

Oznaka poročila: ARRS-RPROJ-ZP-2015/88



ZAKLJUČNO POROČILO RAZISKOVALNEGA PROJEKTA

A. PODATKI O RAZISKOVALNEM PROJEKTU

1. Osnovni podatki o raziskovalnem projektu

Šifra projekta	N1-0006	
Naslov projekta	FuncId - Funkcijske identitete	
Vodja projekta	8721	Matej Brešar
Tip projekta	N	Projekti ESF in ERC
Obseg raziskovalnih ur	8608	
Cenovni razred	B	
Trajanje projekta	10.2011 - 09.2014	
Nosilna raziskovalna organizacija	1554	Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Raziskovalne organizacije - soizvajalke		
Raziskovalno področje po šifrantu ARRS	1 1.01	NARAVOSLOVJE Matematika
Družbeno-ekonomski cilj	13.01	Naravoslovne vede - RiR financiran iz drugih virov (ne iz SUF)
Raziskovalno področje po šifrantu FOS	1 1.01	Naravoslovne vede Matematika

B. REZULTATI IN DOSEŽKI RAZISKOVALNEGA PROJEKTA

2. Povzetek raziskovalnega projekta¹

SLO

V teoriji funkcijskih identitet se ukvarjamo z identičnimi relacijami na kolobarjih in algebrah, v katerih poleg poljubnih elementov nastopajo še poljubne funkcije, ki imajo vlogo neznanek. Po izidu monografije "Functional identities" (Birkhauser, 2007), v kateri so M. Brešar, M. A. Chebotar in W.S. Martindale predstavili glavne dosežke teorije, so ostale odprte predvsem možnosti aplikacij teorije na

drugih področjih in obravnava funkcijskih identitet na končno razsežnih algebrah. V obdobju 2011-2014 smo prišli do skoraj dokončnih odgovorov glede slednje tematike in našli tudi več novih primerov aplikacij. Tako so se funkcijske identitete so se presenetljivo izkazale za uporabne pri študiju stopničenj neasociativnih algeber. Morda manj presenetljivo je, da so se izkazale kot uporabne pri karakterizaciji Liejevih superavtomorfizmov. Toda tehnično je ta problem težek in je bil zato dalj časa odprt. V zadnjem obdobju je bil narejen preboj pri obravnavi funkcijskih identitet na končno razsežnih algebrah. Poleg standardnih rešitev tu poznamo še rešitve, ki izvirajo iz Cayley-Hamiltonovega polinoma. Izkazalo se je, da v bistvu drugačnih ni.

Od drugih rezultatov, ki so nastali znotraj projekta, a so le v posredni zvezi z glavno tematiko projekta, izpostavimo Šemrlve optimalno verzije Huajevega izreka za ohranjevalce sosednosti ter Brešarjevo knjigo "Introduction to noncommutative algebra" (Universitext, Springer, 2014).

ANG

The theory of functional identities deals with identical relations on rings that, besides arbitrary elements, also involve arbitrary functions which are considered as unknowns. After the publication of the monograph "Functional identities" (Birkhauser, 2007), in which M. Brešar, M. A. Chebotar in W.S. Martindale presented the state of the art of the theory, the question of further applications to other mathematical areas has remained present. Another unsettled question is the description of functional identities on finite dimensional algebras. In the period 2011-2014 we have obtained rather definitive answers concerning the latter, and also found several new applications. In particular, functional identities have turned out to be useful in the study of gradings of nonassociative algebras. Perhaps slightly surprisingly, we have used them to characterize Lie superautomorphisms. However, from the technical aspect this problem is quite difficult and has been open for a rather long time. Quite recently, a breakthrough in the study of functional identities on finite dimensional algebras has been made. Besides standard solutions, here we also have solutions that arise from the Cayley-Hamilton polynomial. It has turned out that these basically there are no other solutions.

Among other results that were also obtained by the members of the project team, but have only an indirect connection to the main theme of the project, we mention Šemrl's optimal versions of Hua's theorems of geometry of matrices and Brešar's book "Introduction to noncommutative algebra" (Universitext, Springer, 2014).

3. Poročilo o realizaciji predloženega programa dela na raziskovalnem projektu²

V teoriji funkcijskih identitet se ukvarjamo z identičnimi relacijami na kolobarjih in algebrah, v katerih poleg poljubnih elementov nastopajo še poljubne funkcije, ki imajo vlogo neznanek. Po izidu monografije "Functional identities" (Birkhauser, 2007), v kateri so M. Brešar, M. A. Chebotar in W.S. Martindale predstavili glavne dosežke teorije, so ostale odprte predvsem možnosti aplikacij teorije na drugih področjih in obravnava funkcijskih identitet na končno razsežnih algebrah. V obdobju 2011-2014 lahko izpostavimo naslednje dosežke tega področja.

Funkcijske identitete so se presenetljivo izkazale za uporabne pri študiju stopničenj neasociativnih algeber. Skupaj z J. Bahturinom in I. Shestakovom (Algebras Repr. Th. 14 (2011), 113-129) oziroma J. Bahturinom in M.

