

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Aleš Berkopec

Kvazistacionarni model prebojne poti v homogenem dielektriku

DOKTORSKA DISERTACIJA

mentor: prof. dr. Tomaž Slivnik

Ljubljana, 2006

Kazalo

Povzetek	4
Abstract	7
1 Uvod	9
1.1 Splošne značilnosti prebojev	10
Preboj v trdninah	10
Preboj v kapljevinah	11
Preboj v plinih	12
1.2 Preboj v atmosferi	14
1.3 Ločitev naboja v nevihtnem oblaku	17
Zajem iona (Wilsonov model)	18
Elastični trki	19
Trki sodre z ledenimi kristali	19
Cepitev vodnih kapljic	20
Workman – Reynoldsov efekt	20
1.4 Modeli rasti	21
2 Model izgradnje prevodnega kanala	24
2.1 Prevodniki	24
2.2 Izolator	26
2.3 Prevodni kanal	27
2.4 Žreb novega člena v prevodnem kanalu	30
2.5 Izračun naboja	33
Matrični sistem pri konstantni napetosti	33
Matrični sistem pri konstantnem naboju	36
2.6 Izračun matričnih elementov	37
Lastni prispevek kvadrata	37
Lastni prispevek daljice	37
Izračun ostalih matričnih elementov	38

2.7	Algoritem	40
3	Rezultati	41
3.1	Preizkusna primera	41
	Kapacitivnost ploščatega kondenzatorja	42
	Model krogelnega iskrišča	43
3.2	Preboji v krogelnem iskrišču	45
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 1000$	46
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 500$	49
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 250$	52
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 200$	55
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 160$	58
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 100$	61
3.3	Preboji v ploščatem kondenzatorju	63
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 5000$	64
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 2000$	67
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 1000$	70
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 500$	73
	Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 250$	76
3.4	Primer kontrolne datoteke (log file)	79
3.5	Analitična ocena	81
3.6	Analiza dejanskih strel	84
	Primer strele 1	86
	Primer strele 2	87
	Primer strele 3	88
	Primer strele 4	89
	Primer strele 5	90
4	Zaključek	91
4.1	Pomembnejši originalni prispevki	92
4.2	Izjava o avtorstvu	92

Povzetek

Disertacija je namenjena modeliranju dielektričnega preboja, kot običajno poteka pri nevihtni strelji. Mehanizem separacije naboja v oblaku, ki privede do strele, ni znan, zato v resnici še vedno ne vemo, kako strela nastane. Raziskovalci se problema lotevajo na različne načine, med katerimi prevladujejo meritve. V nalogi predstavljamo računski model in vrsto simulacij, s pomočjo katerih lahko strele primerjamo in ocenimo nekatere parametre v tistih nekaj stotink sekunde, ki privedejo do nastanka prevodnega kanala.

V uvodu se ukvarjamo z lastnostmi prebojev. Kratkemu pregledu splošnih lastnosti in načinov prebojev v trdnih snoveh, kapljevinah in plinih sledijo poglavja, ki so namenjena samo atmosferskim razelektritvam. Na podlagi meritev se večina strel zgodi v oblaku, od tistih, ki zadanejo zemljo, pa jih večina na zemljo prenese negativni naboj. Te strele nastajajo na poseben način: začnejo se s prevodnim kanalom, ki raste iz oblaka proti zemlji v približno petdeset metrskih delih, ki zrastejo v mikrosekundi, vsaki pa sledi približno petdesetkrat daljša pavza. Model temelji na naslednjih dveh domnevah: prvič, ker je prevodni kanal plazma, naj 50 μ s pavza zadošča, da se v tem času naboji na prevodnikih in kanalu prerazporedijo, in drugič, da je 10 ms, kolikor približno traja izgradnja celotnega prevodnega kanala, dovolj kratek čas, da so medtem lastnosti izolatorja v prvem približku konstantne. Med možnimi mehanizmi za separacijo naboja v oblaku poznamo induktivne, ki vključujejo zunanje električno polje, in neinduktivne. Med slednje sodijo trki sodre z ledenimi kristali, cepitev vodnih kapljic ali efekt vodnega slapa in Workman – Reynoldsov efekt s kemizmom primesi v vodi ob nastajanju ledene faze. Med induktivnimi sta najpomembnejša Wilsonov model in elastični trki. Nobeden od naštetih mehanizmov zadovoljivo ne razloži, kako nastanejo pogoji, ki so primerni za nastanek strele.

Postopek izračuna prevodnega kanala se uvršča med modele rasti. Na podoben način lahko modeliramo tudi rast snežink ali pronicanje tekočine v porozni material. Prvi poskusi so bili narejeni pred približno dvajsetimi leti na fiksni računski mreži, omogočila pa sta jih razvoj računalnikov ter njihova dostopnost. V vseh primerih gre za časovno in prostorsko precej zahtevne računske postopke.

Model prebojne poti sestavimo iz prevodnikov, postavljenih v homogeni dielektrik. Ustvarili smo tri tipe prevodnikov: krogle, kvadratne plošče in daljice. Prevodniki so razdeljeni na manjše dvo- ali enodimenzionalne dele (v primeru daljice), na katerih je naboj konstanten. Postavljeni so v izolator, ki prispeva v izračun *parameter* – posplošeno temperaturo kT . Ta določa verjetnost za preboj v dani smeri glede na smer električne poljske jakosti. Višja kot je temperatura, bolj je verjetnost za preboj neodvisna od smeri polja. Pri hladnih dielektrikih, ko $kT \rightarrow 0$, je najbolj verjetno nadaljevanje prebojne poti v smeri, ki najmanj odstopa od smeri vektorja \mathbf{E} . Prevodni kanal je sestavljen iz daljic – členov, od katerih se na vsakem koraku eden doda obstoječemu kanalu. Kanal se na vsakem koncu daljice lahko cepi v dva dela, tako da lahko nastane drevesna struktura. Izbira novega člena se izvede s slučajnim generatorjem števil in utežjo, ki jo določa sprememba energije, za katero bi se po izbiri danega člena zmanjšala energija sistema. Izračun neznanih nabojev na prevodnikih in členih prevodnega kanala izvedemo z rešitvijo ustreznega sistema enačb, katerega oblika je odvisna tudi od tega, ali so prevodniki priključeni na napetostni vir ali ne. Če je med prevodnikoma konstantna napetost, sta neznanki tudi potenciala prevodnikov, njuna razlika pa je znana. Vsi naboji na prevodnikih in kanalu so prav tako neznan. Pri modeliranju preboja z ohranjanjem naboja (brez napetostnega vira) je vsota vseh nabojev na prevodnikih ves čas enaka. Prevodni kanal jemlje naboj prevodniku, iz katerega raste, tako da je skupni naboj obeh enak začetnemu naboju prevodnika. Algoritem sestavljajo trije koraki: predpriprava, v kateri izračunamo začetno energijo sistema in iz nje posplošeno temperaturo kT , srednji del, kjer izračunavamo naboj na prevodnikih in prevodnem kanalu ter žrebamo in dodajamo nove člene h kanalu, ter zaključka, v katerem prevodnika spojimo preko prevodnega kanala, če je prišel dovolj blizu, tipično polovico dolžine člena.

Sledita testna primera. Zanesljivost modela smo preverili na postavitvah, ki sta analitično izračunljivi: na ploščatem kondenzatorju, ki smo mu določili kapacitivnost, in na krogelnem iskrišču, pri katerem smo sondirali potencial in določili smiselno vrednost za natančnost.

Rezultati kažejo, da je število cepitev kanala sorazmerno s temperaturo izolatorja, vendar poleg parametra W_E/kT zavisi tudi od geometrije. Kanal se pri krogelnem iskrišču cepi pri vrednostih $W_E/kT = 500$ ali manjših, pri ploščatem kondenzatorju pa pri vrednostih 1000 ali manjših. Preboji ob konstantnih napetostih ali nabojih se razlikujejo le pri majhnih vrednostih W_E/kT , ko se kanal močno cepi in je na njem relativno veliko naboja. V takih pogojih ima prevodni kanal manjše število členov, če je med prevodnikoma priključena napetost. Za vsakega od modelov spremljamo tudi spreminjanje naslednjih količin v odvisnosti od števila členov kanala: število cepitev, napetost, energijo elektrostatičnega polja, oddaljenost od začetne točke ter razmerje

med nabojem na prevodnem kanalu in nabojem na prevodniku, iz katerega kanal izhaja.

Če lahko pri gradnji kanala privzamemo, da je dogajanje lokalno in torej smer nadaljevanja kanala zavisi le od električnega polja na danem mestu, potem je lahko v pomoč tudi analitična ocena, ki jo je možno narediti za osamljeno točko. V poglavju, v katerem naredimo analitično oceno, smo izpeljali kumulativno verjetnost, da izbrani delež členov ne preseže določenega kota od smeri električnega polja. V ekstremnem primeru $kT \rightarrow \infty$ so vse smeri enakovredne, smer rasti kanala pa je neodvisna od smeri zunanega polja.

S pomočjo obeh modelov, analitičnega in numeričnega, ocenimo nekaj strel iz narave. Vse so bile posnete istega dne, vendar pri treh različnih nevihtah. Ocenjene vrednosti parametra W_E/kT so v območju med 50 in 2000. Za oceno spodnje meje uporabimo rezultate analitičnega modela, za zgornjo tiste iz numeričnega. Izkaže se, da v najboljšem primeru lahko parameter za dano strelo ocenimo na velikostni razred natančno. Sicer pa se iz rezultatov simulacij vidi, da "zanimivi" del parametričnega prostora – tisti, kjer se prevodni kanal cepi in nima več kot nekaj sto členov, – obsega približno dva velikostna razreda. Ugotovimo lahko naslednje: necepljeni prebojni kanali nastanejo pri $W_E/kT \gg 500$, koronske oblike preboja pri $W_E/kT \ll 500$, vmesne cepljene prebojne poti pa v območju $50 < W_E/kT < 5000$.

Abstract

the title of PhD thesis:

Quasi-static Model of Breakdown Channel in Homogeneous Dielectric

The big quest started in 1920's when Boys invented a photographic device that enabled thorough investigations of the lightning. The enthusiasm persisted for several decades but in 1985 Vonnegut stated his, and everybody else's, disappointment: 60 years of the research had not been able to answer the basic question, namely how and why the separation of the charge within a thundercloud occurs in sufficient enough intensity to initiate and sustain lightning. The thesis does not provide any new hypothesis about the charge separation. However, the growth of the stepped leader does justify the quasi-static approach used in this breakdown model.

In the introduction we deal with general aspects of the breakdown in solids, liquids and gases. We emphasize the role of the mean free path of the ions in gases as a reason behind the occurrence of the breakdown and state observational data for the negative cloud-to-ground lightning as the most common breakdown in the atmosphere. Some of the mechanisms of the charge separation that have been so far proposed and are summarized in the introduction are the following: Wilson's mechanism and elastic collisions as the inductive ones implying existence of the external electric field, and pellet-ice crystal collisions, breaking of water droplets (Lenard effect), and Workman-Reynolds effect as non-inductive. Simulations of the breakdown began in 1980's as a part of growth models. These have been used to simulate the growth of snowflakes, crystals and viscous fingers mainly on the fixed computational mesh with the finite difference method.

Our model consists of conductors, a conductive breakdown channel and a surrounding homogeneous dielectric. At the beginning of the simulation we compute the point with the highest potential difference on one of the conductors from where the channel starts to grow (a parent-conductor). The parts of the channel, streamers of the stepped leader, are tubes with a radius/length ratio according to the measurements of the stepped leader, e.g. 0.002. The length of the channel can be arbitrary, yet in present

simulations it is set between one tenth and one hundredth of the distance between the conductors. After each computational step, a streamer is added to the existing breakdown channel. In the computational step, we calculate a charge distribution on every conductor and the channel. The process is iterated until the channel reaches the conductor of different potential. Using the mathematical language, we solve a Laplace differential equation with Dirichlet boundary conditions for the conductors and the channel. The potential of the channel is equal to the potential of the parent-conductor. A breakdown model with a constant potential difference leads to similar governing equations as a model with a constant net charge. They are both discussed here. The ratio of the initial electric energy and the generalized temperature of the dielectric is the parameter W_E/kT that governs the growth of the channel. A typical breakdown for high values of kT occurs with a highly branched channel. If kT is close to zero the channel is not branched, because the probability for the continuation of the channel in the direction of the electric field is higher. In the limit $kT \rightarrow 0$ the streamer candidate closest to the direction of the field is the only candidate with a non-zero probability weight, as shown in the results section.

As concrete examples we consider breakdowns between two charged spheres and between two charged quadratic plates. The results show that the hot breakdown occurs for $W_E/kT < 50$ and the cold breakdown for $W_E/kT > 5000$. Between the two values, the branching of the channel is inversely proportional to kT . For practical purposes, it is of no importance whether there is a voltage source applied, unless the channel grows so big that the charge compared to the charge on the parent-conductor amounts to 50 % or more.

Before we apply the results of numerical simulations to realistic breakdown channels, an analytical model for an isolated streamer emerging from an arbitrary point in a homogeneous electric field is presented. We derive an equation for an angle as parameter of W_E/kT , within which the streamer is found with a 99 % probability, measured from the direction of the electric field. If the estimate of the angle and direction of the electric field can be obtained, a reverse procedure can give us an underestimate for the value W_E/kT . This procedure and the comparison with the simulation results lead to the estimation of the values of W_E/kT for five breakdown channels, which occurred during three thunderstorms in the summer of 2003. For each of the channels, the lower estimation and the upper estimation for W_E/kT differ one from the other by a factor of 10. The estimated values range from 50 to 100 for the lower estimation and from 200 to 2000 for the upper estimation.

Poglavje 1

Uvod

Čemu bi se kdorkoli še raziskovalno ukvarjal s problemom preboja dielektrika v 21. stoletju, marsikomu ni jasno, in to ne le laikom. Pri današnjem študiju to področje sodi nekako v začetne tečaje, kasneje zanj ni več časa, in z diplomo v žepu se zazdi, da je v tem nemodernem delu znanosti že "tako ali tako vse jasno". Vendar ni tako.

V elektrotehniških, fizikalnih ali strojniških priročnikih lahko najdemo podatke o dielektričnih trdnostih različnih materialov, recimo 3 MV/m za zrak, 18.5 MV/m za pleksi steklo itd. [1, 2] Te vrednosti so bile dobljene eksperimentalno in so orientacijske narave. Tudi o napaki ali velikosti odstopanj od izmerjenih vrednosti je težko govoriti, saj se preboj v snoveh lahko zgodi na različne načine. Odločilno vlogo imajo namreč tudi mikroskopske lastnosti materiala, kot so primesi, napake v strukturi ali geometrija, zato jih uporabljamo kot oceno za spodnjo mejo električne poljske jakosti v materialu, pri kateri lahko pride do preboja.

V laboratoriju imamo opravka le z eno neznanko, dielektrično trdnostjo. Napetost vira, geometrija elektrod in dielektrika so znane. V naravi pa obstaja sistem, pri katerem vemo zelo malo od tega: nevihtni oblak. V njem je okrog 500 tisoč ton vode, močno konvektivno dogajanje in vsa tri agregatna stanja vode s primesmi, zato ni presentljivo, da so kljub velikemu številu meritev (tudi ob tveganih letalskih poletih [3, 4]), le delno jasne razmere, ki pripeljejo do najbolj običajnega med vsemi preboji – nevihtne strele. Ni namreč jasno, kje je naboj, zakaj se prerazporedi in kako ga nastane dovolj, da povzroči tisto, kar se na planetu dogaja dlje, kot obstaja življenje.

Iskanje mehanizma o ločitvi (separaciji) naboja pri nevihti otežuje tudi dejstvo, da danes še nimamo dovolj kakovostnega merilca statične električne poljske jakosti, imamo pa merilne inštrumente, ki imajo vlogo indikatorjev in merijo s sprejemljivo natančnostjo le polja jakosti nad 2 kV/m. Vprašljivo je tudi, če smemo kot prebojno

trdnost privzeti vrednost za zrak. Vrednosti električnega polja v nevihtnem oblaku namreč ne presegajo nekaj 100 kV/m. [5]

Leta 2005 tako še vedno ne vemo, kaj je vzrok ločitve naboja v nevihtnem oblaku – in tudi po tej disertaciji ne bo nič bolje. Naslov pove, da neposredno ne iščemo mehanizma ločitve naboja, pokažemo pa lahko povezavo med posplošeno temperaturo dielektrika in izgledom kanala, izsledke pa uporabimo na petih strelah, katerih slike so nastale v Sloveniji poleti 2003. V uvodu najprej navajamo nekaj splošnih podatkov o prebojih, potem pa podrobneje obdelamo atmosferski preboj, tisti tip nevihtne strele, ki nam služi za podlago pri kvazistatični obravnavi, ter modele rasti, med katere sodi tudi modeliranje dielektričnega preboja. Vsak pač napada problem iz svoje smeri.

1.1 Splošne značilnosti prebojev

Glede na to v kakšnem sredstvu se preboji dogajajo, jih razdelimo na preboje v trdninah, kapljevinah in plinih. Vsem je skupno, da se za krajši ali daljši čas v sredstvu oblikuje prevodna pot. Po njej lahko naenkrat steče bistveno več naboja kot tik pred prebojem, tako da v praktičnih primerih privzamemo $dI/dt \rightarrow \infty$. V resnici vemo, da spremembe toka po času lahko dosežejo 10^{11} A/s ali več. [5]

Preboj v trdninah

Po načinu nastanka prevodne poti v trdnih dielektrikih ločimo med naslednjimi preboji: [6]

- **razdiralni (rušilni) preboj:**
je posebna oblika prevodnega preboja, torej preboja, pri katerem je v dielektriku dovolj nosilcev naboja, da med elektrodama ustvarijo prevodno pot. Pri razdiralnem preboju se nosilci naboja pojavijo po raztrganju medmolekulskih ali molekulskih vezi v dielektriku. Običajno ga opazimo pri tankih dielektričnih plasteh v močnem električnem polju, lahko tudi pri nizkih temperaturah (pod 300 K). V teh primerih pride do mehanskih poškodb dielektrika, ki so vidne tudi s prostim očesom.
- **termični preboj:**
če je v nehomogenem dielektriku nehomogena tudi specifična prevodnost, dobimo v različnih predelih dielektrika po velikosti različne izgubne gostote tokov, ki neenako segrevajo lokalne dele medija. Ker se prevodnost dielektrikov s temperaturo v splošnem povečuje, imamo opravka s pozitivno povratno zanko, pri kateri je

temperatura sorazmerna toku $T \propto I$,
tok sorazmeren prevodnosti $I \propto \gamma$,
prevodnost sorazmerna temperaturi $\gamma \propto T$,
kar vodi do preboja.

– **prevodni preboj:**

gibljivi ioni v dielektriku prispevajo k izgubnemu toku, ko je dielektrik v električnem polju. Če je električna poljska jakost dovolj velika, gibajoči se ioni na svoji poti ustvarjajo dodatne proste ione ob trkih z molekulami dielektrika. Ko je polje dovolj veliko in je teh ionov dovolj, skozi prevodnik (s) teče tako velik tok, da dielektrik ni več izolator temveč prevodnik.

– **elektromehanski preboj:**

mehanska okvara, ki ji sledi električna, se pojavlja pri velikih poljskih jakostih, vendar le v nekaterih snoveh, kot so mehki polimeri, na primer polietilen.

– **elektrokemični preboj:**

primesi in nečistoče, ki so v dielektriku v obliki ionov, prispevajo k izgubnim tokovom, kar, če so ti tokovi dovolj veliki, vodi do termičnega preboja. Dolgotrajna izpostavljenost dielektrika nečisti atmosferi se odraža v večji pogostosti elektrokemičnih prebojev.

– **preboj zaradi tvorbe mehurčkov:**

če so v dielektriku kapljevinske primesi, se v notranjosti oblikujejo votline, ki se raztezajo pod vplivom zunanjega električnega polja ali temperature. Obstaja možnost, da mehurčki oblikujejo prevodno verigo in tako vspostavijo prevodno pot med elektrodama.

– **koronski preboj:**

kadar hitri elektroni, ki nastanejo pri velikih poljskih jakostih v okolici elektrod ali v notranjih votlinah zaradi pojava korone, ustvarijo dovolj velike izgubne tokove med elektrodama, imamo opravka s koronskim prebojem.

Preboj v kapljevinah

– **preboj zaradi tvorbe mehurčkov:**

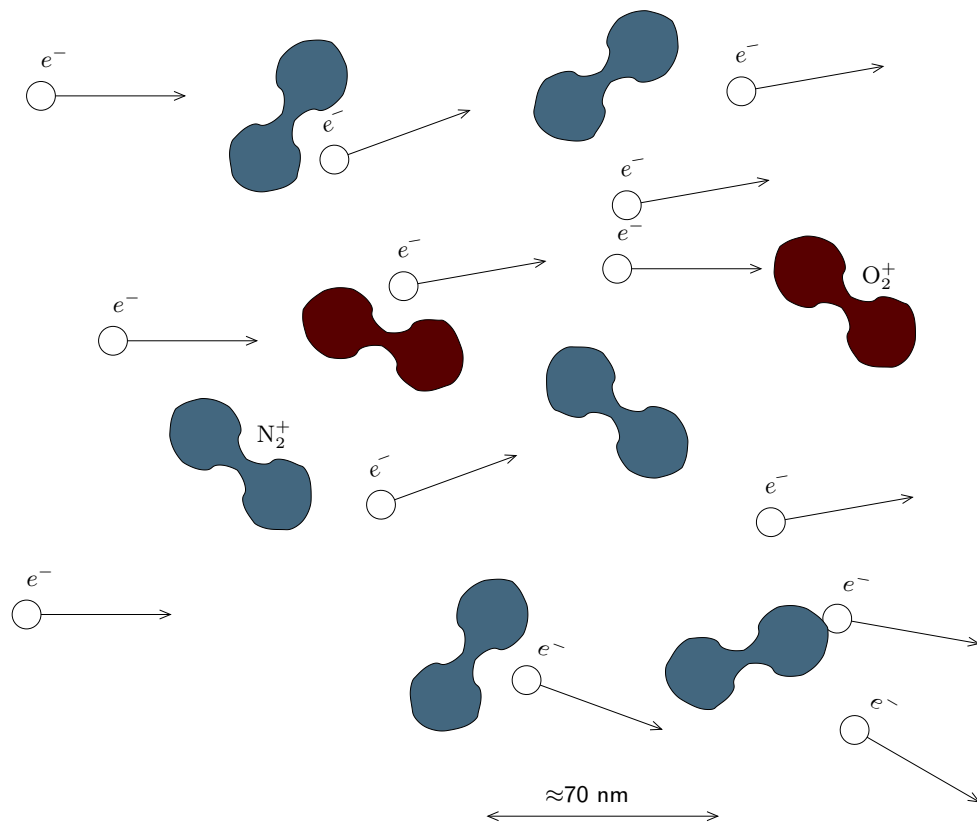
ekstremna električna poljska jakost lahko v kapljevini ustvari mehurčke. Ob primernih pogojih se mehurčki razvrstijo vzdolž silnic električnega pretoka, v njihovi okolici pa se tvorijo ioni. Take ionske verige so prevodne, povzročijo močnejšo ionizacijo okoliških molekul, zato električni tok hipoma strmo naraste, kar prepoznamo kot preboj.

– **preboj zaradi nečistoč:**

prevodna pot med elektrodama lahko skozi tekočine nastane tudi zaradi nečistoč, če imajo le-te ustrezne lastnosti in se v tekočini primerno razporedijo.

Preboj v plinih

Preboj v plinih se začne z ionizacijo molekul plina zaradi trkov s hitrimi elektroni (slika 1.1). Pri dovolj veliki električni poljski jakosti prosti elektroni pridobijo dovolj kinetične energije za ionizacijo, proces pa se lahko pospeši še s sekundarnimi elektroni, ki so jih primarni elektroni izbili iz molekul plina. Med elektrodama tako preskoči iskra, ki ob primernih pogojih naraste v oblačno strukturo ioniziranega plina z veliko tokovno gostoto, pri čemer sta elektrodi kratko sklenjeni.



Slika 1.1: Hitri elektroni ionizirajo molekule plina, na primer v zraku predvsem N_2 in O_2 , k procesu pa prispevajo tudi izbiti elektroni. Merilo na sliki ustreza povprečni prosti poti med molekulami v zraku. Nesorazmerno velike so na sliki narisane molekule, katerih velikost je okrog 0.35 nm, ter seveda prosti elektroni, za katere vemo, da so manjši od 10^{-20} m.

Prebojna napetost, ki zadošča za preboj v valjasti posodi plina, če jo priključimo na osnovni ploskvi, je sorazmerna produktu višine valja in tlaka $U_P = \alpha ph$. [6] Če za plin velja plinska enačba $pv = nRT$ (p je tlak, v prostornina, n število kilomolov plina, R Rydbergova konstanta in T absolutna temperatura), prostornina valja pa je $v = Sh$, kjer je S površina osnovne ploskve, dobimo

$$pv = pSh = nRT \implies ph = \frac{nR}{S}T,$$

torej je prebojna napetost sorazmerna temperaturi plina $U_P \propto T$. Tabela 1.1 podaja vrednosti energij za ionizacijo najpogostejših molekul v zraku.

ionizacijske energije	
$W_{N_2 \rightarrow N_2^+}$	= 15.8 eV
$W_{O_2 \rightarrow O_2^+}$	= 12.5 eV
$W_{Ar \rightarrow Ar^+}$	= 15.8 eV
$W_{Ne \rightarrow Ne^+}$	= 21.5 eV

Tabela 1.1: Ionizacijske energije za najpogostejše molekule in atome v zraku. [7, 1]

Ocenimo, kolikšno pot mora preleteti prosti elektron v zraku v prebojnih razmerah, da ionizira molekulo! Predpostavimo, da potrebuje prosti elektron za ionizacijo molekule enako energijo kot foton. Trk prostega elektrona z molekulo naj bo elastičen, ob tem pa se kinetična energija prostega elektrona porabi za izbitje vezanega elektrona – ionizacijo molekule. Na podlagi podatkov iz tabele 1.1 vzemimo, da elektron potrebuje okrog 15 eV za ionizacijo. To energijo dobi pri preletu 15 V napetosti, kar pri prebojnih 3 MV/m prebojne trdnosti ustreza razdalji 5 μm .

Po drugi strani lahko iz premerov molekul, temperature in tlaka ocenimo povprečno prosto pot \bar{l} molekul, za katero po kinetični teoriji plinov velja: [8]

$$\bar{l} = \frac{kT}{\pi\sqrt{2}(2r)^2p}.$$

Ker sta najpogostejši molekuli N_2 in O_2 približno enakih premerov, in sicer 0.35 nm, dobimo za \bar{l} pri normalnih pogojih ($p = 10^5$ Pa, $T = 273$ K) približno 70 nm, kar je skoraj stokrat manj, kot bi potrebovali za dosego zadostne energije pri električni poljski jakosti 3 MV/m. Iz kočljive situacije se lahko rešimo na dva načina: prvič, elektroni imajo precej manjši polmer, zato je njihova povprečna prosta pot \bar{l} večja, in drugič, del elektronov pred trkom z molekulo prepotuje 5 μm ali več, in če je ta delež elektronov dovolj velik, da povzroči dovolj sekundarnih, terciarnih itd. elektronov, je proces plazovit ter ga zaznamo kot preboj.

1.2 Preboj v atmosferi

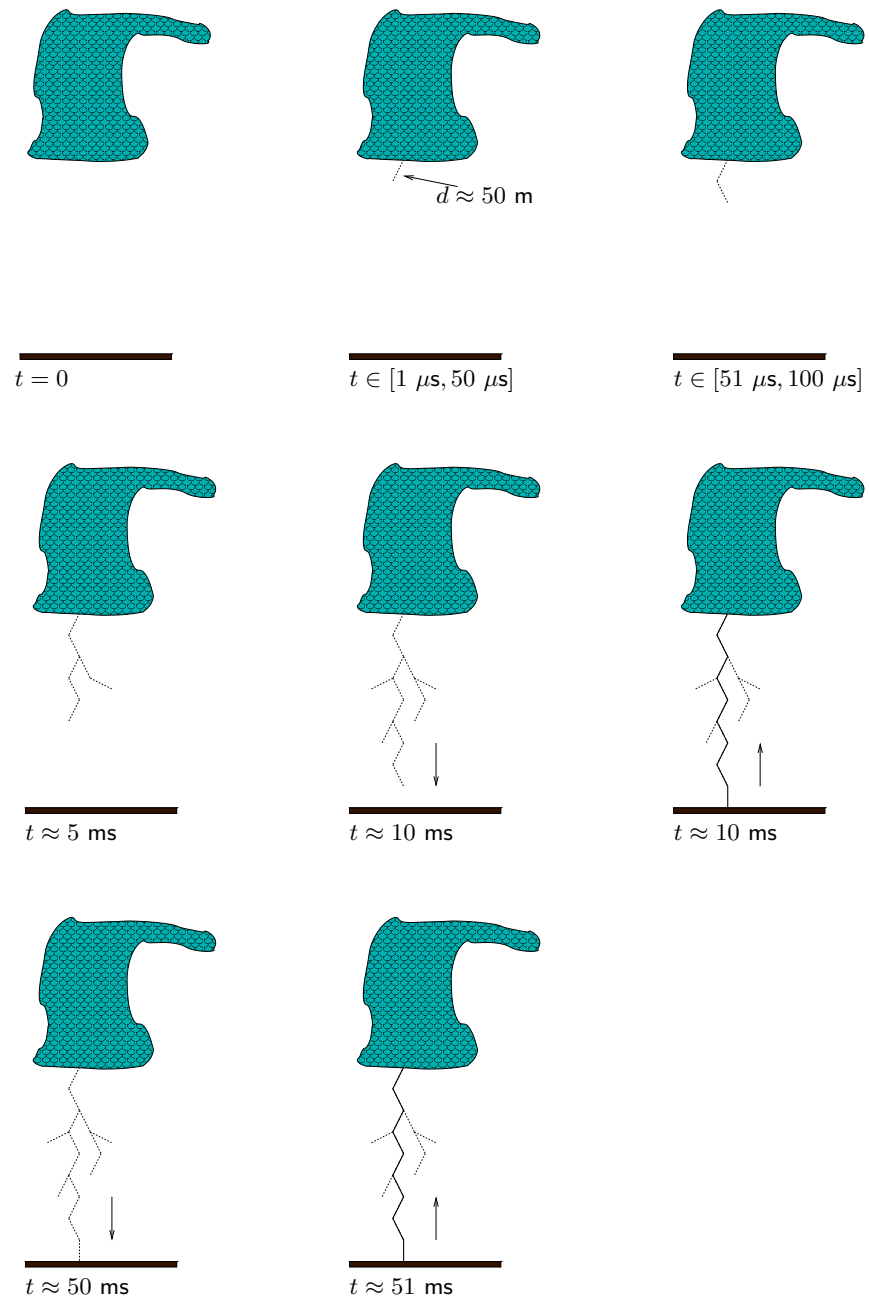
Med atmosferskimi preboji je najbolj pogosta nevihtna strela. Ostali preboji v atmosferi so korona, Elijev ogenj, suhi preboj v puščavah, vodena strela, kroglasta strela itd. Poleg vizualnih in slušnih efektov, jo spremljajo spremembe v električnem in magnetnem polju na površju zemlje in elektromagnetno valovanje v frekvenčnem območju nekaj deset kHz, s pomočjo katerega se je znanje o njej bistveno razširilo.

