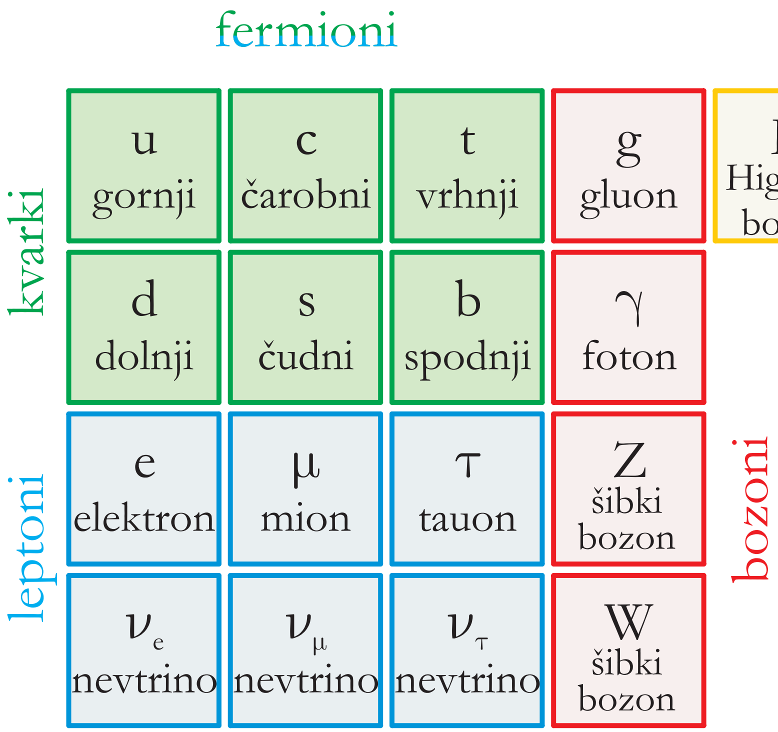
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2016
Letnik 63
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 63 • ŠT. 1 • STR 1-40 • JANUAR 2016

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2016, letnik 63, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

OBTEŽENA POVPREČJA IN PARADOKS PRIJATELJSTVA

BRIGITA FERČEC[1,2] IN NIKO TRATNIK[3]

[1]Fakulteta za energetiko, Univerza v Mariboru
[2]Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko, Univerza v Mariboru
[3]Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010): 91D30

Članek obravnava zanimiv pojav, ki ga lahko opazimo na mnogih področjih življenja, tj. paradoks prijateljstva. Povezan je s posebno vrsto obteženih povprečij. Zato na začetku opišemo koncept obteženih povprečij skupaj s primeri situacij, v katerih se pogostokrat pojavi, in si ogledamo del pripadajoče matematične teorije. V zadnjem delu je opisan paradoks prijateljstva v kontekstu družabnih omrežij. Navedena je povezava z obteženimi povprečji kot tudi povezave z nekaterimi drugimi področji.

WEIGHTED AVERAGES AND THE FRIENDSHIP PARADOX

The paper describes an iteresting phenomenon which appears in many areas of life and is known as the friendship paradox. The latter is connected with a special type of weighted averages in mathematics. Thus, in the beginning the concept of weighted averages is described as well as its applications and a mathematical interpretation. The last part describes the friendship paradox as it appears in the context of social networks. The connection with weighted averages and connections with some other areas are stated.

Uvod

Večina ljudi je seznanjena z idejo računanja povprečja oz. aritmetičnega povprečja neke množice števil. Preprosto seštejemo vse elemente v tej množici in jih delimo s številom elementov množice. Vendar to deluje samo tedaj, ko so vsi elementi množice enakovredni oz. obteženi enako. Kot primer vzemimo povprečje mesečnega računa za elektriko za prejšnje leto. Seštejemo vrednosti dvanajstih položnic za elektriko za prejšnje leto in dobljeno vrednost delimo z 12, saj so obračuni narejeni mesečno.

Sedaj pa recimo, da smo opravljali izpit pri predmetu Matematika, ki je sestavljen iz treh delov: pisnega dela izpita, domačih nalog in ustnega dela izpita. Pri večini šolskih predmetov ti trije deli različno prispevajo h končni oceni, zato je v tem primeru primerno uporabiti *obteženo povprečje*.

Obteženo povprečje lahko opišemo kot povprečje, kjer nekatere vrednosti prispevajo več kot druge. Pri navadnem aritmetičnem povprečju pa so, drugače kot pri obteženem, vse vrednosti enakovredne. Formula za obteženo povprečje se uporablja za izračun povprečne vrednosti določene množice števil z različnimi stopnjami pomembnosti oz. relevance. Relevanca vsakega števila se imenuje *utež števila*.

Vzemimo preprost primer množice števil $\{1, 2, 3, 4\}$ in izračunajmo povprečje teh števil kot

$$\text{povprečje} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5.$$

Če bi v tem primeru dali vsakemu številu utež, bi v zgornjem primeru vsak element množice $\{1, 2, 3, 4\}$ dobil utež 25% (0,25) in bi povprečje lahko izračunali kot

$$\text{povprečje} = \frac{0{,}25 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 + 0{,}25 \cdot 4}{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25} = 2{,}5.$$

Sedaj pa spremenimo uteži in recimo, da število 1 dobi utež 0,1, število 2 dobi 0,2, število 3 utež 0,15 in število 4 dobi utež 0,55. Vsota uteži je 1 in vrednost povprečja je

$$\text{povprečje} = \frac{0{,}1 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}55 \cdot 4}{1} = 3{,}15.$$

Iz zgornjega zelo preprostega primera vidimo, da se tedaj, ko nekatere vrednosti dobijo večje uteži kot druge, spremeni povprečje, ki se približa vrednosti z večjo utežjo.

Koncept obteženih povprečij se veliko uporablja tudi v ekonomiji, še posebej v poslovni in finančni ekonomiji. Kot preprost primer lahko navedemo investitorja, ki bi rad določil dobiček treh investicij, ki jih imenujmo investicija A, investicija B in investicija C. Recimo, da vloži 25 % svojega denarja v investicijo A, 25 % v investicijo B in 50 % vloži v investicijo C. Stopnja dobička za investicijo A je 5 %, za investicijo B 6 % in za investicijo C je 2 %. Če sedaj izračunamo obteženo povprečje glede na navedene podatke, dobimo povprečni dobiček (izračunan v deležu vloženega denarja)

$$\frac{0{,}25 \cdot (5\ \%) + 0{,}25 \cdot (6\ \%) + 0{,}50 \cdot (2\ \%)}{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}50} = 3{,}75\ \%.$$

Če bi investitor uporabljal običajno aritmetično povprečje, potem bi bilo povprečje 4,33 %. Ta precejšnja razlika v izračunu obeh povprečij nam kaže, kako pomembno je uporabiti pravo formulo za natančno analizo v podjetjih, kjer je pomembno vedeti, kako donosne so investicije.