Kochetovom (Inter. J. Algebra Comp. 22 (2012), 250046) je Brešar pokazal, da se da problem opisa stopničenj Liejevih in jordskih algeber s funkcijskimi identitetami reducirati na asociativne algebre, za katere so bili rezultati že znani od prej.

Brešar, J. Bahturin in Š. Špenko so s kombinacijo funkcijskih identitet ter nekaterih klasičnih metod opisali Liejeve superavtomorfizme na enostavnih Liejevih superalgebrah (Algebras Repr. Th. 15 (2012), 507-525).

Brešar in Špenko sta podala popoln opis funkcijskih identitet ene spremenljivke na poljubnih centralno zaprtih praalgebrah (J. Algebra 401 (2014), 234-244). S tem sta dobila prvi dokončni rezultat o funkcijskih identitetah, ki pokrije tudi končno razsežne algebre. Delo sta kasneje nadaljevala in našla popoln opis vseh funkcijskih identitet (poljubno mnogo spremenljivk), članki pa še niso objavljeni.

V članku Maps preserving zeros of a polynomial (Linear Algebra Appl., 2012, Vol. 436, 2504-2512) sta Brešar in Špenko, skupaj z J. Alaminosom in A. Villeno, podala prvi dokončen opis linearnih preslikav na matričnih algebrah, ki ohranjajo ničle nekomutativnega polinoma. Dokaz temelji na rezultatih Platonova in Dokovića o algebraičnih grupah. V naslednjem članku On Lie and associative algebras containing inner derivations (Linear Algebra Appl., 2012, Vol. 437, 648-658) sta izpeljala podobne rezultate za odvajanja. S tem so bili doslej znani rezultati, ki so sloneli na uporabi funkcijskih identitet, dopolnjeni, a z uporabo drugih metod.

V seriji člankov P. Šemrla (Integral Equations Operator Theory 72 (2012), 7-66; Comm. Math. Phys. 313 (2012), 375-384; J. London Math. Soc. 88 (2013), 417-436) se je avtor ukvarjal z enotnim pristopom k študiju simetrij na kvantnih strukturah preko ohranjevalcev sosednosti. V matematični formalizaciji kvantne mehanike so omejene opazljivke predstavljene s sebiadjungiranimi operatorji na Hilbertovih prostorih. Bijektivne preslikave na množici vseh sebiadjungiranih operatorjev na Hilbertovem prostoru, ki ohranjajo določene operacije in/ali relacije, ki so pomembne v matematičnih osnovah kvantne mehanike, se imenujejo simetrije. Če uspemo s pomočjo operacij in relacij, ki se pri dani simetriji ohranjajo, okarakterizirati sosednost sebiadjungiranih operatorjev, potem lahko originalni problem opisa simetrij prevedemo na problem opisa vseh ohranjevalcev sosednosti. Tu lahko uporabimo nedavno dobljene izboljšave fundamentalnega izreka geometrije sebiadjungiranih matrik. V primeru efektnih algeber problem postane precej težji. Poznani so bili primeri simetrij z navidez zelo divjim obnašanjem. Šemrl je opazil, da so te navidez zapletene simetrije sestavljene iz dokaj preprostih gradnikov in potem je ponovno uspel z uporabo strukturnih izrekov za ohranjevalce sosednosti na efektnih algebrah z enotnim pristopom določiti strukturo mnogih simetrij efektnih algeber. Dobljeni rezultati imajo dokaj presenetljivo formulacijo.

Problem ohranjevalcev sosednosti na polnem matričnem prostoru se je izkazal za neprimerno težjega kot na prostoru sebiadjungiranih matrik. Poleg obstoja precej bolj kompliciranih primerov degeneriranih ohranjevalcev je tudi standardna oblika ohranjevalcev sosednosti nepričakovano zapletena. Za razumevanje je potrebno zapustiti prostor matrik in na matrike gledati kot na homogene in nehomogene koordinate točk Grassmannovih prostorov. Izkaže se, da potem sosednost matrik definirana z aritmetično razdaljo na prostoru matrik sovпада z običajno sosednostjo definirano na Grassmannovih prostorih. Pri študiju ohranjevalcev sosednosti se je Šemrl poslužil strukturnih rezultatov o ohranjevalcih urejenosti na idempotentnih matrikah, kar problem poveže s fundamentalnim izrekom projektivne geometrije. Pomembno orodje pa so tudi nedavno dobljene izboljšave

fundamentalnega izreka afine geometrije. Optimalno verzijo Huajevega izreka za ohranjevalce sosednosti na polnem matričnem prostoru je objavil v *Memoirs of the American Mathematical Society* 232 (2014), No. 1089, 74 strani.

Brešar je objavil več novih, kratkih dokazov nekaterih klasičnih izrekov nekomutativne algebre, tj. Frobeniusovega izreka o realnih obsegih (*J. Algebra* 327 (2011), 107-125 (skupaj s Šemrlom in Špenko)), Posnerjevega izreka o PI-prakolobarjih in Formanek-Razmyslovega izreka o eksistenci centralnih polinomov (*Expo. Math.* 29 (2011), 159-164) in Skolem-Noetherinega izreka (*Linear Multilinear Algebra* 60 (2012), 763-768). Ti dokazi so pomemben sestavni del njegove knjige "Introduction to Noncommutative Algebra", ki je jeseni leta 2014 izšla v Springerjevi zbirki Universitext.