Večina nevihtnih strel se zgodi med različnimi deli nevihtnega oblaka, le del, tipično desetina razelektritev, nastane med oblakom in zemljo. Razmerje prebojev oblak–oblak in oblak–zemlja je odvisno od zemljepisne širine in je približno enako 3 v območju srednjih zemljepisnih širin ter 5–10 bliže ekvatorju. [9] Od tega jih večina udari med omejenim pozitivno naelektrenim delom na spodnjem koncu oblaka in negativno naelektrenim delom površja zemlje. Meritve kažejo, da lahko oblak približno opišemo kot električni dipol, s centrom negativnega naboja med temperaturnima izotermama -10°C in -20°C (to je na višini od 6 km do 8 km poleti in od 1 km do 3 km pozimi) ter pozitivnim delom v območju med -25°C in -60°C , kar ustreza bolj razpotegnjenemu območju nekje med 8 km in 16 km višine. [5]

Redki laboratorijski poskusi z elektrodami v zraku so pokazali, da je verjetnost za začetek negativno naelektrenega prevodnega kanala enaka na pozitivnem in negativnem delu prevodnega sistema. [4] Električna poljska jakost okrog 0.3 MV/m zadošča za preboj v homogenem polju, v nehomogenem polju pa manj. V tem primeru se pojavi začetek prevodnega kanala zaradi prostih elektronov, ki so v zraku vedno prisotni kot posledica naravne radioaktivnosti ali kozmičnih žarkov.

V tridesetih letih prejšnjega stoletja so bili znani prvi rezultati raziskav, ki so bolje pojasnili mehanizem celotnega procesa atmosferskega preboja. Ugotovili so, [9, 4, 3, 10] da se prevodna pot, z začetkom v negativnem oblaku, gradi postopoma, kot da bi si nosilci naboja v sunkih utirali pot skozi izolator in gradili prevodni kanal. Tak razelektritveni kanal je členjen (angl. stepped leader) in doseže površje v približno 10 ms. V trenutku, ko kanal doseže tla, švigne po prevodnem kanalu proti oblaku povratna, glavna strela (angl. return stroke, main stroke), ki prenese pozitivni naboj v oblak.

Ko je prevodni kanal od površja oddaljen med 5 m in 50 m, se združi s prevodnim kanalom iz nasprotne strani (glej sliko 1.2). Po približno 40 ms lahko sledi ponoven prenos negativnega naboja iz oblaka na zemljo s pikado strelo (angl. dart leader), kateri sledi nova povratna strela, ki doseže oblak približno 1 ms po začetku zadnjega prenosa negativnega naboja.



Slika 1.2: Razvoj atmosferskega preboja od začetka prebojnega kanala do povratnega udara. Procesna na zadnjih dveh prikazih v sliki (pikado strela in povratna strela) si lahko še večkrat sledita in določata kratnost strele. Med posameznimi pari je približno 40 ms razlike, med njima okrog 1 ms.

Povratno strela sestavljata pikado¹ strela in glavna strela, ki vedno nastopata v paru. Število povratnih strel določa kolikokratna je strela. Približno četrtnina strel je enojnih, ostanek pa predstavljajo večkratne strele, med katerimi so opazili največ 42-kratno strela. Povprečna strela je trikratna, prenese okrog 25 As električnega naboja in traja nekaj milisekund. Njena debelina je pet centimetrov, dolžina okrog deset kilometrov, tokovi pa dosežejo do 100 kA. V izjemnih primerih so debeline strele lahko 20 cm in tokovi tudi 500 kA. [11]

količina	strela	
	značilna	ekstremna
tok [kA]	100	500
naboj [As]	25	100
čas [ms]	2-4	5
dolžina [km]	10	10
premer [cm]	5	20
kratnost	2	42
oblak-oblak/oblak-zemlja	3 (45°)	10 (ekv.)

Tabela 1.2: Vrednosti izmerjenih količin za tipične in ekstremne strele.

Razmerje med strelami, ki prenesejo na zemljo negativni naboj in tistimi, ki prenesejo pozitivnega, je tipično 10 proti 1. Ko zabredemo v statistiko ostalih značilnih parametrov, postane jasno, da se v nekaterih primerih strela sploh ne začne s postopnim vodnikom iz negativno naelektrnega oblaka, ampak zvezno napreduje iz pozitivno naelektrne zemlje. Take primere so opazili predvsem na visokih stavbah in vrhovih, ko se je prevodni kanal iz pozitivno naelektrnega dela gradil zvezno.

Kljub množici eksperimentalnih podatkov proces še vedno ni popolnoma razložen. V pogosto citiranem [12] najdemo: „The detailed physics of the process, however, remains unknown.“² [4] In od takrat do danes zadovoljivega mehanizma separacije naboja še nismo našli. V naslednjem delu disertacije predstavljamo vodilne hipoteze o ločitvi naboja v nevihtnem oblaku.

¹Ime je dobila zaradi svoje hitrosti, ki je okrog 20 % svetlobne.

²Podrobno fizikalno ozadje procesa kljub vsemu ostaja neznano.

1.3 Ločitev naboja v nevihtnem oblaku

Procesi v nevihtnem oblaku, ki vodijo do velikih električnih poljskih jakosti,³ so odločilnega pomena za razumevanje pojava strele. S tem mislimo tako na procese, s katerimi so se delci v oblaku naelektrili, kot tiste, zaradi katerih se ti delci v oblaku prerazporejajo na način, ki ustvarja primerne pogoje za nastanek prebojnih razmer. V nevihtnem oblaku je zgornji del naelektrjen pozitivno in spodnji negativno. Čeprav je taka slika zelo poenostavljena, tudi zanjo mehanizem še ni popolnoma razjasnjen. Obstaja precej teorij in nekatere so opisane v nadaljevanju. V grobem jih delimo na induktivne, te vključujejo zunanje električno polje, in neinduktivne.

Med induktivne teorije sodita zajem ionov in elastični trk hidrometeorjev, med neinduktivne pa trki rastočih delcev sodre s kristali ledu, Lenardov efekt ter Workman-Reynoldsov pojav. Omenjene teorije predvsem ne rešijo bistvenega vprašanja v zvezi s porazdelitvijo električnega naboja v oblaku: kaj je razlog nastanka ter hitrega in obsežnega prerazporejanja vsega naboja, ki povzroča razelektritve. Možno smer raziskav predstavljajo tudi razlike v hitrosti delcev zaradi različnih velikosti in mas, ki jih konvektivni zračni tok odnaša s seboj. Meritve kažejo, da ti na svoji poti trkajo ob ostale delce, ki se lahko gibljejo tako navzgor kot navzdol. Zelo verjetno je porazdeljevanje naboja v nevihtnem oblaku kombinacija naštetih pojavov, saj noben od njih ne zadošča podatkom iz meritev. Strele spremljajo tudi izbruhe vulkanov in peščene viharje, torej za razdelitev naboja hidrometeorji ne morejo biti odločilnega pomena – ali pa ima nevihtna strela posebne lastnosti, ki jih še niso uspeli izmeriti.

Hipoteza o mehanizmu ločitve naboja v nevihtnem oblaku bo morala zadostiti vsaj naslednjim rezultatom opazovanj: [11]

1. povprečno trajanje padavin in razelektritev posamezne nevihtne celice je od 20 do 30 minut
2. električni moment, ki se uniči med tipično nevihto, je okrog 10^4 Asm oziroma naboj od 20 do 30 As
3. naboj nastane in se prerazporeja v območju, ki ga omejujeta izoterma -5°C in -40°C in ima polmer okrog 2 km
4. težišče negativnega naboja je okoli izoterme -10°C , težišče pozitivnega nekaj kilometrov višje, nekaj pozitivnega naboja pa je tudi blizu baze oblaka v bližini izoterme 0°C ali celo pod njo
5. primerni pogoji za razelektritve morajo nastati že 10 minut po pojavu padavinskih elementov v oblaku, ki jih zaznajo pri opazovanjih z radarji

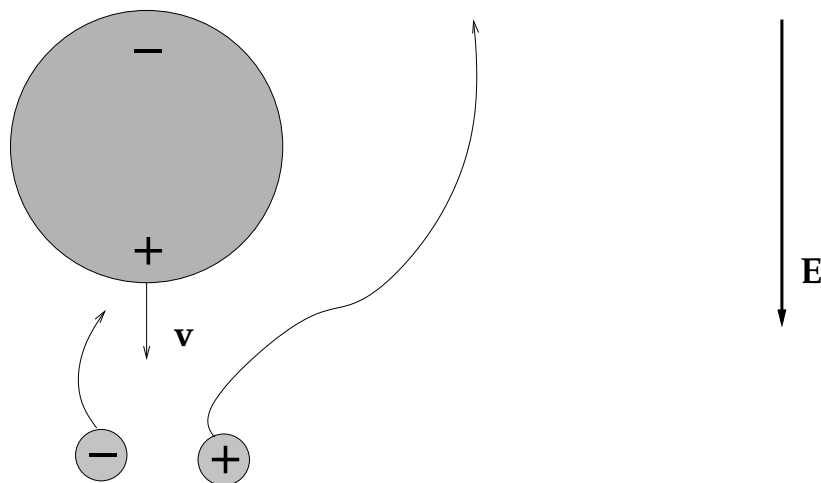
³Na površini zemlje so ob nevihtah izmerjene vrednosti električne poljske med 5 in 10 kV/m.

6. električna poljska jakost v oblaku mora doseči nekaj 100 kV/m

Dokončna razlaga bo morala razložiti tudi aktivnejše nevihte, v katerih prihaja do razelektritev vsako sekundo, četudi le do 10% teh razelektritev doseže zemljo. V vsakem primeru pa velja, da je nevihtni oblak zelo zapleten objekt in njegova obravnava težavna, kar pa ni nič čudnega, saj je v njem tipično petsto tisoč ton vode v različnih agregatnih stanjih.

Zajem iona (Wilsonov model)

Eden prvih poskusov razlage je model zajema iona, ki ga je predlagal C. T. R. Wilson že leta 1916. [13] Nabiranje negativnega naboja na spodnjem delu oblaka naj bi povzročili negativno naelektrjeni hidrometeorji, ki so negativni naboj v oblaku pobrali na svoji poti navzdol. Negativni naboj se na hidrometeorjih obdrži raje od pozitivnega, če predpostavimo, da kapljica pada skozi oblak v zunanjem električnem polju med negativno naelektrjeno zemljo in pozitivno naelektrjeno ionosfero (torej okrog 200 V/m, če zanemarimo senčenje). Pri tem je spodnji del kapljice naelektrjen pozitivno in na poti privlači in pobira negativni naboj – tako se predhodno nevtralni hidrometeor naelektri negativno.



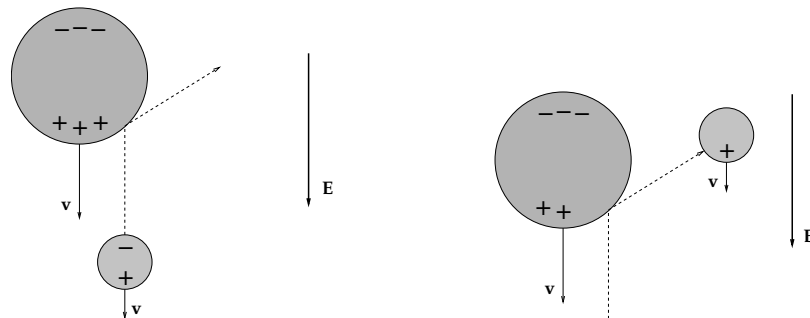
Slika 1.3: Zajem iona po Wilsonu. V zunanjem električnem polju se električno nevtralna kapljica polarizira. Pri padanju skozi oblak se na spodnjo stran, s katero reže proti dnu oblaka, prijemljejo negativno naelektrjeni delci, medtem ko pozitivne odbija ter se tako elektri negativno.

Danes je jasno, da z Wilsonovo hipotezo ne moremo zadovoljivo razložiti porazdeljevanja naboja v nevihtnem oblaku, ker so vrednosti gostote naboja, ki bi tako nastale,

preprosto premajhne glede na izmerjene vrednosti nabojev na vodnih kapljicah, ki padejo na tla ob nevihtah. Zajem ionov bi lahko imel bistveno vlogo le pri električno šibkih nevihtah, v splošnem pa ne. Meritve naboja, ki ga na zemljo prenesejo dežne kaplje ali drugi hidrometeorji, kažejo velike razlike v vrednostih tako v nabojih, ki so jih prenesli na tla hidrometeorji ene nevihte, kot tudi med hidrometeorji različnih neviht. Razlogi za tako velik raztros vrednosti naboja na padavinah niso znani, gibljejo pa se med 10^{-12} A/m² in 10^{-10} A/m² v umirjenem dežju, v nevihtah pa lahko dosežejo tudi 10^{-8} A/m².

Elastični trki

Hidrometeorja različnih velikosti, ki padata z različnima hitrostima v zunanjem električnem polju, bosta ob trku izmenjala električni naboj tako, da bo hitrejši postal negativno naelektrjen, počasnejši pa pozitivno.



Slika 1.4: Elastični trki nevtralnih delcev v zunanjem električnem polju pri padanju v isti smeri. Če imata delca različni hitrosti, se hitrejši elektri negativno, počasnejšim pa ostane presežek pozitivnega naboja.

Meritve v splošnem kažejo [3], da so negativno naelektrjeni delci praviloma manjši od pozitivnih. Tudi zato omenjeni proces domnevno velja le za elastične trke med zaledeneli delci ali podhlajenimi vodnimi kapljicami, sicer pa tudi vloga elastičnih trkov pri elektrenju nevihtnega oblaka še ni pojasnjena.

Trki sodre z ledenimi kristali

Poskusi v laboratorijih so pokazali, da prihaja do prerazporeditve električnega naboja med delci sodre in ledenimi kristali, če se trki dogajajo v prisotnosti podhlajenih vodnih kapljic. Predznak in velikost naboja sta nelinearno odvisna od temperature in vsebnosti podhlajene vode v oblaku. Tudi tukaj podrobnosti niso do konca razčiščene, zato so taki trki še eden od možnih kandidatov – nikakor pa ne edini – za pestro električno dogajanje v nevihtnem oblaku.

Cepitev vodnih kapljic

Teorija cepitve vodnih kapljic ali kapljoloma kot mehanizma separacije naboja v nevihtnem oblaku izhaja iz Lenardovega efekta, ki v svoji osnovni obliki razloži naelektrenost vodnih kapljic pri razprševanju in v bližini vodnega slapa. Imenuje se po nemškem fiziku P. Lenardu, ki je leta 1892 objavil izsledke svojih raziskovanj v tej smeri. [14]

Poskusi so pokazali, da je stopnja naelektrenosti vodnih kapljic v obeh procesih odvisna od temperature, raztopljenih primesi, hitrosti curka in ostalih površin, če je curek z njimi v stiku. Po cepitvi so večje kapljice praviloma pozitivno naelektrene, medtem ko je vodni prš električno negativen. Pri lomu kapljice destilirane vode premera 4 mm, ki se razlomi po 5 cm prostega pada v vzgorniku hitrosti 1 m/s, se bo ločilo okrog 10^{-10} As naboja. Sir G. S. Simpson je leta 1953 Lenardov efekt vključil v svojo razlago naelektrenja nevihtnega oblaka, kjer je želel razložiti dipolno strukturo oblaka. Glavna pomanjkljivost razlage je v tem, da je temperatura od 10 K do 40 K pod lediščem na mestu, kjer naj bi se cepitev godila. Kljub temu cepitev vodnih kapljic ni popolnoma neuporabna pri razlagi razporeditve naboja: z njo lahko razložimo pojav manjšega pozitivnega dela, ki ga opazimo v spodnjem delu oblaka, kjer je temperatura nad lediščem.

Workman – Reynoldsov efekt

Pojav elektrenja pri zmrzovanju rahlo nečiste vode sta odkrila Workman in Reynolds leta 1950. [15] Opazila sta, da pri hitrem zmrzovanju vode, v kateri so raztopljene soli majhnih koncentracij, pride do velike potencialne razlike med trdno in tekočo fazo. Ugotovila sta tudi, da je predznak napetosti med fazama odvisen od vrste raztopljene soli.

Sprva se je zdel pojav primeren za razlago separacije naboja, vendar so meritve pokazale nasprotno. Vodne kapljice v oblaku namreč zmrzujejo prehitro, da bi lahko prišlo do zadostne potencialne razlike med tekočo in trdno fazo. Vseeno ostaja Workman–Reynoldsov efekt možna razlaga pri naelektrenju v primerih, ko je tekoča faza prisotna v obliki podhlajenih vodnih kapljic, ki jih potem naelektrene raznese zračni tok. Na osnovi opazovanj v New Mexicu leta 1953, ko je šlo predvsem za suho rast zrnca toče (brez prisotnosti tekoče faze), je Reynolds sam podvomil, da bi teorija lahko razložila ločevanje naboja v nevihtnem oblaku. [16]

1.4 Modeli rasti

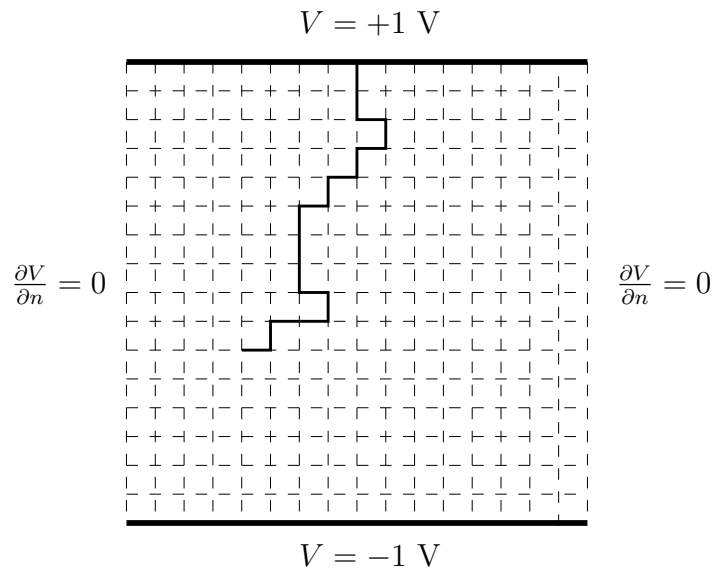
Modeliranja in simulacije električnega preboja sodijo v širše področje modelov rasti (angl. growth models, growth algorithms), med katere sodijo tudi modeli rasti viskoznih prstov, pronicanje tekočin v porozni medij, gradnje snežink in rast kristalov nasploh.

Do danes so bili predstavljeni različni dvodimenzionalni modeli [17, 18, 19] in le redki tridimenzionalni modeli rasti. V grobem jih delimo na analitične modele, numerične modele s fiksno in numerične modele s spremenljivo računsko mrežo. Večina je nastala na podlagi „difuzijsko omejenega kopičenja“ (angl. DLA = diffusion limited aggregation) [18], kjer rast modelirane strukture narekuje generator naključnih števil in gradient ustreznega skalarne polja (pri dielektričnem preboju je to gradient potenciala, električna poljska jakost).

V prvih modelih, ki so nastali konec osemdesetih let, je bila pri simulaciji rasti uporabljena fiksna računsko mreža, iz katere je bilo na podlagi lokalnega dogajanja mogoče predvideti globalno strukturo. Pri rasti snežink [20] so tako npr. nakazali, kako notranja struktura molekule vode in slučajni proces dodajanja novih molekul vodita do realističnih končnih slik. Ta zgled je bil tudi simulacija fraktalne strukture, saj je snežinka teoretično in kot rezultat simulacije kazala samopodobnost preko več razredov velikosti. Podobne simulacije so izvedli tudi za pronicanje tekočine v porozni medij in vraščanje viskoznih prstov. Pri tipičnem dielektričnem preboju v atmosferi – streli – taki sklepi odpovejo, saj ni razloga za vpeljavo notranje strukture na mikro nivoju, zato prevodna pot ni fraktal. Manj kot deset kilometrski kanal namreč sestavljajo praviloma petdeset metrski sestavni deli – členi kanala. Kljub temu nekateri raziskovalci tudi dielektrični preboj štejejo med primere fraktalne rasti. [17]

Večina doslej objavljenih modelov rasti uporablja fiksno dvodimenzionalno računsko mrežo in vse uporabljajo numerično metodo končnih razlik. Model, ki ga uporabljamo v tej disertaciji, je izdelan na osnovi metode robnih elementov, s katero je možno v tridimenzionalnem prostoru uporabiti geometrijsko strukturo, ki se dograjuje z vsakim korakom simulacije. Pri gradnji prevodnega kanala smo dopustili tudi možnost, da se prevodni kanal, ki je sestavljen iz posameznih tulcev, v poljubnem koncu tulca cepi v dva dela. Tako lahko preboje prikažemo realnejše, poleg tega pa je število cepitev za dano geometrijo odvisno od lastnosti dielektrika in jo zato v nadaljevanju tudi posebej obravnavamo.

Ker je za tako modeliranje potrebno pogosto izračunati gradient skalarne polja in žrebati slučajna števila, je modeliranje rasti omogočil šele razvoj računalnikov. Pri



Slika 1.5: Primer dvodimenzionalnega modela preboja z metodo končnih razlik in fiksno računsko mrežo. Na prevodnikih velja Dirichletov robni pogoj, na levem in desnem robu Neumannov. Fiksna mreža, po kateri se gradi prebojna pot, je na sliki prikazana črtkano. Tak model je avtor izdelal leta 1996. Rezultati niso bili objavljeni.

izbiri ustrezne numerične metode se raziskovalci zatekajo k standardnim trem: metodi končnih razlik (FDM iz angl. Finite Difference Method), končnih elementov (FEM iz angl. Finite Element Method) in metodi robnih elementov (BEM iz angl. Boundary Element Method). Zaradi elektrofizikalnega ozadja je vsem modelom skupen Dirichletov robni pogoj na prevodnikih in kanalu ter homogeni okoliški dielektrik. Metode se razlikujejo v natančnosti in zahtevnosti uporabljenih algoritmov.

Pri uporabi metode končnih diferenc je samoumevna uporaba fiksne računske mreže, zato je prostor omejen tako v mikro kot v makro smeri (glej sliko 1.5). Ob upoštevanju robnih pogojev, ki so v naravi smiselni, je naloga rešljiva le za smiselno izbrane sisteme prevodnih teles. S takimi modeli porabimo relativno veliko računskega prostora in časa, posebno težavo pa predstavljajo robovi sistema, saj je geometrija omejena, preboj pa naključni proces in – vsaj načeloma – geometrijsko ni omejen.

Metoda končnih elementov lahko vodi do bistveno realnejšega modela, ker je uporaba prilagodljive računske mreže izvedljiva, še vedno pa ne reši problema odprtih robov oziroma robnega pogoja v neskončnosti. Za nekatere posebne primere prebojev, npr. v modelu krogelnega kondenzatorja, težav z robnim pogojem v neskončnosti ni, ker je geometrija zaprta.

Tukaj smo za izračun električnega polja v okolici sistema prevodnih teles v homogenem dielektriku uporabili metodo robnih elementov – pri njej je robni problem v neskončnosti vpleten v izbiro Greenovih funkcij za dano geometrijo. Dodatna prednost pri modeliranju preboja je ta, da ima lahko prevodni kanal po potrebi lahko več kot eno dimenzijo in raste v poljubni smeri, ali v smeri, ki jo narekuje žreb in gradient potencialnega polja.

Poglavje 2

Model izgradnje prevodnega kanala

Pri modeliranju preboja smo se oslonili na podatke meritev za najbolj običajno od nevihtnih strel med oblakom in zemljo, ki na zemljo prenese negativni naboj. Prevodni kanal nastaja po členih, med gradnjo posameznih členov pa mine dovolj časa, da smo za izračun naboja in električne poljske jakosti uporabili kvazistatični približek. Prevodnika, med katerima se gradi kanal, sta modelirana v enem primeru s parom krogel in v drugem s parom vzporednih plošč. Posvetili smo se lastnosti homogenega dielektrika, ki vpliva na izgled, t.j. cepljenost in dolžino, prevodnega kanala. [21, 22]

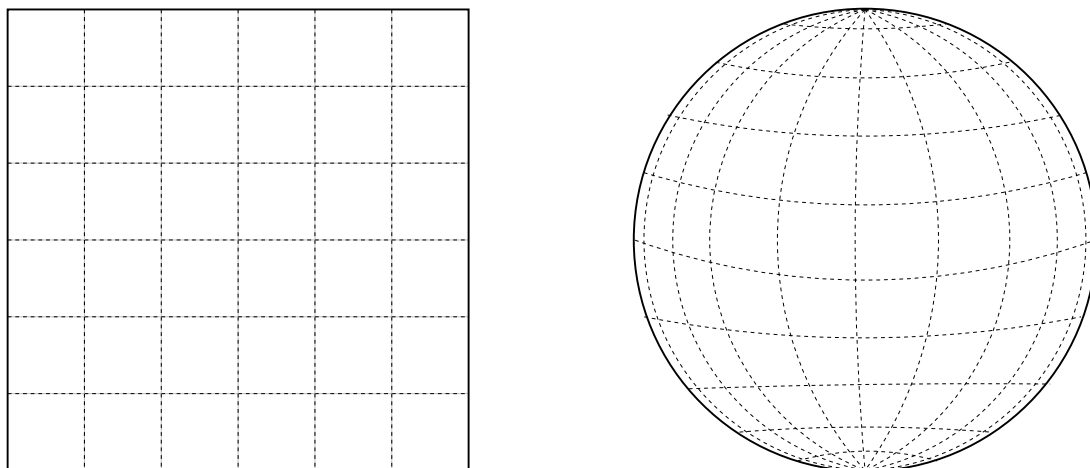
V sistem postavimo dva prevodnika različnih potencialov, med njima pa po zgledu atmosferskega električnega preboja v kvazistatični aproksimaciji (z)gradimo členjeni prevodni kanal. Prevodniki in kanal so v izolatorju, ki je homogen dielektrik, katerega lastnosti ostanejo med gradnjo kanala nespremenjene. Vsakemu od bistvenih delov modela in postopkov ali pojmov je posvečeno podpoglavje. Modelne preboje ločimo po tem, ali med prevodnikoma vzdržujemo konstantno napetost, ali pa upoštevamo zakon o ohranitvi naboja. Četudi je v laboratorijskih primerih vir priklopljen med elektrodi tudi med prebojem pa kakšnih velikih odstopanj od primera, ko se ohranja naboj, ni pričakovati, če je naboja v prevodnem kanalu relativno malo.

2.1 Prevodniki

Sestavni del modela so prevodniki, iz katerih se skozi okoliški izolator postopno gradi prevodni kanal do drugega prevodnika. V modelu nastopata vedno vsaj dva prevodnika: na enem je začetek prevodnega kanala ali seme, na drugem zaključek.

Električna upornost prevodnikov v modelu naj bo zanemarljiva, saj pripravljamo model za kvazistatični pristop. Kar se geometrije tiče, pripravimo tanke kvadratne plošče, krogelne lupine in daljice ali tanke valje. Vsakega od prevodnikov sestavljajo tako

majhni deli, da je na njih – po modelu – površinska gostota naboja konstantna. Pri kvadratni plošči so sestavni deli kvadrati, pri daljici manjše daljice in pri krogelni lupini koščki kolobarjev, iz katerih je krogla sestavljena.



Slika 2.1: Primer dveh dvodimenzionalnih prevodnikov v prebojnem sistemu: levo kvadratna plošča in desno krogelna lupina. Kvadratna plošča je razdeljena na 6×6 kvadratkov na katerih je gostota naboja v modelu konstantna. Krogelna lupina je razdeljena na enakokrake trapeze od katerih so tisti, ki imajo za eno od točk severni ali južni pol, izrojeni v enakokrake trikotnike.

