

Razvoj mentalne reprezentacije števil v zgodnjem otroštvu

Matija Svetina* in Sergeja Rožmarič
Univerza v Ljubljani, Filozofska fakulteta, Oddelek za psihologijo

Povzetek: Študije so v zadnjih desetih letih pokazale, da mentalne reprezentacije števil pri otrocih lahko pojasnjemo v okviru Fechnerjevega zakona o logaritmičnosti odnosov med dražljajem in zaznavo ter da je linearnost številске reprezentacije povezana tako s starostjo otrok kot z velikostjo in kompleksnostjo števil. Zelo malo podatkov pa imamo o vplivih kognitivnih dejavnikov, kot je npr. razumevanje koncepta števila ali razvoj logičnih operacij, na razvoj linearne predstave o številih ter relativno zelo malo podatkov o razvoju številskih reprezentacij pri predšolskih otrocih. S študijo smo želeli osvetliti vlogo nekaterih vidikov koncepta števila v razvoju linearne predstave o številih pri predšolskih otrocih. Sodelovalo je 39 otrok, starih med 3 in 6 let, ki so reševali naloge razumevanja ordinalnosti števil in številске daljice. Rezultati nakazujejo, da je razvoj konceptualnega znanja o številih predpogoj za razvoj linearnih vzorcev mentalnih reprezentacij števila, hkrati odpirajo nekatera nova vprašanja o dejavniki razvoja linearnosti številskih predstav in njihove povezanosti z otrokovimi reprezentacijami drugih količin, kot so predstave o teži, razdalji ali denarju.

Ključne besede: reprezentacija števil, zgodnje otroštvo, razvoj pojma

The development of numerical representations in early childhood

Matija Svetina and Sergeja Rožmarič
University of Ljubljana, Faculty of Arts, Department of Psychology

Abstract: Recent studies of numerosity in the field of developmental psychology indicate that numerical representation in children might be regarded in terms of Fechner's law of logarithmic relations between stimuli and response. The data also suggest that the shift from logarithmic to linear pattern of mental representation relates to different factors such as age, number scale, and culture. However, very little is known whether cognitive factors such as procedural and conceptual development have any impact on numerical representations, particularly in the preschoolers. The aim of our study was to provide an explanation of relations between numerical concepts and numerical representations in preschool children. In the study, 39 3-6 year-olds were presented with both, task of conceptual understanding of numbers and the number line task. The results indicate that the development of conceptual understanding of numbers may act as a threshold condition to the development of linear numerical representations in early childhood. Implications of these findings, such as representations of height, distance or value are further discussed.

Key words: numerical representations, early childhood, concept development

CC = 2820

* Naslov: Matija Svetina, Oddelek za psihologijo, Filozofska fakulteta, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva 2, 1000 Ljubljana, e-mail: m.svetina@ff.uni-lj.si

Reprezentacija količine pomeni kvantitativni vidik mentalne predstave določene kvalitete, npr. teže, razdalje, jakosti, trajanja ali denarne vrednosti, ki jo najpogosteje opisujemo s števili (Dehaene, 1997). Različni avtorji s področja kognitivnih razvojnopsiholoških študij se praviloma strinjajo glede t. i. "prostorske narave" reprezentacij števila (Dowker, 2008): števila si predstavljamo kot točke na daljici, ki tečejo od leve proti desni (Castranovo in Seron, 2007; Dehaene, 1997; Nuerk, Kaufman, Zopoth in Willmes, 2004; Umilta, Priftis in Zorzi, 2009). Nekateri avtorji (cit. v Dehaene, 1997) menijo, da so prostorske značilnosti številskih reprezentacij (npr. smer naraščanja števil) povezane predvsem s smerjo branja v zahodni kulturi, vendar so študije v zadnjih desetih letih pokazale, da prostorske dimenzije reprezentacije števil presegajo kulturne okvire in imajo najverjetneje tudi nevropsihološke osnove (Castranovo in Seron, 2007; Umilta, Priftis in Zorzi, 2009).