Obtežena povprečja pa so tista, ki se velikokrat skrivajo za različnimi matematičnimi paradoksi. Primer v statistiki zelo znanega paradoksa je Simpsonov paradoks, ki se pogosto pojavlja v družbenih in zdravstvenih vedah. Le-ta včasih povzroči, da podatki, ki jih gledamo po nekih skupinah, kažejo popolnoma drugačen trend, kot če te podatke gledamo združene skupaj. Eden izmed bolj znanih primerov tega paradoksa se je zgodil leta 1973 na Univerzi v Berkeleyju. Ko so analizirali vpis na univerzo, so ugotovili, da so bili moški, ki so se prijavili na študij, sprejeti v 44 % primerov, medtem pa je bilo pri vpisu uspešnih le 35 % žensk. Univerza je bila deležna številnih obtožb, povezanih s spolno diskriminacijo, saj so podatki kazali, da imajo moški večje možnosti, da so sprejeti na študij. Ko so se lotili analize po posameznih oddelkih, pa so ugotovili, da na nobenem oddelku moški niso bili bistveno bolj uspešni. Ravno nasprotno, na večini oddelkov so bile pri vpisu malo bolj uspešne ženske. Bistvo se je skrivalo v tem, da različni oddelki oz. študiji niso bili enako priljubljeni. Izkazalo se je, da so se ženske v veliki večini prijavljale na zelo priljubljene študije (npr. na angleščino), moški pa večinoma na manj priljubljene (npr. tehnika in kemija), to pa je bil razlog, da so bili skupno pri vpisu bolj uspešni.

Takih primerov navideznih paradoksov, kjer so v ozadju obtežena povprečja, je še veliko. V drugem poglavju si bomo ogledali še en paradoks, ki se da pojasniti z obteženimi povprečji. To je paradoks prijateljstva. V predzadnjem poglavju pa se bomo seznanili še s posplošenim paradoksom prijateljstva. Še prej pa se na kratko seznanimo z matematično razlago obteženih povprečij.

Obteženo povprečje neprazne množice podatkov $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n},$$

kjer je w_i utež, ki pripada podatku x_i. Zato podatki z večjo utežjo prispevajo več k obteženemu povprečju kot pa podatki z manjšo utežjo. Uteži niso nikoli negativne, nekatere, vendar ne vse (zaradi deljenja z nič), so lahko nič. Formula je enostavnejša, če so uteži normalizirane, tako da je njihova vsota 1, tj. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Za takšne normalizirane uteži je obteženo povprečje preprosto

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n.$$

Opazimo, da lahko uteži vedno normaliziramo s transformacijo uteži $w_i' = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$, saj je

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i' x_i,$$

kar je navadno obteženo povprečje.

Zgoraj navedeno obteženo povprečje je posplošitev aritmetičnega povprečja in se zato imenuje tudi *aritmetično obteženo povprečje*. Pri aritmetičnem povprečju dobi vsak element enako utež. Če vzamemo neprazno množico $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in za vsak element x_i utež $w_i = \frac{1}{n}$, dobimo

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{1} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

kar je znana formula za aritmetično povprečje.

Obstajata pa tudi *obteženo geometrijsko povprečje* in *obteženo harmonično povprečje*, ki vsako zase izhajata iz geometrijskega povprečja in harmoničnega povprečja.

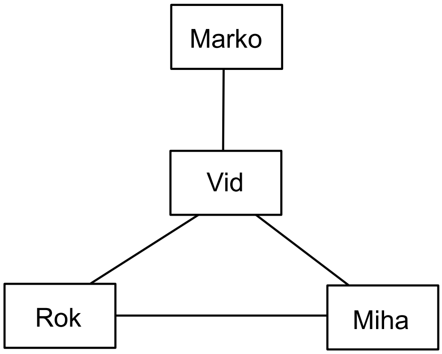
Paradoks prijateljstva

Dandanes ljudje veliko svojega časa namenimo družabnim omrežjem in povezovanju z ljudmi preko le-teh. Velika večina ljudi pa lahko opazi, da ima na teh omrežjih manj prijateljev kot večina njihovih prijateljev. Če ste med njimi tudi sami, potem ne skrbite, saj enako velja tudi za večino vaših prijateljev. To na primer potrjuje tudi obsežna študija Facebooka [3], kjer so raziskovalci ugotovili naslednji zanimiv rezultat. Najprej so pogledali, koliko ljudi ima manj prijateljev kot povprečno njegovi/njeni prijatelji. In izkazalo se je, da to velja za veliko večino uporabikov oziroma za kar 93 odstotkov vseh uporabnikov Facebooka. Merili pa so tudi povprečja na celotnem Facebooku in ugotovili, da imajo uporabniki v povprečju 190 prijateljev, medtem ko imajo njihovi prijatelji v povprečju 635 prijateljev. Kako točno so izračunali povprečje prijateljev od prijateljev, bomo videli v zgledu v nadaljevanju.

Tudi raziskave nevirtualnih družabnih omrežij kažejo enak trend. Ta pojav je namreč že leta 1991 odkril sociolog Scott L. Feld, ko internetna družabna omrežja še niso obstajala. Tako imamo tudi v nevirtualnem svetu večinoma manj prijateljev kot naši prijatelji. To pa seveda nima nikakršne povezave z osebnostmi, temveč sledi iz matematike. Za katerokoli omrežje, kjer ima nekaj ljudi več prijateljev kot drugi, velja, da je povprečno število prijateljev od prijateljev vedno večje kot povprečno število prijateljev. To trditev bomo v nadaljevanju strogo dokazali. Seveda bomo vedno predpostavljali, da so prijateljstva vzajemna.

Opisani pojav so poimenovali »paradoks prijateljstva« (v angleščini »the friendship paradox«). Njegova razlaga temelji na posebni vrsti obteženih povprečij, ki povzročajo različne navidezne paradokse tudi v mnogih drugih situacijah.