Na vseh prevodnikih se naboj v splošnem spreminja z rastjo členjenega prevodnega kanala. Pri strelci zrastejo posamezni členki v približno $1 \mu s$, čemur sledi približno $50 \mu s$ pavza, v kateri se naboji na vseh prevodnikih prerazporedijo. [23] Privzeli smo, da ima naboj v tej pavzi dovolj časa za prerazporeditev in s tem zadosti pogoju o konstantnosti električnega potenciala na vsakem od prevodnikov. Celotni sistem prevodnikov zato na vsakem koraku obravnavamo kot elektrostatičen in z ustreznimi metodami na prevodnikih določimo iskano porazdelitev naboja.

Na vseh prevodnikih se naboj v splošnem spreminja z rastjo členjenega prevodnega kanala. Pri strelci posamezni členki zrastejo v približno $1 \mu s$, čemur sledi približno $50 \mu s$ pavza, v kateri se naboji na vseh prevodnikih prerazporedijo. Privzeli smo, da ima naboj v tej pavzi dovolj časa za prerazporeditev in s tem zadosti pogoju o konstantnosti električnega potenciala na vsakem od prevodnikov. Celotni sistem prevodnikov zato na vsakem koraku obravnavamo kot elektrostatičen in z ustreznimi metodami na prevodnikih določimo iskano porazdelitev naboja.

Tudi členjeni kanal je po svoji naravi prevodnik. Od ostalih se razlikuje po tem, da nastaja med simulacijo, medtem ko imajo ostali prevodniki, t.j. kvadratne plošče,

valji in krogelne lupine, od začetka znano geometrijo in se – z izjemo potenciala in naboja na njih – ne spreminjajo. Členjeni prevodni kanal sicer z vsemi podrobnostmi opisuje poseben del tega poglavja.

2.2 Izolator

Večino tridimenzionalnega prostora v modelu zapolnjuje izolator – dielektrik, v katerem so postavljeni naelektreni prevodniki, in kjer se med prebojem zgradi prevodni kanal. V naravi so to različne snovi: razlikujejo se tako po agregatnem stanju, kot po dielektričnosti, prevodnosti in drugih parametrih. V modelu želimo zajeti tako laboratorijske pogoje, v katerih je izolator suh zrak, atmosferske razmere, kjer je v neposredni okolici strele petsto tisoč ton vode ali več v vseh agregatnih stanjih, poleg tega pa tudi razne trdne dielektrike, ki služijo za izolacijo v električnih napravah.

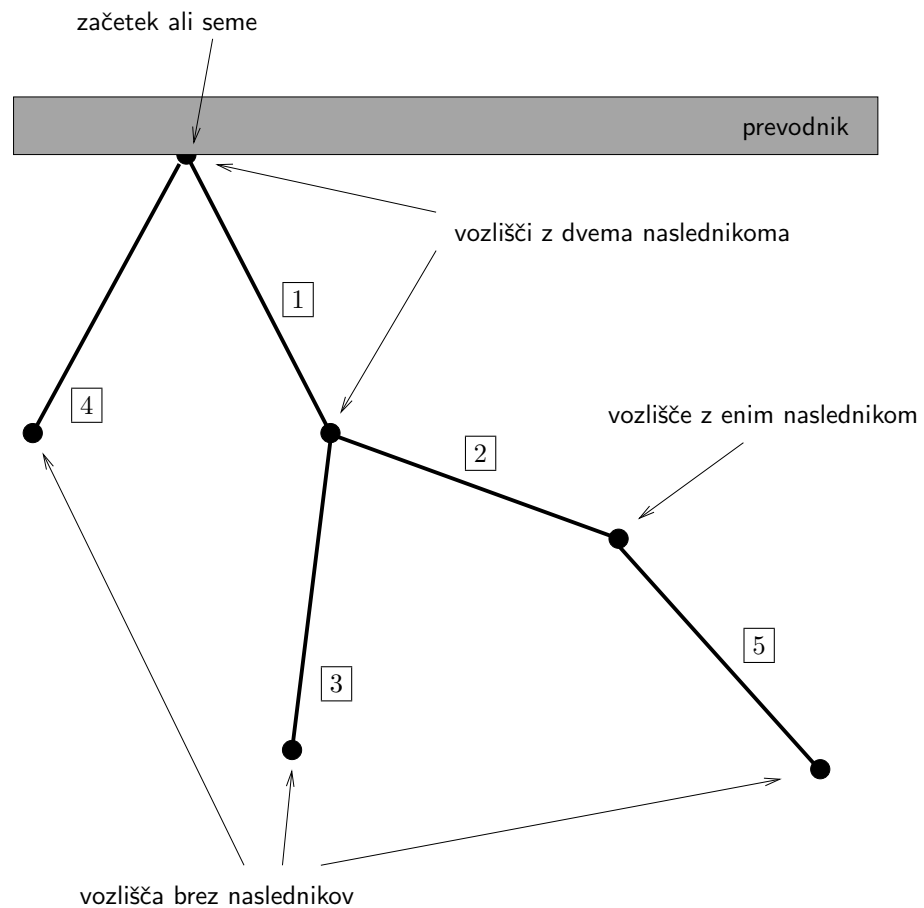
Predpostavimo, da je ob začetku preboja izolator homogeno sredstvo. Ker od začetka do zaključka gradnje členjenega prevodnega kanala mine tipično okrog 100 ms, model velja, če so relaksacijski časi za naboje v izolatorju in njegove lastnosti velikostnega reda nekaj 100 ms ali več.

Ker nas zanima izgradnja prevodnega kanala, zveznega ali členjenega, naj bo izolator že v stanju preboja, t.j. prebojna trdnost je dosežena ali presežena, zato je vsako ukvarjanje z odvisnostjo prebojne poti od prebojne trdnosti odveč. Vrednosti ostalih parametrov, ki vplivajo na obliko prevodnega kanala (temperaturo, tlak, prevodnost, dielektričnost, ipd.), pa nadomestimo z enim samim parametrom, s posplošeno temperaturo T ali notranjo energijo izolatorja kT . V njej smo zaobjeli vse lastnosti izolatorja, ki vplivajo na cepljenost kanala, kot so npr. verjetnost za ionizacijo, povprečna prosta pot in število prostih elektronov.

Z uvedbo posplošene temperature dopuščamo možnost kvalitativno različnih členjenih prebojnih kanalov za različne izolatorje, tudi če so prevodniki razporejeni enako. Pri hladnem izolatorju nastane prevodni kanal brez cepitev, ker nastaja približno v smeri največjega polja. Po drugi strani pa v vročih razmerah pričakujemo, da se prevodni kanal cepi, ker to možnost dopuščamo. Prevodni kanal se zaključi na nasprotno naelektrenem prevodniku po bistveno večjem številu korakov.

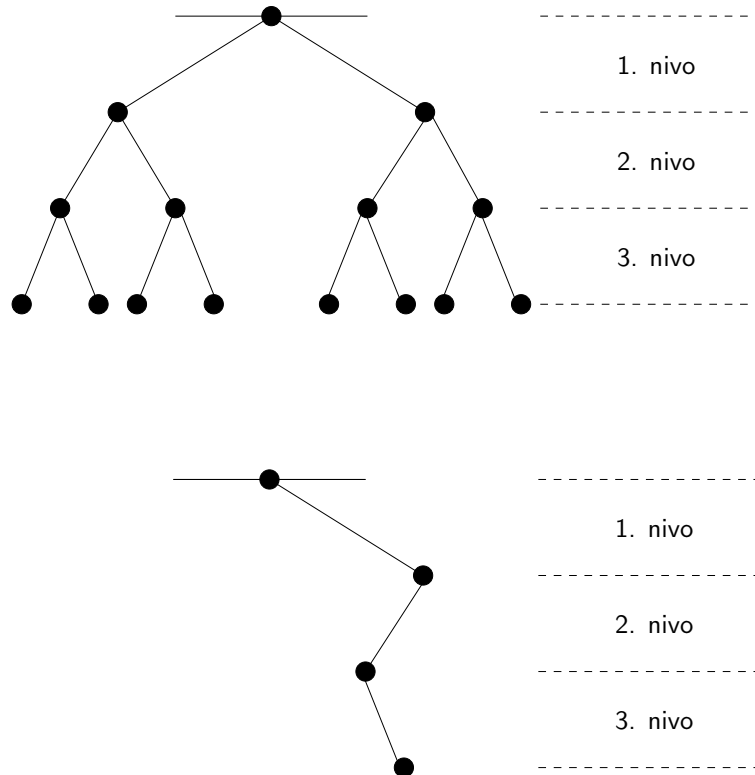
2.3 Prevodni kanal

Po zgledu členjenega prevodnega kanala pri strelji naredimo strukturo modelnega prevodnega kanala. Sestavljajo ga členi, ki se dodajajo h kanalu, eden na vsako zanko izračuna. Vsak od členov je v geometrijskem smislu daljica, struktura vseh členov, ki so med seboj povezani, pa je zato drevesna. Struktura kanala je po eni strani drevo členov, ki so povezani prek krajišč (v računalniškem jeziku: listi drevesa so členi), po drugi strani pa je kanal drevo krajišč, ki jih povezujejo členi (v računalniškem jeziku: listi drevesa so krajišča členov kanala).



Slika 2.2: Shema prevodnega kanala. Uokvirjene številke pomenijo vrstni red, po katerem smo člene dodali h kanalu. Prvi člen izhaja iz semena, vsako od vozlišč ima lahko do dva naslednika, tudi seme. Potencial prevodnega kanala je enak potencialu prevodnika, na katerem je seme.

Člen prevodnega kanala ima dve krajišči: prvega, ki ga veže s predhodnikom, in drugega, iz katerega lahko zrasteta še kvečjemu dva členu. Če je katero od krajišč skupno trem členom, t.j. če iz krajišča enega od členov zrasteta dva nova, imamo opravka s cepitvijo prevodnega kanala. Največje možno število cepitev raste s številom krajišč. V modelu upoštevamo izmerjene vrednosti dolžine l_s in polmera kanala r_s . V večini primerov smo vzeli kar vrednost na podlagi meritev, to je $r_s/l_s \approx 0.002$.



Slika 2.3: Shematični prikaz gostega (zgoraj) in redkega drevesa. Ker dovoljujemo cepitev na kvečjemu dva členu, ima maksimalno cepljeno drevo po treh nivojih $2 + 4 + 8 = 14$ členov.

Vzemimo posebni primer rasti členjenega prevodnega kanala, ko raste kot uravnoteženo (idealno košato) drevo. Ob vsakem naslednjem koraku nastane tisti člen, ki ima do začetka kanala najmanjše število predhodnikov. Takemu kanalu se členu dodajajo po vrsti po nivojih $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ in ima pri številu členov $N = 2, 6, 14, 30, \dots, 2^{n+1} - 2$ ravno $n_c = 1, 3, 7, 15, \dots, 2^n - 1$ cepitev ter zapolni prostor okrog semena najgosteje (glej sliko 2.3). O zapolnitvi prostora je sicer težko govoriti, saj zaradi končne dolžine členu struktura ni fraktalna. Če raste kanal radialno od semena, je ves kanal vedno

znotraj krogle polmera

$$R_a = n \cdot l_s = l_s \cdot \left\| \log_2 \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \right\|_{\text{sup}},$$

kjer je l_s dolžina člena, n zaporedna številka nivoja in N število členov v kanalu. Z operacijo $\| \cdot \|_{\text{sup}}$ smo označili tisto celo število, ki je argumentu enako ali, če argument ni celo število, po velikosti naslednje.

Popolnoma enako odvisnost števila cepitev od števila členov dobimo, če se kanal cepi na vsakem nivoju natanko enkrat. V tem primeru sta na vsakem nivoju dva člena, zato je $N = 2n$ (N je število členov, n zaporedna številka nivoja), cepitev je $n_c = n$ in celotni kanal je znotraj krogle polmera

$$R_b = n \cdot l_s = l_s \cdot \left\| \frac{N}{2} \right\|_{\text{sup}}.$$

Kadar se kanal ne cepi, je število členov N enako številu nivojev n in celotni kanal od začetka ni oddaljen več kot

$$R_c = n \cdot l_s = N \cdot l_s.$$

Cepljenost prevodnega kanala je posledica električnih razmer v času preboja in lastnosti izolatorja. Za preboj s členjenim prevodnim kanalom upoštevajmo še rezultate meritev v atmosferi, po katerih je potreben čas za nastanek novega člena $t_c \approx 50 \mu\text{s}$, in za to vrsto preboja izvemo, da

- kanal v N členih ne preseže razdalje večje od R_c , npr. 20 členov ne preseže 1 km,
- razdalje $R_c = N \cdot l_s$ (ne glede na temperaturo izolatorja) ne more doseči prej kot v času $N \cdot t_c$, npr. 1 km ne prej kot v 1 ms, in
- kanal doseže v N členih razdaljo večjo od R_b le, če ni popolnoma cepljen.

Potek prevodnega kanala in cepljenost vodijo električni pogoji v izolatorju. Če dodajamo člene h kanalu popolnoma naključno in je število enako številu nivojev, potem je verjetnost, da bi kot rezultat simulacije dobili kanal brez cepitev, enaka

$$p_1 = \prod_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{1}{N!}.$$

2.4 Žreb novega člena v prevodnem kanalu

Prevodni kanal na vsakem koraku podaljšamo za en člen. Naj ima obstoječi kanal N členov. Poglejmo, kako dodamo $N + 1$ -tega.

Verjetnost za gradnjo kanala v dani smeri povežemo s posplošeno temperaturo izolatorja in razliko energij pred in po izvedenem koraku. Naj bo W_i električna energija sistema na i -tem koraku in dopustimo, da se lahko členjeni prevodni kanal nadaljuje le v končno mnogo smeri, od katerih bi vsaka električno energijo zmanjšala na $W_{i,j}$. Ker se bo kanal nadaljeval le v eno od smeri, ki so na voljo, vsaki od možnosti priredimo utež

$$\exp\left(-\frac{\Delta W_{i,j}^{(\max)} - \Delta W_{i,j}}{kT}\right), \quad (2.1)$$

kjer je $\Delta W_{i,j} = W_i - W_{i+1,j}$ razlika med električno energijo na i -tem koraku in električno energijo na $i + 1$ -tem koraku, če je bila izbrana možnost j . Pred žrebom normiramo verjetnost za izbor, npr.

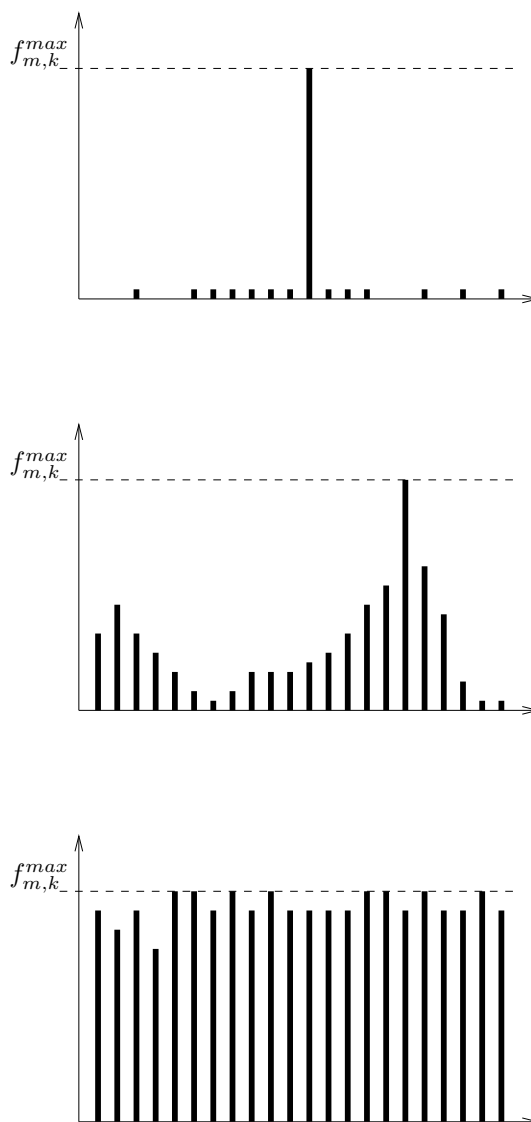
$$\sum_{j=1}^{N_j} \exp\left(-\frac{\Delta W_{i,j}^{(\max)} - \Delta W_{i,j}}{kT}\right) = 1. \quad (2.2)$$

Manjša temperatura večja verjetnost, da izberemo tisto možnost, ki najbolj zmanjša električno energijo sistema. In obratno: večja kot je temperatura, bolj so vse možnosti enakovredne, t.j. pri $T \rightarrow \infty$ je verjetnost za izbiro enaka za vse.

Ko izberemo položaje kandidatov, vsakemu določimo še utež (2.3). Ker smo predhodno že določili naboje na vseh prevodnikih in členih kanala, je potencial vsakega od kandidatov $V_{m,k}$ izračunljiv in utež $f_{m,k}$ zapišemo kot

$$f_{m,k} = \exp\left[\frac{Q_n \cdot (V_{m,k} - V_{m,k}^{(\max)})}{kT}\right], \quad (2.3)$$

kjer sta $V_{m,k}^{\max}$ največji potencial med vsemi kandidati in Q_n naboj predhodnika vsakega od kandidatov. Ker je vseh točk M , kandidatov pri vsaki od točk pa K , je vseh kandidatov in uteži $M \cdot K$. Utežno funkcijo smo skicirali pri treh različnih temperaturah kT , dveh ekstremnih in nekje vmes (slika 2.4). Vsoto vseh uteži normiramo na vrednost 1 in med vsemi izberemo novi člen z generatorjem naključnih števil. Predstavljamo si lahko, da po utežitvi kandidate postavimo v enodimenzionalno vrsto med 0 in 1, ter v istem intervalu izžrebamo naključno število. Očitno se za visoke vrednosti kT razlike med posameznimi utežmi zabrišejo, medtem ko pri nizkih temperaturah žreb razlike med utežmi poudari in verjetnost za kandidata z največjo utežno funkcijo (potencialno razliko) izstopa po velikosti od ostalih kandidatov.



Slika 2.4: Primer uteži za možna nadaljevanja prevodnega kanala za hladni izolator (zgoraj), srednje vrednosti kT (v sredini) in vroči izolator (spodaj). Pri nizkih vrednostih kT je najbolj verjetno nadaljevanje kanala v smeri največjega gradienta potenciala. Na spodnji sliki vidimo, da so zaradi visokih vrednosti kT razlike med posameznimi utežmi zabrisane.

Ker je verjetnost za prehod sorazmerna utežni funkciji (2.3), je posplošena temperatura kT parameter, ki vpliva na cepljenost kanala. Pri nizkih temperaturah ima strela malo cepitev, pri visokih jih je več. Posplošena temperatura je tako merilo za razvejanost prebojnega kanala in jo v fizikalnem smislu lahko povežemo z možnostjo tvorbe plazmatskega kanala, torej tudi z dielektrično trdnostjo.

Posplošene temperature izolatorja ne izbiramo brez merila. Uvedemo raje parameter ψ kot razmerje med začetno električno energijo sistema pred prebojem $W_E = C_0 U^2 / 2$ in posplošeno notranjo energijo sistema kT

$$\psi = \frac{C_0 U^2}{2kT} = \frac{W_E}{kT} . \quad (2.4)$$

Tako uvedeni brezdimenzijski parameter ψ omogoča primerjanje členjenih prevodnih kanalov za različne razporeditve prevodnikov. Vendar to ni edini parameter, ki nastopa v modelu. Dodatni parameter je razmerje med dolžino in polmerom posameznega člena v členjenem prevodnem kanalu.

Potencialni predhodniki $N + 1$ -tega člena so vsi členi, ki nimajo več kot dveh naslednikov, ali, če povemo za točke v kanalu, tiste točke, ki so krajišča enega ali dveh členov. Točka, v kateri se stikajo trije členi, in ji recimo cepitev, ne prispeva novih kandidatov. Na ta način dovolimo cepitev kanala, toda vsak člen se lahko nadaljuje le v kvečjemu dva naslednika.

Kandidati za člen $N + 1$ so razporejeni po kroglah polmera dolžine člena l_s , središča krogel so v vsaki od točk kanala, ki še nima dveh naslednikov. Položaj kandidatov na kroglah izžrebamo, tipično smo jih na vsaki izžrebali petdeset.

V posplošeni temperaturi najdemo podobnost tudi s klasičnim pojmom temperature. Plazma je namreč agregatno stanje, ki nastopi pri izjemno visokih temperaturah. Izolator pri tako visoki temperaturi sestavlja vroč plin negativnih in pozitivnih ionov, zato je v resnici idealni prevodnik. Prevodni kanal pri tem nastaja popolnoma slučajno, ker ima utežna funkcija isto vrednost za vse kandidate. Seveda fizikalna slika preboja ostaja smiselna le, če napetostna razlika ne deformira plazmatskega izolatorja. V modelski sliki si to možnost zlahka privoščimo.

2.5 Izračun naboja

Pred vsakim dodajanjem novega člena v obstoječi prevodni kanal, izračunamo električno polje v prostoru. Zaradi odprtih robov smo se odločili, da iz robnih pogojev za električni potencial na prevodnikih in kanalu najprej izračunamo porazdelitev naboja, iz tega pa električno poljsko jakost v točkah, kjer jo rabimo poznati. Račun opravimo enkrat za vsak korak algoritma, saj se v vsakem koraku spremeni prevodni kanal, s tem pa geometrija modela in tudi položaj ter vrednost naboja na prevodnikih. Ker rešujemo elektrostatično nalogo, posebnih začetnih pogojev ni.

Zgoraj povedanemu lahko zadostimo na dva načina: pri konstantni napetosti med prevodniki ali konstantemu naboju na prevodnikih. Za vsako od možnosti pripravimo računski model, saj je računsko delo za obe približno enako naporno. Gradnji prevodnega kanala pri streli je bližje model s konstantnim nabojem.

Matrični sistem pri konstantni napetosti

Naj bosta v sistemu dva prevodnika nasprotnih potencialov z indeksoma 1 in 2 in prevodni kanal z indeksom S , ki raste iz prevodnika z indeksom 1. Za izračun na vsakem koraku veljajo Dirichletovi robni pogoji:

$$V_{P1} = V_a \quad (2.5)$$

$$V_{P2} = V_b \quad (2.6)$$

$$V_{pk} = V_a, \quad (2.7)$$

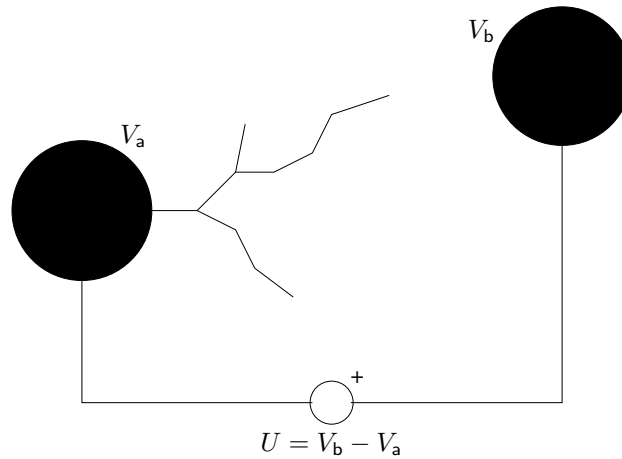
kjer predpišemo $V_a - V_b = U$. Rešitev elektrostatične naloge je enaka rešitvi Laplaceove enačbe $\nabla^2 V = 0$. Na prevodnike postavimo iskani električni naboj tako, da vsakega od prevodnikov razdelimo na manjše dele, na katerih je površinska ali linijska gostota naboja konstantna: daljice na koščke daljic, kvadratne plošče na kvadratke, ipd.

S prispevki vseh nabojev zapišemo potencial v poljubni točki prostora \mathbf{r} kot

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho' dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.8)$$

kjer so ρ' , dv' , v' in \mathbf{r}' gostota naboja, prostorninski element, prostornina in krajevni vektor točke v območju z viri polja, \mathbf{r} pa točka, v kateri računamo potencial V . Enačba (2.8) velja tudi na vseh prevodnikih, zato storimo enako za tiste \mathbf{r}_i , kjer smo že poprej namestili naboj:

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_j \int_{v_j} \frac{\tilde{\rho}_j dv_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.9)$$



Slika 2.5: Gradnja kanala pri konstantni napetostni razliki med prevodnikoma U . Potencial kanala na sliki je enak V_a .

kjer je $\tilde{\rho} = \rho/(4\pi\epsilon_0)$, z vsoto pa smo poudarili, da seštevamo prispevke delčkov prevodnikov, na katerih je površinska gostota naboja konstantna. V našem primeru je naboj razporejen po ploščatih in premih prevodnikih v_j s konstantno ploskovno ali premo gostoto naboja $\tilde{\rho}_j$.

Enačba (2.9) velja v celotnem prostoru in tudi na prevodnikih, kjer so razpostavljeni viri in je potencial vnaprej znan. V duhu Galerkinove rešitve z momentno metodo reševanja parcialnih diferencialnih enačb zapišemo potencial na istih elementih prostora kot naboj (2.9) in integriramo po vsakem od delov prevodnika. Tako dobimo

$$\int_{v_i} V(\mathbf{r}_i) dv_i = \sum_j \int_{v_i} \int_{v_j} \frac{\tilde{\rho}_j dv_j dv_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.10)$$

Po privzetku je površinska gostota naboja (in s tem tudi naboj sam) konstantna na vsakem od elementov površine-dolžine v_j , zato zaradi preglednejše izpeljave vpeljemo $\tilde{\rho}_j = \tilde{Q}_j/v_j$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{Q}_j/S_j$ in $\tilde{q}_j = \tilde{Q}_j/l_j$ za prostorninski, površinski ali premi element geometrije. Spet smo ϵ_0 pospravili v $\tilde{Q} = Q/(4\pi\epsilon_0)$. Upoštevamo konstantnost potenciala na vsakem elementu v_i pa lahko zapišemo matrično enačbo za neznane naboje na elementih v_j

$$-V_i + \frac{1}{v_i v_j} \sum_j \tilde{Q}_j \int_{v_i} \int_{v_j} \frac{dv_j dv_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = 0. \quad (2.11)$$

Zadostitev robnim pogojem za potencial na i -tem delu površine ali daljice V_i vodi do ravno toliko enačb, kot je neznank \tilde{Q}_j . Poleg tega ima sistem še dve neznanki, to sta oba potenciala, in dve dodatni enačbi: prvo, kjer je razlika potencialov $V_a - V_b$

enaka napetosti U in drugo, s katero zagotovimo električno zaključen sistem. Celotni matrični sistem je tako

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} & -1 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n \\ V_a \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

kjer so matrični elementi M_{ij} enaki

$$M_{ij} = \frac{1}{v_i v_j} \int_{v_i} \int_{v_j} \frac{dv_j dv_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (2.13)$$

in v_i ter v_j geometrijska elementa glede na izbiro: površinski (kvadratale ali del valjnega plašča) ali premi (daljica). Prostorninskih elementov tako ali tako ni, saj je ves naboj na površini prevodnikov. Predzadnja enačba zagotavlja, da je razlika potencialov enaka vnaprej predpisani napetosti, zadnja pa, da je vsota vseh nabojev enaka nič – opravka imamo z električno zaključenim sistemom.

Pri dodajanju členov k prevodnemu kanalu se matrični sistem (2.12) poveča za eno vrstico in stolpec na vsak dodani člen. Po sN členih, kjer je seme kanala na prevodniku s potencialom V_a , je matrični sistem:

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} & -1 & 0 & M_{1,s1} & \dots & M_{1,sN} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,n} & -1 & 0 & M_{2,s1} & \dots & M_{2,sN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} & 0 & -1 & M_{n,s1} & \dots & M_{n,sN} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ M_{s1,1} & \dots & M_{s1,n} & -1 & 0 & M_{s1,s1} & \dots & M_{s1,sN} \\ M_{s2,1} & \dots & M_{s2,n} & -1 & 0 & M_{s2,s1} & \dots & M_{s2,sN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{sN,1} & \dots & M_{sN,n} & -1 & 0 & M_{sN,s1} & \dots & M_{sN,sN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n \\ V_a \\ V_b \\ \tilde{Q}_{s1} \\ \tilde{Q}_{s2} \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{sN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Formalno zapišemo (2.12) in (2.14) ter njuno rešitev kot

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.15)$$

Izračun matričnih elementov M_{ij} in reševanje matričnega sistema podrobno razlaga posebno poglavje. Z dobljenimi naboji je električna poljska jakost izračunljiva za vsako točko v izolatorju. Pred nadaljnimi izračuni, kjer uporabljamo rešitve gornjega sistema, se je smiselno prepričati tudi o spektralni občutljivosti matričnega sistema $\text{cond} \| A \|_2$.

Matrični sistem pri konstantnem naboju

Gradnja prevodnega kanala s konstantnim nabojem na prevodnikih se razlikuje od gradnje pri konstantni napetosti na prevodnikih le v matričnem sistemu. Tako začetni pogoji, reševanje sistema in žreb so enaki opisanim v prejšnjem podglavju.

Pri dodajanju novih členov poskrbimo, da je vsota naboja na vsakem od prevodnikov enaka kot v prejšnjem koraku, vendar upoštevamo, da sta prevodni kanal in prevodnik, iz katerega izhaja, en prevodnik in se zato ohranja vsota njunih nabojev.