4. Ocena stopnje realizacije programa dela na raziskovalnem projektu in zastavljenih raziskovalnih ciljev³

Program je bil realiziran.

5. Utemeljitev morebitnih sprememb programa raziskovalnega projekta oziroma sprememb, povečanja ali zmanjšanja sestave projektne skupine⁴

Ni bilo omembe vrednih sprememb.

6. Najpomembnejši znanstveni rezultati projektne skupine⁵

		Znanstveni dosežek	
1.	COBISS ID	16299353	Vir: COBISS.SI
	Naslov	SLO	Liejevi superavtomorfizmi asociativnih algeber, II
		ANG	Lie superautomorphisms on associative algebras, II
	Opis	SLO	Obravnavani so Liejevi superavtomorfizmi asociativnih superpraalgeber. Dokončen rezultat je dobljen za centralne enostavne superalgebre: njihovi Liejevi superavtomorfizmi so standardne oblike, razen ko je dimenzija obravnavane superalgebre 2 ali 4.
		ANG	Lie superautomorphisms of prime associative superalgebras are considered. A definitive result is obtained for central simple superalgebras: their Lie superautomorphisms are of standard forms, except when the dimension of the superalgebra in question is 2 or 4.
	Objavljeno v	Kluwer Academic Publishers; Algebras and representation theory; 2012; Vol. 15, no 3; str. 507-525; Impact Factor: 0.554; Srednja vrednost revije / Medium Category Impact Factor: 0.673; WoS: PQ; Avtorji / Authors: Bahturin Jurij Aleksandrovič, Brešar Matej, Špenko Špela	
Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek		
2.	COBISS ID	17143897	Vir: COBISS.SI
	Naslov	SLO	Uvod v nekomutativno algebro
		ANG	Introduction to noncommutative algebra
	Opis	SLO	Knjiga podaja lahko berljiv uvod v teorijo nekomutativnih kolobarjev in algeber. Poudarek je na razumljivosti in enostavnosti dokazov. Kar nekaj jih je novih oziroma drugačnih od standardnih dokazov.
		ANG	This book provides an easy-to-read introduction to noncommutative rings and algebras. the emphasis is on clarity of exposition and simplicity of the proofs, with several being different from those in other texts on the subject.
		Springer; 2014; XXXVII, 199 str.; A": 1; A': 1; Avtorji / Authors: Brešar	

	Objavljeno v	Matej
	Tipologija	2.01 Znanstvena monografija
3.	COBISS ID	16842329 Vir: COBISS.SI
	Naslov	<i>SLO</i> Funkcijske identitete ene spremenljivke
		<i>ANG</i> Functional identities of one variable
	Opis	<i>SLO</i> Naj bo A centralno zaprta praalgebra nad poljem k s karakteristiko 0 in naj bo $q: A \rightarrow A$ sled d -linearne preslikave (tj. $q(x) = (x, \dots, x)$, kjer je $M: A^d \rightarrow A$ d -linearna preslikava). Če je $[q(x), x] = 0$ za vsak $x \in A$, potem je q standardne oblike. Za neskončno razsežne algebre in algebre dimenzij $> d^2$ so to dokazali Lee, Lin, Wang, in Wong leta 1997. V članku obdelamo primer, ko je dimenzija $\leq d^2$. S pomočjo tega rezultata razrešimo splošne funkcijske identitete ene spremenljivke na A . Natančneje, opisane so sledi d -linearnih preslikav $q_i: A \rightarrow A$ z lastnostjo $\sum_{i=0}^m x^i q_i(x) x^{m-i} \in k$ za vsak $x \in A$.
		<i>ANG</i> Let A be a centrally closed prime algebra over a characteristic 0 field k , and let $q: A \rightarrow A$ be the trace of a d -linear map (i.e., $q(x) = M(x, \dots, x)$ where $M: A^d \rightarrow A$ is a d -linear map). If $[q(x), x] = 0$ for every $x \in A$, then q is of the form $q(x) = \sum_{i=0}^d \mu_i(x) x^i$ where each μ_i is the trace of a $(d-i)$ -linear map from A into k . For infinite dimensional algebras and algebras of dimension $> d^2$ this was proved by Lee, Lin, Wang, and Wong in 1997. In this paper we cover the remaining case where the dimension is $\leq d^2$. Using this result we are able to handle general functional identities of one variable on A ; more specifically, we describe the traces of d -linear maps $q_i: A \rightarrow A$ that satisfy $\sum_{i=0}^m x^i q_i(x) x^{m-i} \in k$ for every $x \in A$.
	Objavljeno v	Academic Press; Journal of algebra; 2014; Vol. 401; str. 234-244; Impact Factor: 0.604; Srednja vrednost revije / Medium Category Impact Factor: 0.674; WoS: PQ; Avtorji / Authors: Brešar Matej, Špenko Špela
	Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek
4.	COBISS ID	16568409 Vir: COBISS.SI
	Naslov	<i>SLO</i> Ohranjevalci primerljivosti na efektni algebri Hilbertovega prostora
		<i>ANG</i> Comparability preserving maps on Hilbert space effect algebras
	Opis	<i>SLO</i> Opišemo splošno obliko bijektivnih ohranjevalcev primerljivosti na efektni algebri na Hilbertovem prostoru. S tem izboljšamo znane karakterizacije orto-urejenostnih avtomorfizmov.
		<i>ANG</i> We describe the general form of bijective comparability preserving transformations of the Hilbert space effect algebra, thus improving several known characterizations of ortho-order automorphisms.
	Objavljeno v	Springer-Verlag; Communications in Mathematical Physics; 2012; Vol. 313, iss. 2; str. 375-384; Impact Factor: 1.971; Srednja vrednost revije / Medium Category Impact Factor: 1.263; A ¹ : 1; WoS: UR; Avtorji / Authors: Šemrl Peter
	Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek
5.	COBISS ID	16947545 Vir: COBISS.SI
	Naslov	<i>SLO</i> Optimalna verzija Huajevega fundamentalnega izreka geometrije matrik
		<i>ANG</i> The optimal version of Hua's fundamental theorem of geometry of rectangular matrices
		Huajev fundamentalni izrek geometrije matrik opiše splošno obliko bijektivnih preslikav na prostoru $m \times n$ matrik nad (ne nujno