Medtem ko prostorski atributi mentalnih reprezentacij niso vprašljivi, pa razvojni psihologi vse več zanimanja posvečajo odnosom med števili na številski premici in njihovimi reprezentacijami. V zadnjih nekaj letih so se pri ocenjevanju številskih reprezentacij uveljavile t. i. naloge s številsko daljico (npr. Lourencio in Longo, 2009; Siegler in Opfer, 2003; Siegler, Thompson in Opfer, 2009), pri kateri udeleženec na prazno vodoravno daljico, ki je na robovih označena s številskim intervalom (0–100, 0–1000), umesti določeno število. Na intervalu 0–100 je tako npr. pravilna pozicija števila 33 na prvi tretjini daljice, števila 67 pa na drugi tretjini, razmerje med položajem števila (x) in njegovo reprezentacijo je linearno, $y = x$. Četudi se zdi linearni odnos med pravilnim položajem števila na daljici in njegovo mentalno reprezentacijo tavnološki, so razvojnopsihološke študije v zadnjih letih pokazale, da se odgovori otrok in odraslih pri teh nalogah sistematično razlikujejo (Booth in Siegler, 2006; Laski in Siegler, 2007; Opfer in Siegler, 2007; Siegler in Booth, 2004; Siegler in Opfer, 2003). Odgovori pri odraslih se praviloma skladajo z matematično idejo (linearne) reprezentacije števil na številski premici, vzorci odgovorov pri otrocih pa niso taki. Študije so pokazale, da otroci npr. številki 33 in 67 ne umestijo na prvo in drugo tretjino daljice, ampak obe številki postavijo na mejo med drugo in tretjo tretjino daljice, približno med vrednosti 60 in 70 (Opfer in Siegler, 2007). Kognitivne reprezentacije števil pri otrocih niso linearne, ampak ustrezajo Fechnerjevemu zakonu, po katerem je odnos med odvisno in neodvisno spremenljivko logaritmičen, $y = k x \ln(x)$, kar pomeni, da so ocene močno zgoščene na desni strani daljice. Pri tem se pojavita vsaj dve vprašanji: zakaj bi vzorci kognitivnih reprezentacij števil pri otrocih ustrezali psihofizičnim zakonom zaznavanja, saj kognitivni procesi verjetno za to nimajo fiziološke osnove. Drugo vprašanje je, pri kateri starosti, zakaj in kako se razvijajo linearne reprezentacije števil.

Na prvo vprašanje razvojna psihologija do sedaj nima ustreznih odgovorov, čeprav se zdi, da je logaritmična reprezentacija v določenih okoliščinah ustrežnejša kot linearna (Opfer in Siegler, 2007): če otrok da prijatelju en bombon od treh, je številaska enota v relativnem smislu večja, kot če mu da en bombon od desetih; relativna vrednost posameznega bombona pada logaritmično s številom bombonov, ki

jih otrok ima. Nekateri avtorji (Opfer in Thompson, 2008) menijo, da so logaritmične reprezentacije pri otrocih povezane z generaliziranim neustreznim transferjem razumevanja majhnih števil na celotni številski lestvici, vendar jasnih odgovorov glede kognitivnih mehanizmov, ki so v ozadju vzorcev Fechnerjevega zakona pri reprezentaciji števil, še ne poznamo.

Tudi na drugo vprašanje, kdaj, zakaj in kako se logaritmični vzorci reprezentacij spremenijo v linearne, še nimamo jasnih odgovorov. Prehod od logaritmičnega k linearnemu vzorcu številskih reprezentacij je povezan tako s starostjo kot s številskim intervalom (pregled v Siegler, Thompson in Opfer, 2009): pri številih do 100 se pri otrocih v ZDA pojavi do okrog osmega leta starosti, pri številih do 1000 do okrog desetega leta in pri številih do 10.000 do približno dvanajstega leta starosti. Pri kitajskih otrocih (Siegler in Mu, 2008) se preskok med logaritmično in linearno reprezentacijo števil pojavi v povprečju eno do dve leti prej, tako pri šolskih kot pri predšolskih otrocih. Medtem, ko imamo na vprašanje, kdaj se pojavi preskok med logaritmičnimi in linearnimi vzorci številskih reprezentacij pri otrocih, že nekaj odgovorov, pa imamo na vprašanja, zakaj in kako se ta preskok pojavi, manj podatkov. Nekaterne eksperimentalne študije (Ramani in Siegler, 2008) nakazujejo, da je razvoj postopen, posredno povezan s socialnoekonomskim statusom, neposredno pa z izkušnjami, med katerimi je npr. tudi igranje družabnih iger s kockami in štetjem.