Iz matričnega sistema (2.12) dobimo začetna naboja na prevodnikih $Q_a^{(0)}$ in $Q_b^{(0)}$. V nadaljnjih korakih jih vključimo v matrični sistem na naslednji način:

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} & -1 & 0 & M_{1,s1} & \dots & M_{1,sN} \\ M_{2,1} & \dots & M_{2,n} & -1 & 0 & M_{2,s1} & \dots & M_{2,sN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} & 0 & -1 & M_{n,s1} & \dots & M_{n,sN} \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_{s1,1} & \dots & M_{s1,n} & -1 & 0 & M_{s1,s1} & \dots & M_{s1,sN} \\ M_{s2,1} & \dots & M_{s2,n} & -1 & 0 & M_{s2,s1} & \dots & M_{s2,sN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{sN,1} & \dots & M_{sN,n} & -1 & 0 & M_{sN,s1} & \dots & M_{sN,sN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n \\ V_a \\ V_b \\ \tilde{Q}_{s1} \\ \tilde{Q}_{s2} \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{sN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_a^{(0)} \\ Q_b^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Vrstica z desno stranjo $Q_a^{(0)}$ zagotavlja, da je vsota vseh nabojev na prevodniku s semenom in prevodnem kanalu enaka naboju na prevodniku s semenom še pred začetkom gradnje kanala, podobno je z vrstico $Q_b^{(0)}$, ki zagotavlja, da je naboj na prevodniku z oznako b ves čas simulacije enak. Dodatni neznanki v sistemu sta sedaj potenciala prevodnikov V_a in V_b , kot tudi njuna razlika, ki ni predpisana, kot v prejšnjem primeru. Pri gradnji prevodnega kanala s konstantnim nabojem na prevodnikih smo zato spremljali tudi spreminjanje potencialne razlike na prevodnikih v odvisnosti od števila členov v prevodnem kanalu.

2.6 Izračun matričnih elementov

Matrični elementi sistema (2.13) so integrali med posameznimi deli prevodnikov in prevodnega kanala, ker se na njih nahaja naboj. V modelu imamo tako preme kot ploskovne dele, zato kot matrični elementi v splošnem nastopajo vrste integralov ploskev–ploskev, ploskev–daljica in daljica–daljica:

$$\mathcal{M}_{S_i S_j} = \frac{1}{S_i S_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{dS_i dS_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{M}_{S_i l_j} = \frac{1}{S_i l_j} \int_{S_i} \int_{l_j} \frac{dS_i dl_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{M}_{l_i l_j} = \frac{1}{l_i l_j} \int_{l_i} \int_{l_j} \frac{dl_i dl_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} . \quad (2.19)$$

Lastni prispevek kvadrata

Matrični elementi v splošnem niso analitično izračunljivi, razen v posebnih primerih. Eden od takih je lastni prispevek, t.j. dvakratni integral po istem objektu ali diagonalni element matrike (2.13), za kvadrat stranice a

$$\mathcal{M}_{S_i S_i} = \frac{1}{S_i^2} \int_{S_i} \int_{S_i'} \frac{dS_i dS_i'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i'|} \approx \frac{2.97320959825}{a} . \quad (2.20)$$

Lastni prispevek $\mathcal{M}_{S_i S_i}$ za trapezno ploskev analitično ni izračunljiv.

Lastni prispevek daljice

Izraz za lastni prispevek daljice

$$\mathcal{M}_{l_i l_i} = \frac{1}{l_i^2} \int_{l_i} \int_{l_i'} \frac{dl_i dl_i'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i'|} \quad (2.21)$$

nam dá singularni integral, zato daljice, kadar računamo lastni prispevek, pretvorimo v tulce s polmerom r_s . Z lastnim prispevkom daljice – tulca zadostimo robnemu pogoju za električni potencial v osi tulca. Če os tulca postavimo v smeri osi z , lahko iz

$$\mathcal{M}_{l_i l_i} = \frac{1}{l_i^2} \int_{l_i} \int_{l_i'} \frac{dz dz'}{\sqrt{r_s^2 + (z - z')^2}} \quad (2.22)$$

izpeljemo analitični izraz za (2.21)

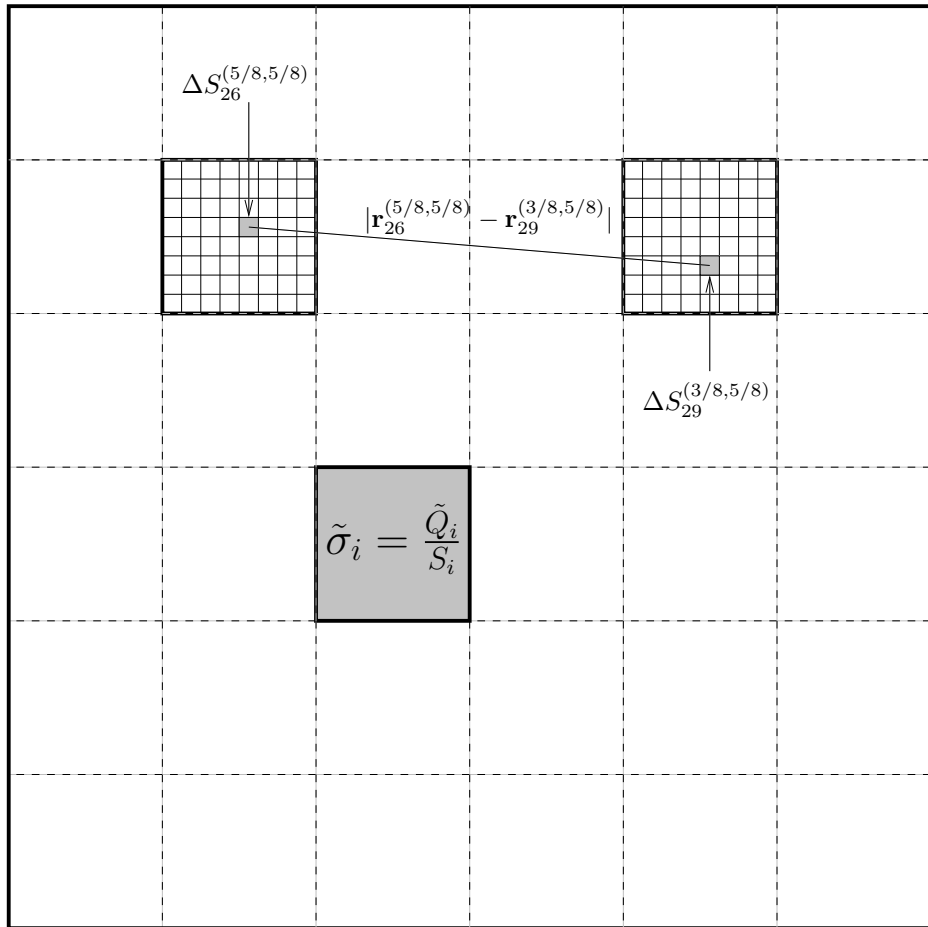
$$\mathcal{M}_{l_i l_i} = \frac{2}{l_i} \left[\beta - \sqrt{1 + \beta^2} - \ln \frac{\sqrt{1 + \beta^2} - 1}{\beta} \right] , \quad (2.23)$$

kjer je $\beta = r_s/l_i$.

Izračun ostalih matričnih elementov

V ostalih primerih integrali od (2.17) do (2.19) niso izračunljivi analitično. Po eksistenčnem izreku [24] za funkcije, ki so zvezne na zaprtem območju, integral obstaja. Lotimo se ga numerično z drobljenjem integracijskega območja

$$\mathcal{M} \approx \widehat{\mathcal{M}} = \frac{1}{\Omega_i \Omega_j} \sum_{i \in \Omega_i} \sum_{j \in \Omega_j} \frac{\Delta \Omega_i \Delta \Omega_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.24)$$



Slika 2.6: Primer izračuna matričnega elementa $M_{26,29}$ za kvadratno ploščo s 36 deli. Oba kvadrata sta razdeljena na 8×8 delov. Vsoto v enačbi (2.24) tvori 64×64 vmesnih rezultatov $\Delta S_{26} \Delta S_{29} / |\mathbf{r}_{26}^i - \mathbf{r}_{29}^j|$.

kjer sta Ω_i in Ω_j integracijski območji, $\Delta \Omega_i$ in $\Delta \Omega_j$ pa njuna dela. Če delitev poljubno gostimo, dobimo v limiti

$$\lim_{\substack{\Delta \Omega_i \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega_j \rightarrow 0}} \widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}.$$

Na sliki (2.6) je primer vmesnega izračuna matričnega elementa $M_{26,29}$ za kvadratno ploščo s 36 deli. V danem koraku smo razdelili vsakega od kvadratkov (v splošnem Ω_i in Ω_j iz (2.24)) na 8×8 delov ($\Delta\Omega_i$ oziroma $\Delta\Omega_j$), od katerih sta dva označena. Na sliki je označena tudi razdalja med delčkoma, ker nastopa v integracijski funkciji.

S postopnim drobljenjem območja integracije dobimo vedno natančnejše ocene za vrednost integrala. Do konca ne bi prišli nikoli, zato smo zaporedne približke ekstrapolirali s pomočjo racionalne ekstrapolacije.[25] Primer uporabe racionalne ekstrapolacije je v tabeli 2.1.

i	n_i	n_i^2	S/n_i^2	$\widehat{\mathcal{M}}_i$	\mathcal{M}_i	ϵ_i
1	2	4	$2.5000 \cdot 10^{-5}$	10.62773768	10.62773768	1.00000000
2	4	16	$6.2500 \cdot 10^{-6}$	10.93565225	11.04229406	0.00965758
3	6	36	$2.7778 \cdot 10^{-6}$	11.02151484	11.10063603	0.00085168
4	8	64	$1.5625 \cdot 10^{-6}$	11.05809909	11.11339628	0.00015550
5	12	144	$6.9444 \cdot 10^{-7}$	11.08870053	11.11817439	0.00004174
6	16	256	$3.9062 \cdot 10^{-7}$	11.10113773	11.11986982	0.00001049
7	24	576	$1.7361 \cdot 10^{-7}$	11.11118236	11.12065458	0.00000362
8	32	1024	$9.7656 \cdot 10^{-8}$	11.11514159	11.12098047	0.00000101
9	48	2304	$4.3403 \cdot 10^{-8}$	11.11826533	11.12113886	0.00000073

Tabela 2.1: Primer izračuna matričnega elementa za dve sosednji kvadratni ploskvi ploščine $S_1 = S_2 = S = 0.01$. Obe ploskvi na i -tem koraku pri integriranju delimo na kvadratke ploščine S/n_i^2 iz katerih dobimo oceno $\widehat{\mathcal{M}}_i$. V zadnjih dveh stolpcih so ocene za prave vrednosti \mathcal{M}_i in ocena napake ϵ_i , ki ju dobimo s postopkom racionalne ekstrapolacije.

2.7 Algoritem

Izračun enega prevodnega kanala sestoji iz treh delov: izbire začetnih parametrov, centralnega dela (kjer računamo porazdelitev naboja in žrebamo naslednje člene v kanalu) in zaključka. V postopku se skriva računaska zanka, znotraj katere obstoječemu kanalu dodamo en člen. Dodamo ga, kakor nam narekuje žreb, žreb pa je odvisen od električnih razmer in posplošene temperature izolatorja. Izračun električnega polja in naboja smo napravili tako, kot da bi šlo za elektrostatični problem. Kot smo že povedali: pri gradnji členjenega prevodnega kanala v naravi vsakemu dodatku člena sledi $50 \mu s$ pavza in s tem upravičujemo kvazistatični pristop, ko pred vsakim žrebom novega člena porazdelitev naboja na prevodnikih – tudi kanalu – izračunamo z enačbami elektrostatike.

Algoritem zapišemo na naslednji način:

1. PREDPRIPRAVA

Vhodni podatki morajo vsebovati podatke o prevodnikih v sistemu, njihove geometrijske podatke in električni potencial vsakega od njih. Pred začetkom zanke določimo tudi parameter $\psi = W_E/kT$. Ker potrebujemo pri gradnji kanala parameter kT , pred prvim korakom izračunamo začetno kapacitivnost. To storimo z izračunom naboja na prevodnikih in izžrebamo prvi člen prevodnega kanala (opisano v naslednji točki).

2. IZRAČUN NABOJA IN ŽREB NOVEGA ČLENA (GLAVNA ZANKA)

- (a) določimo naboje na prevodnikih in členih kanala
- (b) določimo točke v obstoječem kanalu, kjer smemo dodati nov člen
- (c) za vsako od točk določimo kandidate, kamor se strela lahko nadaljuje, in jim določimo utežno funkcijo (2.3)
- (d) med vsemi kandidati izžrebamo naslednji člen in ga dodamo h kanalu
- (e) če je zadnji dodani člen od drugega prevodnika oddaljen manj kot dolžina člena, izstopimo iz zanke, sicer nadaljujemo pri točki (a)

3. ZAKLJUČEK

Zadnji dodani člen spojimo z drugim prevodnikom po najkrajši poti.

Poglavje 3

Rezultati

Med rezultate smo vključili preizkusne primere, s pomočjo katerih smo izločili možnost preprostih napak, kot na primer neohranjanje naboja, neskladnje z analitičnimi izračuni kapacitivnosti in podobno. Ostali rezultati so povezani z razmejitvijo območja parametra W_E/kT , ki prostor rešitev loči na vroče (pijančeva hoja), hladne (rast prebojnega kanala v smeri električne poljske jakosti) in vmesno področje. Pri različnih vrednostih parametra $W_E/kT \in [50, 5000]$ smo – zaradi žrebanja večkrat – izračunali prebojne poti

- za različne vrste prevodnikov: večina je bila narejena za krogelno iskrišče (dve enaki prevodni krogli), ploščati kondenzator (dve enaki simetrično postavljeni kvadratni plošči) in nekatere netipične postavitve prevodnikov,
- pri ohranjanju konstantne napetosti med prevodniki in prevodnim kanalom in pri ohranjanju začetnega naboja za vsako od razporeditev prevodnikov.

Na koncu poglavja smo primerjali slike dejanskih strel z rezultati modela.

3.1 Preizkusna primera

Med preizkusne primere smo vključili tiste, ki niso direktno povezani z modeliranjem prevodnega kanala, a pomagajo pri razumevanju rezultatov ali z njimi preverjamo pravilnost izračunov:

- kapacitivnost ploščatega kondenzatorja smo izbrali za oceno pravilnosti izračuna matričnih elementov, ki vključujejo večkratno integracijo,
- model krogelnega iskrišča je namenjen preverjanju izračuna matričnih elementov, poleg tega pa smo z njim ocenili, kako vpliva na dobljene vrednosti v modelu predpostavljena natančnost izračuna.

Kapacitivnost ploščatega kondenzatorja

Za zračni ploščati kondenzator iz dveh vzporednih kvadratnih plošč s podatki $a = 4$ m in $d = 0.02$ m dobimo s približkom za idealni ploščati kondenzator kapacitivnost

$$C_{0.02} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \approx 7080 \text{ pF} ,$$

za razmik $d = 0.2$ m pa

$$C_{0.2} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \approx 708 \text{ pF} .$$

V tabeli 3.1 so vrednosti za kapacitivnost obeh kondenzatorjev na podlagi modela, ki smo jih izračunali z relativno napako $\epsilon = 10^{-3}$ pri integraciji in racionalni ekstrapolaciji.

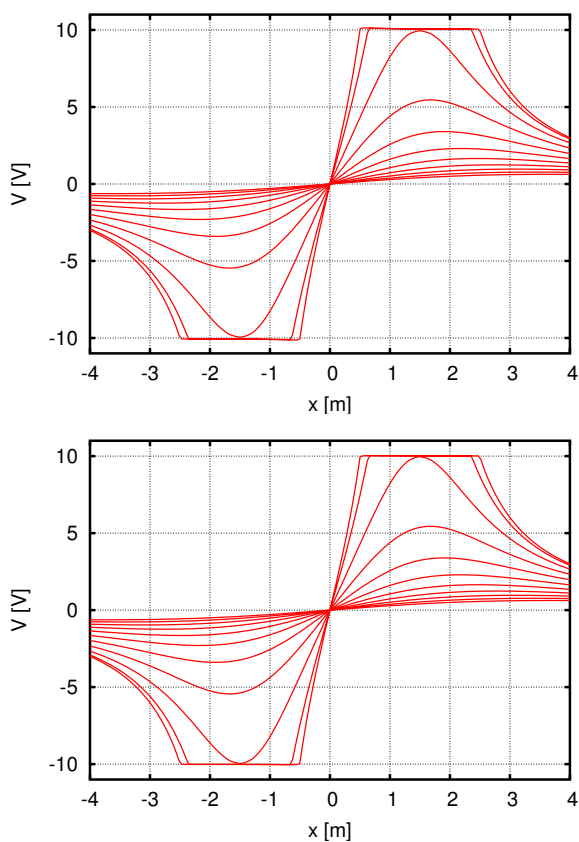
$d = 0.02$ m			$d = 0.2$ m		
k_d [m]	N_d^2	$C_{0.02}$ [pF]	k_d [m]	N_d^2	$C_{0.2}$ [pF]
0.500	64	5638	0.500	64	814
0.300	169	7353	0.300	169	815
0.250	256	7412	0.250	256	816
0.200	400	6845	0.200	400	818
0.125	1024	7303	0.125	1024	821
0.100	1600	7290	0.100	1600	822

Tabela 3.1: Kapacitivnost ploščatega kondenzatorja s površino plošč $S = 16 \text{ m}^2$ ter razmikom $d = 0.02$ m (levo) in razmikom $d = 0.2$ m (desno). Kapacitivnosti idealnih kondenzatorjev takih razmikov sta $C_{0.02} = 7080 \text{ pF}$ in $C_{0.2} = 708 \text{ pF}$.

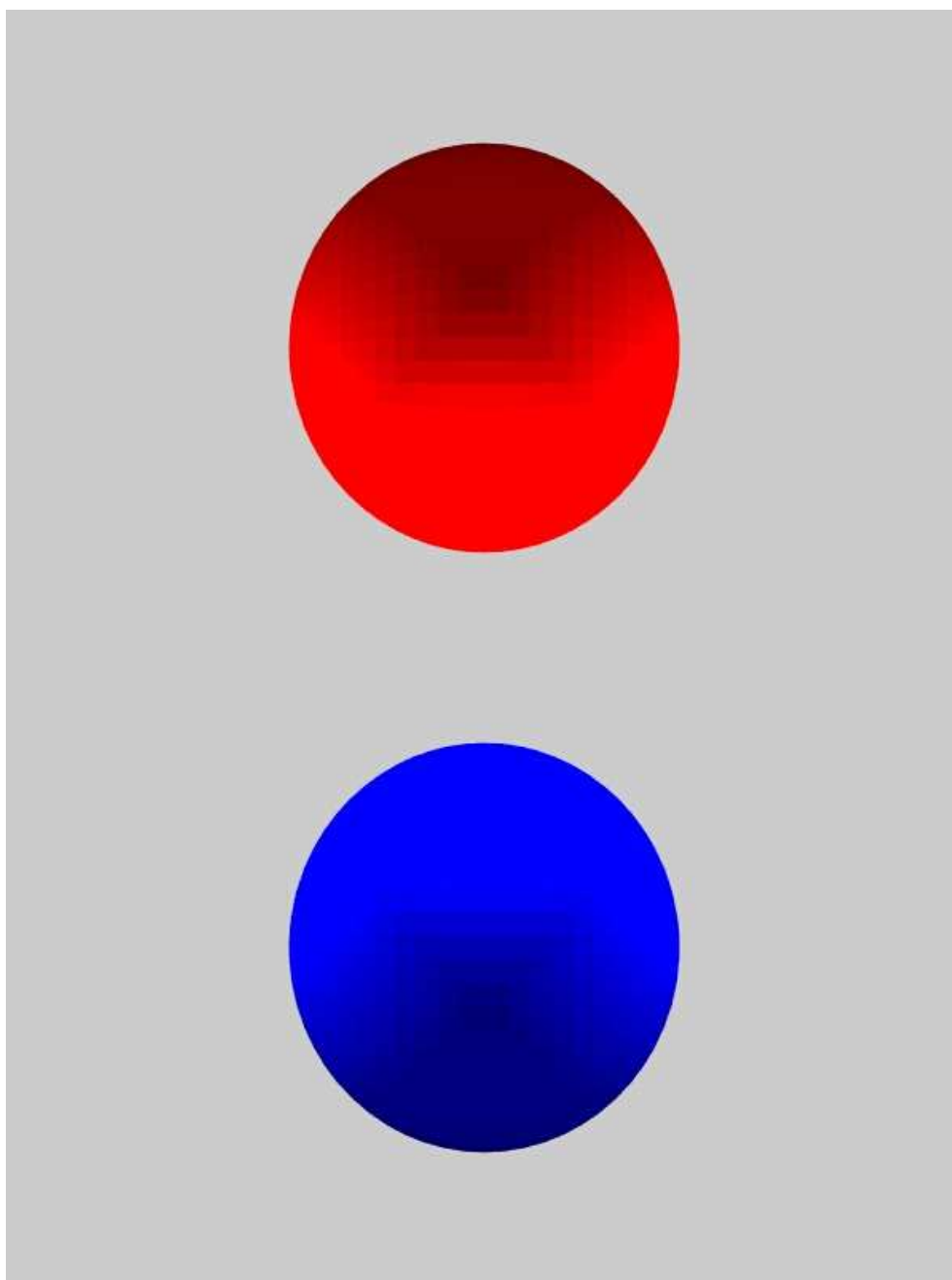
V tabeli sta k_d karakteristična dolžina v modelu in N_d^2 število elementov s konstantno ploskovno gostoto na vsaki od plošč. Primer: pri $k_d = 0.5$ m in stranici $a = 4$ m je število elementov na vsaki od plošč $N_d^2 = (a/k_d)^2 = 64$.

Model krogelnega iskrišča

Model iskrišča sestavimo iz dveh prevodnih krogel polmera $R = 1$ m, ki ju postavimo na razdaljo $d = 3$ m. Krogli imata središči v kartezičnem koordinatnem sistemu na osi x v točkah $(\pm 1.5, 0, 0)$ m. Potenciala krogel naj bosta ± 10 V v električno zaključnem sistemu. Grafična predstavitev gostote naboja je na sliki 3.2. Rezultat smo preverili z izračunom potenciala v okolici krogel, ki je na sliki 3.1.



Slika 3.1: Potencial za krogelno iskrišče smo izračunali na enajstih daljicah $(x, 0, z)$ m, kjer je $x \in [-4.0, +4.0]$ m ter $z \in [0.0, 5.0]$ po korakih $\Delta z = 0.5$ m. Zgornji graf predstavlja rezultat pri računski napaki $\epsilon = 10^{-2}$, spodnji pri $\epsilon = 10^{-3}$. Daljici $z = 0.0$ m in $z = 0.5$ m potekata znotraj krogel, zato je prava vrednost za potencial v tistem delu ± 10 V. Iz grafov vidimo, da je račun z manjšo predpisano natančnostjo točnejši.



Slika 3.2: Krogelno iskrišče. Intenziteta barv je sorazmerna površinski gostoti naboja, površino vsake od krogel sestavlja 512 delov. Slika je obrnjena za -90 kotnih stopinj v smeri urinega kazalca, potencial po prereznih daljicah je na sliki 3.1.

3.2 Preboji v krogelnem iskrišču

Prvi sklop modelnih prebojev predstavljajo preboji v iskrišču. Model sestavimo iz dveh prevodnih krogel polmera $R = 1$ m na medosni razdalji $d = 6$ m, ki imata središči v kartezičnem koordinatnem sistemu na osi x v točkah $(\pm 3, 0, 0)$ m. Začetna potenciala krogel sta ± 10 V.

Prevodni kanal se gradi po delih, na vsakem koraku po člen, vsak člen pa ima štiri dele – manjše tulce. Preden se člen doda, se na vseh prevodnih delih določi količina naboja, površinsko porazdeljen naboj na kroglah in linijsko na delih vseh členov.

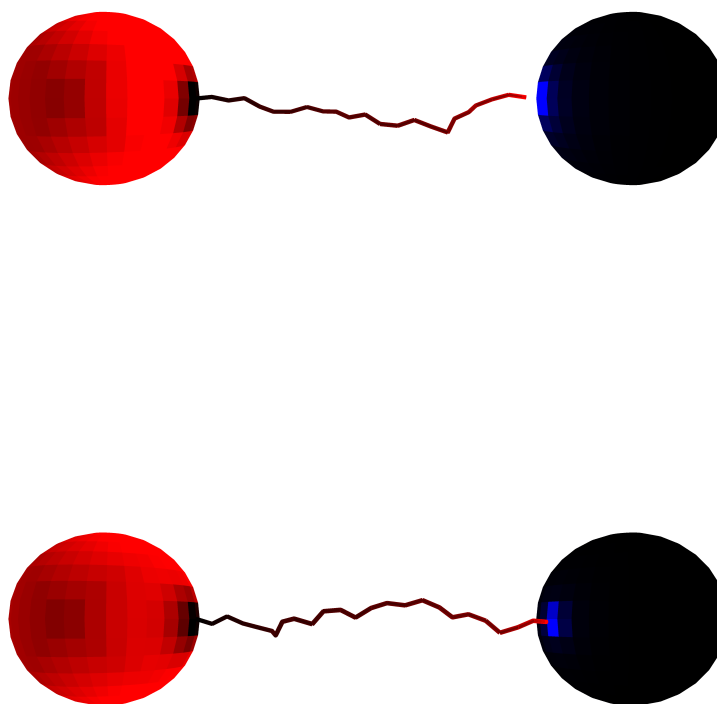
Iz simulacij preberemo na vsakem koraku naslednje rezultate:

- obliko prevodnega kanala,
- porazdelitev naboja na prevodnikih in kanalu,
- potenciale prevodnikov,
- število cepitev,
- razdaljo od začetka gradnje,
- elektrostatično energijo sistema $\frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$.

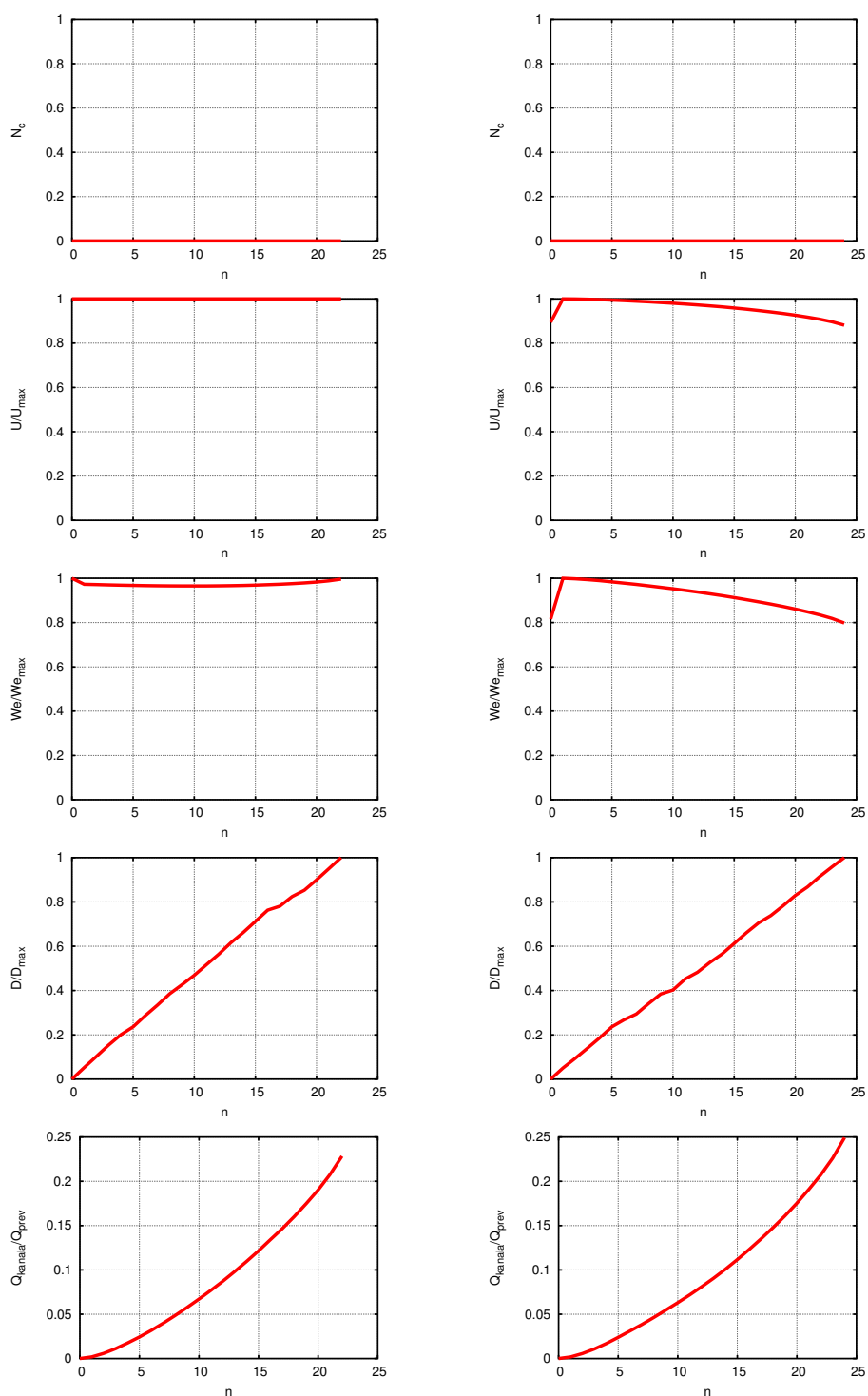
Rezultati so prikazani v nadaljevanju.

