč A_1 , B_1 in C_1 ter stranic B_1C_1 , C_1A_1 in A_1B_1 (glej sliko 6). Potem je $x_1 = p$, $y_1 = q$ in $z_1 = r$. Naj bo A_2 pravokotna projekcija točke T na stranico B_1C_1 . Ker



Slika 6.

je štirikotnik AC_1TB_1 tetiven, sta kota $\sphericalangle B_1AT$ in $\sphericalangle B_1C_1T$ enaka, saj sta obodna kota nad isto tetivo B_1T . Od tod sledi, da sta si pravokotna trikotnika B_1AT in A_2C_1T podobna. Zato je $p_1 = qr/x$ in analogno še $q_1 = rp/y$ ter $r_1 = pq/z$. S tem smo dokazali naslednje:

Če neka neenakost velja za razdalje x , y , z , p , q in r v poljubnem trikotniku ABC , potem velja tudi po substituciji oziroma transformaciji

$$V : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(p, q, r; \frac{qr}{x}, \frac{rp}{y}, \frac{pq}{z} \right).$$

Če uporabimo substitucijo V na Erdős-Mordellovi neenakosti, dobimo novo neenakost

$$p + q + r \geq 2 \left(\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y} + \frac{pq}{z} \right)$$

oziroma

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} \geq 2 \left(\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \right).$$

Če substitucijo V izvedemo v neenakosti (6), izpeljemo neenakost

$$pq + qr + rp \geq 2 \left(\frac{qrp}{x} + \frac{rpq}{y} + \frac{pqr}{z} \right)$$

oziroma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Če na zadnji neenakosti naredimo substitucijo I , dobimo še neenakost

$$\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \geq 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right).$$

Povzemimo! V poljubnem trikotniku ABC za razdalje x, y, z, p, q in r veljajo naslednje neenakosti

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2(p + q + r) \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &\geq 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ xy + yz + zx &\geq 2(px + qy + rz) \\ \frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} &\geq 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ px + qy + rz &\geq 2(pq + qr + rp) \\ \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} &\geq 2 \left(\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \right) \end{aligned}$$

Članek končajmo z naslednjo, nekoliko presenetljivo trditvijo:

Če iz trikotnika $A_1B_1C_1$ dobimo trikotnik $A_2B_2C_2$ na enak način, kot smo iz trikotnika ABC dobili trikotnik $A_1B_1C_1$, in če to ponovimo še enkrat, potem je zadnji trikotnik $A_3B_3C_3$ podoben prvotnemu trikotniku ABC .

Za dokaz te trditve izračunajmo, kaj dobimo, če trikrat zapovrstjo uporabimo transformacijo V . Ker je

$$V^2 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(\frac{qr}{x}, \frac{rp}{y}, \frac{pq}{z}; \frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy} \right),$$

je

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(\frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy}; \frac{p^2qr}{xyz}, \frac{pq^2r}{xyz}, \frac{pqr^2}{xyz} \right)$$

oziroma

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow (Kx, Ky, Kz; Kp, Kq, Kr),$$

kjer je

$$K = \frac{pqr}{xyz}.$$

Od tod sledi, da sta si trikotnika ABC in $A_3B_3C_3$ podobna s podobnostnim koeficientom K . Ker po (4) velja $K \leq 1/8$, so stranice trikotnika $A_3B_3C_3$ vsaj 8-krat manjše od stranic trikotnika ABC .

Roman Drnovšek