Nekaterne študije (Gilmore, McCarthy in Spelke, 2010) posredno nakazujejo, da je razvoj linearnih reprezentacij števil pri otrocih verjetno povezan z razvojem logičnih operacij ter razvojem konceptualnega znanja o številih, kot so npr. prepoznavanje števnikov ali razumevanje ordinalnosti naravnih števil, vendar empiričnih podatkov o tem praktično nimamo. Prav tako se večina podatkov o razvoju reprezentacije števil nanaša na šolske otroke, zelo malo podatkov pa imamo o razvoju reprezentacijskih vzorcev števil v obdobju zgodnjega otroštva. V pričujoči študiji smo tako raziskovali odnose med konceptualnim znanjem o številih in mentalnimi reprezentacijami števil v obdobju zgodnjega otroštva. Ker so predhodni rezultati na ameriškem vzorcu otrok, starih med 5 in 7 let (Siegler, Thompson in Opfer, 2009), pokazali, da je reprezentacija števil od ena do 100 logaritmična, smo za nižjo starost uporabili desetiško daljico. Kot mero konceptualnega znanja o številih smo uporabili za predšolske otroke prirejeno lestvico razumevanja števil (Maloveefa, Day, Saco, Young in Ciancion, 2004). Pričakovali smo, da je konceptualno znanje o številih, posebej razumevanje ordinalnosti, neposredno povezano z razvojem linearne reprezentacije števila v zgodnjem otroštvu. Predpostavljali smo, da imajo otroci, ki imajo težave z razumevanjem vrstnega reda števil, težave tudi z njihovo prostorsko reprezentacijo in da razvoj razumevanja ordinalnosti števil v zgodnjem otroštvu vsaj deloma tudi pogojuje razvoj linearne reprezentacije teh števil. Na merski ravni smo omenjene odnose ocenjevali z modelom parcialnih korelacij med ocenami razumevanja ordinalnosti števil in linearnostjo njihovih mentalnih reprezentacij.

Metoda

Udeleženci

V študiji je sodelovalo 39 otrok v starosti 38 do 74 mesecev ($M = 53,83$, $SD = 9,59$; 10 3-letnikov, 18 4-letnikov in 11 5-6-letnikov). Med udeleženci je bilo 23 fantov in 16 deklet, ki so v letu 2009/10 obiskovali enega izmed ljubljanskih vrtcev. Za vse otroke smo predhodno pridobili pisno soglasje njihovih staršev. Preizkušanja so bila individualna, potekala je v vrtcu v dopoldanskem času. Čas reševanja nalog ni bil omejen, v večini primerov je trajal do pol ure. Vse otroke je preizkušal isti testator.

Materiali in postopki

Desetiška številka daljica. Za oceno linearnosti številke reprezentacije smo v študiji uporabili nalogo s številsko daljico po postopku, ki so ga uporabili predhodni avtorji (Opfer in Siegler, 2007; Siegler, Thompson in Opfer, 2009). Desetiška daljica je bila narisana na vodoravno obrnjenem listu A5, dolga je bila 15 cm, na levem koncu je bila označena s številko 0, na desnem pa z 10. Nad daljico je bila napisana ena od števil med 1 in 9. Otrokova naloga je bila, da je na daljici s svinčnikom označil mesto, na katerem naj bi se nahajala zahtevana številka. Otrok je dobil devet takih nalog, ki so si sledile v naključnem vrstnem redu, drugačnem za vsakega otroka. Na podlagi odgovorov smo izračunali tri mere reprezentacije števila, povprečno napako ocene in deleže variance, ki jo pojasnjujeta linearni oz. logaritmični funkcijski odnos med pozicijo števil na številski daljici in otrokovimi odgovori. Povprečno napako ocene (PNO) smo izračunali po naslednji formuli: $PNO = \frac{| \text{pravilna vrednost} - \text{odgovor} |}{\text{št. interval}}$. Za ilustracijo lahko navedemo primer: če je otrok zahtevano število 3 postavil na mesto, kjer stoji število 4,2, je bila vrednost $PNO = 12 = \frac{|3 - 4,2|}{10}$. Deleže variance, pojasnjene z logaritmično in linearno funkcijo, smo izračunali tako, da smo primerjali zahtevana števila 1–9 (x -os) z otrokovimi devetimi odgovori na številski daljici (y -os), nato pa izračunali odstopanja od linearnega in logaritmičnega funkcijskega odnosa med obema vrednostima in vrednosti deležev pojasnjenih varianc na posamezni funkciji.

Štetje do 30. Naloga s štetjem do 30 se pojavlja v različnih kontekstih ocenjevanja inteligentnosti pri otrocih, ocenjevanja delovnega spomina ali konceptualnega znanja o številih (Goldbeck, Daswking, Hellwig Brida, Waldman in Petermann, 2010), za kar smo jo uporabili tudi v pričujoči študiji. Pri tej nalogi je otrok dobil navodilo, naj šteje do 30, kot mero uspešnosti pa smo upoštevali zadnje pravilno število v zaporedju. Če je otrok npr. pri štetju izpustil število 14, smo kot mero uspešnosti pri tej nalogi upoštevali število 13.