Da bomo lažje razmišljali, si za začetek zamislimo zelo preprost primer družabnega omrežja, ki ga sestavljajo samo štiri osebe. Dajmo jim naslednja imena: Marko, Vid, Rok in Miha. Recimo, da ima Marko samo enega prijatelja – Vida. Vid naj bo prijatelj z vsemi preostalimi, Rok in Miha pa naj bosta prijatelja še med seboj. Tako dobimo družabno omrežje, predstavljeno na sliki 1.



Slika 1. Primer družabnega omrežja.

Sedaj za vsakega posebej zapišimo, koliko prijateljev ima in koliko prijateljev imajo njegovi prijatelji.

Oseba	Število prijateljev	Število prijateljev od prijateljev	Povprečno število prijateljev od prijateljev
Marko	1	3	3
Vid	3	1; 2; 2	1,67
Rok	2	3; 2	2,5
Miha	2	3; 2	2,5

Takoj opazimo, da ima večina (Marko, Rok in Miha) manj prijateljev, kot imajo v povprečju prijateljev njegovi prijatelji. Le Vid, ki je bolj »priljubljen«, ima več prijateljev od svojih prijateljev.

Da bomo lahko to v splošnem pojasnili, označimo z A povprečno število prijateljev ljudi v omrežju (povprečje števil v drugem stolpcu tabele) in z B povprečno število prijateljev od prijateljev (povprečje števil v tretjem stolpcu tabele). Izračunajmo povprečji A in B za dani primer.

$$A = \frac{1+3+2+2}{4} = 2$$

$$B = \frac{3+(1+2+2)+(3+2)+(3+2)}{8} = 2{,}25$$

Opazimo, da za dani primer družabnega omrežja velja $A < B$. V nadaljevanju pa bomo dokazali, da ta neenakost velja za čisto vsako družabno omrežje, v katerem nimajo vsi enakega števila prijateljev. Dejstvo, da je povprečno število prijateljev strogo manjše od povprečja prijateljev od prijateljev, je razlog za nastanek omenjenega pojava, saj ima zaradi tega večina ljudi manj prijateljev kot povprečno njihovi prijatelji.

Preden pa se lotimo strogega dokaza, poskušajmo zgornjo neenakost razložiti intuitivno. V ta namen zapišimo povprečje B nekoliko drugače. Ker ima Vid 3 prijatelje, ga bodo tudi trije omenili kot prijatelja in zato se bo v števcu števila B trikrat pojavilo število 3, torej $3 \cdot 3 = 3^2$. Podobno ima Rok 2 prijatelja, zato bosta tudi dva omenila število 2, ko bosta naštevala, koliko prijateljev imajo njuni prijatelji, in tako se bo v števcu pojavil člen 2^2. Podobno pa bo tudi Miha prispeval 2^2 in Marko 1^2. Tako je

$$B = \frac{3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2}{8}.$$

V povprečju B števila prijateljev pred seštevanjem še kvadriramo, s tem pa damo dodatno težo velikim številom, in zato je $B > A$. Povprečje B je torej obteženo povprečje z utežmi, ki so kar enake vrednostim, katerih povprečje računamo, saj velja

$$B = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{3 + 2 + 2 + 1}.$$

Takoj opazimo še, da je v imenovalcu števila B vsota števila prijateljev vseh oseb (v našem primeru $1+3+2+2$ – vsota števil v prvem stolpcu). Očitno bo to vedno res.

Končno se lotimo še splošnega primera, ko imamo v družabnem omrežju n ljudi. Ugotovitev zapišimo kot izrek.

Izrek 1. *V poljubnem družabnem omrežju, v katerem nimajo vsi enakega števila prijateljev, označimo z A povprečno število prijateljev, z B pa povprečno število prijateljev od prijateljev. Potem velja $0 < A < B$.*

Dokaz. Naj ima družabno omrežje n ljudi. Prvi naj ima x_1 prijateljev, drugi x_2 prijateljev in tako naprej vse do zadnjega, ki ima x_n prijateljev. Povprečje prijateljev A v splošnem primeru zlahka izračunamo in dobimo

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

S pomočjo že znanih razmislekov pa ugotovimo tudi, da je povprečno število prijateljev od prijateljev

$$B = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Seveda je $A > 0$ in $B > 0$, saj je povprečje pozitivnih števil vedno pozitivno. Zapišimo naslednji račun.

$$\begin{aligned}
&\frac{(x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \cdots + (x_n - A)^2}{n} = \\
&\quad = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n} - 2A \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + A^2 = \\
&\quad = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n} - A^2.
\end{aligned}$$

Če izraz $\frac{(x_1-A)^2+(x_2-A)^2+\cdots+(x_n-A)^2}{n}$, ki ga v statistiki imenujemo varianca, označimo z $\mathrm{Var}(x)$, dobimo

$$\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n} = A^2 + \mathrm{Var}(x).$$

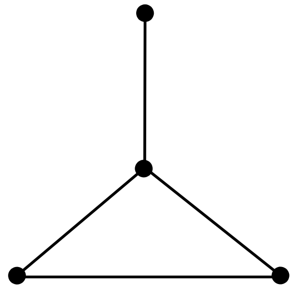
To enakost delimo z A in dobimo

$$B = A + \frac{\mathrm{Var}(x)}{A}.$$

Ker je vedno $\mathrm{Var}(x) \geq 0$ (in $\mathrm{Var}(x) = 0$ samo tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), za vsako družabno omrežje, kjer nimajo vsi enakega števila prijateljev, velja $A < B$. ∎

Opazimo, da lahko paradoks prijateljstva formuliramo na dveh nivojih: za posameznika in za družabno omrežje. Paradoks prijateljstva za družabno omrežje smo zapisali v zgornjem izreku. Na nivoju posameznika pa paradoks velja, če ima posameznik manj prijateljev kot povprečno njegovi/njeni prijatelji. Omenili pa smo že, da na nivoju posameznikov paradoks velja za veliko večino članov omrežja.