Opis	SLO	komutativnim) obsegom \mathbb{D} , ki ohranjajo sosednost v obe smeri. Motivirani s številnimi uporabami se ukvarjamo z možnimi izboljšavami tega izreka. Le te so možne v treh smereh. Najprej se vprašamo, ali je mogoče nadomestiti predpostavko ohranjanja sosednosti v obe smeri s šibkejšo predpostavko, da se sosednost ohranja zgolj v eno smer in pri tem še vedno dobiti enak zaključek. Ali lahko omilimo predpostavko bijektivnosti? In končno, ali je mogoče dobiti podobne strukturne rezultate za ohranjevalce sosednosti med matričnimi prostori različnih dimenzij? EAS obseg je tak obseg, ki ni izomorfen nobenemu svojemu pravemu podobsegu. Za matrike nad takimi obsegi hkrati rešimo vse tri zgoraj naštetе probleme in s tem dobimo optimalno verzijo Huajevega izreka. Pri splošnih obsegih dobimo tak optimalni rezultat le v primeru, ko je domena prostor kvadratnih matrik. S primeri pokažemo, da se kvadratni primer ne da posplošiti na poljubne pravokotne matrike.
	ANG	Hua's fundamental theorem of geometry of matrices describes the general form of bijective maps on the space of all $m \times n$ matrices over a division ring \mathbb{D} which preserve adjacency in both directions. Motivated by several applications we study a long standing open problem of possible improvements. There are three natural questions. Can we replace the assumption of preserving adjacency in both directions by the weaker assumption of preserving adjacency in one direction only and still get the same conclusion? Can we relax the bijectivity assumption? Can we obtain an analogous result for maps acting between the spaces of rectangular matrices of different sizes? A division ring is said to be EAS if it is not isomorphic to any proper subring. For matrices over EAS division rings we solve all three problems simultaneously, thus obtaining the optimal version of Hua's theorem. In the case of general division rings we get such an optimal result only for square matrices and give examples showing that it cannot be extended to the non-square case.
Objavljeno v	American Mathematical Society; Memoirs of the American Mathematical Society; 2014; Vol. 232, no. 1089; str. 1-74; Impact Factor: 1.782; Srednja vrednost revije / Medium Category Impact Factor: 0.674; A': 1; WoS: PQ; Avtorji / Authors: Šemrl Peter	
Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek	

7. Najpomembnejši družbeno-ekonomski rezultati projektne skupine⁶

Družbeno-ekonomski dosežek		
1.	COBISS ID	Vir: vpis v poročilo
Naslov	SLO	Matej Brešar je bil do konca leta 2014 član odbora za evropsko solidarnost pri EMS - European Mathematical Society.
	ANG	Matej Brešar was a member of the European Mathematical Society Committee for European Solidarity until the end of 2014
Opis	SLO	Odbor nudi podporo matematikom predvsem iz vzhodne Evrope. Ena izmed glavnih nalog je podeljevanje finančne podpore za kritje potnih stroškov za konference mladim matematikom.
	ANG	The Committee aims to support mathematicians especially from Eastern Europe. One of its main activities is awarding travel grants to young qualified mathematicians.
Šifra	D.03 Članstvo v tujih/mednarodnih odborih/komitejih	
Objavljeno v	http://www.euro-math-soc.eu/comm-eur-solid.html	
Tipologija	3.25 Druga izvedena dela	