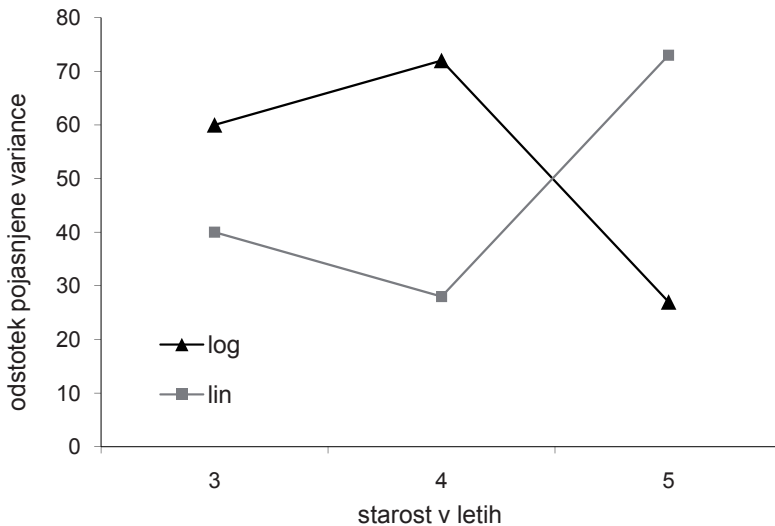
Razumevanje ordinalnosti smo ocenjevali z lestvico, ki so jo različni avtorji uporabljali za ocenjevanje razumevanja ordinalnosti števil kot dela konceptualnega

znanja o številih tako pri predšolskih kot tudi pri šolskih otrocih (Malofeeva, Day, Saco, Young in Ciancion, 2004; Shao, 2006). Z lestvico ocenjujemo eno samo mero konceptualnega znanja o številih (razumevanje ordinalnosti- RO), sestavljena pa je iz šestih nalog. Pri prvi otrok pove, katero število predhodi in katero sledi določenemu številu, npr. katero število se nahaja pred in katero za številom sedem (tri vprašanja za števila 1–10). Pri drugi nalogi je testator pred otroka postavil dva kupčka s po največ 10 lističev, otrokova naloga pa je bila, da oceni, ali je v obeh kupčkih enako število lističev ali ne (tri vprašanja). Pri tretji nalogi je testator imenoval dve števili do 10, otrokova naloga pa je bila, da presodi, katero število v imenovanem paru je večje ali manjše. Testator je npr. vprašal: "Kaj je več, 9 ali 2?" (tri vprašanja). Pri četrti nalogi je testator pred otroka postavil tri kartice velikosti 4 x 5 cm; na vsaki je bila napisana številka do 10. Testator je prebral eno od števil, otrokova naloga je bila pokazati kartico, na kateri je bila napisana imenovana številka; npr. pred otrokom so bile kartice, na katerih so bila števila dva, šest in devet, otrok pa je moral pokazati številko šest. Pri peti nalogi je testator pred otroka razporedil deset lističev in ga prosil, naj iz vrste vzame določen listič, npr. sedmega po vrsti (tri vprašanja). Pri šesti nalogi je testator pred otroka postavil kupček lističev in glasno povedal tri števila do 10. Otrokova naloga je bila povedati, katero izmed imenovanih števil ustreza številu lističev v kupčku, npr. 10, sedem ali osem (v kupčku z 10 lističi) (tri vprašanja). Zanesljivost celotne lestvice (RO) smo ocenili s cronbachovim alfa koeficientom in je v pričujoči študiji znašala 0,81.

Rezultati

Rezultati so predstavljeni v dveh vsebinskih sklopih. V prvem predstavljamo odnose med starostjo in razumevanjem števila, v drugem pa odnose med konceptom števila in njegovo reprezentacijo.

Rezultati so pokazali, da se starost otrok povezuje z večino ocenjevanih pokazateljev razumevanja števil. Korelacija med starostjo in številom, do katerega znajo otroci prešteti brez napake je ,53 ($p < ,001$): triletniki znajo v povprečju brez napake šteti do šest, štiriletniki do 10, petletniki pa do 23, $F(2, 36) = 4,41$, $p < ,05$. Korelacija med starostjo in razumevanjem ordinalnosti števil (RO) je ,64 ($p < ,001$), kar kaže, da starejši otroci bolje razumejo ordinalnost števil kot mlajši. Povezanosti med starostjo in različnimi merami reprezentacije števil so bile prav tako pomembne: korelacija med starostjo in povprečno napako ocene števila na številski daljici (PNO) je bila ,31 ($p = ,06$), med starostjo in varianco, pojasnjeno z linearno funkcijo pa ,56 ($p < ,001$); linearna funkcija pri triletnikih v povprečju pojasni 14 %, pri štiriletnikih 13 %, pri petletnikih pa 52 % variabilnosti, $F(2, 36) = 10,68$, $p < ,001$. Ti rezultati jasno nakazujejo, da povezava med starostjo, točnostjo reprezentacije števila in razumevanjem ordinalnosti števil ni enakomerna, ampak pride do preskoka v starosti med četrtem in petim letom starosti. Da bi to ugotovitev



Slika 1. Delež pojasnjene variance za logaritmični in linearni reprezentacijski vzorec glede na kronološko starost otrok.

bolj natančno preverili, smo pri vsakem otroku izračunali, kolikšen delež variance odgovorov pojasnjuje linearna in kolikšen logaritmična funkcija, ter jih primerjali med seboj. Rezultati so pokazali (slika 1), da v tretjem in četrtem letu starosti prevladujejo logaritmični reprezentacijski vzorci, med četrtem in petim letom pa pride do preskoka, $\chi^2(2) = 5,68, p < ,06$; medtem ko je večina (več kot 60%) tri in štiriletnikov odgovarjala skladno z logaritmično reprezentacijo števila, je bilo med petletniki takih otrok okrog 20%.