Seveda si lahko vsako družabno omrežje naravno predstavimo z grafom, kjer vozlišča grafa (točke) predstavljajo ljudi, pri tem pa sta dve vozlišči sosednji (to pomeni, da je med njima povezava), ko sta ustrezni osebi med seboj prijatelja. Graf družabnega omrežja, ki smo ga obravnavali prej, vidimo na sliki 2. Pri tem je očitno, da stopnja vozlišča (število sosedov vozlišča) pomeni število prijateljev ustrezne osebe. Paradoks prijateljstva v jeziku teorije grafov torej pove, da je povprečna stopnja vozlišč v grafu, v katerem nimajo vsa vozlišča iste stopnje, vedno manjša kot povprečna stopnja njihovih sosedov. Tudi raziskovalci, ki so proučevali Facebook, so opazovali lastnosti njegovega grafa. Ugotovili so na primer tudi, da kar 99,91 odstotka njegovih vozlišč (ljudi) pripada isti povezani komponenti. To pomeni, da lahko med temi za poljubna dva najdemo pot v grafu, ki ju povezuje.



Slika 2. Graf, ki prikazuje družabno omrežje s slike 1.

Posplošeni paradoks prijateljstva

Paradoks prijateljstva torej obravnava eno značilnost posameznikov, to je število njihovih prijateljev, oziroma stopnjo vozlišča v ustreznem grafu. Vendar pa imajo posamezniki tudi druge karakteristike, kot so na primer spol, starost, poklic ipd. Zato so v članku [1] paradoks prijateljstva posplošili tako, da ga lahko formuliramo za poljubno značilnost vozlišč, ki se da izraziti s številom. Kadar za značilnost izberemo stopnjo vozlišča, pa kot poseben primer dobimo paradoks prijateljstva. To posplošitev so poimenovali *posplošeni paradoks prijateljstva*. Nato so proučevali še mrežo znanstvenih člankov in prišli do podobnih rezultatov kot pri običajnem paradoksu prijateljstva. Ugotovili so, da imajo na primer vaši soavtorji zelo verjetno več soavtorjev, več citatov in tudi več objav kot vi. Oglejmo si posplošeni paradoks prijateljstva bolj natančno.

Vozlišča v grafu bodo označena z naravnimi števili, karakteristika vozlišča i naj bo x_i, njegova stopnja pa d_i. Posplošeni paradoks prijateljstva bomo zdaj obravnavali na nivoju posameznika in ne več na nivoju omrežja. Pravimo, da posplošeni paradoks prijateljstva velja za vozlišče i, če je izpolnjen naslednji pogoj:

$$x_i < \frac{\sum_{j \in N(i)} x_j}{d_i}, \tag{1}$$

kjer je $N(i)$ množica vseh sosedov vozlišča i. Takoj opazimo, da če izberemo $x_i = d_i$, posplošeni paradoks prijateljstva postane običajni paradoks prijateljstva.

V nadaljevanju bomo na kratko pogledali verjetnost in statistiko v omrežju soavtorstev, kot so to naredili v članku [1]. V ta namen bomo s $P(d, x)$ označili verjetnost, da vozlišče s stopnjo d in karakteristiko x zadošča enačbi (1). Seveda velja, da se pri fiksnem d z večanjem vrednosti x verjetnost $P(d, x)$ manjša. Raziskovalci so proučevali dve informacijski bazi: *Physical*

Review journals (PR) in *Google Scholar profile dataset of network scientists* (GS). Za vozlišča v grafu so vzeli vse avtorje, pri tem pa med dvema avtorjema obstaja povezava, če sta skupaj napisala kakšen članek. Omrežje PR je vsebovalo 242592 vozlišč, omrežje GS pa 29968. Pri tem so opazovali naslednje karakteristike vozlišč: število soavtorjev, število citatov, število objav in povprečno število citatov na objavo.

Raziskovalci so podatke obdelali statistično, pri tem pa so med drugim računali, kolikšna je povprečna verjetnost H, da posplošeni paradoks prijateljstva velja (pri tem so torej upoštevane vse verjetnosti $P(d,x)$). Ugotovili so, da je za vsako izmed proučevanih karakteristik ta verjetnost zelo velika, kar pomeni, da posplošeni paradoks prijateljstva velja za veliko večino vozlišč v omrežju. Na primer za število soavtorjev je ta verjetnost 0,934, za število citatov je 0,921, za število objav pa 0,912. Le za povprečno število citatov na objavo je ta verjetnost nekoliko manjša, in sicer 0,720. S tem so torej ugotovili, da kot pri običajnem paradoksu prijateljstva, tudi za druge karakteristike velja, da imajo pri veliki večini vozlišč manjšo vrednost kot pri njihovih sosedih.

Uporaba v praksi

Kot mnoge matematične ideje je tudi ta paradoks pripeljal do zanimivih praktičnih aplikacij. Nedavno je vzpodbudil sistem zgodnjega opozarjanja za odkrivanje izbruhov nalezljivih bolezni. V študiji, ki so jo opravili na Harvardu v času pandemične gripe leta 2009, sta znanstvenika Nicholas Christakis in James Fowler spremljala status gripe v veliki skupini naključno izbranih študentov in njihovih prijateljev. Nenavadno, prijatelji so zboleli dva tedna pred naključno izbranimi študenti, domnevno zato, ker so bili na splošno bolj povezani znotraj družabne mreže, kar tudi pričakujemo iz paradoksa prijateljstva. V drugih okoliščinah je lahko dva tedna dolgo prehodno obdobje, kot je bilo to, zelo koristno, da organi za javno zdravje načrtujejo odziv na okužbe, preden le-te napadejo množice.

LITERATURA

[1] Young-Ho Eom, Hang-Hyun Jo, *Generalized friendship paradox in complex networks: The case of scientific collaboration*, Scientific Reports **4**, 4603 (2014).

[2] Scott L. Feld, *Why your friends have more friends than you do?*, American Journal of Sociology **96** 6, (1991) 1464–1477.

[3] J. Ugander et al., *The Anatomy of the Facebook Social Graph*, arXiv:1111.4503v1 (2011).

[4] S. Strogatz, *Friends You Can Count On*, The New York Times (2012), `http://opinionator.blogs.nytimes.com/2012/09/17/friends-you-can-count-on/`, ogled: 28. 1. 2016.

[5] *Friendship paradox*, Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Friendship_paradox`, ogled: 28. 1. 2016.