Na podlagi rezultatov lahko vrednosti parametra W_E/kT omejimo na tiste, ki dajo cepljeni kanal in zaključek na prevodniku nasprotnega potenciala, vendar v smiselnem številu korakov. Ločimo še dva primera:

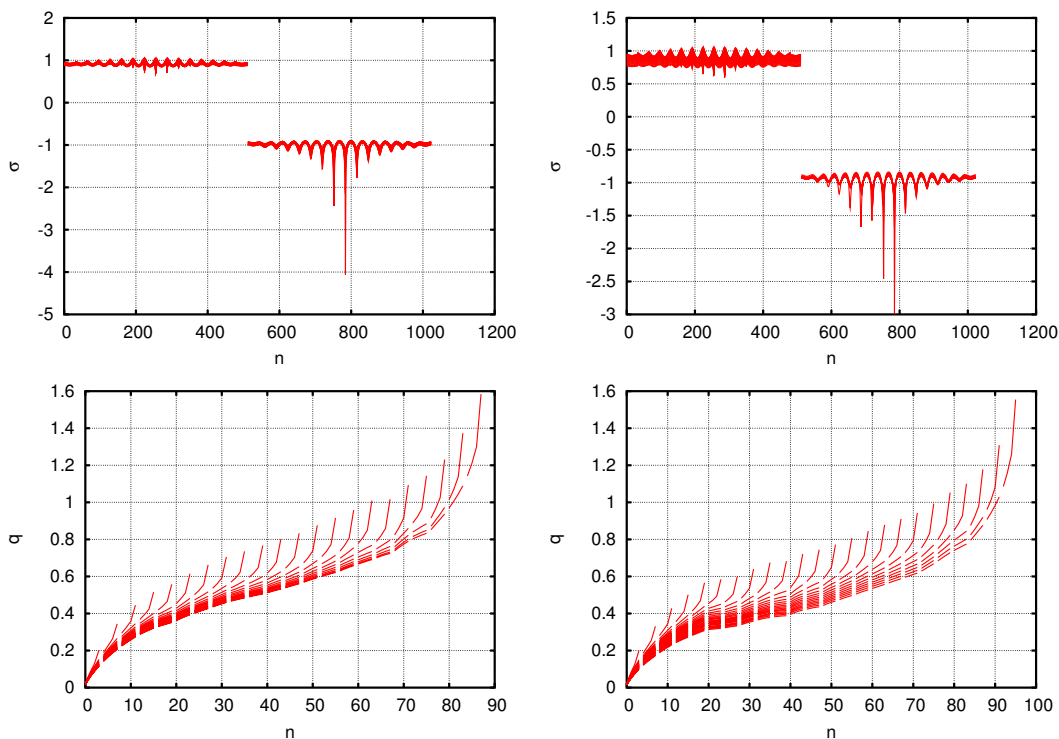
- **preboj pri konstantni napetosti** $\Delta U = \text{konst.}$:
med prevodnikoma je vir napetosti, ki ves čas simulacije zagotavlja konstantno napetostno razliko, pri čemer se spreminja potencial prevodnikov in naboj na elementih,
- **preboj pri konstantnem naboju** $Q_k = \text{konst.}$:
naboj na vsakem od prevodnikov se ohranja, za tistega, iz katerega raste prevodni kanal, se ohranja vsota naboja na prevodniku in prevodnem kanalu.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 1000$ 

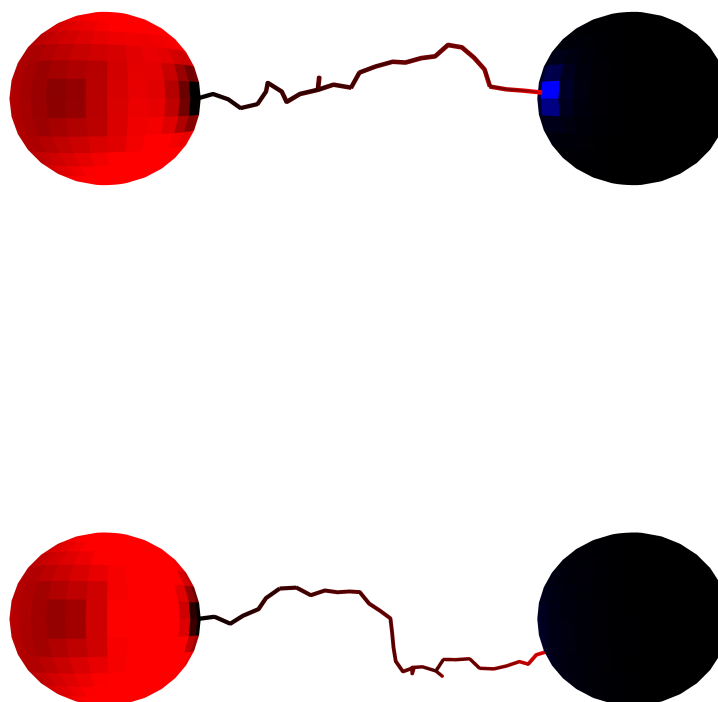
Slika 3.3: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima kroglama za $W_E/kT = 1000$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.4 in 3.5.



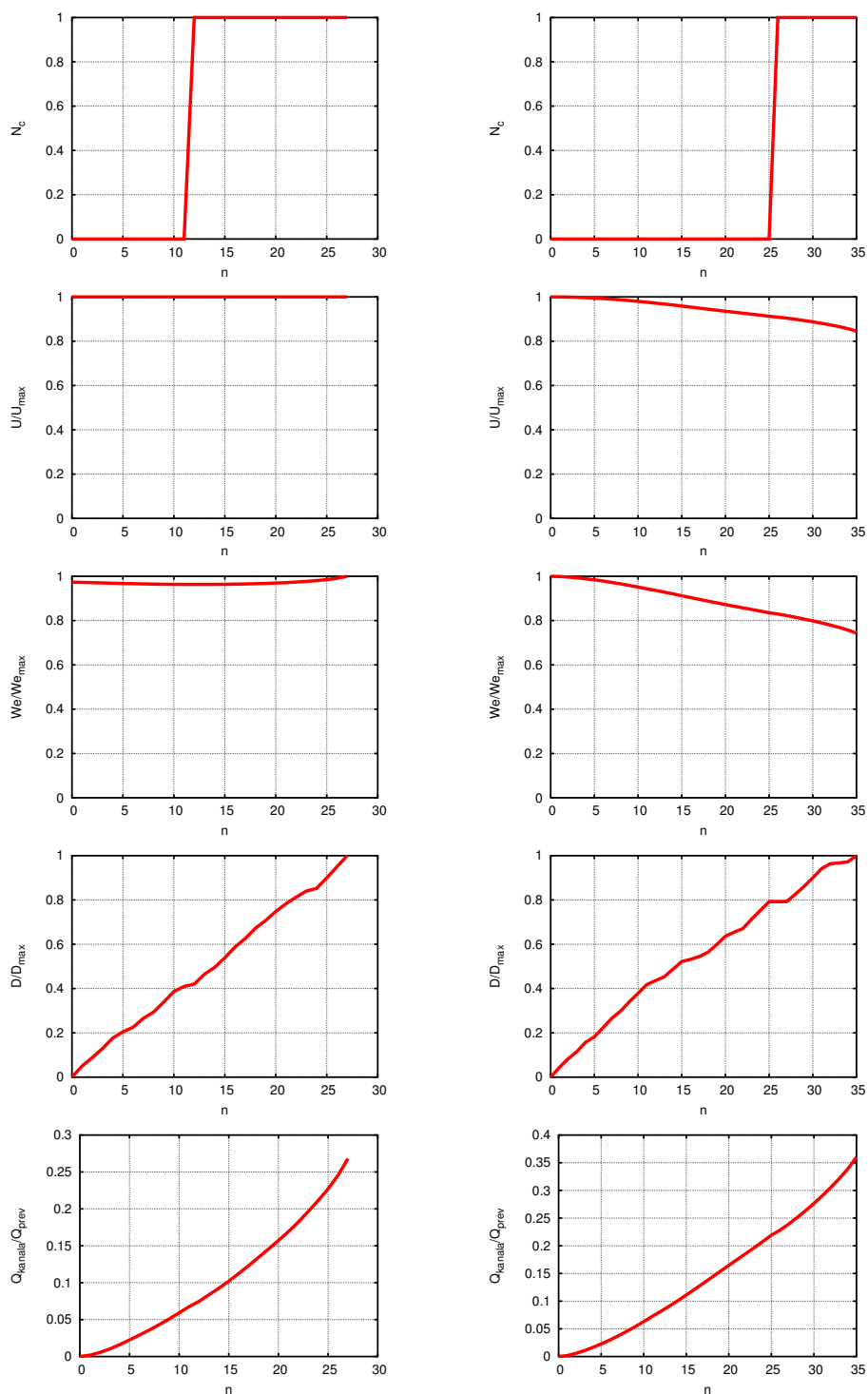
Slika 3.4: Preboja na sliki 3.3, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



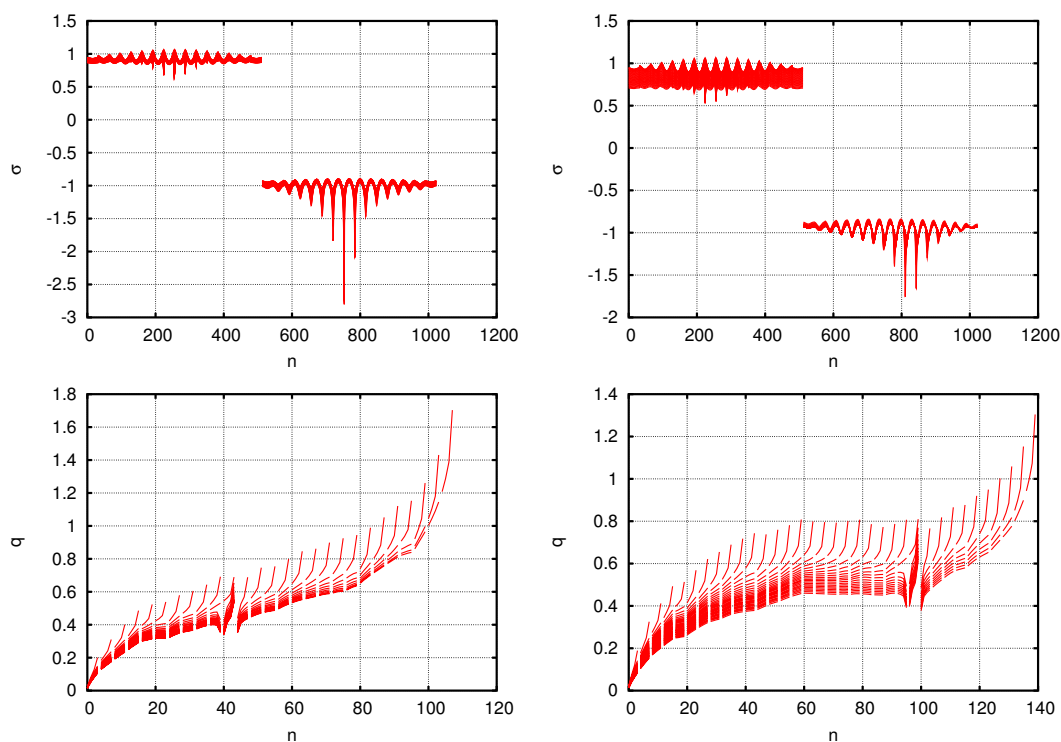
Slika 3.5: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.3. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 500$ 

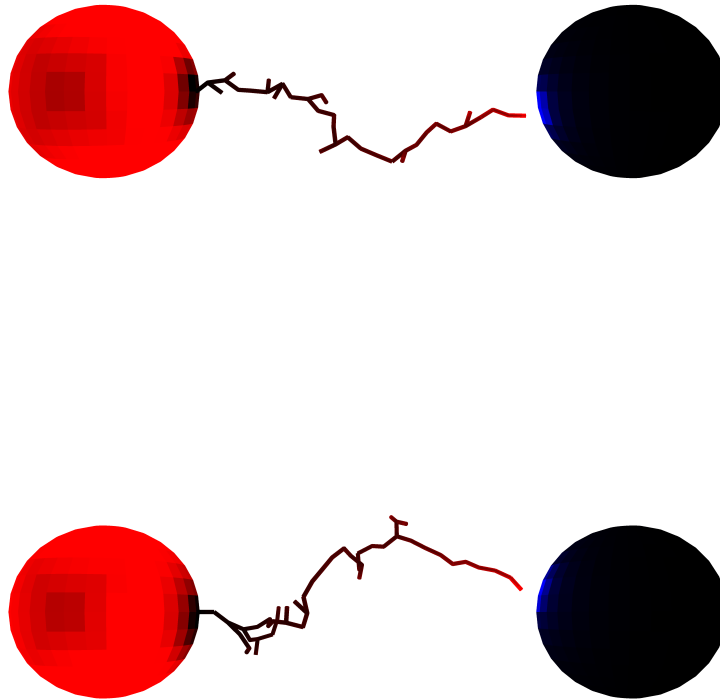
Slika 3.6: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima kroglama za $W_E/kT = 500$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.7 in 3.8.



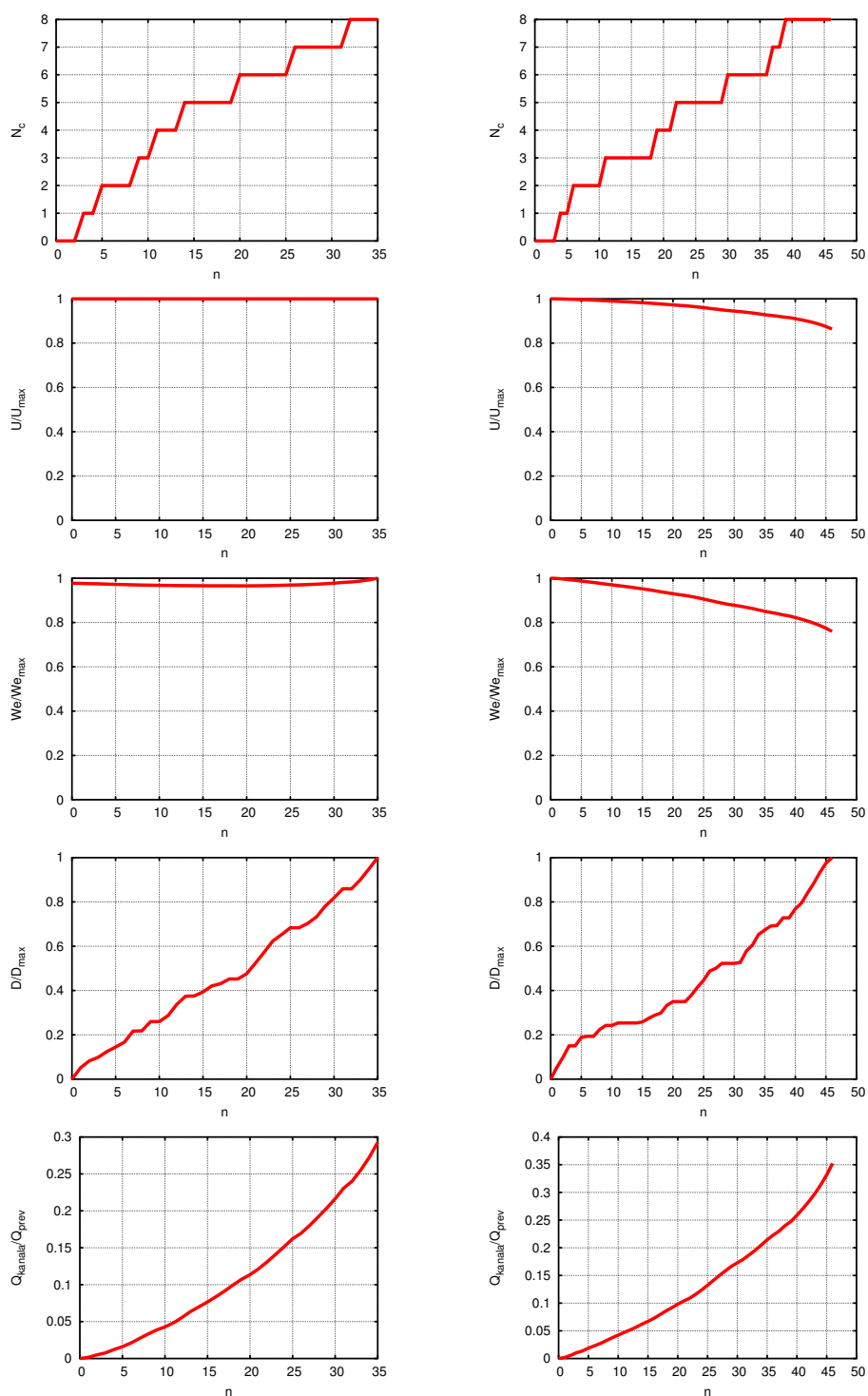
Slika 3.7: Preboja na sliki 3.6, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanal}}/Q_{\text{prev}}$.



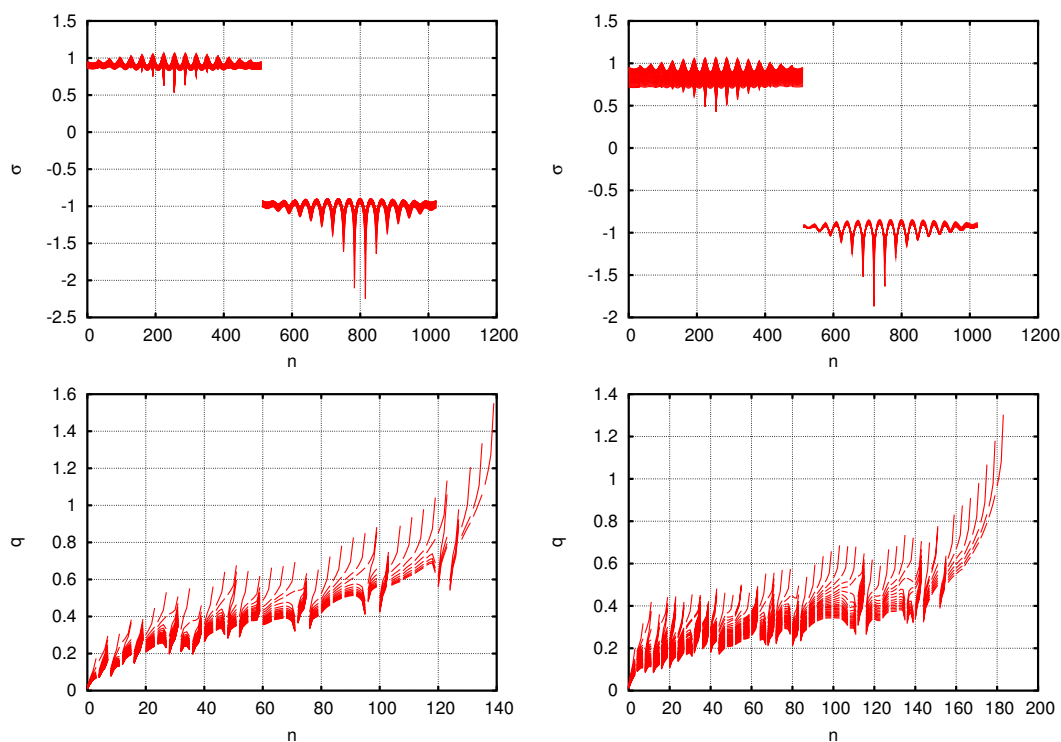
Slika 3.8: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.6. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 250$ 

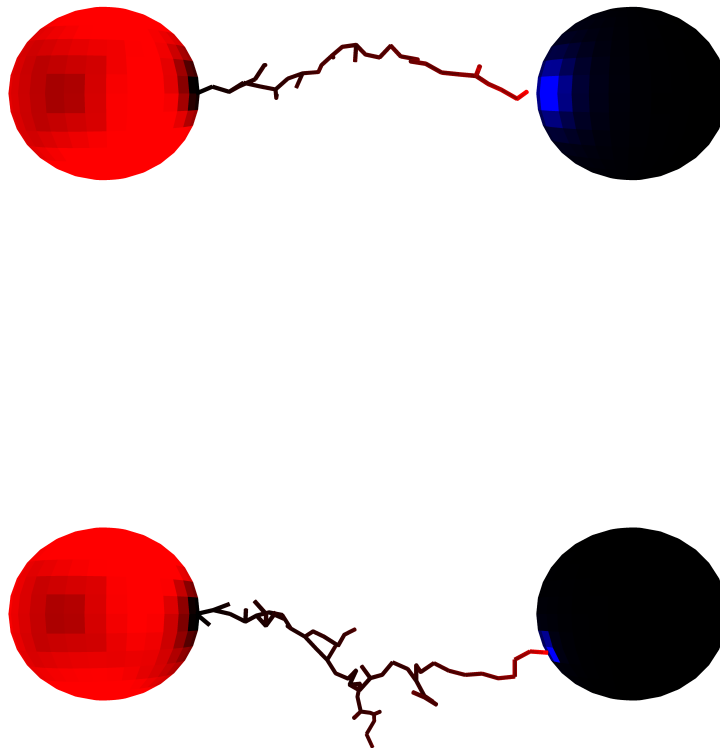
Slika 3.9: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima kroglama za $W_E/kT = 250$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.10 in 3.11.



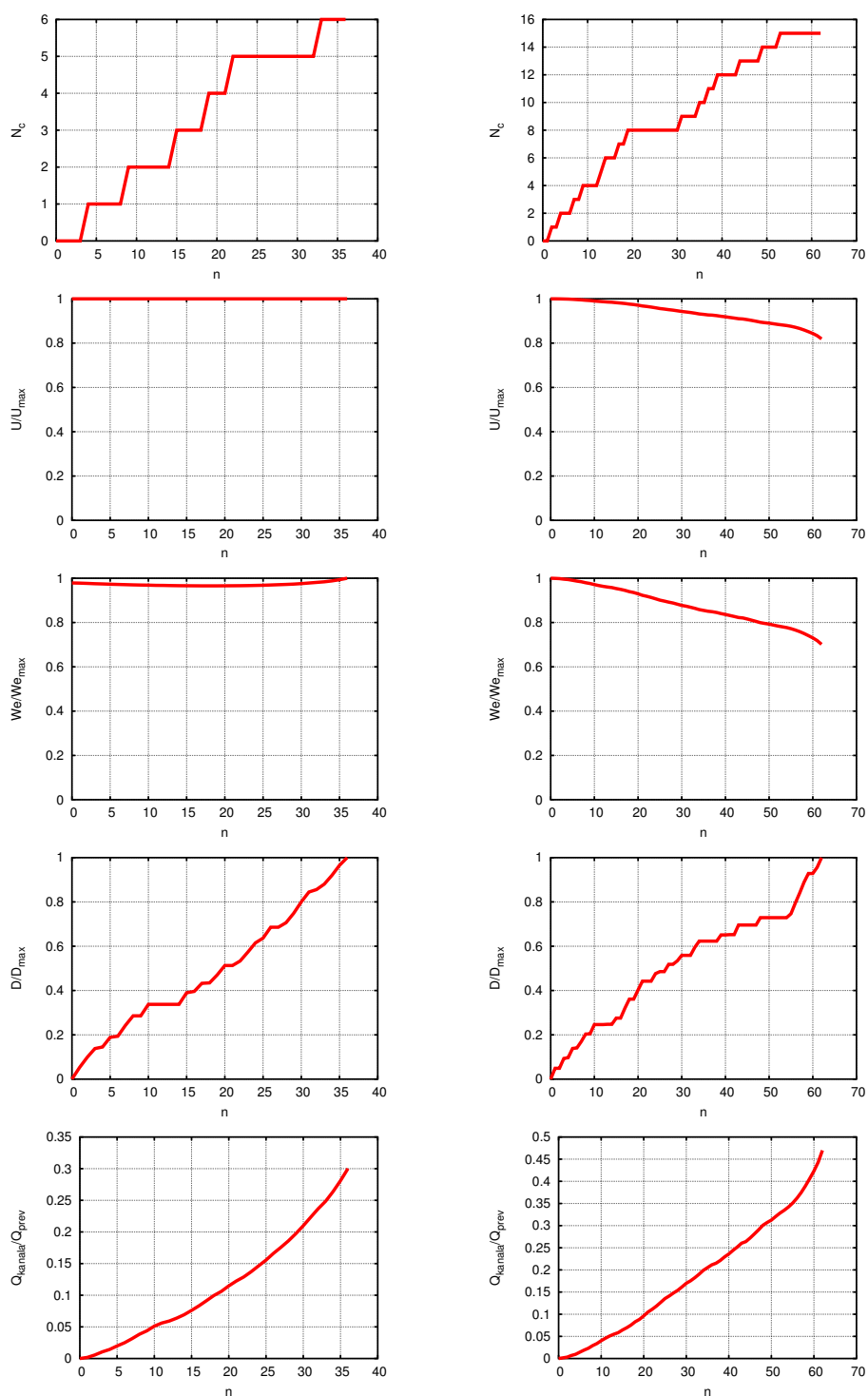
Slika 3.10: Preboja na sliki 3.9, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



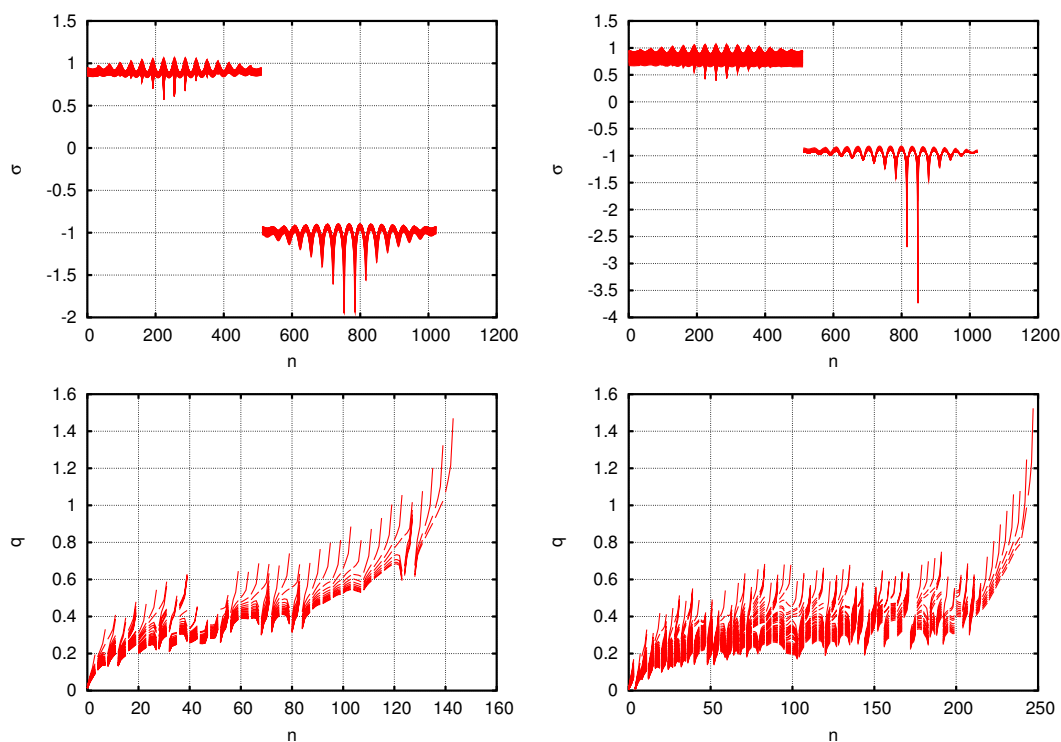
Slika 3.11: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.9. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 200$ 

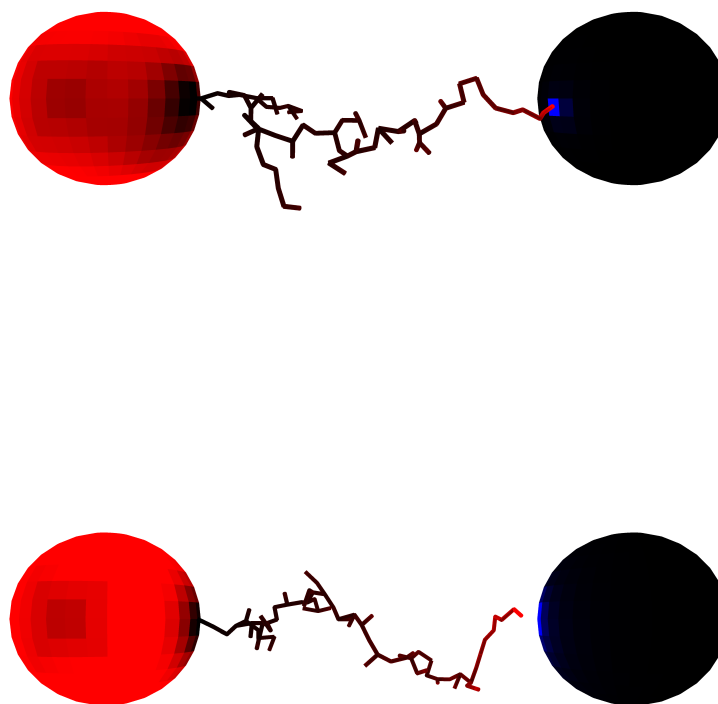
Slika 3.12: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima kroglama za $W_E/kT = 200$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.13 in 3.14.