Ti rezultati so skladni z ugotovitvami predhodnih študij o razvoju linearne reprezentacije števil. Skladno z ugotovitvami nekaterih avtorjev (Ramani in Siegler, 2008) smo predvidevali, da je starost zgolj posredni dejavnik pri razvoju linearnosti številskih reprezentacij; predvidevali smo, da je ta razvoj prej kot s starostjo povezan z razvojem konceptualnega znanja o številih, zato smo v nadaljevanju to predpostavko tudi podrobneje preverjali. Posredno oz. neposredno povezanost med točnostjo ocen na številski daljici, starostjo in konceptualnim znanjem o številih smo preverjali tako, da smo postopoma izločali vplive starosti oz. ocene konceptualnega znanja o številu in pri tem prišli do treh pomembnih ugotovitev.

Prvič, korelacija med starostjo in povprečno napako ocene na številski daljici (PNO), ki je na meji statistične pomembnosti ($r = ,31, p < ,06$), ob nadzoru razumevanja ordinalnosti števila postane nepomembno nizka ($r = ,02, p > ,80$), kar lahko pomeni, da ima razumevanje ordinalnosti števila verjetno vlogo mediatorske spremenljivke v odnosu med starostjo in reprezentacijo števila; točnost številске reprezentacije je s starostjo povezana posredno preko razumevanja ordinalnosti.

Starejši otroci bolje razumejo ordinalnost števil, hkrati pa imajo tudi ustrežnejše številске reprezentacije kot mlajši otroci; če predpostavimo, da vsi otroci v vzorcu enako dobro razumejo ordinalnost števil, se izkaže, da točnost reprezentacije števil ni povezana starostjo.

Drugič, korelacija med starostjo in deležem variance, ki jo pojasnjuje linearna funkcija, je srednje visoka in pomembna ($r = ,56, p < ,001$). Če nadzorujemo vpliv razumevanja ordinalnosti števila, postane korelacija med starostjo in deležem pojasnjene variance na linearni funkciji kot pokazateljem točnosti reprezentacije števila nepomembna, parcialna korelacija je $,16$ ($p > ,30$). Tudi tukaj, kot v predhodnem primeru, rezultati nakazujejo, da starost ni neposredno ampak zgolj posredno povezana z reprezentacijskim vzorcem števila; logaritmičnega oz. linearnega vzorca števila ne moremo napovedovati s pomočjo starosti, lahko pa ga vsaj delno napovedujemo preko razumevanja ordinalnosti števila kot pokazatelja konceptualnega znanja o številu.

Tretjič, zgoraj predstavljeni rezultati nakazujejo, da ima razumevanje ordinalnosti mediatorsko vlogo v odnosu med starostjo in razvojem reprezentacije števila; da bi ugotovili, ali je omenjeni odnos dvosmeren, smo s pomočjo parcialne korelacije izločili še vpliv linearnosti reprezentacije na povezanost med konceptualnim znanjem o številu in starostjo otrok. Če ima starost zgolj mediatorsko vlogo v povezanosti med konceptualnim znanjem o številu in linearnostjo številске reprezentacije, povezanost med zadnjima dvema pa je neposredna, potem nadzor variabilnosti deleža pojasnjene variance na linearni funkciji ne bi smela pomembno spremeniti koeficientov korelacije med obema spremenljivkama.

Če torej nadziramo pokazatelje številске reprezentacije kot mediacijsko spremenljivko med razumevanjem ordinalnosti števil in starostjo, ugotovimo, da starost sovpada tako z razumevanjem ordinalnosti ($r = ,64, p < ,001$) kot z linearnostjo reprezentacije števila ($r = ,56, p < ,001$), iz česar sklepamo, da imajo starejši otroci ustrežnejše številске reprezentacije kot mlajši. Nadaljnja analiza pokaže, da korelacija med starostjo in razumevanjem ordinalnosti števila ob nadzoru variabilnosti linearnosti reprezentacije ostane razmeroma nespremenjena: ob nadzoru PNO ostane korelacija med starostjo in razumevanjem ordinalnosti števila pomembna ($r = ,59, p < ,001$), prav tako tudi ob nadzoru deleža pojasnjene variance na linearni funkciji ($r = ,41, p < ,05$). Rezultati nakazujejo, da ima razumevanje ordinalnosti pomembno mediatorsko vlogo v razvoju reprezentacije števila, medtem ko sama reprezentacija števila nima pomembnejše mediatorske vloge v razvoju razumevanja ordinalnosti števila, hkrati pa ti rezultati odpirajo tudi kopico vsebinskih kot tudi metodoloških vprašanj.