OBIČAJNI IN EKSOTIČNI HADRONI

SAŠA PRELOVŠEK KOMELJ

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Odsek za teoretično fiziko, Institut Jožef Stefan, Ljubljana

PACS: 12.38.Gc, 14.40.Pq, 14.40.Rt

Običajni hadroni so barioni in mezoni. Prvi so sestavjeni iz treh valenčnih kvarkov (qqq), drugi pa iz valenčnega kvarka in antikvarka ($q\bar{q}$). V zadnjem desetletju so eksperimentalno prvič opazili zanimiva stanja, ki bi lahko ustrezala eksotičnim tetrakvarkom ($\bar{q}q\bar{q}q$) in pentakvarkom ($qqqq\bar{q}$). Posvetili se bomo vprašanju, kaj vemo danes o običajnih in eksotičnih hadronih na podlagi fundamentalne teorije – kromodinamike. To vprašanje ni preprosto, ker močna sila v hadronih ne dovoljuje perturbativnega teoretičnega pristopa.

CONVENTIONAL AND EXOTIC HADRONS

Conventional hadrons are baryons (qqq) and mesons ($q\bar{q}$). Experiments have recently found candidates for exotic tetraquarks ($\bar{q}q\bar{q}q$) and pentaquarks ($qqqq\bar{q}$). This article sheds light on what is known about the conventional and the exotic hadrons based on the fundamental theory of strong interactions – Quantum ChromoDynamics (QCD). This is not a simple problem, since the strong force in hadrons does not allow the perturbative theoretical treatment.

Uvod

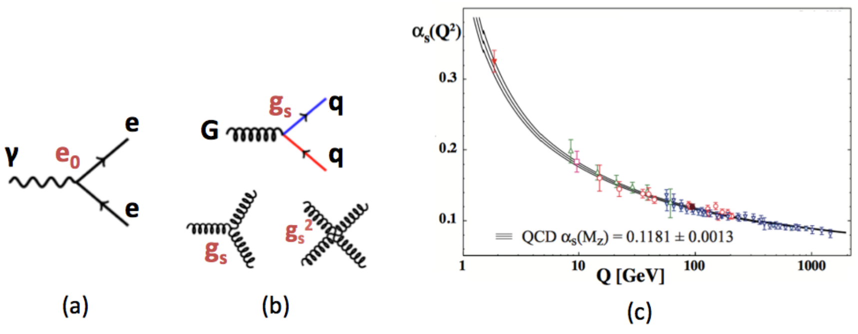
Hadroni so sestavljeni iz kvarkov, za slednje pa danes velja, da so osnovni nedeljivi delci. Običajna narava je sestavljena iz kvarkov u in d, saj obstajata tako v protonu (uud) kot v nevtronu (ddu). Drugi štirje kvarki s, c, b, t so težji in živijo le kratek čas, potem ko jih ustvarijo pri različnih eksperimentih.

Kvarke v hadrone veže močna sila, ki je ena od štirih osnovnih sil. Močna sila veže tudi protone in nevtrone v jedra, kjer prevlada nad odbojno električno silo med pozitivno nabitimi protoni. Na razdaljah, ki so večje od velikosti jeder, je vpliv močne sile zanemarljiv. Prenašalci močne sile so brezmasni gluoni, podobno kot so prenašalci elektromagnetne sile brezmasni fotoni. Osnovna teorija močne interakcije med kvarki in gluoni se imenuje kvantna kromodinamika.

Skušali bomo odgovoriti na več vprašanj. Vprašali se bomo, ali sta masi protona in nevtrona le merljivi količini, ali ju lahko izračunamo v kromodinamiki? Predstavljata namreč več kot 99 % mase vidnega vesolja. Prispevek mirovnih mas treh valenčnih kvarkov k masi protona in nevtrona je manjši od 3 %; za ta prispevek je odgovoren Higgsov mehanizem, ki daje maso kvarkom. Velika večina mase protona in nevtrona pa je posledica vezavne energije kvarkov zaradi močne interakcije, ki je tema tega prispevka. Ali lahko mase preostalih mezonov in barionov izračunamo s pomočjo kromodinamike? Ali iz kromodinamike sledi obstoj eksotičnih tetrakvarkov in pentakvarkov? In naposled – zakaj ta vprašanja niso bila že davno rešena?

Problem pri teoretičnem študiju hadronov

Primerjajmo kromodinamiko z elektrodinamiko, kjer so bila analogna vprašanja že davno rešena. Elektrodinamika je teorija, ki opisuje fotone oziroma elektromagnetno valovanje ter nabite delce. Sile temeljijo na enem samem vozlišču na sliki 1a. Vozlišče je točka Feynmanovega diagrama, kjer se stika več linij; v elektrodinamiki predstavlja interakcijo elektrona s fotonom. Velikost interakcije podaja osnovni električni naboj e_0 oziroma $\alpha = e_0^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$, ki ima pri nizkih energijah[1] vrednost približno $\alpha \simeq 1/137$.



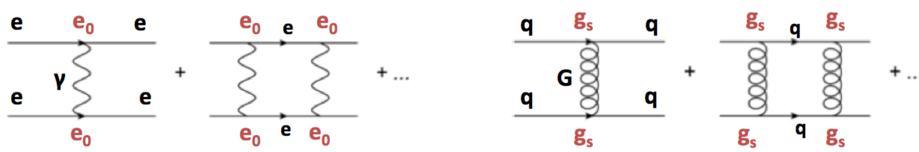
Slika 1. Vozlišča v elektrodinamiki (a) in kromodinamiki (b) ter odvisnost vozlišča $\alpha_s^2 = g_s^2/(4\pi)$ od $(Qc)^2 = (pc)^2 - E^2$, kjer sta p in E gibalna količina in energija fotona oziroma gluona [11] (c). Oznake: foton γ, elektron e, kvark q, gluon G.

Kromodinamika je teorija, ki opisuje gluone in kvarke ter interakcije med njimi zaradi tako imenovanega barvnega naboja. Vozlišče med kvarkom in gluonom je sorazmerno s sklopitvijo g_s, kot kaže slika 1b. Gluoni so barvno nabiti, zato interagirajo tudi med seboj (fotoni so električno nevtralni in

[1] Efektivna skopitev $e_0(Q^2)$ med fotonom in elektronom pravzaprav pomeni vsoto vseh Feynmanovih diagramov, ki vodijo do interakcije elektron-elektron-foton. Izkaže se, da $e_0(Q^2)$ rahlo raste z naraščajočim Q, ki je definiran na sliki 1. To je povezano s tvorbo virtualnih parov e^+e^- in senčenjem naboja elektrona. Iz analognih razlogov se spreminja tudi efektivna močna sklopitev $g_s(Q^2)$, le da ta z naraščajočo energijo občutno pada.

vozlišča med fotoni ni). Vozlišča med gluoni so odgovorna za naraščanje sklopitve $g_s(Q^2)$ s padajočo gibalno količino gluonov Q, kot prikazuje slika 1c. S padajočo energijo α_s raste in pri hadronskih energijah pod GeV naraste na vrednost blizu $\alpha_s \simeq 1$.