2.	COBISS ID		Vir: vpis v poročilo
	Naslov	<i>SLO</i>	Peter Šerml je predsednik ILAS (International Linear Algebra Society).
		<i>ANG</i>	Peter Šerml is the President of ILAS (International Linear Algebra Society)
	Opis	<i>SLO</i>	ILAS, mednarodno društvo za linearno algebro, je bilo ustanovljena leta 1989. Osnovni namen ILAS je vzpodbujanje in organiziranje aktivnosti v linearni algebri.
		<i>ANG</i>	ILAS - The International Linear Algebra Society - was founded in 1989. The general goal of ILAS is to encourage activities in linear algebra.
	Šifra	D.03	Članstvo v tujih/mednarodnih odborih/komitejih
	Objavljeno v	http://www.ilasic.org/	
	Tipologija	3.25	Druga izvedena dela
3.	COBISS ID		Vir: vpis v poročilo
	Naslov	<i>SLO</i>	Peter Šerml je glavni urednik matematične revije in član uredniških odborov dveh revij.
		<i>ANG</i>	Peter Šerml is the editor-in-chief of a mathematical journal and a member of the editorial board of two journals.
	Opis	<i>SLO</i>	Peter Šerml je glavni urednik revije Linear Algebra and its Applications in član uredniških odborov revij Linear and Multilinear Algebra in Operators and Matrices.
		<i>ANG</i>	Peter Šerml is the editor-in-chief of Linear Algebra and its Applications and a member of editorial boards of Linear and Multilinear Algebra and Operators and Matrices.
	Šifra	C.04	Uredništvo mednarodne revije
	Objavljeno v	http://www.journals.elsevier.com/linear-algebra-and-its-applications/editorial-board	
		http://www.tandfonline.com/action/journalInformation?show=editorialBoard&journalCode=glma20#.U0AtpaJ8eX8	
		http://oam.ele-math.com/editorial	
	Tipologija	4.00	Sekundarno avtorstvo
4.	COBISS ID		Vir: vpis v poročilo
	Naslov	<i>SLO</i>	Matej Brešar je član uredniških odborov štirih matematičnih revij.
		<i>ANG</i>	Matej Brešar is a member of editorial boards of four mathematical journals.
	Opis	<i>SLO</i>	Matej Brešar je član uredniških odborov Communications in Algebra, Linear Algebra and its Applications, Banach Journal of Mathematical Analysis in Mathematica Pannonica.
		<i>ANG</i>	Matej Brešar is a member of editorial boards of Communications in Algebra, Linear Algebra and its Applications, Banach Journal of Mathematical Analysis, and Mathematica Pannonica.
	Šifra	C.04	Uredništvo mednarodne revije
	Objavljeno v	http://www.tandfonline.com/action/aboutThisJournal?show=editorialBoard&journalCode=lagb20#.U0AutKJ8eX8	
		http://www.journals.elsevier.com/linear-algebra-and-its-applications/editorial-board	
		http://www.emis.de/journals/BJMA/editors.htm	

		http://www.emis.de/journals/MP/index_elemei/editors.htm	
	Tipologija	4.00 Sekundarno avtorstvo	
5.	COBISS ID		Vir: vpis v poročilo
	Naslov	SLO	Vabljeni predavanja na mednarodnih konferencah
		ANG	Invited lectures on international conferences
	Opis	SLO	Člani skupine, predvsem M. Brešar in P. Šemrl, so bili vabljeni predavatelji na več mednarodnih konferencah. Šemrl je bil med drugim eden izmed direktorjev in vabljenih predavateljev "Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications" na The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (Trst, julij 2013).
		ANG	Some members of the group, particularly M. Brešar and P. Šemrl, were invited lecturers at several international conferences. In particular, Šemrl was a co-director and one of the lecturers at the Advanced School and Workshop on Matrix Geometries and Applications at the The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, July 2013.
	Šifra	B.04 Vabljeni predavanja	
	Objavljeno v	http://cadsagenda5.ictp.trieste.it/full_display.php?ida=a12193	
	Tipologija	3.16 Vabljeni predavanja na konferenci brez natisa	

8. Drugi pomembni rezultati projektne skupine²

Drugi pomembnejši rezultati so zavedeni v sistemu COBISS.

9. Pomen raziskovalnih rezultatov projektne skupine⁸

9.1. Pomen za razvoj znanosti⁹

SLO

Podatki o razmeroma veliki citiranosti članov projektne skupine in drugih kazalcih odmevnosti pričajo o tem, da projekt je pomemben za razvoj znanosti.

ANG

A large number of citations and other responses on the work of the members of the project team show that the project is important for the development of science.

9.2. Pomen za razvoj Slovenije¹⁰

SLO

Raziskovalno delo v okviru tega projekta je temeljne narave, zato ne pričakujemo, da bodo rezultati raziskav imeli neposredni učinek na ekonomski razvoj Slovenije. Zelo pomemben pa je projekt za razvoj (predvsem podiplomskih) univerzitetnih študijskih programov. Prav tako je pomemben za ohranjanje stikov slovenske znanosti z dogajanjem po svetu.

ANG

The research work within the research project is in the area of pure mathematics, therefore the results of the research do not have a direct impact on the development of Slovenia. However, the project is very important for the development of the university curriculums (especially postgraduate ones). It also enables scientist from Slovenia to work on the most up to date research problems at the same time as researchers from all over the world.