Razprava

Rezultati študije so odprli več vprašanj, povezanih z mentalno reprezentacijo števil in razvojem konceptualnega znanja o številih pri otrocih. Prvič, rezultati so pokazali, da znajo triletniki v povprečju brez napake šteti do šest, štiriletniki pa do 10, kar je nekoliko več, kot so pokazali podatki izpred štirinajstih let (Svetina, 1996). Medtem ko se zdi naloga s številsko daljico uporabna za ocenjevanje linearnosti številskih reprezentacij pri šolskih otrocih, pa se odpira vprašanje, ali je njena uporaba smiselna tudi pri predšolskih otrocih; če večina triletnikov ne zna brez napake prešteti do 10, je namreč umeščanje števil do 10 na daljico pri teh otrocih lahko vsebinsko vprašljivo. Nekatere študije (Siegler in Stern, 1998) kažejo, da je usvajanje matematičnih operacij povezano tudi z nezavedno uporabo strategij reševanja problema, kar pomeni, da lahko otroci ustrezno rešujejo številске in nekatere matematične probleme, čeprav operacij ne znajo ubesediti. Pri ocenjevanju številskih reprezentacij ima to različne implikacije, saj je možno, da lahko predšolski otroci ustrezno prepoznajo linearne vzorce števil na številski daljici, četudi teh števil ne znajo aktivno umeščati na daljico oz. če pri štetju določena števila sistematično izpuščajo. Ta vprašanja vsekakor terjajo dodatne študije v prihodnosti.

Drugič, rezultati so pokazali, da je razvoj koncepta števila kot tudi razvoj številskih reprezentacij pri predšolskih otrocih vsaj posredno povezan s starostjo, kar kažejo tudi mnoge predhodne študije (Siegler, Thompson in Opfer, 2009). Rezultati pričujoče študije so pokazali, da reprezentacija števil do 10 postane linearna med 4. in 5. letom starosti, pri tem pa se postavlja vprašanje, zakaj pride do preskoka med logaritmčno in linearno reprezentacijo števil do 10 prav med 4. in 5. letom starosti. Pričujoči rezultati nakazujejo, da je v ozadju tega preskoka lahko razvoj razumevanja ordinalnosti števil, iz literature pa bi posredno, preko starosti, v kateri se te spremembe pojavijo, lahko sklepali tudi na nekatere druge elemente razvoja mišljenja, kot so razvoj razumevanja množic ali spremembe v spominskih in metakognitivnih sposobnostih (Siegler, 1998; Sutherland, 1992; Thompson in Siegler, 2010), zanesljivejše podatke glede teh vprašanj pa bomo morali v prihodnosti pridobiti z nadaljnjimi študijami.

Tretjič, rezultati nakazujejo, da je za razvoj linearne reprezentacije števila potreben predhodni razvoj kritične ravni konceptualnega znanja o številih, ki se pri predšolskih otrocih kaže tudi kot razumevanje ordinalnosti števil do 10. Razumevanje ordinalnosti števila je eden ključnih dejavnikov razvoja koncepta števila pri predšolskih otrocih (Levine, Wheatlton, Meredith, Huttenlocher in Gunderson, 2010; Siegler, 1998), saj se zdi, da predstavlja osnovo tako za razumevanje količin drugih modalnosti, npr. teže ali razdalje, kot tudi za matematične operacije, kot so seštevanje ali množenje. Pri tem se poraja vprašanje, ali ima konceptualno znanje o številu prav tako veliko vlogo v razvoju številskih reprezentacij tudi v kasnejših starostnih obdobjih. Števila do 10 so relativno majhna in razumevanje ordinalnosti je lahko ključno za razvoj linearnih reprezentacij, kar pa verjetno ne velja za števila višja

od 100, kot tudi ne za mentalne reprezentacije ulomkov in drugih (npr. iracionalnih) števil. Čeprav rezultati pričujoče študije podpirajo domneve, da je razvoj koncepta števila verjetno povezan z razvojem linearne reprezentacije števila, še vedno nimamo odgovorov na vprašanje, katere so kritične dimenzije razvoja koncepta števila v posameznih starostih oz. razvojnih obdobjih. Ta vprašanja bi bila nedvomno vredna nadaljnjih empiričnih raziskav.