Elektro-magnetno interakcijo med dvema elektronoma na sliki 2 lahko razvijemo po številu vozlišč, kjer Feynmanov diagram z dodatnim parom vozlišč e_0 prispeva k verjetnostni amplitudi $\alpha \simeq 1/137$-krat manj. V perturbativnem pristopu lahko torej želeno natančnost dosežemo z izračunom nekaj najnižjih redov po α. Pri interakcijah med dvema kvarkoma pa diagramov na sliki 2 z več vozlišči g_s ne moremo zanemariti, ker pri hadronskih energijah velja $\alpha_s \simeq 1$. Potreben je neperturbativen pristop, ki sešteje neskončno vrsto diagramov.



Slika 2. Feynmanovi diagrami, ki prikazujejo perturbativni razvoj po številu vozlišč za interakcijo med elektronoma (levo) in kvarkoma (desno).

Kromodinamika na mreži

Neperturbativni pristop temelji na popotnem integralu. V kvantni mehaniki je pričakovana vrednost za propagacijo delca iz točke $\vec{x}_1$ ob času t_1 do točke $\vec{x}_2$ ob času t_2 sorazmerna z

$$\int \mathcal{D}\vec{x}(t)\; e^{iS/\hbar} \;, \quad S[\vec{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt \;, \quad L[\vec{x}(t)] = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}). \tag{1}$$

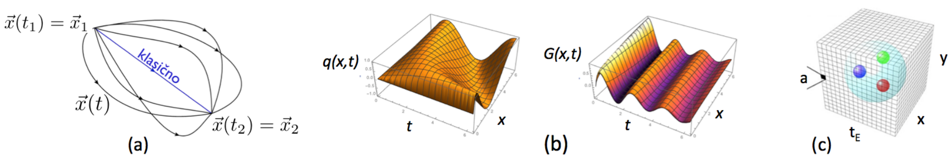
Funkcionalni integral $\mathcal{D}\vec{x}(t)$ pomeni vsoto vseh poti $\vec{x}(t)$ ob zahtevi $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$, $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$, kar prikazuje slika 3a. Vsaka pot je utežena z eksponentnim faktorjem, ki je odvisen od klasične akcije $S[\vec{x}(t)]$ za to pot. V klasični mehaniki potuje delec po poti z najmanjšo akcijo.

Teoretično ogrodje za kromodinamiko (kot tudi za elektrodinamiko) je kvantna teorija polja, ki temelji na kvarkovskih poljih $q(\vec{x}, t) = q(x)$ in gluonskih poljih $G(\vec{x}, t) = G(x)$. Polje je fizikalna količina, ki ima vrednost v vsaki točki prostor-časa x podobno kot elektromagnetno polje. Pričakovano vrednost neke količine $C(q, G)$ v kvantni teoriji polja izrazimo s popotnim integralom

$$\langle C \rangle \propto \int \mathcal{D}q(x)\, \mathcal{D}\bar{q}(x)\, \mathcal{D}G(x)\, C(q,G)\, e^{iS/\hbar}\,, \quad S = \int d^4x\, \mathcal{L}_{QCD}[q(x), G(x)]. \tag{2}$$

Funkcionalni integral tu pomeni vsoto po vseh konfiguracijah (oblikah) kvarkovskih in gluonskih polj, ki se razpenjajo nad štirirazsežnim prostor-časom. Primer konfiguracije polj je prikazan na sliki 3b, funkcionalni integral pa narekuje vsoto po vseh konfiguracijah. Prispevek vsake konfiguracije je utežen z $e^{iS/\hbar}$ kot v kvantni mehaniki, akcija S pa je odvisna od kvarkovske in gluonske konfiguracije, kot narekuje Lagrangeeva gostota kromodinamike $\mathcal{L}_{QCD}[q(x), G(x)]$ (podrobnega izraza ne bomo potrebovali).

Analitičen izračun (2) je mogoč le za poenostavljene teorije, nikakor pa ne za kromodinamiko. V *kromodinamiki na mreži* popotni integral (2) izračunamo numerično za končno in diskretno mrežo točk prostor-časa na sliki 3c. Mrežni razmik je običajno okoli $a \simeq 0{,}05$ fm, velikost mreže pa $3-6$ fm, kar zaobjame večino hadronov. Seštejemo po končnem naboru gluonskih in kvarkovskih konfiguracij najrazličnejših oblik; primer je prikazan na sliki 3b. Ta pristop se je izkazal kot najzanesljivejša neperturbativna metoda in se danes na široko uporablja[2] za kromodinamiko ter tudi druge kvantne teorije polja, kjer perturbativni pristop ni mogoč.



Slika 3. Popotni integral v kvantni mehaniki (a); primer kvarkovskih in gluonskih konfiguracij pri popotnem integralu v kvantni teoriji polja (b); mreža (c).

Običajni stabilni hadroni

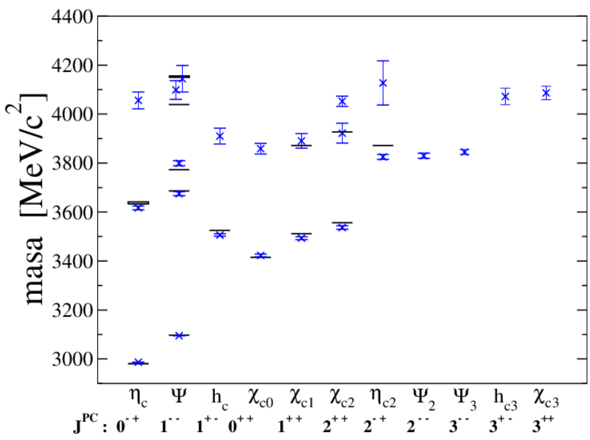
Najprej so bile na mreži izračunane mase hadronov, ki ne razpadejo prek močne interakcije. Ti hadroni so na mreži stabilni, saj popotni integral (2) vsebuje le močno interakcijo, ne pa tudi elektromagnetne in šibke. Da bi s tem popotnim integralom izluščili maso hadrona, izračunamo pričakovano vrednost $\langle C \rangle$ za fizikalno količino, ki jo imenujemo korelacijska funkcija $C(t)$. Le-ta ustreza verjetnostni amplitudi, kjer kreiramo stanje s kvantnimi števili