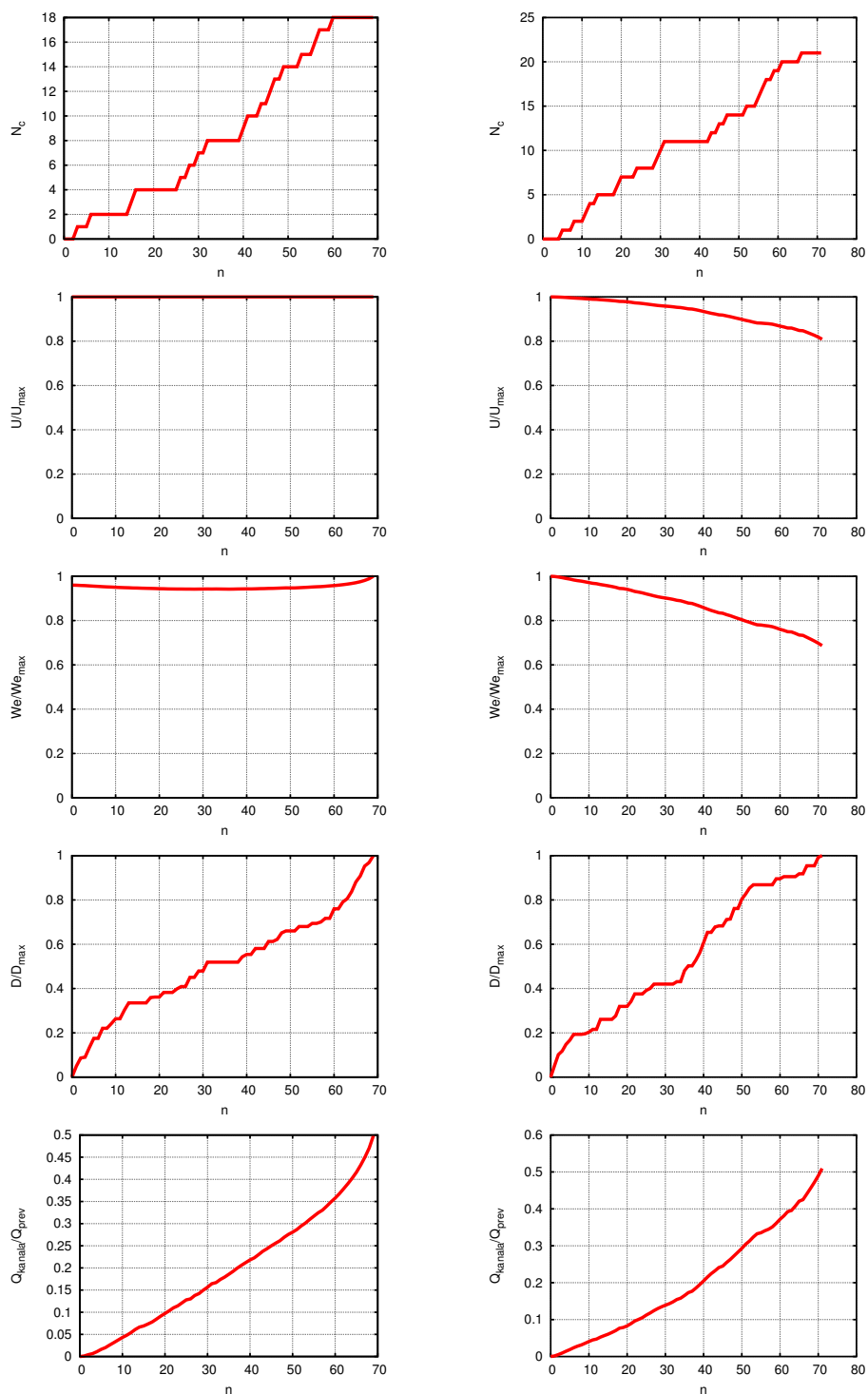
Slika 3.13: Preboja na sliki 3.12, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{max} , energija We/We_{max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja Q_{kanala}/Q_{prev} .



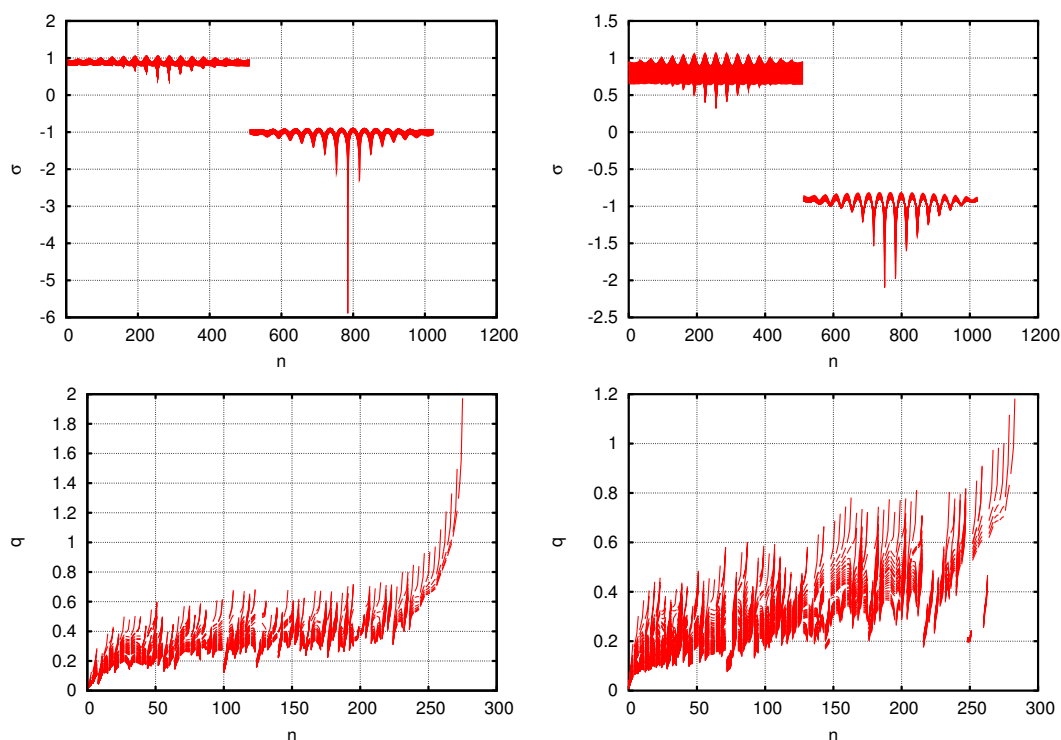
Slika 3.14: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.12. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 160$ 

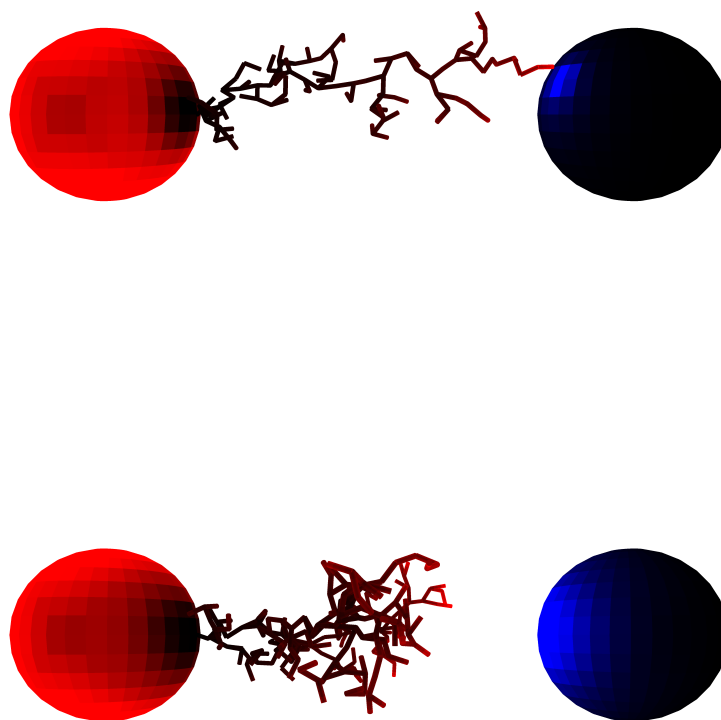
Slika 3.15: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima kroglama za $W_E/kT = 160$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.16 in 3.17.



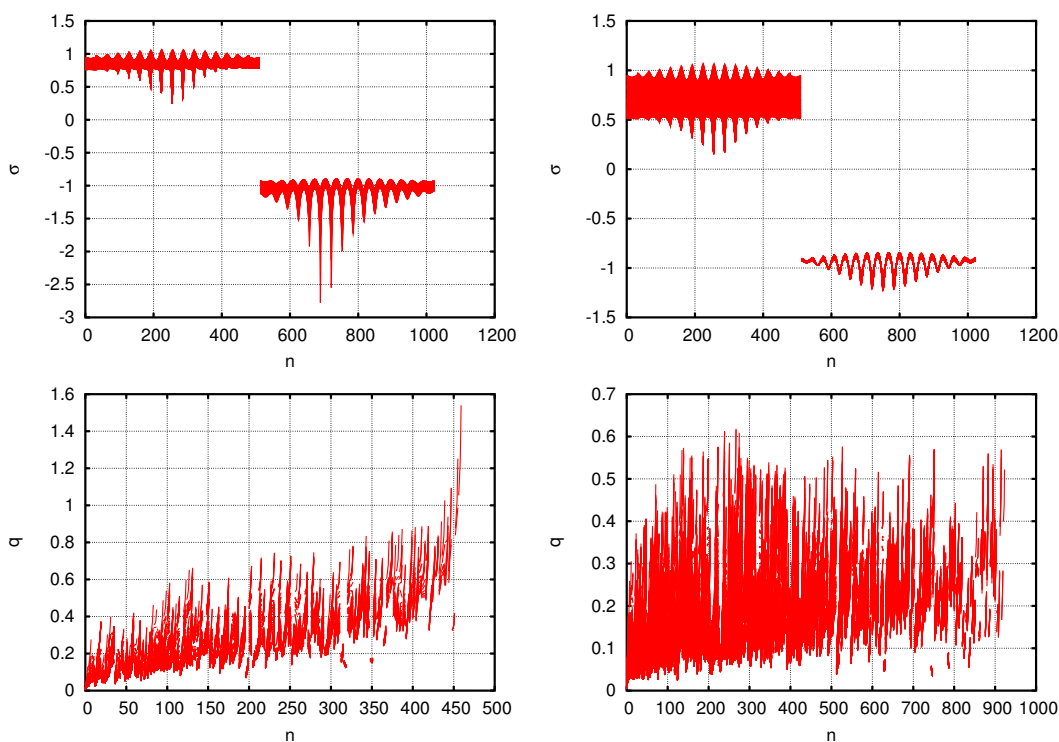
Slika 3.16: Preboja na sliki 3.15, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



Slika 3.17: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.15. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 100$ 

Slika 3.18: Primer izgradnje prevodnega kanala v sistemu dveh prevodnih krogel za vrednost $W_E/kT = 100$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj).



Slika 3.19: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.18. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

3.3 Preboji v ploščatem kondenzatorju

V drugem sklopu prebojev predstavljamo preboje v ploščatem kondenzatorju. Model sestavljata dve vzporedni kvadratni plošči stranice $a = 2$ m na razdalji $h = 3$ m. Plošči imata središči v kartezičnem koordinatnem sistemu na osi z v točkah $(\pm 0, 0, 1.5)$ m. Začetna potenciala plošč sta ± 10 V.

Prevodni kanal se gradi enako kot pri iskrišču, le začetek je na robu plošče, kjer je tudi polje največje. Začetna točka preboja ni predpisana, ampak je rezultat modela (tako tudi pri iskrišču iz dveh krogel, kjer pa je po izbiri polaritete taka točka ena sama).

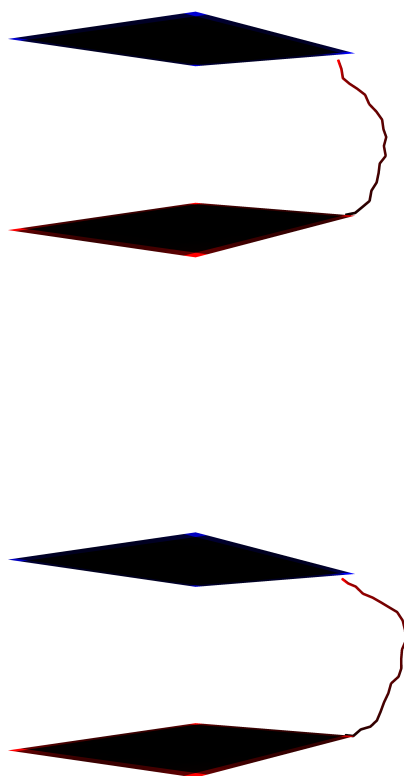
Iz simulacij preberemo na vsakem koraku naslednje rezultate (glej tudi preboj v iskrišču):

- obliko prevodnega kanala,
- porazdelitev naboja na prevodnikih in kanalu,
- potenciala prevodnikov,
- število cepitev,
- razdaljo od začetka gradnje,
- elektrostatično energijo sistema $\frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$.

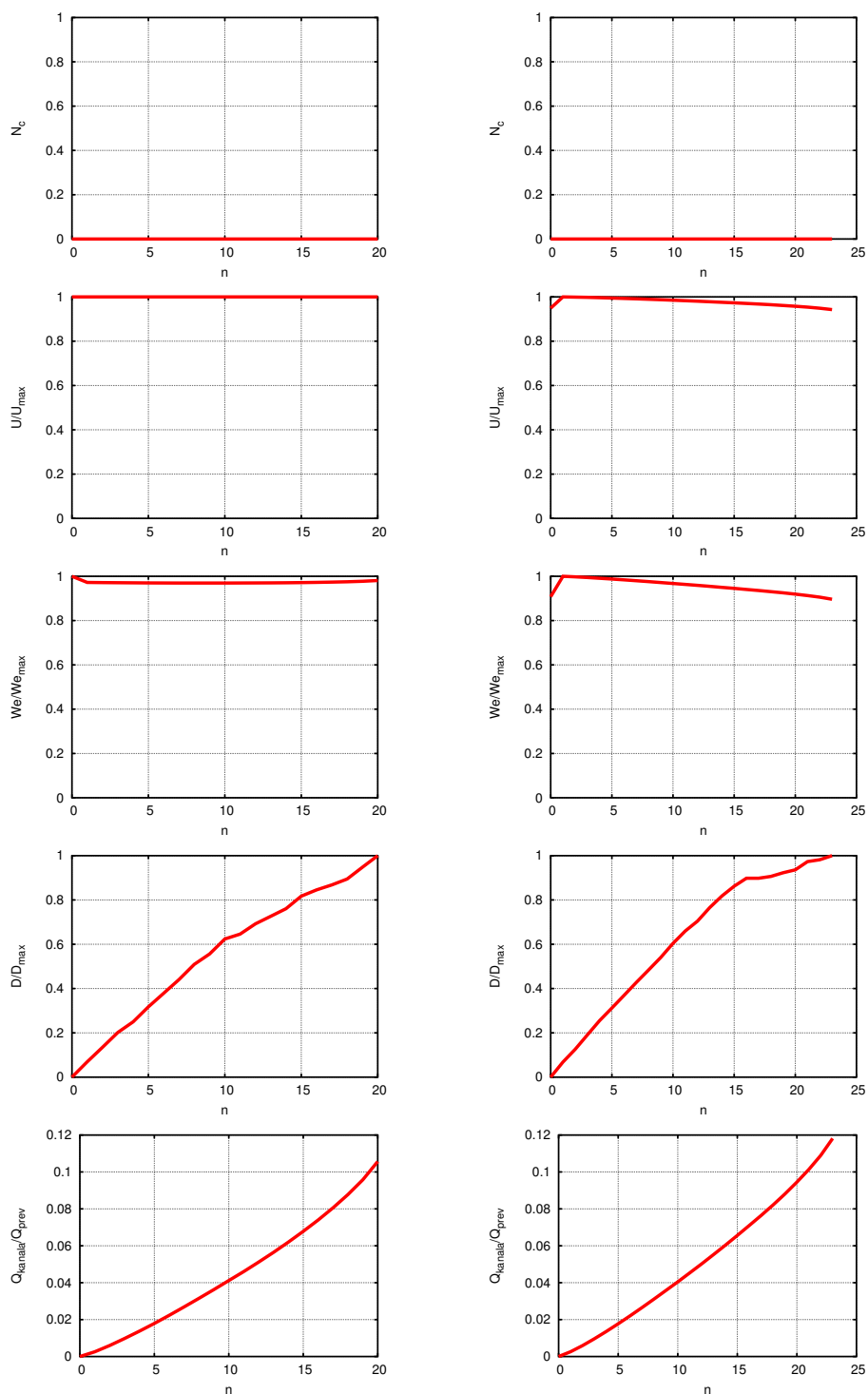
Rezultati so prikazani v nadaljevanju.

Na podlagi testiranja omejimo vrednosti parametra W_E/kT na tiste, ki dajo cepljeni kanal in zaključek na prevodniku nasprotnega potenciala, vendar v smiselnem številu korakov. Ločimo še dva primera (kot pri iskrišču):

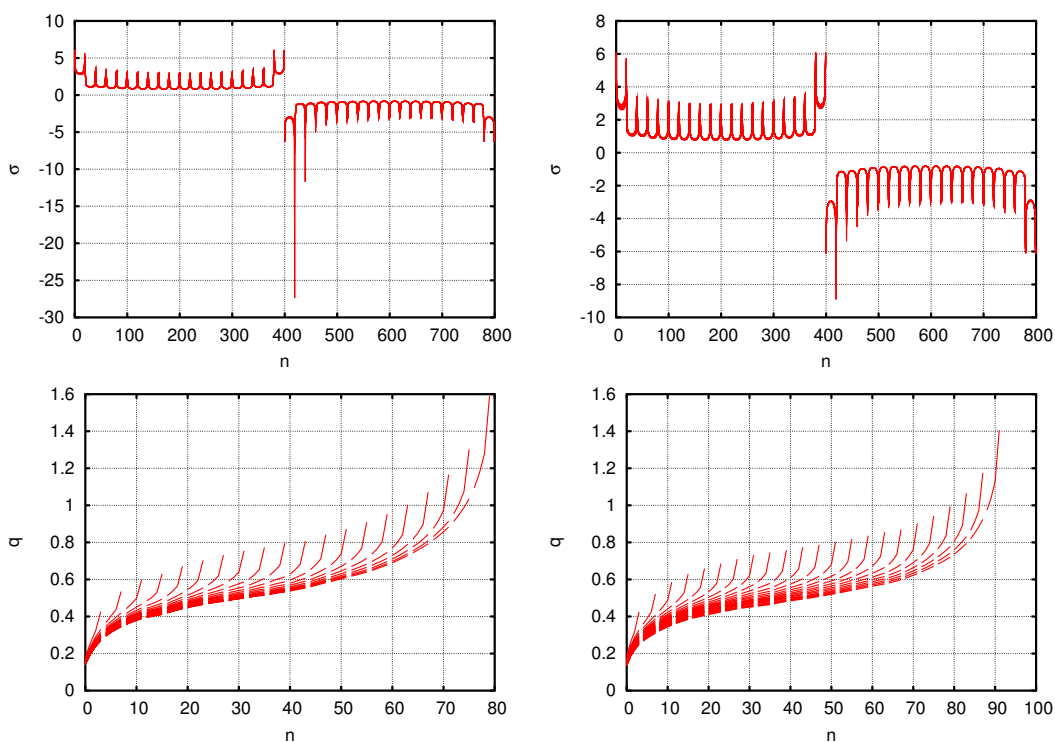
- **preboj pri konstantni napetosti** $\Delta U = \text{konst.}$:
med prevodnikoma je vir napetosti, ki ves čas simulacije zagotavlja konstantno napetostno razliko, ob tem da se spreminja potencial prevodnikov in naboj na elementih,
- **preboj pri konstantnem naboju** $Q_k = \text{konst.}$:
naboj na vsakem od prevodnikov se ohranja, za tistega, iz katerega raste prevodni kanal, se ohranja vsota naboja na prevodniku in kanalu.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 5000$ 

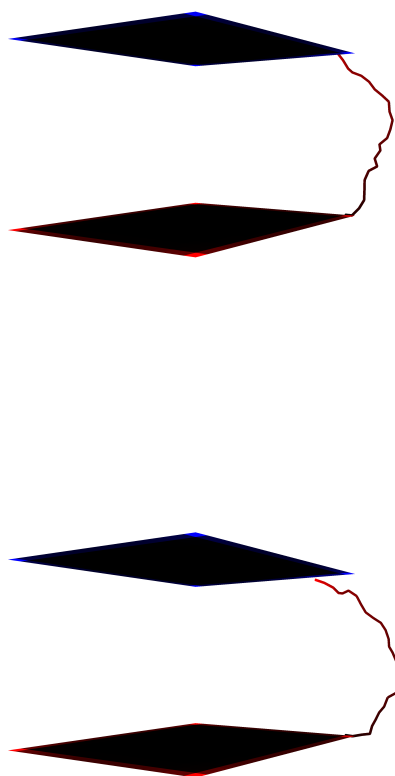
Slika 3.20: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima ploščama za $W_E/kT = 5000$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.21 in 3.22.



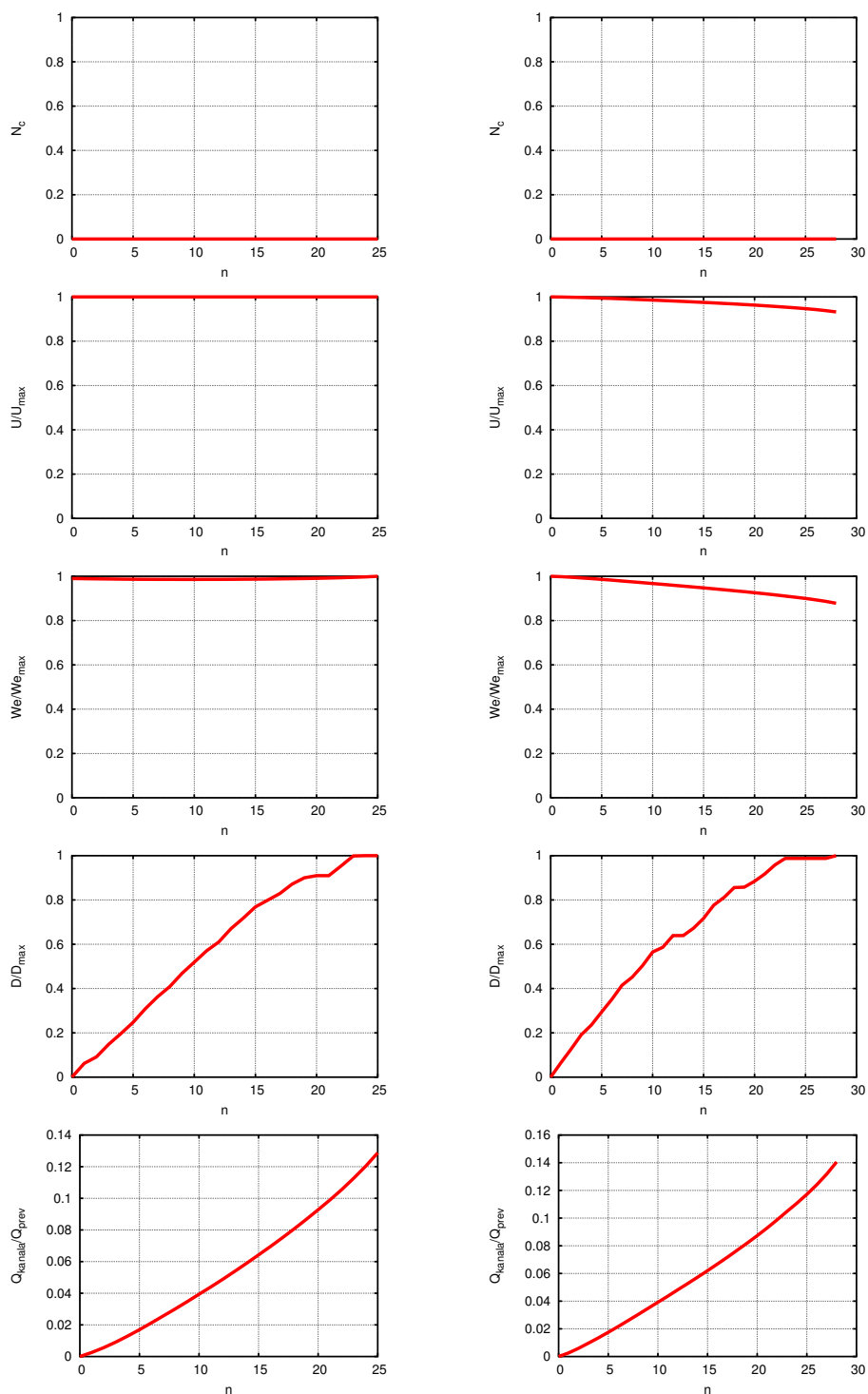
Slika 3.21: Preboja na sliki 3.20, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



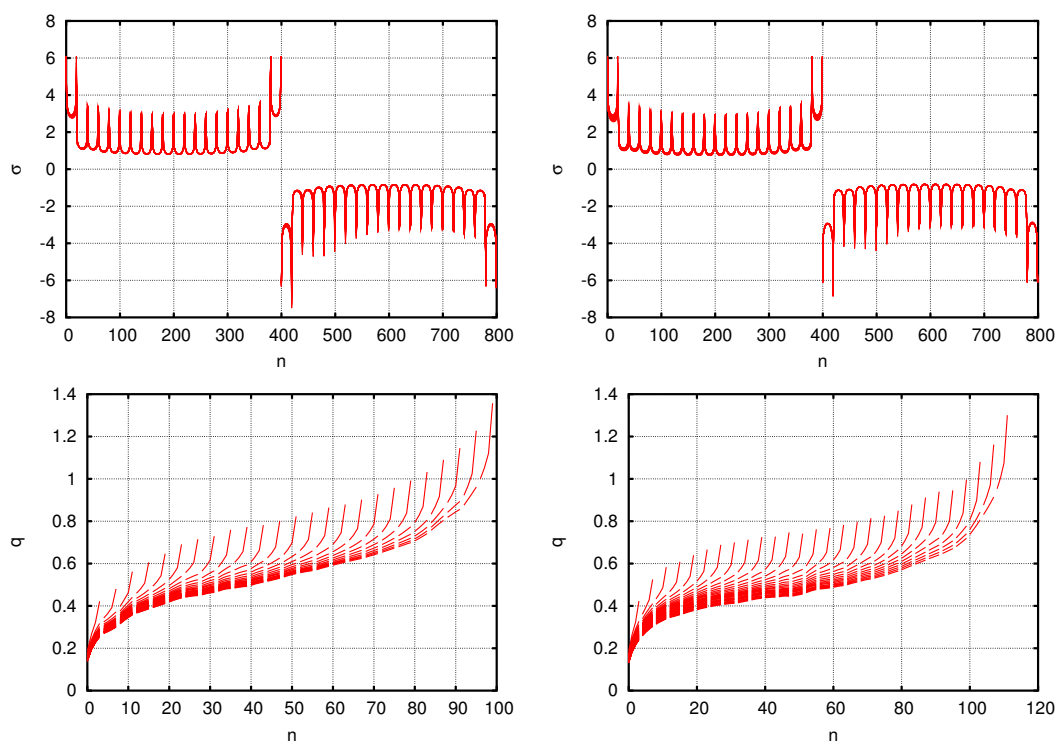
Slika 3.22: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.20. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 2000$ 

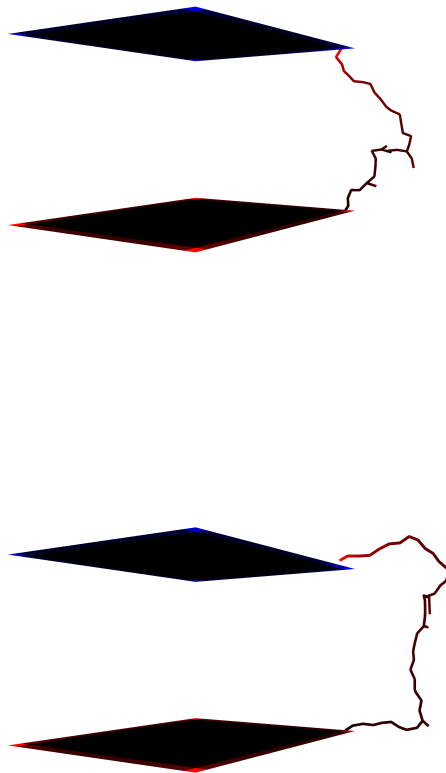
Slika 3.23: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima ploščama za $W_E/kT = 2000$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.24 in 3.25.