Rezultati pričujoče študije so po eni strani pokazali, da zaporedje razvoja logaritmičnih in linearnih vzorcev reprezentacije števila ne velja samo v šolskem ampak tudi v predšolskem obdobju in na številih manjših od 100, po drugi strani pa so pokazali, da ima pri razvoju linearnih vzorcev mentalnih reprezentacij števila verjetno pomembno vlogo razvoj konceptualnega znanja o številih, v zgodnjem otroštvu še posebej razvoj razumevanja ordinalnosti števila. Omenjene ugotovitve prinašajo pomemben prispevek k razumevanju razvoja mentalnih reprezentacij števil pri otrocih, hkrati pa odpirajo vrsto vsebinskih kot tudi metodoloških vprašanj.

Prvo se nanaša na vsebinske in metodološke omejitve pričujoče študije. Študija je bila opravljena na majhnem vzorcu otrok z omejenim naborom nalog za ocenjevanje razvoja konceptualnega znanja o številih. V prihodnosti bi bilo smiselno sestaviti naloge, s katerimi bi poleg razumevanja ordinalnosti preverjali tudi druge vidike konceptualnega znanja o številih.

Drugo vprašanje se nanaša na vzroke in pogoje razvoja linearnosti številске reprezentacije pri predšolskih otrocih. V pričujoči študiji smo ugotovili, da ima razumevanje ordinalnosti pomembno mediatorsko funkcijo v razvoju reprezentacije števila, medtem ko sama reprezentacija števila nima pomembnejše mediatorske vloge v razvoju razumevanja ordinalnosti števila. Možnih razlag za to je več. Prva možna razlaga je, da je razumevanje ordinalnosti števila osnova za razvoj ustrezne, torej linearne reprezentacije števila, druga pa, da je lahko v ozadju tretja kognitivna funkcija, ki vpliva na razvoj obeh, tako konceptualnega znanja kot linearnosti številskih reprezentacij, med katerimi bi bile lahko tudi kognitivne spremembe na procesni ravni, ki so povezane tako z razvojem kognitivnih konceptov kot logičnih funkcij, npr. razvoj delovnega spomina ali avtomatizacija procesov matematičnega sklepanja (Andersson, 2010; Imbo in LeFevre, 2009; Rittle-Johnson in Siegler, 1998).

Po drugi strani se zdi, da je vprašanje vzrokov in pogojev razvoja linearnosti reprezentacije neposredno povezano s kulturo in izkušnjami predšolskih otrok s števili. Nekatere študije kažejo (npr. Siegler in Mu, 2008), da kitajski otroci usvojijo linearno reprezentacijo števil eno do dve leti pred ameriškimi in evropskimi, prav tako pa so učinkovitejši tudi pri aritmetičnih opracijah. Razlike pripisujejo različnim učnim tehnikam pri usvajanju tako konceptualnega kot proceduralnega znanja, jezikovnim razlikam, kot tudi kulturnim normam (Imbo in LeFevre, 2009). Te ugotovitve se neposredno nanašajo na vzroke in pogoje razvoja mentalnih reprezentacij števil pri otrocih, saj implicirajo razvoj nekaterih kognitivnih procesov, za katere se zdi, da so pogoj za linearnost številске reprezentacije, npr. razumevanje ordinalnosti števil, kot

tudi razvoj konkretnologičnih operacij in nekaterih procesnih vidikov razumevanja števil, kot so npr. metakognitivni procesi pri operacijah s števili. Ta vprašanja se po eni strani nanašajo tako na razvoj modelov kognitivnih sprememb pri otrocih in njihovem razumevanju količin, po drugi strani pa na neposredne izkušnje, ki so potrebne za spremembe v reprezentacijskih vzorcih števil kot tudi drugih veličin.

Drugo vprašanje je, kakšni so vzorci sprememb na prehodu iz logaritmične v linearne vzorce reprezentacije – gre za skokovit ali postopen prehod iz enega vzorca v drugega? Mikrogenetske študije sistematično kažejo (npr. Siegler in Svetina, 2002), da gre pri različnih vrstah kognitivnih sprememb praviloma za postopne, ne pa za skokovite prehode, kar je lahko povezano z uporabo nezavednih strategij reševanja kognitivnih problemov (Siegler in Stern, 1998), kot tudi s postopnim razvojem kognitivnih konceptov, ki so posredno povezani z razumevanjem količin in števil (Imbo in Lefevre, 2009; Siegler, 2003).

Tretje in morda najpomembnejše vprašanje je, kako je razvoj koncepta števila povezan z reprezentacijo kompleksnejših števil, kot so npr. ulomki, iracionalna števila, predvsem pa z reprezentacijo drugovrstnih količin, npr. teže, razdalje, dolžine, časa, denarja ...? Vse te količine izražamo s števili, zato so njihove mentalne reprezentacije najverjetneje neposredno povezane z mentalnimi reprezentacijami števil. Razumevanje razvoja teh procesov je zelo pomembno, saj imajo predstave o količinah in številih pomembno vlogo tako v vsakdanjem življenju otrok kot tudi v učnem procesu. Podatki, iz katerih bi lahko sklepali na odnose med razvojem linearnosti števil in drugih količin, so zgolj posredni (Siegler, 2003). Odkritja o veljavnosti Fechnerjevega zakona v kontekstu razvoja kognitivnih procesov pri otrocih so nova in odpirajo nove vidike in področja raziskovanja razvoja razumevanja in mentalnih reprezentacij količin tako pri otrocih kot pri odraslih.