10. Samo za aplikativne projekte in podoktorske projekte iz gospodarstva!

Označite, katerega od navedenih ciljev ste si zastavili pri projektu, katere konkretne rezultate ste dosegli in v kakšni meri so doseženi rezultati uporabljeni

Cilj		
F.01	Pridobitev novih praktičnih znanj, informacij in veščin	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.02	Pridobitev novih znanstvenih spoznanj	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.03	Večja usposobljenost raziskovalno-razvojnega osebja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.04	Dvig tehnološke ravni	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.05	Spособnost za začetek novega tehnološkega razvoja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.06	Razvoj novega izdelka	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.07	Izboljšanje obstoječega izdelka	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.08	Razvoj in izdelava prototipa	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.09	Razvoj novega tehnološkega procesa oz. tehnologije	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.10	Izboljšanje obstoječega tehnološkega procesa oz. tehnologije	

	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.11	Razvoj nove storitve	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.12	Izboljšanje obstoječe storitve	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.13	Razvoj novih proizvodnih metod in instrumentov oz. proizvodnih procesov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.14	Izboljšanje obstoječih proizvodnih metod in instrumentov oz. proizvodnih procesov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.15	Razvoj novega informacijskega sistema/podatkovnih baz	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.16	Izboljšanje obstoječega informacijskega sistema/podatkovnih baz	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.17	Prenos obstoječih tehnologij, znanj, metod in postopkov v prakso	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.18	Posredovanje novih znanj neposrednim uporabnikom (seminarji, forumi, konference)	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.19	Znanje, ki vodi k ustanovitvi novega podjetja ("spin off")	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE

	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.20	Ustanovitev novega podjetja ("spin off")	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.21	Razvoj novih zdravstvenih/diagnostičnih metod/postopkov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.22	Izboljšanje obstoječih zdravstvenih/diagnostičnih metod/postopkov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.23	Razvoj novih sistemskih, normativnih, programskih in metodoloških rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.24	Izboljšanje obstoječih sistemskih, normativnih, programskih in metodoloških rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.25	Razvoj novih organizacijskih in upravljavskih rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.26	Izboljšanje obstoječih organizacijskih in upravljavskih rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.27	Prispevek k ohranjanju/varovanje naravne in kulturne dediščine	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.28	Priprava/organizacija razstave	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>

	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.29	Prispevek k razvoju nacionalne kulturne identitete	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.30	Strokovna ocena stanja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.31	Razvoj standardov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.32	Mednarodni patent	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.33	Patent v Sloveniji	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.34	Svetovalna dejavnost	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.35	Drugo	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>

Komentar

11.Samo za aplikativne projekte in podoktorske projekte iz gospodarstva!
Označite potencialne vplive oziroma učinke vaših rezultatov na navedena področja

	Vpliv	Ni vpliva	Majhen vpliv	Srednji vpliv	Velik vpliv	
G.01	Razvoj visokošolskega izobraževanja					
G.01.01.	Razvoj dodiplomskega izobraževanja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.01.02.	Razvoj podiplomskega izobraževanja					

		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.01.03.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02	Gospodarski razvoj					
G.02.01.	Razširitev ponudbe novih izdelkov/storitev na trgu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.02.	Širitev obstoječih trgov	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.03.	Znižanje stroškov proizvodnje	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.04.	Zmanjšanje porabe materialov in energije	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.05.	Razširitev področja dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.06.	Večja konkurenčna sposobnost	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.07.	Večji delež izvoza	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.08.	Povečanje dobička	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.09.	Nova delovna mesta	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.10.	Dvig izobrazbene strukture zaposlenih	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.11.	Nov investicijski zagon	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.12.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03	Tehnološki razvoj					
G.03.01.	Tehnološka razširitev/posodobitev dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.02.	Tehnološko prestrukturiranje dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.03.	Uvajanje novih tehnologij	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.04.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04	Družbeni razvoj					
G.04.01.	Dvig kvalitete življenja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.02.	Izboljšanje vodenja in upravljanja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.03.	Izboljšanje delovanja administracije in javne uprave	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.04.	Razvoj socialnih dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.05.	Razvoj civilne družbe	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.06.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.05.	Ohranjanje in razvoj nacionalne naravne in kulturne dediščine in identitete					
G.06.	Varovanje okolja in trajnostni razvoj					
G.07	Razvoj družbene infrastrukture					
G.07.01.	Informacijsko-komunikacijska infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.02.	Prometna infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.03.	Energetska infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.04.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.08.	Varovanje zdravja in razvoj zdravstvenega varstva					

G.09.	Drugo:		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
--------------	---------------	--	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	--

Komentar

--

12.Pomen raziskovanja za sofinancerje¹¹

	Sofinancer			
1.	Naziv			
	Naslov			
	Vrednost sofinanciranja za celotno obdobje trajanja projekta je znašala:		EUR	
	Odstotek od utemeljenih stroškov projekta:		%	
	Najpomembnejši rezultati raziskovanja za sofinancerja	Šifra		
		1.		
		2.		
		3.		
		4.		
		5.		
	Komentar			
	Ocena			

13.Izjemni dosežek v letu 2014¹²**13.1. Izjemni znanstveni dosežek**

Matej Brešar in Špela Špenko sta našla vse rešitve funkcijskih identitet ene spremenljivke na končno razsežnih praalgebrah in s tem dobila prvi popoln opis funkcijskih identitet v končnih dimenzijah.