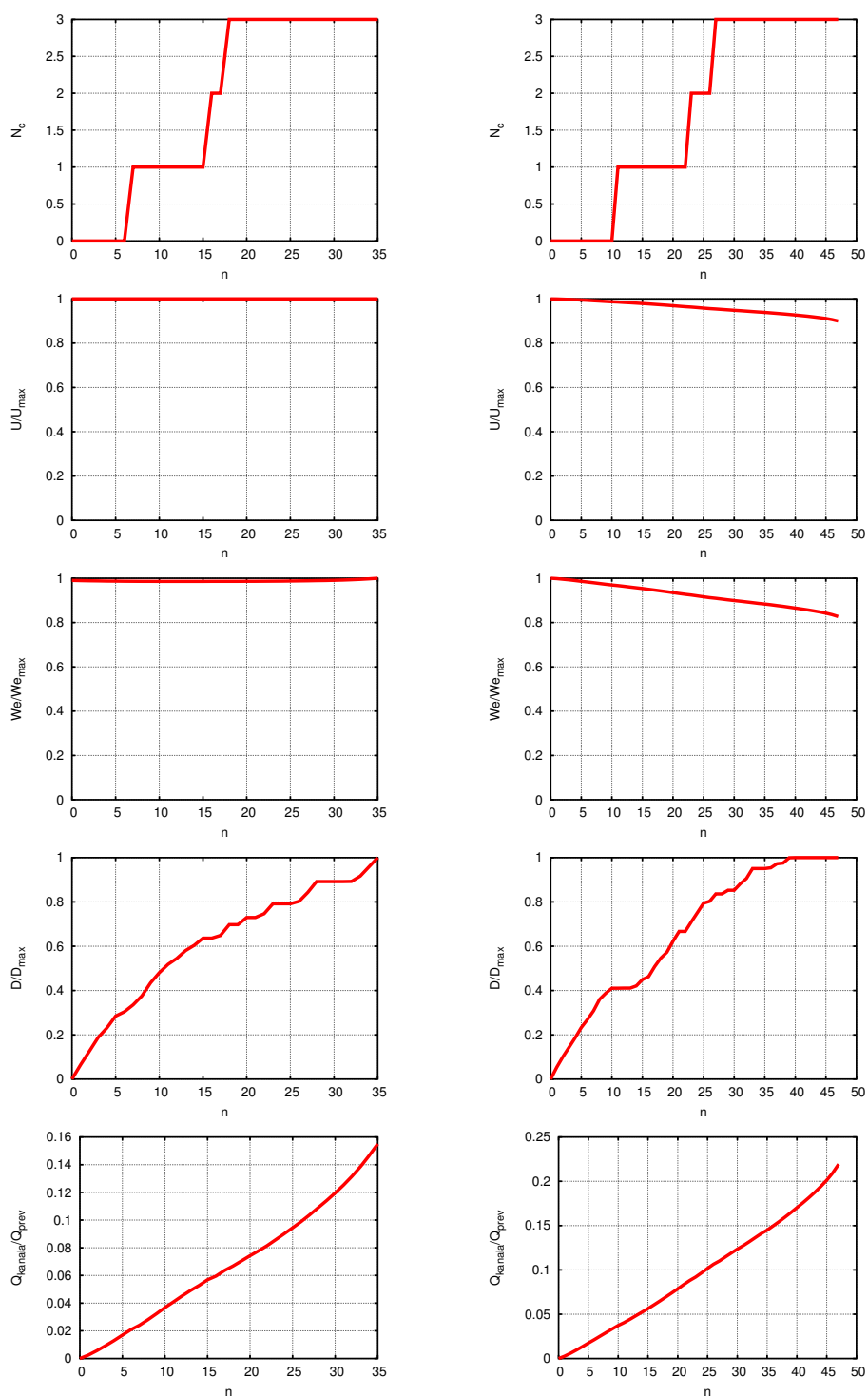
Slika 3.24: Preboja na sliki 3.23, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



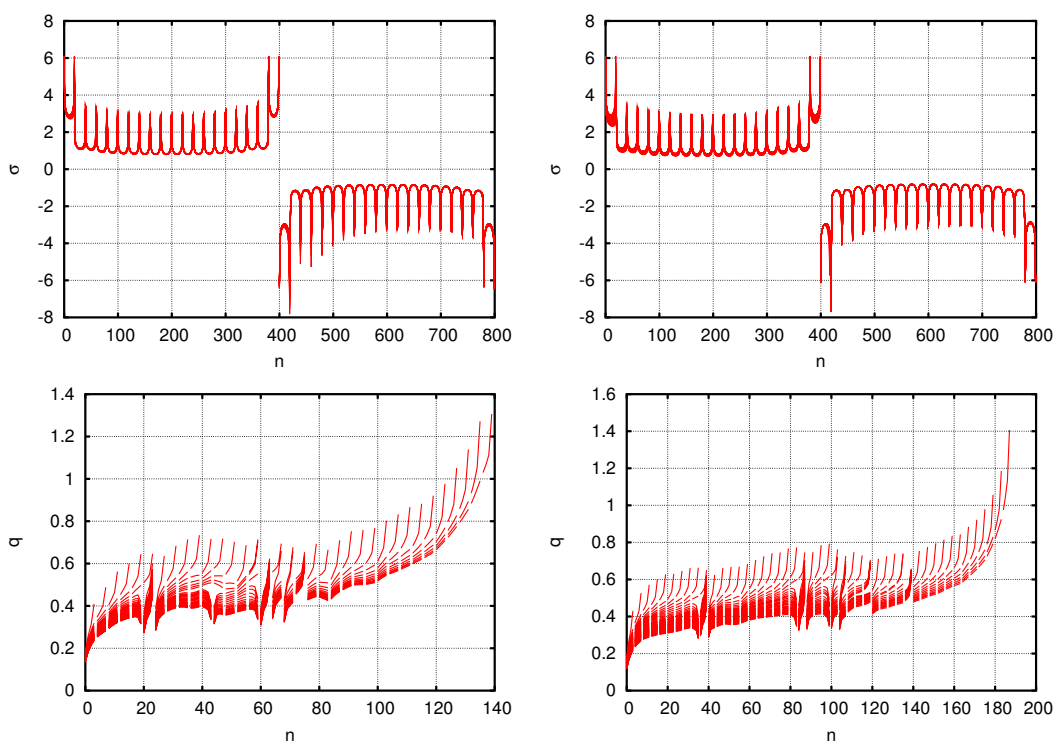
Slika 3.25: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.23. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 1000$ 

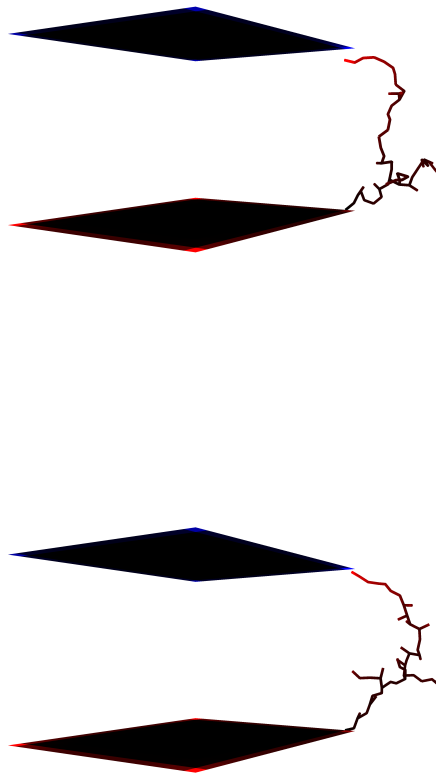
Slika 3.26: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima ploščama za $W_E/kT = 1000$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.27 in 3.28.



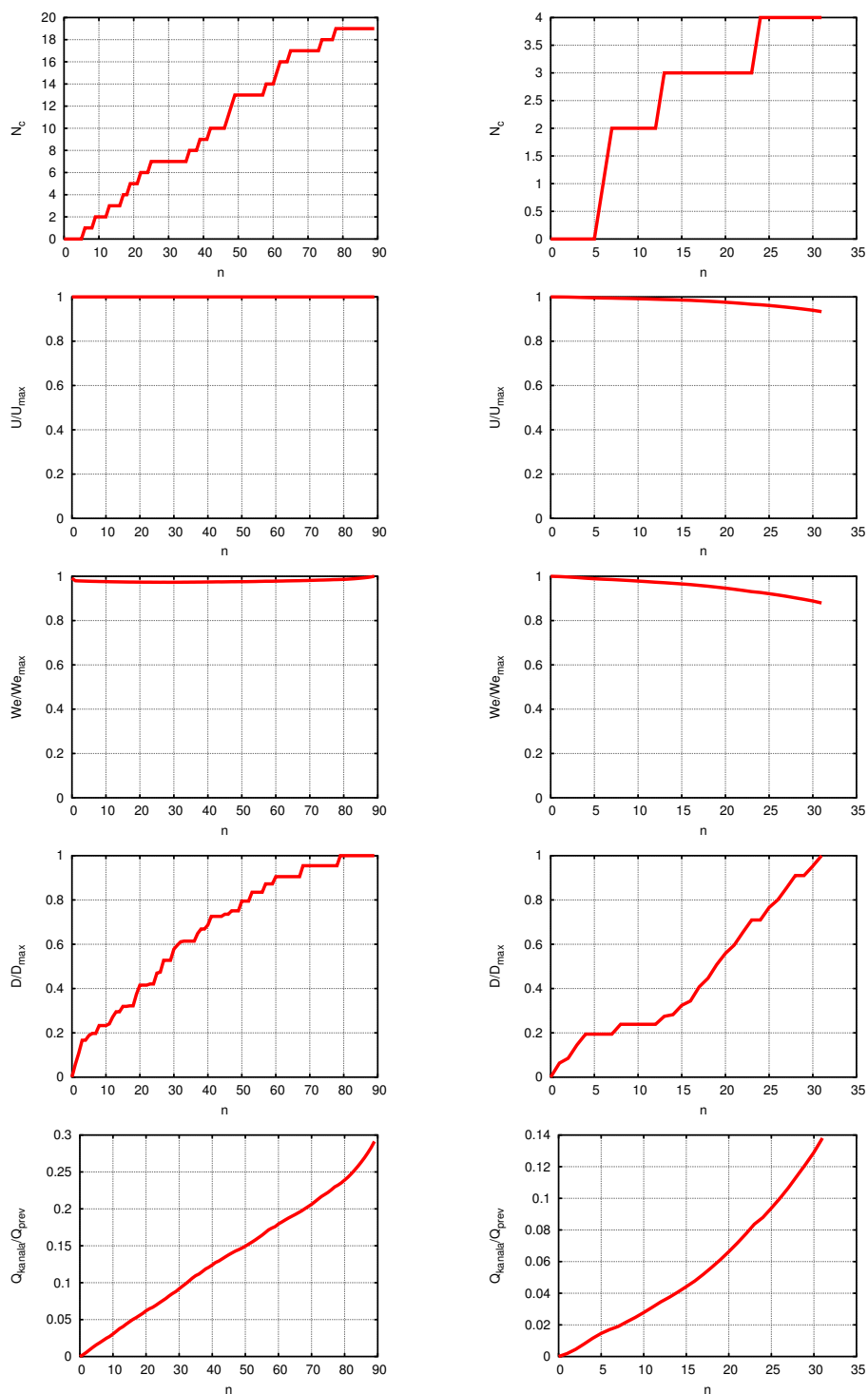
Slika 3.27: Preboja na sliki 3.26, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



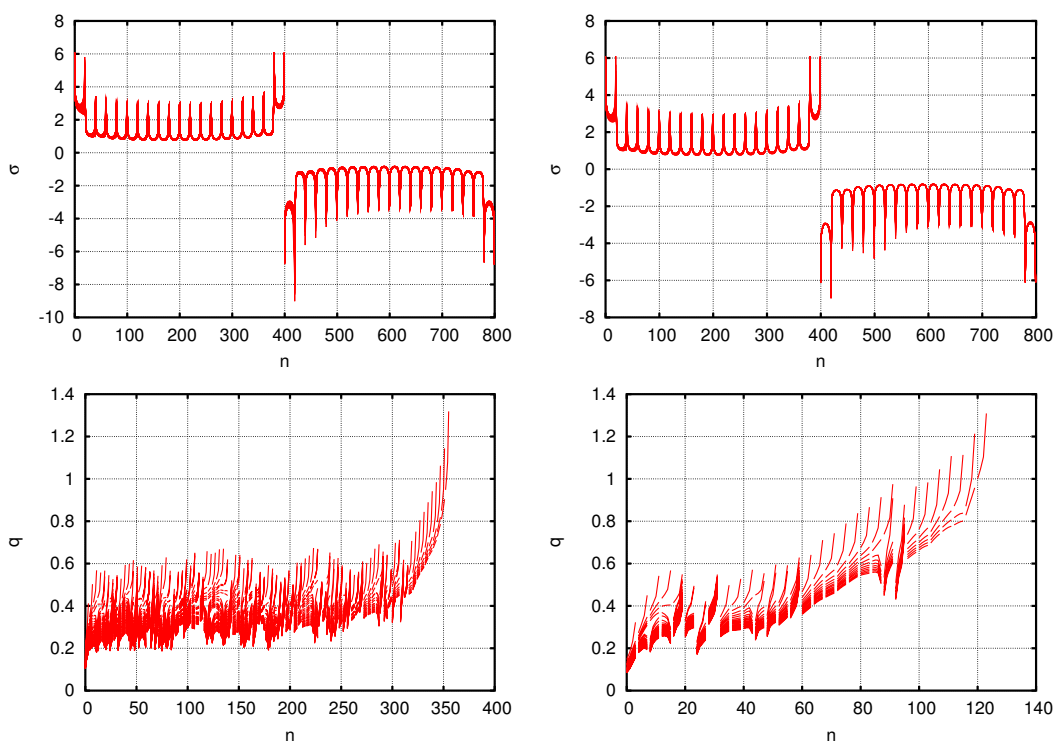
Slika 3.28: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.26. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 500$ 

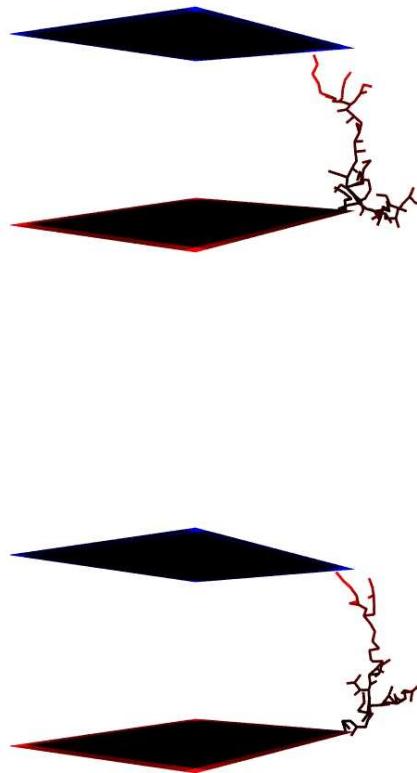
Slika 3.29: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima ploščama za $W_E/kT = 500$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.30 in 3.31.



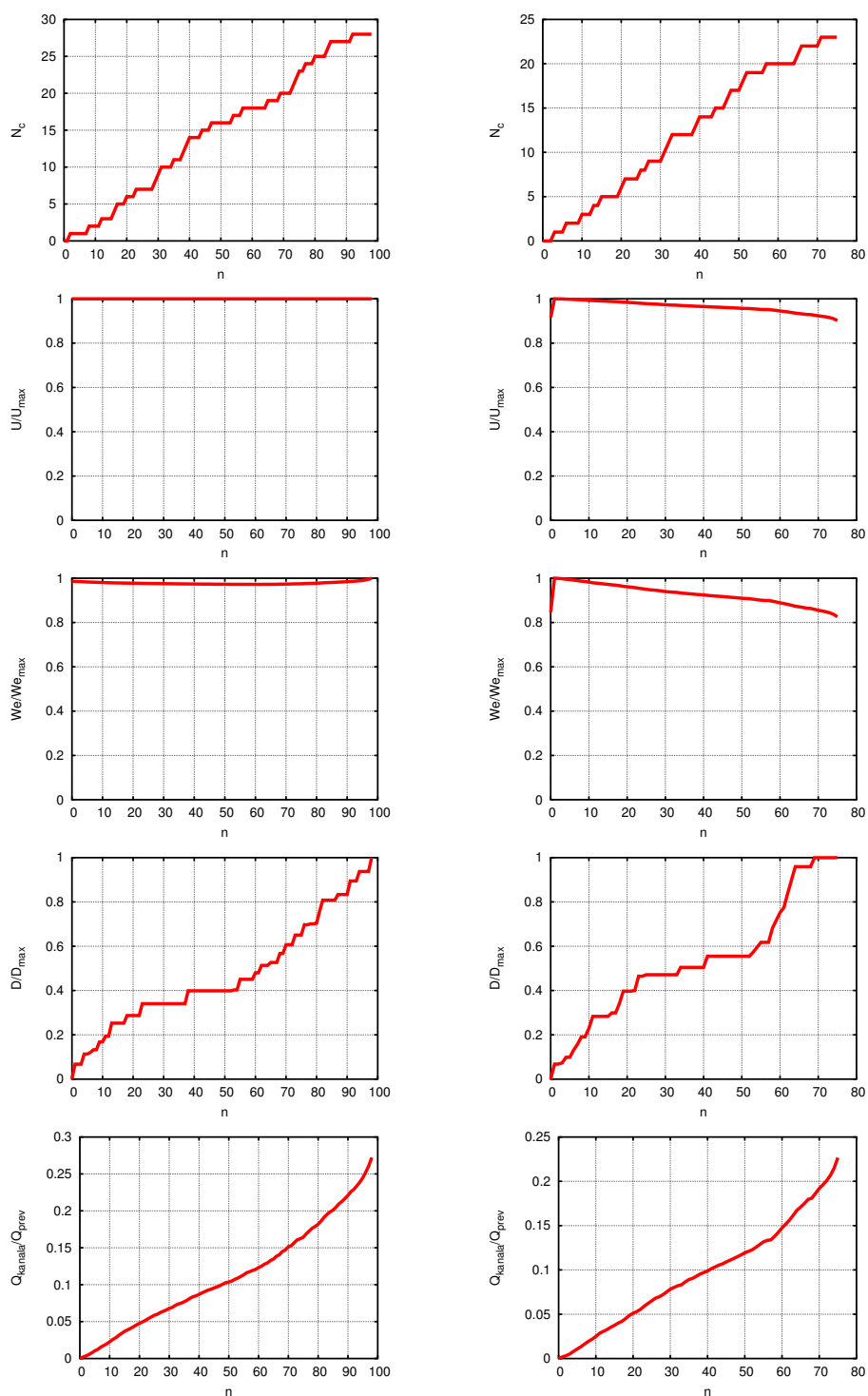
Slika 3.30: Preboja na sliki 3.29, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



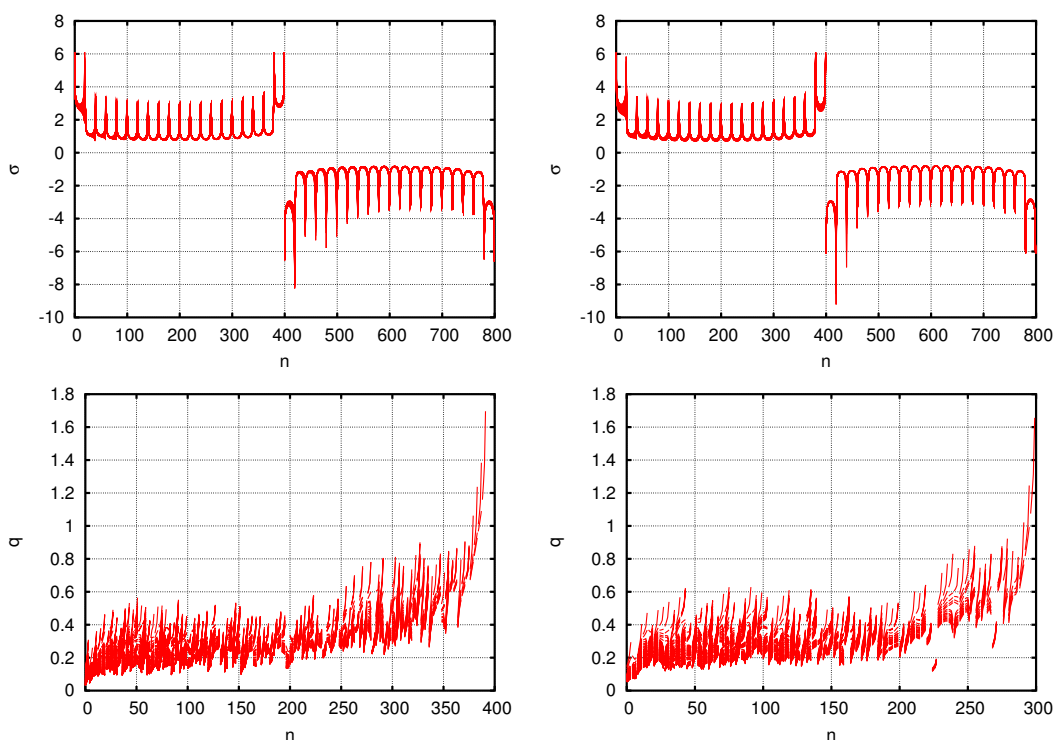
Slika 3.31: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.29. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

Preboj pri vrednosti $W_E/kT = 250$ 

Slika 3.32: Primer izgradnje prevodnega kanala med prevodnima ploščama za $W_E/kT = 250$ pri konstantni napetosti (zgoraj) in konstantnem naboju (spodaj). Spreminjanje količin med prebojem prikazujejo grafi na slikah 3.33 in 3.34.



Slika 3.33: Preboja na sliki 3.32, v levem stolpcu pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Prikaz količin v odvisnosti od števila členov kanala n : število cepitev N_c , napetost U/U_{\max} , energija We/We_{\max} , oddaljenost kanala od začetne točke D/D_{\max} in naboj na prevodnem kanalu deljen z nabojem prevodnika, iz katerega kanal izhaja $Q_{\text{kanala}}/Q_{\text{prev}}$.



Slika 3.34: Prikaz površinske gostote naboja na prevodnikih in linijske gostote na prevodnem kanalu za preboja na sliki 3.32. V levem stolpcu so vrednosti količin pri konstantni napetosti, v desnem pri konstantnem naboju. Vrednost n pomeni število prevodnih elementov, pri kanalu in prikaza q je teh nekajkrat več kot prevodnih členov. Vsakega od členov sestavljajo tipično štirje ali pet sestavnih delov. Vrednosti nabojev so nanešene na graf brez posebnega reda, po vrstnem redu, ki ga imajo pripadajoči geometrijski elementi v računalniku.

3.4 Primer kontrolne datoteke (log file)

```

Za konstantni U:
  stevilo ponovitev = 2
karaktersticna dolzina = 0.2000
  dolzina clena = 0.2000
  delov vsakega clena = 4
    psi = 5000.0000
  nkand_na_starsa = 100
  napaka = 0.0010000000
-----
Prevodnik st. 0 (kvadrat)
potencial-V0 = 10.0000
  stranica: a = 4.0000
sredisce: r0 = [ 0.0000, 0.0000,-1.5000]
  normala: nn = [ 0.0000, 0.0000, 1.0000]
sestavnih delov = 400
-----
Prevodnik st. 1 (kvadrat)
potencial-V0 = -10.0000
  stranica: a = 4.0000
sredisce: r0 = [ 0.0000, 0.0000, 1.5000]
  normala: nn = [ 0.0000, 0.0000, 1.0000]
sestavnih delov = 400

matricni elementi 0/ 1 prevodnik (kvadrat)
matricni elementi 1/ 1 prevodnik (kvadrat)
potenciali: 10.000 -10.000
Zacetna energija = 233.392258
  kT = 0.046678
s: -6.1073514 -0.8282940 0.8282940 6.1073514
q: 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000

Zacetek izgradnje kanalov:
seme[ 2.00000,-1.80000,-1.50000]
potencial semena = 10.00000

kndt: index_starsa= 0 | rr=[ 2.153,-1.920,-1.453] | V= 5.3726027 | V-Vkanal=-4.6273973 | expQdVkt= 0.1541454
==> clen: index= 1 prev= 0 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.995 -10.005
s: -6.1126556 -0.8285627 0.8278671 6.1050319
q: 0.0000000 0.0000000 0.1798368 0.4255565
kndt: index_starsa= 1 | rr=[ 2.282,-1.989,-1.317] | V= 4.1557303 | V-Vkanal=-5.8389130 | expQdVkt= 0.0776438
==> clen: index= 2 prev= 1 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.984 -10.016
s: -6.1240018 -0.8291160 0.8270366 6.1003282
q: 0.0000000 0.0000000 0.1680349 0.5339312
kndt: index_starsa= 2 | rr=[ 2.442,-2.099,-1.271] | V= 3.4278557 | V-Vkanal=-6.5558446 | expQdVkt= 0.1269277
==> clen: index= 3 prev= 2 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.969 -10.031
s: -6.1395204 -0.8298489 0.8259866 6.0940820
q: 0.0000000 0.0000000 0.1622559 0.5989254
kndt: index_starsa= 3 | rr=[ 2.575,-2.191,-1.152] | V= 2.9105798 | V-Vkanal=-7.0584865 | expQdVkt= 0.2521180
==> clen: index= 4 prev= 3 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.952 -10.048
s: -6.1583594 -0.8307116 0.8248017 6.0866751
q: 0.0000000 0.0000000 0.1585529 0.6443613
kndt: index_starsa= 4 | rr=[ 2.672,-2.291,-1.008] | V= 2.5158252 | V-Vkanal=-7.4357685 | expQdVkt= 0.1759888
==> clen: index= 5 prev= 4 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.932 -10.068
s: -6.1803341 -0.8316739 0.8235359 6.0784533
q: 0.0000000 0.0000000 0.1558580 0.6786137
kndt: index_starsa= 5 | rr=[ 2.684,-2.399,-0.840] | V= 2.2446491 | V-Vkanal=-7.6874206 | expQdVkt= 0.0686585
==> clen: index= 6 prev= 5 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.911 -10.089
s: -6.2051582 -0.8327020 0.8222342 6.0697699
q: 0.0000000 0.0000000 0.1537379 0.7017558
kndt: index_starsa= 6 | rr=[ 2.714,-2.519,-0.684] | V= 1.9516462 | V-Vkanal=-7.9596883 | expQdVkt= 0.1021768
==> clen: index= 7 prev= 6 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.889 -10.111
s: -6.2331215 -0.8337944 0.8208977 6.0606343
q: 0.0000000 0.0000000 0.1519819 0.7264265
kndt: index_starsa= 7 | rr=[ 2.732,-2.514,-0.484] | V= 1.7324115 | V-Vkanal=-8.1569997 | expQdVkt= 0.1302235
==> clen: index= 8 prev= 7 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.867 -10.133
s: -6.2642105 -0.8349261 0.8195567 6.0513237
q: 0.0000000 0.0000000 0.1504880 0.7447304
kndt: index_starsa= 8 | rr=[ 2.779,-2.574,-0.300] | V= 1.4355295 | V-Vkanal=-8.4314555 | expQdVkt= 0.1635729
==> clen: index= 9 prev= 8 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.844 -10.156
s: -6.2995976 -0.8361178 0.8181889 6.0416640
q: 0.0000000 0.0000000 0.1491696 0.7695494
kndt: index_starsa= 9 | rr=[ 2.781,-2.673,-0.126] | V= 1.2016600 | V-Vkanal=-8.6419751 | expQdVkt= 0.0690404
==> clen: index=10 prev= 9 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
  potenciali: 9.819 -10.181
s: -6.3391968 -0.8373613 0.8168052 6.0316264

```

Rezultati

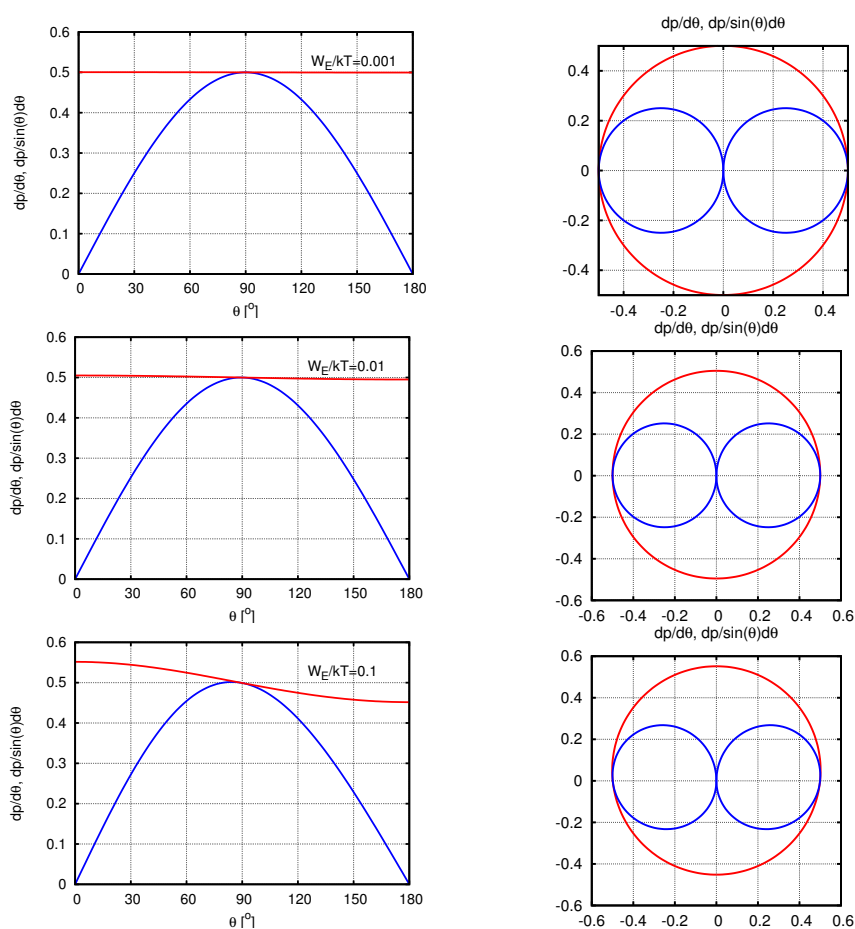
q: 0.0000000 0.0000000 0.1480081 0.7888035
kndt: index_starsa= 10 | rr=[2.768,-2.592, 0.056] | V= 1.0491555 | V-Vkanal=-8.7701141 | expQdVkt= 0.0239822
==> clen: index=11 prev=10 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.795 -10.205
s: -6.3829057 -0.8386113 0.8154510 6.0217209
q: 0.0000000 0.0000000 0.1469722 0.8012083
kndt: index_starsa= 11 | rr=[2.698,-2.592, 0.243] | V= 0.7354936 | V-Vkanal=-9.0596845 | expQdVkt= 0.1463157
==> clen: index=12 prev=11 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.771 -10.229
s: -6.4342955 -0.8399111 0.8140786 6.0117011
q: 0.0000000 0.0000000 0.1459999 0.8271001
kndt: index_starsa= 12 | rr=[2.615,-2.582, 0.425] | V= 0.4060799 | V-Vkanal=-9.3647144 | expQdVkt= 0.2433428
==> clen: index=13 prev=12 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.746 -10.254
s: -6.4958110 -0.8412635 0.8126897 6.0015356
q: 0.0000000 0.0000000 0.1450930 0.8547244
kndt: index_starsa= 13 | rr=[2.613,-2.548, 0.622] | V= 0.0856716 | V-Vkanal=-9.6603642 | expQdVkt= 0.1295009
==> clen: index=14 prev=13 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.721 -10.279
s: -6.5697290 -0.8426573 0.8113031 5.9912630
q: 0.0000000 0.0000000 0.1442564 0.8827073
kndt: index_starsa= 14 | rr=[2.528,-2.563, 0.803] | V=-0.2433962 | V-Vkanal=-9.9643748 | expQdVkt= 0.0777872
==> clen: index=15 prev=14 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.696 -10.304
s: -6.6595016 -0.8440915 0.8099239 5.9808608
q: 0.0000000 0.0000000 0.1434836 0.9100911
kndt: index_starsa= 15 | rr=[2.402,-2.498, 0.944] | V=-0.6574485 | V-Vkanal=-10.3530083 | expQdVkt= 0.2284400
==> clen: index=16 prev=15 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.670 -10.330
s: -6.7734885 -0.8455560 0.8085580 5.9705354
q: 0.0000000 0.0000000 0.1427618 0.9454984
kndt: index_starsa= 16 | rr=[2.237,-2.429, 1.034] | V=-1.1440972 | V-Vkanal=-10.8144296 | expQdVkt= 0.0910382
==> clen: index=17 prev=16 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.646 -10.354
s: -6.9262378 -0.8470411 0.8072062 5.9604928
q: 0.0000000 0.0000000 0.1420776 0.9880844
kndt: index_starsa= 17 | rr=[2.108,-2.310, 1.129] | V=-1.8820053 | V-Vkanal=-11.5278591 | expQdVkt= 0.4187049
==> clen: index=18 prev=17 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.622 -10.378
s: -7.1474514 -0.8485359 0.8058769 5.9508631
q: 0.0000000 0.0000000 0.1414312 1.0535913
kndt: index_starsa= 18 | rr=[1.990,-2.156, 1.179] | V=-2.8765286 | V-Vkanal=-12.4989844 | expQdVkt= 0.6506584
==> clen: index=19 prev=18 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.601 -10.399
s: -7.5020357 -0.8500069 0.8045929 5.9419166
q: 0.0000000 0.0000000 0.1408287 1.1445083
kndt: index_starsa= 19 | rr=[1.928,-2.021, 1.313] | V=-4.7161318 | V-Vkanal=-14.3169408 | expQdVkt= 0.9747423
==> clen: index=20 prev=19 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.582 -10.418
s: -8.2407135 -0.8513699 0.8034337 5.9340426
q: 0.0000000 0.0000000 0.1403055 1.3165885
kndt: index_starsa= 20 | rr=[1.925,-1.924, 1.488] | V=-9.8115804 | V-Vkanal=-19.3933924 | expQdVkt= 1.0000000
==> clen: index=21 prev=20 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.569 -10.431
s: -12.0251711 -0.8522688 0.8027025 5.9289297
q: 0.0000000 0.0000000 0.1399854 1.9138037
kndt: index_starsa= 21 | rr=[1.909,-1.726, 1.514] | V=-10.2515745 | V-Vkanal=-19.8210298 | expQdVkt= 0.9995168
==> clen: index=22 prev=21 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.571 -10.429
s: -19.9218275 -0.8521530 0.8027915 5.9296304
q: 0.0000000 0.0000000 0.1400223 2.2456777
kndt: index_starsa= 22 | rr=[1.856,-1.917, 1.487] | V=-11.5380138 | V-Vkanal=-21.1091774 | expQdVkt= 0.9999978
==> clen: index=23 prev=22 next1=-1 next2=-1 dolzina= 0.200 rs=0.000400
potenciali: 9.575 -10.425
s: -27.3889013 -0.8518710 0.8030004 5.9313147
q: 0.0000000 0.0000000 0.1401115 2.4520397
kndt: index_starsa= 20 | rr=[1.952,-1.964, 1.503] | V=-11.7084564 | V-Vkanal=-21.2837295 | expQdVkt= 0.9984850

Energija = 239.853364
Konec izgradnje kanala: 1/ 2.