Literatura

- Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102, 115–134. doi: 10.1037/a0016838
- Booth, J. L. in Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189–201. doi: 10.1037/0012-1649.41.6.189
- Castranovo, J. in Seron, X. (2007). Numerical estimation in blind subjects: Evidence of the impact of blindness and its following experience. *Journal of Experimental Human Perception*, 33, 1089–1106.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science*, 11, 650–654. doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00713.x

- Gilmore, C. K., McCarthy, S. E. in Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal school. *Cognition*, 115, 394–406. doi: 10.1016/j.cognition.2010.02.002
- Goldbeck, L., Daseking, M., Hellwig Brida, S., Waldman, H. C. in Petermann, F. (2010). Sex differences on the German Wechsler Intelligence test for children (WISC-IV). *Journal of Individual Differences*, 31, 22–28. doi: 10.1027/1614-0001/a000003
- Imbo, I. in LeFevre, J. A. (2009). Cultural differences in complex addition: Efficient Chinese versus adaptive Belgians and Canadians. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 35, 1465–1476. doi: 10.1037/a0017022
- Laski, E. V. in Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, 76, 1723–1743. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x
- Levine, S. C., Wheaton Suriyakham, L., Rowe, M. L., Huttenlocher, J. in Gunderson, E. A. (2010). What counts in the development of young children's number knowledge? *Developmental Psychology*, 46, 1309–1319. doi: 10.1037/a0019671
- Lourenco, S. in Longo, M. R. (2009). Multiple spatial representations of number: Evidence for co-existing compressive and linear scales. *Experimental Brain Research*, 193, 151–156. doi: 10.1007/s00221-008-1698-9
- Malofeeva, E., Day, J., Saco, X., Young, L. in Ciancion, D. (2004). Construction end evaluation of a number sense test with head start children. *Journal of Educational Psychology*, 96, 648–659.
- Nuerk, H. C., Kaufman, L., Zoppho, S. in Klaus, W. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology*, 40, 1199–1211.
- Opfer, J. E. in Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, 169–195. doi: 10.1016/j.cogpsych.2006.09.002
- Opfer, J. E. in Thompson, C. A. (2008). The trouble with transfer: Insights from microgenetic changes in the representation of numerical magnitude. *Child Development*, 79, 788–804. doi: 10.1111/j.1467-8624.2008.01158.x
- Ramani, G. B. in Siegler, R. S. (2008). Promoting board and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79, 375–394. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x
- Rittle-Johnson, B. in Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. V C. Donlan (ur.), *The development of mathematical skills* (str. 75–110). East Sussex: Psychology Press.
- Shao Z. (2006). *The study on the development of number sense test and number estimation in children aged 3-6*. (neobjavljeno magistrsko delo). East China Normal University, Shanghai.
- Siegler, R. S. (1998). *Children's thinking*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. V J. Kilpatrick, W. G. Martin in D. E. Schifter (ur.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (str. 119–233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Siegler, R. S. in Booth J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428–444.
- Siegler, R. S. in Mu, Y. (2008). Chinese children excel on novel mathematics problems even before elementary school. *Psychological Science*, 19, 759–763. doi: 10.1111/j.1467-9280.2008.02153.x
- Siegler, R. S. in Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237–243.
- Siegler, R. S. in Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127, 377–397.
- Siegler, R. S. in Svetina, M. (2002). A microgenetic/cross-sectional study of matrix completion: Comparing short-term and long-term change. *Child Development*, 73, 793–809.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A. in Opfer, J. E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education*, 3, 143–150. doi: 10.1111/j.1751-228X.2009.01064.x
- Sutherland, P. (1992). *Cognitive development today: Piaget and his critics*. London: Paul Champman Publishing Ltd.
- Svetina, M. (1996). Merjenje inteligentnosti po razvojnem postopku (nebojavljeno magistrsko delo). Univerza v Ljubljani, Filozofska fakulteta, Oddelek za psihologijo, Ljubljana.
- Thompson, C. A. in Siegler, R. S. (2010). Linear numerical magnitude representations aid children's memory for numbers. *Psychological Science*, 21, 1274–1281. doi: 10.1177/0956797610378309
- Umilta, C., Priftis, K. in Zorzi, M. (2009). The spatial representation of numbers: Evidence from neglect and preudoneglect. *Experimental Brain Research*, 192, 561–569. doi: 10.1007/s00221-008-1623-2