Njun rezultat je bil objavljen v članku Functional identities in one variable v reviji Journal of Algebra.

13.2. Izjemni družbeno-ekonomski dosežek

Matej Brešar je bil do konca leta 2014 član odbora za evropsko solidarnost pri EMS - European Mathematical Society.

C. IZJAVE

Podpisani izjavljam/o, da:

- so vsi podatki, ki jih navajamo v poročilu, resnični in točni
- se strinjamo z obdelavo podatkov v skladu z zakonodajo o varstvu osebnih podatkov za potrebe ocenjevanja ter obdelavo teh podatkov za evidence ARRS
- so vsi podatki v obrazcu v elektronski obliki identični podatkom v obrazcu v pisni obliki
- so z vsebino zaključnega poročila seznanjeni in se strinjajo vsi soizvajalci projekta

Podpisi:

*zastopnik oz. pooblaščen oseba
raziskovalne organizacije:*

in

vodja raziskovalnega projekta:

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za
matematiko in fiziko

Matej Brešar

ŽIG

Kraj in datum:

Ljubljana	25.2.2015
-----------	-----------

Oznaka poročila: ARRS-RPROJ-ZP-2015/88

- ¹ Napišite povzetek raziskovalnega projekta (največ 3.000 znakov v slovenskem in angleškem jeziku) [Nazaj](#)
 - ² Napišite kratko vsebinsko poročilo, kjer boste predstavili raziskovalno hipotezo in opis raziskovanja. Navedite ključne ugotovitve, znanstvena spoznanja, rezultate in učinke raziskovalnega projekta in njihovo uporabo ter sodelovanje s tujimi partnerji. Največ 12.000 znakov vključno s presledki (približno dve strani, velikost pisave 11). [Nazaj](#)
 - ³ Realizacija raziskovalne hipoteze. Največ 3.000 znakov vključno s presledki (približno pol strani, velikost pisave 11) [Nazaj](#)
 - ⁴ V primeru bistvenih odstopanj in sprememb od predvidenega programa raziskovalnega projekta, kot je bil zapisan v predlogu raziskovalnega projekta oziroma v primeru sprememb, povečanja ali zmanjšanja sestave projektne skupine v zadnjem letu izvajanja projekta, napišite obrazložitev. V primeru, da sprememb ni bilo, to navedite. Največ 6.000 znakov vključno s presledki (približno ena stran, velikost pisave 11). [Nazaj](#)
 - ⁵ Navedite znanstvene dosežke, ki so nastali v okviru tega projekta. Raziskovalni dosežek iz obdobja izvajanja projekta (do oddaje zaključnega poročila) vpišete tako, da izpolnite COBISS kodo dosežka – sistem nato sam izpolni naslov objave, naziv, IF in srednjo vrednost revije, naziv FOS področja ter podatek, ali je dosežek uvrščen v A" ali A'. [Nazaj](#)
 - ⁶ Navedite družbeno-ekonomske dosežke, ki so nastali v okviru tega projekta. Družbeno-ekonomski rezultat iz obdobja izvajanja projekta (do oddaje zaključnega poročila) vpišete tako, da izpolnite COBISS kodo dosežka – sistem nato sam izpolni naslov objave, naziv, IF in srednjo vrednost revije, naziv FOS področja ter podatek, ali je dosežek uvrščen v A" ali A'.
- Družbeno-ekonomski dosežek je po svoji strukturi drugačen kot znanstveni dosežek. Povzetek znanstvenega dosežka je praviloma povzetek bibliografske enote (članka, knjige), v kateri je dosežek objavljen.
- Povzetek družbeno-ekonomskega dosežka praviloma ni povzetek bibliografske enote, ki ta dosežek dokumentira, ker je dosežek sklop več rezultatov raziskovanja, ki je lahko dokumentiran v različnih bibliografskih enotah. COBISS ID zato ni enoznačen, izjemoma pa ga lahko tudi ni (npr. prehod mlajših sodelavcev v gospodarstvo na pomembnih raziskovalnih nalogah, ali ustanovitev podjetja kot rezultat projekta ... - v obeh primerih ni COBISS ID). [Nazaj](#)
- ⁷ Navedite rezultate raziskovalnega projekta iz obdobja izvajanja projekta (do oddaje zaključnega poročila) v primeru, da katerega od rezultatov ni mogoče navesti v točkah 6 in 7 (npr. ni voden v sistemu COBISS). Največ 2.000 znakov, vključno s presledki. [Nazaj](#)
 - ⁸ Pomen raziskovalnih rezultatov za razvoj znanosti in za razvoj Slovenije bo objavljen na spletni strani: <http://sicris.izum.si/> za posamezen projekt, ki je predmet poročanja [Nazaj](#)
 - ⁹ Največ 4.000 znakov, vključno s presledki [Nazaj](#)
 - ¹⁰ Največ 4.000 znakov, vključno s presledki [Nazaj](#)
 - ¹¹ Rubrike izpolnite / prepisite skladno z obrazcem "izjava sofinancerja" <http://www.arrs.gov.si/sl/progproj/rproj/gradivo/>, ki ga mora izpolniti sofinancer. Podpisan obrazec "Izjava sofinancerja" pridobi in hrani nosilna raziskovalna organizacija – izvajalka projekta. [Nazaj](#)
 - ¹² Navedite en izjemni znanstveni dosežek in/ali en izjemni družbeno-ekonomski dosežek raziskovalnega projekta v letu 2014 (največ 1000 znakov, vključno s presledki). Za dosežek pripravite diapozitiv, ki vsebuje sliko ali drugo slikovno gradivo v zvezi z izjemnim dosežkom (velikost pisave najmanj 16, približno pol strani) in opis izjemnega dosežka (velikost pisave 12, približno pol strani). Diapozitiv/-a priložite kot priponko/-i k temu poročilu. Vzorec diapozitiva je objavljen na spletni strani ARRS <http://www.arrs.gov.si/sl/gradivo/>, predstavitev dosežkov za pretekla leta pa so objavljena na spletni strani <http://www.arrs.gov.si/sl/analize/dosez/>. [Nazaj](#)