[2]Baza `http://arxiv.org/archive/hep-lat` je posvečena teoriji polja na mreži.

hadrona ob času $t = 0$ ter stanje anihiliramo ob času t. Za proton na primer kreiramo uud s spinom 1/2 in pozitivno parnostjo, za pion pa $u\bar{d}$ s spinom 0 in negativno parnostjo. Časovno odvisnost $C(t)$ lastnega stanja z energijo $E = (m_H^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2)^{1/2}$ v kvantni mehaniki podaja

$$C(t) \propto e^{-iEt/\hbar} = e^{-Et_E/\hbar} \ \rightarrow \ C(t_E, \vec{p} = 0) \propto e^{-m_H c^2 \ t_E/\hbar}, \qquad (3)$$

na mreži pa uporabljamo evklidski čas $t_E = it$, zato korelacijske funkcije padajo eksponentno s časom. Dejansko v $C(t)$ propagira linearna kombinacija lastnih stanj z izbranimi kvantnimi števili. S prilagajanjem izračunane $\langle C \rangle$ (2) z izrazom $C(t_E) \propto \sum A_n e^{-E_n t_E/\hbar}$ izluščimo lastne energije E_n oziroma mase m_{H_n} hadronov z danimi kvantnimi števili.

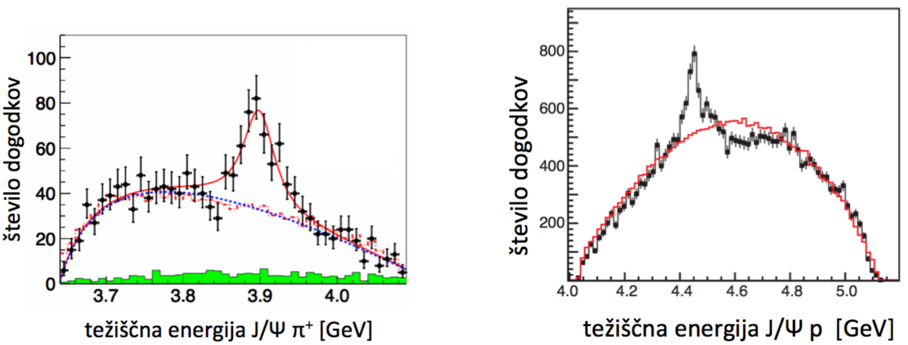


Slika 4. Mase čarmonijevih mezonov $\bar{c}c$: izračunane [10] (križci) in izmerjene [11] (črte). Stanja z maso nad okoli 3900 MeV/c^2 razpadajo prek močne interakcije, zato pri teh energijah rezultati konvencionalne metode [10] niso zanesljivi.

Tako so bile s kromodinamiko na mreži določene mase vseh barionov in mezonov, ki so stabilni glede močne interakcije. Edini vhodni podatek so parametri, ki nastopajo v $\mathcal{L}_{QCD}$, torej mase kvarkov ter močna sklopitvena konstanta g_s. Najnatančnejši izračun mase protona in nevtrona vodi do $m_p \simeq m_n = 936 \pm 25 \pm 22$ MeV/c^2 [6] in $m_n - m_p = 1.5 \pm 0.16 \pm 0.23$ MeV/c^2 [5]. Oboje se znotraj napake ujema z izmerjenimi vrednostmi, pri čemer je prispevek mase treh valenčnih kvarkov manjši od 20 MeV/c^2. Izračunane mase čarmonijevih mezonov $\bar{c}c$ z različnimi kvantnimi števili [10], prikazuje jih slika 4, se prav tako razmeroma dobro ujemajo z eksperimentom [11]. Z merjenji se skladajo tudi rezultati za mase vseh drugih hadronov, ki ne razpadajo prek močne interakcije, na primer Λ, Σ, Ω, K, D, B, D_s, B_s, B_c, $\bar{b}b$, ...

Hadroni, ki močno razpadajo

Večina hadronov pa je hadronskih resonanc, ki se tvorijo pri sipanju dveh hadronov $H_1H_2 \to H \to H_1H_2$ in potem hitro razpadejo prek močne interakcije. V eksperimentu jih opazijo pri merjenju preseka $\sigma(E)$ za sipanje dveh hadronov H_1H_2 v odvisnosti od njune težiščne energije E. Sipalni presek σ je količina, ki pove, kolikšen delež curka hadronov H_2 se bo pri vpadu na H_1 odklonil. Hadronska resonanca se kaže kot vrh v preseku pri $E = m_H c^2$, njen razpadni čas pa je s širino vrha Γ povezan prek $\tau = \hbar/\Gamma$. Primeri $\sigma(E)$ za eksotične resonance so prikazani na sliki 5. Mase hadronskih resonanc ne moremo izračunati, kot je navedeno v prejšnjem poglavju. Namesto tega na mreži simuliramo sipanje H_1H_2, izluščimo sipalni presek $\sigma(E)$ v odvisnosti od težiščne energije E ter od tod maso in razpadni čas resonance. Simulacija sipanja na mreži je velik izziv, kljub temu pa smo nedavno v pionirskih simulacijah tako prvi izluščili konvencionalne resonance s kvarkom s [16] in kvarkom c [10, 8].



Slika 5. Vrh v preseku pri težiščni energiji $J/\psi\,\pi^+$ okoli $m_{J/\psi\pi} \simeq 3.9$ GeV nakazuje na možnost obstoja kratkoživega tetrakvarkovskega stanja $Z_c^+(3900)$ [4] (levo). Vrh pri težiščni energiji $J/\psi\,p$ okoli $m_{J/\psi p} \simeq 4.4$ GeV pa na morebiten obstoj pentakvarkovskega stanja $P_c^+(4450)$ [9] (desno). Oznake delcev: $p =$ proton, $J/\psi = \bar{c}c$, $\pi^+ = \bar{d}u$.

Eksotični hadroni

Vsi opaženi eksotični hadroni razpadajo prek močne interakcije, zato je njihov teoretični opis velik izziv, dokončnih odgovorov na nekatera vprašanja pa še ni.