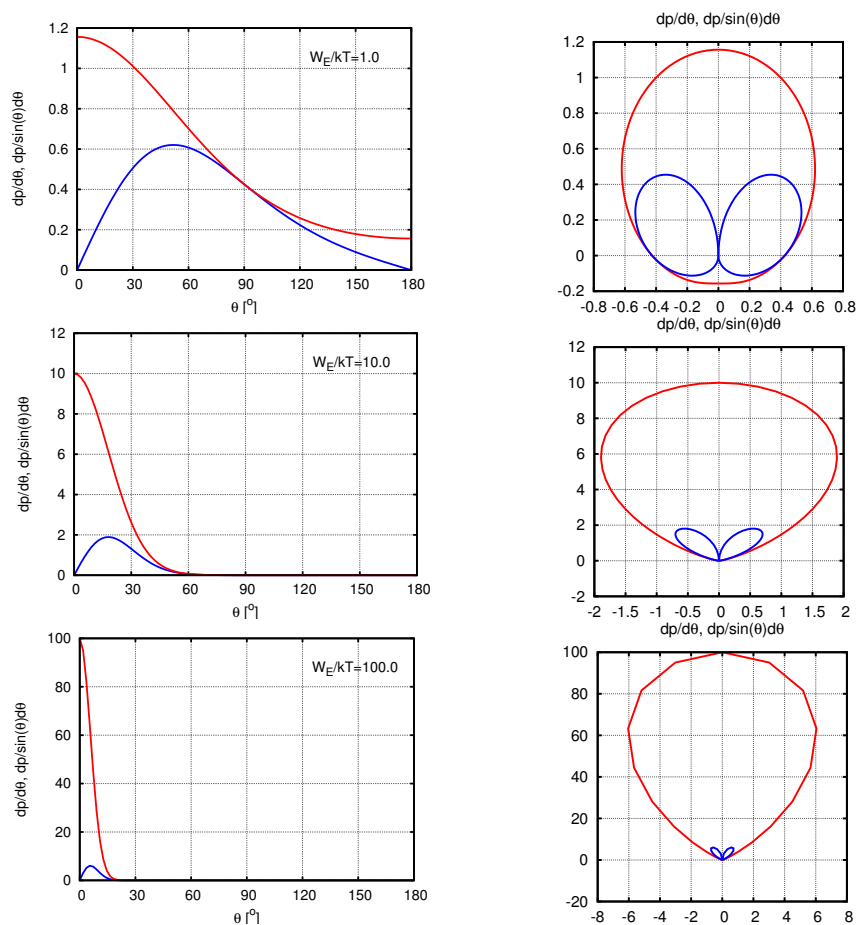
3.5 Analitična ocena

Analitični rezultat za osamljeni člen prevodnega kanala, ki raste iz točke, v kateri je dana električna poljska jakost, nam lahko služi za primerjavo z žrebanjem členov v modelu. Imejmo točko P_0 , iz katere raste prevodni kanal. Električna poljska jakost v točki P_0 naj ima smer e_z , pa lahko gostoto verjetnosti za nadaljevanje prebojne poti glede na kot med smerjo kanala in električno poljsko jakostjo ϑ zapišemo kot

$$w_p \propto \exp\left(\frac{W_E}{kT} \cos \vartheta\right).$$



Slika 3.35: Funkciji $dp/d\vartheta$ in $dp/\sin \vartheta d\vartheta$ za vrednosti $W_E/kT = [0.001, 0.01, 0.1]$ v kartezičnem in polarnem koordinatnem sistemu. Primeri sodijo med vroče, ker je verjetnost za preboj šibko odvisna od kota (primerjaj s sliko 3.36).



Slika 3.36: Funkciji $dp/d\vartheta$ in $dp/\sin\vartheta d\vartheta$ za vrednosti $W_E/kT = [1, 10, 100]$ v kartezičnem in polarnem koordinatnem sistemu. Primeri sodijo med hladne, ker je verjetnost za preboj močnejše odvisna od kota (primerjaj s sliko 3.35).

Ker mora veljati $\int_{\Omega} w_p d\Omega = 1$, sledi za normalizacijski faktor A :

$$A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{W_E}{kT} \cos\vartheta\right) \sin\vartheta d\vartheta = 1 \implies A = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\frac{W_E}{kT}}{\sinh\left(\frac{W_E}{kT}\right)}.$$

Verjetnost, da se prevodni kanal nadaljuje v smeri $d\vartheta$, je tako

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{\frac{W_E}{kT}}{2 \sinh\left(\frac{W_E}{kT}\right)} \cdot e^{\frac{W_E}{kT} \cos\vartheta}. \quad (3.1)$$

Funkciji $dp/d\vartheta$ in $dp/\sin\vartheta d\vartheta$ sta za različne vrednosti W_E/kT skicirani na slikah 3.35 in 3.36. Če je temperatura izolatorja visoka $\frac{W_E}{kT} \rightarrow 0$, dobimo (slika 3.35 zgoraj)

$$\lim_{\frac{W_E}{kT} \rightarrow 0} \frac{\frac{W_E}{kT}}{2 \sinh\left(\frac{W_E}{kT}\right)} \cdot e^{\frac{W_E}{kT} \cos\vartheta} = \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Verjetnost, da se kanal zgradi v smer polarnega kota ϑ , je za vse smeri enaka: graditev je pri vročem izolatorju neodvisna od kota.

Pri hladnem izolatorju $\frac{W_E}{kT} \rightarrow \infty$ dobimo

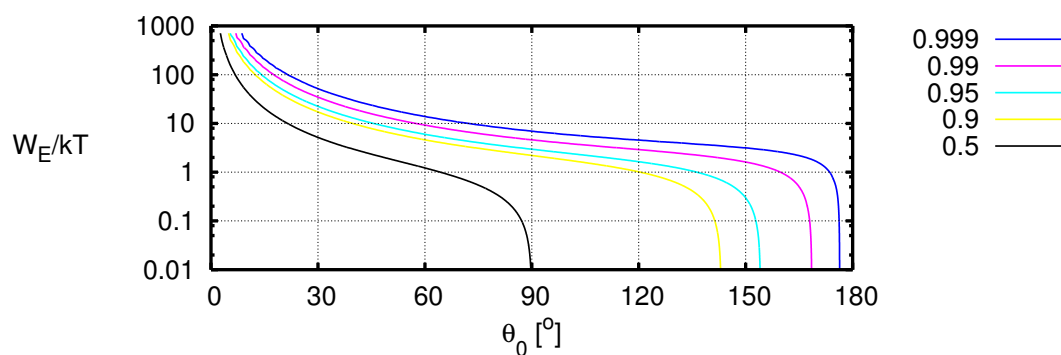
$$\lim_{\frac{W_E}{kT} \rightarrow \infty} \frac{\frac{W_E}{kT}}{2 \sinh\left(\frac{W_E}{kT}\right)} \cdot e^{\frac{W_E}{kT} \cos \vartheta} = \lim_{\frac{W_E}{kT} \rightarrow \infty} \frac{W_E}{kT} \cdot e^{\frac{W_E}{kT} (\cos \vartheta - 1)}, \quad (3.3)$$

ki je za vse vrednosti $\vartheta \neq 0$ enaka 0, torej mora biti zaradi pogoja $\int_{\Omega} w_p d\Omega = 1$ edina neničelna verjetnost pri $\vartheta = 0$: preboj v dielektriku s temperaturo $T = 0$ nastane natanko v smeri električnega polja (slika 3.36 spodaj).

Verjetnost, da se preboj zgodi v smeri, manjši od kota ϑ_0 , zapišemo kot

$$P(\vartheta \leq \vartheta_0) = \int_0^{\vartheta_0} w_p d\vartheta = \int_0^{\vartheta_0} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dp}{d\vartheta} d\vartheta$$

in rezultat je na sliki 3.37.



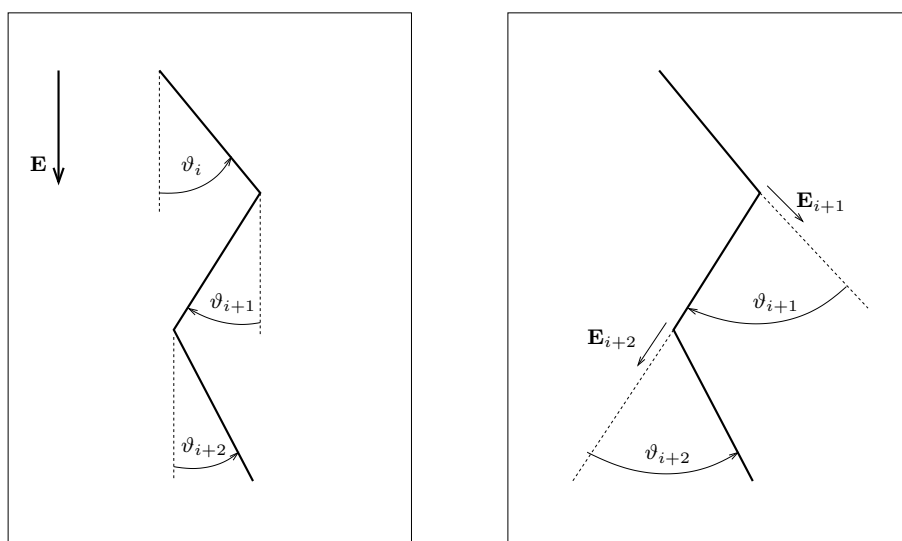
Slika 3.37: Krivulje enake verjetnosti za preboj znotraj kota ϑ_0 po analitični oceni v odvisnosti od mejnega kota ϑ_0 in parametra W_E/kT .

3.6 Analiza dejanskih strel

Strele na fotografijah, ki jih bomo analizirali, so bile posnete v začetku avgusta 2003 na Vojskem v zahodni Sloveniji na nadmorski višini okoli 1000 m. Posnel jih je avtor. Da jih lahko primerjamo z modeli, privzamemo, da je bil dielektrik za strele na slikah v času nastanka prevodnega kanala homogen. Pri določanju parametra W_E/kT realnih strel imamo na voljo analitični model in primerjavo z rezultati numeričnih simulacij.

Pri analitičnem modelu določimo parameter s pomočjo odlikovane smeri električne poljske jakosti. Ravno določitev odlikovane smeri je pri tem del postopka, kjer je verjetnost za napako največja – zato smo pri ugotavljanju parametra preboja z analitičnim modelom ločili dva ekstremna primera (glej sliko 3.38):

- prevladujoče globalno polje: odlikovano smer električnega polja določata začetna in končna točka prevodnega kanala (pri večini prebojev med oblakom in zemljo je to navpičnica), in
- prevladujoče lokalno polje: odlikovano smer določa le predhodnik člena in kaže v smer podaljška predhodnega člena.



Slika 3.38: Ocena za maksimalni kot ϑ_m ob prevladujočem globalnem polju (levo) in prevladujočem lokalnem polju (desno).

Ker je prava odlikovana smer električnega polja za vsakega od členov, razen za trivialni primer, ko je predhodni člen zrasel natančno v smeri globalnega polja, nekje vmes, so naše ocene za mejni kot v obeh primerih prevelike. Zato je ϑ_m , dobljen z analitičnim modelom, zgornja ocena za mejni kot, izračunana ocena za parameter W_E/kT pa spodnja meja za vrednost tega parametra. V primerih smo vzeli mejni kot $\vartheta_{99\%}$, t.j.

kot od odlikovane smeri električne poljske jakosti, ki ga vsaj 99 % členov prevodnega kanala ne presega.

Rezultati numeričnih simulacij gradnje prevodnega kanala nudijo drugačno možnost za oceno parametra W_E/kT . Naredimo jo na podlagi cepljenosti in lomljenosti kanala. Ker so rezultati numeričnih simulacij bolj ali manj neobčutljivi na to, ali imamo opravka z gradnjo kanala pri konstantni napetosti ali konstantnem naboju, nas ta delitev tu ne bo zanimala – razlike ne ločimo. Pri analizi upoštevamo raje razlike v dimenziji: čeprav smo v izračunih vzeli izmerjeno razmerje $\beta = 0.002$, je dolžina členov prevodnega kanala na fotografijah bistveno manjša, kot nam jo ponuja večina slik iz modela, zato so ocene za vrednost parametra W_E/kT , ki jih dobimo kot oceno parametra v času preboja, zgornja meja za njegovo oceno. Če je razdalja med oblakom in zemljo 1 km, bi to pomenilo 20 dolžin člena med prevodnikoma v modelu, kar smo tudi vzeli. Iz fotografij pa se vidi, da je teh delov bistveno več, vendar zato, ker je dolžina posameznega člena precej manjša.

Vrednost spodnje in zgornje meje za parameter W_E/kT za strele na fotografijah tako ocenimo s tremi algoritmi: dva imata za osnovo analitični model (za globalni in lokalni E), eden pa primerjavo z numeričnimi simulacijami. Postopki pri analizi realnih strel so naslednji:

postopek za oceno W_E/kT z analitičnim modelom in globalnim poljem:

1. preštejemo število vidnih členov prevodnega kanala
2. ocenimo odlikovano smer kanala, t.j. smer od začetka do konca kanala
3. določimo mejni kot $\vartheta_m = \vartheta_{99\%}$ tako, da 99 % vseh členov kanala oklepa z odlikovano smerjo električnega polja kot, ki je manjši od $\vartheta_m = \vartheta_{99\%}$
4. iz slike 3.37 odčitamo ocenjeno vrednost W_E/kT (krivulja za 0.99)

postopek za oceno W_E/kT z analitičnim modelom in lokalnim poljem:

1. preštejemo število vidnih členov prevodnega kanala
2. določimo mejni kot $\vartheta_m = \vartheta_{99\%}$ tako, da 99 % vseh členov kanala oklepa z odlikovano smerjo električnega polja (za vsakega od členov je to smer, ki jo določa podaljšek predhodnega kanala) kot, ki je manjši od $\vartheta_m = \vartheta_{99\%}$
3. iz slike 3.37 odčitamo ocenjeno vrednost W_E/kT (krivulja za 0.99)

postopek za oceno W_E/kT na podlagi numeričnih simulacij:

1. ocenimo cepljenost (cepitev na dolžino) in lomljenost (dolžino deljeno z dolžino daljice med začetno in končno točko) prevodnega kanala
2. primerjamo s modeliranimi prevodnimi kanali in ocenimo vrednost W_E/kT

Primer strele 1

Strela na sliki (3.39) je nerazvejana, z redkimi odstopanji od glavne smeri. Naredimo naslednje ocene:

- z analitičnim modelom in globalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 delov prevodnega kanala presega kot 30° od navpičnice in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 50
- z analitičnim modelom in lokalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 členov prevodnega kanala presega kot 25° od smeri predhodnega člena in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 100
- z numeričnim modelom: vrednost parametra W_E/kT je na podlagi rezultatov simulacij med 1000 in 2000



Slika 3.39: Strela 1, parameter $W_E/kT \in [100, 2000]$.

algoritem	parameter	W_E/kT
analitični model z globalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 30^\circ$	>50
analitični model z lokalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 25^\circ$	>100
numerični model	$n_{\text{cepitev}} \geq 0$	<2000
skupna ocena		100-2000

Primer strele 2

Za malo cepljeno in bolj lomljeno strelo iz fotografije na sliki (3.40) naredimo naslednje ocene:

- z analitičnim modelom in globalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 delov prevodnega kanala presega kot 50° od navpičnice in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 30
- z analitičnim modelom in lokalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 členov prevodnega kanala presega kot 30° od smeri predhodnega člena in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 50
- z numeričnim modelom: prevodni kanal je na meji cepitve, zato je vrednost parametra W_E/kT na podlagi rezultatov simulacij med 500 in 1000



Slika 3.40: Strela 2, parameter $W_E/kT \in [50, 1000]$.

algoritem	parameter	W_E/kT
analitični model z globalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 50^\circ$	>10
analitični model z lokalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 30^\circ$	>50
numerični model	$n_{\text{cepitev}} \geq 1$	<1000
skupna ocena		50-1000

Primer strele 3

Za cepljeno strelo iz fotografije na sliki (3.41) naredimo naslednje ocene:

- z analitičnim modelom in globalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 delov prevodnega kanala presega kot 40° od navpičnice in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 30
- z analitičnim modelom in lokalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 členov prevodnega kanala presega kot 30° od smeri predhodnega člena in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 50
- z numeričnim modelom: na fotografiji je vidnih več kot devet cepitev prevodnega kanala, zato vrednost parametra W_E/kT na podlagi rezultatov simulacij ocenjujemo na okoli 200



Slika 3.41: Strela 3, parameter $W_E/kT \in [50, 200]$.

algoritem	parameter	W_E/kT
analitični model z globalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 40^\circ$	>30
analitični model z lokalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 30^\circ$	>50
numerični model	$n_{\text{cepitev}} \geq 7$	<200
skupna ocena		50-200

Primer strele 4

Za precej cepljeno in lomljeno strelo iz fotografije na sliki (3.42) naredimo naslednje ocene:

- z analitičnim modelom in globalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 delov prevodnega kanala presega kot 40° od navpičnice in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 30
- z analitičnim modelom in lokalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 členov prevodnega kanala presega kot 30° od smeri predhodnega člena in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 50
- z numeričnim modelom: na fotografiji je vidnih več kot osem cepitev prevodnega kanala, zato vrednost parametra na podlagi rezultatov simulacij ocenjujemo na okoli 250



Slika 3.42: Strela 4, parameter $W_E/kT \in [50, 250]$.

algoritem	parameter	W_E/kT
analitični model z globalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 40^\circ$	>30
analitični model z lokalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 30^\circ$	>50
numerični model	$n_{\text{cepitev}} \geq 9$	<250
skupna ocena		50-250

Primer strele 5

Za vodoravno strela (med dvema deloma oblaka ali oblakov) iz fotografije na sliki (3.43) naredimo naslednje ocene:

- z analitičnim modelom in globalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 delov prevodnega kanala presega kot 40° od navpičnice in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 30
- z analitičnim modelom in lokalnim poljem: kvečjemu eden na vsakih 100 členov prevodnega kanala presega kot 30° od smeri predhodnega člena in iz grafa (3.37) ocenimo, da je vrednost W_E/kT približno 50
- z numeričnim modelom: prevodni kanal ima nekaj šibkih cepitev – vrednost parametra ocenjujemo na 500



Slika 3.43: Strela 5, parameter $W_E/kT \in [50, 500]$.

algoritem	parameter	W_E/kT
analitični model z globalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 40^\circ$	>30
analitični model z lokalnim poljem E	$\vartheta_{99\%} \geq 30^\circ$	>50
numerični model	$n_{\text{cepitev}} \geq 1$	<500
skupna ocena		50-500

Poglavje 4

Zaključek

S kvazistatičnim modelom prebojne poti v homogenem dielektriku smo ocenili razmere med nevihto. Po izhodiščni predpostavki je oblika prevodnega kanala pri streli odvisna od razmerja med električno energijo in posplošeno energijo izolatorja. Tako smo vnaprej izračunali nekaj primerov prevodnega kanala, in sicer za tri osnovne geometrije, različne vrednosti razmerja in prisotnost ali odsotnost napetostnega vira. Za vsak model smo poiskali mejni vrednosti parametra W_E/kT , to sta tisti, ki prostor razmejita na preboje brez cepitev, zmerno cepljene in gosto cepljene. Pri slednjem je razdalja od izhodišča sorazmerna kvadratnemu korenu iz števila členov, kot pri naključni hoji.

Oblika prebojnih poti je odvisna od vrednosti parametra, nekoliko pa tudi od izbrane geometrije. Če je prisoten napetostni vir, potem se kanal zaključi po manjšem ali približno enakem številu členov. Za oceno spodnje meje parametra je bila v pomoč analitična ocena, ki smo jo izpeljali za osamljeno točko v zunanjem električnem polju. Za pet fotografij strel, posnetih leta 2003 na Vojskem, je parameter W_E/kT med 50 in 2000. Vhodni podatek za primerjavo z numeričnim modelom je predvsem število cepitev, za analitični model pa mejni kot, znotraj katerega najdemo vsaj 99 % členov. Ker lahko pri analitični obravnavi kot odlikovano smer upoštevamo smer le enega polja, smo naredili oceno tako za lokalno kot globalno vrednost električne poljske jakosti. Vrednosti sta za posamezne strele primerljivi in sta tipično za red velikosti manjši od tiste, dobljene na podlagi numeričnih simulacij.

V primerjavi s preboji v laboratorijskih pogojih lahko ugotovimo, da običajne nevihtne strele – ker so praviloma bolj cepljene in/ali zveržene – nastanejo pri za vsaj red velikosti manjšem razmerju W_E/kT . Razloga sta lahko dva:

1. električna energija W_E , potrebna za preboj v nevihtnem oblaku, je manjša kot pri laboratorijskih prebojih zaradi večje povprečne proste poti prostih nosilcev naboja ali manjše ionizacijske energije prisotnih molekul, in/ali
2. posplošena temperatura kT v oblaku je večja zaradi večjega števila prostih elektronov in ionov.

4.1 Pomembnejši originalni prispevki

– **model izgradnje prevodnega kanala po zgledu običajne nevihtne strele**

Kvazistatični pristop upravičujejo podatki o gradnji običajne nevihtne strele, ki zraste za petdeset metrov v mikrosekundi, temu pa sledi petdeset mikrosekundni premor.

– **primerjava izgradnje prebojne poti za sistem prevodnikov pri konstantni napetosti in pri konstantnem naboju**

Predpostavki o konstantni napetosti in konstantnem naboju vodita do različnih matematičnih formulacij kvazistatičnega preboja. Z modeloma dobimo različne rezultate, ki se po pričakovanjih ne razlikujejo bistveno.

– **parametrizacija prebojev glede na obliko prevodnega kanala**

Obliko kanala opišemo z dolžino in številom cepitev na dolžinsko enoto. Oblika kanala se spreminja v odvisnosti od začetne električne energije sistema in lastnosti izolatorja, ki vplivata na uteženo naključno rast prevodnega kanala.

– **razvrstitev prebojev po razmerju W_E/kT**

Rezultati kažejo, da se pri vrednostih $W_E/kT \gg 1000$ prevodni kanal ne cepi, pri vrednostih $W_E/kT \ll 100$ pa se intenzivno cepi in raste kot pri pijančevi hoji (ang. random walk).

4.2 Izjava o avtorstvu

Podpisani Aleš Berkopec izjavljam, da je disertacija moje avtorsko delo. Neavtorski deli so citirani in navedeni v literaturi.

Uporabljena programska oprema: L^AT_EX, Gnuplot, FreePascal, POV-Ray.

Literatura

- [1] N. I. Koškin in M. G. Širkevič. *Priročnik elementarne fizike*. Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1984.
- [2] H. Rohlfing in H. Schmidt. *Priročnik za elektrotehniko in elektroniko*. Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1995.
- [3] H. Israëel. *Atmospheric Electricity*. Israel Program for Scientific Translations, Jeruzalem, 1970. First edition: Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K. - G., Leipzig, 1957.
- [4] C. Magono. *Thunderstorms*. Elsevier, Amsterdam, 1980.
- [5] Studies in Geophysics. *The Earth's Electrical Environment*. National Academy Press, Washington D.C., 1986.
- [6] P. S. Neelakanta. *Handbook of Electromagnetic Materials*. CRC Press Inc., Florida, USA, 1995.
- [7] F. Lazarini in J. Brenčič. *Splošna in anorganska kemija*. Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1984.
- [8] I. Kuščer in S. Žumer. *Toplota*. DMFA Slovenija, 1987.
- [9] H. Volland. *Atmospheric Electrodynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [10] J. A. Chalmers. *Atmospheric Electricity*. Pergamon Press, London, 1957.
- [11] H. Volland, editor. *Atmospheric Electrodynamics*. CRC Press Inc., Florida, USA, 1995.
- [12] M. A. Uman. *Lightning*. Dover publications, 1967.
- [13] C. T. R. Wilson. On some determinations of the sign and magnitude of electric discharges in lightning flashes. *Proc. R. Soc., Ser. A(92)*, 1916.
- [14] P. Lenard. Über die elektrizität der wasserfälle (about the electricity of waterfalls). *Ann. Phys.*, 46, 1892.

- [15] E.A.J. Workman in S.A.E. Reynolds. Electrical phenomena occurring during the freezing of dilute aqueous solutions and their possible relationship to thunderstorm electricity. *Phys. Rev.*, 78, 1950.
- [16] S.A.E. Reynolds. Thunderstorm-precipitation growth and electrical-charge generation. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 34, 1953.
- [17] I. M. Irurzun et al. Dielectric breakdown in solids modeled by dbm and dla. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13, 2002.
- [18] T. Witten in L. Sander. Diffusion-limited aggregation. *Physical Review*, B(27), 1983.
- [19] P. Meakin and T. Vicsek. Diffusion-limited aggregation with radial bias. *Journal of Physics*, A(20), 1987.
- [20] T. Vicsek. *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [21] A. Berkopec. *Model dielektričnega preboja* (magistrska naloga). Fakulteta za elektrotehniko, 1998.
- [22] A. Berkopec in V. Valenčič. **Numerical model of stepped leader growth process in homogeneous dielectric**. *Journal of Atmospheric Electricity*, 21(2):61–70, 2001.
- [23] A. R. Sinigoj. *Osnove elektromagnetike*. Založba Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1996.
- [24] Bronštejn et al. *Matematični priročnik*. Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [25] W. H. Press et al. *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.