Obrazec: ARRS-RPROJ-ZP/2015 v1.00a
46-A1-42-2A-7A-CE-C4-0B-7B-FF-0D-DF-A5-19-69-F6-E7-19-A4-51

Priloga 1

VEDA: Naravoslovne vede
Področje: 1.01 Matematika

Dosežek 1: Izvirni znanstveni članek, Vir: Journal of Algebra; 2014; Vol. 401; str. 234-244.



Journal of Algebra

Volume 401, 1 March 2014, Pages 234–244



Functional identities in one variable ☆

Matej Brešar^{a, b},  , Špela Špenko^c 

 [Show more](#)

doi:10.1016/j.jalgebra.2013.11.026

[Get rights and content](#)

Abstract

Let A be a centrally closed prime algebra over a characteristic 0 field k , and let $q: A \rightarrow A$ be the trace of a d -linear map (i.e., $q(x) = M(x, \dots, x)$ where $M: A^d \rightarrow A$ is a d -linear map). If $[q(x), x] = 0$ for every $x \in A$, then q is of the form $q(x) = \sum_{i=0}^d \mu_i(x)x^i$ where each μ_i is the trace of a $(d-i)$ -linear map from A into k . For infinite dimensional algebras and algebras of dimension $> d^2$ this was proved by Lee, Lin, Wang, and Wong in 1997. In this paper we cover the remaining case where the dimension is $\leq d^2$. Using this result we are able to handle general functional identities in one variable on A ; more specifically, we describe the traces of d -linear maps $q_i: A \rightarrow A$ that satisfy $\sum_{i=0}^m x^i q_i(x) x^{m-i} \in k$ for every $x \in A$.

MSC

primary, 16R60; secondary, 13A50, 13B22, 16R20

Matej Brešar in Špela Špenko sta našla vse rešitve funkcijskih identitet ene spremenljivke na končno razsežnih praalgebrah in s tem dobila prvi popoln opis funkcijskih identitet v končnih dimenzijah.

Njun rezultat je bil objavljen v članku Functional identities in one variable v reviji Journal of Algebra.

Priloga 2

VEDA: Naravoslovne vede

Področje: 1.01 Matematika

Dosežek 2: Članstvo v mednarodnih odborih, Vir: <http://www.euro-math-soc.eu/comm-eur-solid.html>



__European Solidarity__

EMS Committee for European Solidarity

[Online Application Form for Travel Grants](#)

[Online Application Form for Event Organisers](#)

Terms of reference:

The EMS Committee for European Solidarity will undertake actions to foster the development of mathematics in economically less-favoured regions within the geographical area of EMS membership and through the following means:

- › Awarding travel grants to young qualified mathematicians.
- › Promoting and funding training activities, such as advanced courses or workshops at an early-career level.
- › Supporting bilateral and multilateral regional conferences.
- › Raising new scientific initiatives.
- › Offering advice and assistance about the launching of development projects.
- › Easing access to research resources, including digital libraries.

EC responsible member: **Armen Sergeev**, Email: sergeev@mi.ras.ru

Chair:	Carles Casacuberta (Address) Term of office: 2011-2014 Term: I Email: carles.casacuberta@ub.edu
Vice-Chair:	Igor Krichever (Address) Term of office: 2009-2016 Term: II Email: krichev@math.columbia.edu

Members

Name	Term of office	Term	Email
Lucian Beznea	2011-2014	I	lucian.beznea@imar.ro
Matej Bresar	2007-2014	II	matej.bresar@fmf.uni-lj.si
Carles Casacuberta	2011-2014	I	carles.casacuberta@ub.edu

Matej Brešar je član mednarodnega odbora v okviru Evropskega matematičnega društva: Committee for European Solidarity. Naloga odbora je podpora razvoju matematike v ekonomsko slabše razvitih območjih Evrope.