Do razcveta spektroskopije eksotičnih hadronov je prišlo leta 2003, ko so v eksperimentu Belle odkrili čarmoniju podobno stanje $X(3872)$ [2]. Stanje je morda nenavadna hadronska molekula $D^0\bar{D}^{*0} = (\bar{u}c)(\bar{c}u)$, saj njegova masa skoraj točno sovpada z $m_{D^0} + m_{\bar{D}^{*0}}$, tej hipotezi pa so v prid še druge opažene lastnosti. Prvi dokaz za obstoj tega stanja v kromodinamiki na mreži je bil predstavljen v [14], kjer smo simulirali sipanje $D^0\bar{D}^{*0}$. Izluščili smo $\sigma(E)$ in ugotovili, da obstaja vezano stanje $D^0\bar{D}^{*0}$ malce pod maso $m_{D^0} + m_{\bar{D}^{*0}}$. Prav take lastnosti ima opaženo stanje $X(3872)$.

Leta 2013 so v eksperimentih BESIII and Belle opazili kandidata za tetrakvarkovsko stanje $Z_c^+(3900)$ [4, 3], ki ne more biti običajen mezon $\bar{q}_1q_2$. To stanje razpada v $J/\psi\ \pi^+$, zato naj bi bilo sestavljeno iz kvarkov $\bar{c}c\bar{d}u$ kot razpadna produkta $J/\psi = \bar{c}c$ in $\pi^+ = \bar{d}u$. Eksperimentalna indikacija za obstoj kratkoživega stanja $\bar{c}c\bar{d}u$ je resonančni vrh v preseku na sliki 5, obstajajo pa še druge razlage za opažen vrh. Po eksperimentalnem odkritju smo prvi določili lastna stanja z relevantnimi kvantnimi števili na mreži. V zanimivem energijskem območju smo našli le pričakovana lastna stanja dveh hadronov ($J/\psi\ \pi^+$, $D\bar{D}^*$, ...), dodatnega lastnega stanja, ki bi ustrezalo resonanci $Z_c^+(3900)$, pa nismo našli [15, 13]. Dokončnega odgovora o izvoru vrha na sliki 5 še ni, vendar naši rezultati kažejo na to, da vrh najverjetneje ni posledica kratkožive resonance s tetrakvarkovsko strukturo, temveč nečesa drugega. Ker je vrh opažen malce nad $m_D + m_{\bar{D}^*}$, je morda posledica močne sklopitve med kanaloma $J/\psi\,\pi^+$ in $D\bar{D}^*$, kot je mogoče sklepati tudi na osnovi kasnejše simulacije skupine HALQCD [7].

Dve morebitni stanji s tetrakvarkovsko strukturo $\bar{b}b\bar{d}u$ je opazil eksperiment Belle leta 2011 [1]. Prva preliminarna indikacija za morebiten obstoj takega stanja na mreži temelji na izračunu potenciala $V(r)$ za sistem v odvisnosti od razdalje r med b in $\bar{b}$ v limiti $m_b \to \infty$ [12].

LHCb je odkril kandidata za pentakvarkovsko stanje $P_c^+(4450)$, ki ne more biti običajen barion $q_1q_2q_3$. Stanje se kaže kot vrh v preseku za sipanje protona in piona na sliki 5 [9]. Če je vrh posledica obstoja kratkoživega $P_c^+(4450)$, potem mora vsebovati kvarke $udud\bar{d}$ kot razpadna produkta p (uud) in π^+ ($u\bar{d}$). Tudi v tem primeru so mogoče manj eksotične razlage za obstoj vrha. Simulacija opaženih pentakvarkovskih stanj na mreži je velik izziv, zato bomo morali na rezultate prvih simulacij in na odgovore počakati še nekaj časa.

Sklep

V eksperimentih so nedavno opazili hadrone, ki morda predstavljajo nenavadne tetrakvarke ali pentakvarke. Teoretični študij hadronskih lastnosti zahteva neperturbativno obravnavo. Najzanesljivejši pristop je kromodinamika na mreži, ki temelji na numeričnem izračunu popotnega integrala. Ta pristop vodi do prave mase protona, nevtrona in vseh drugih hadronov, ki ne razpadajo prek močne interakcije. V zadnjih letih se je izkazal za uspešnega tudi pri sipanju dveh hadronov, kar vodi do informacije o nestabilnih hadronskih resonancah. Privedel je tudi že do nekaj delnih odgovorov na morebiten obstoj opaženih stanj s tetrakvarkovsko strukturo.

LITERATURA

[1] Belle Collaboration, I. Adachi, *Observation of two charged bottomonium-like resonances*, `arXiv:1105.4583`.

[2] Belle Collaboration, *Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B \to K\pi\pi J/\psi$ decays*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 262001.

[3] Belle Collaboration, Z. Liu et al., *Study of $e^+e^- \to \pi^+\pi^- J/\psi$ and Observation of a Charged Charmonium-like State at Belle*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 252002, `arXiv:1304.0121`.

[4] BESIII Collaboration, M. Ablikim et al., *Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+e^- \to \pi\pi J/\psi$ at $\sqrt{s} = 4.26$ GeV*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 252001, `arXiv:1303.5949`.

[5] BMW collaboration, S. Borsanyi et al., *Ab initio calculation of the neutron-proton mass difference*, Science **347** (2015) 1452–1455, `arXiv:1406.4088`.

[6] BMW collaboration, S. Dürr et al., *Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses*, Science **322** (2008) 1224–1227, `arXiv:0906.3599`.

[7] HALQCD Collaboration, Y. Ikeda et al., *Fate of the Tetraquark Candidate $Z_c(3900)$ in Lattice QCD*, `arXiv:1602.03465`.

[8] C. B. Lang, L. Leskovec, D. Mohler in S. Prelovsek, *Vector and scalar charmonium resonances with lattice QCD*, `arXiv:1503.05363`.

[9] LHCb Collaboration, R. Aaij et al., *Observation of $J/\psi p$ Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda_b^0 \to J/\psi K p$ Decays*, Phys. Rev. Lett. **115** (2015), 072001, `arXiv:1507.03414`.

[10] D. Mohler, S. Prelovsek in R. Woloshyn, *D Pi scattering and D meson resonances from lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **D87** (2013) 034501, `arXiv:1208.4059`.

[11] Particle Data Group Collaboration, K. A. Olive et al., *Review of Particle Physics*, Chin. Phys. **C38** (2014) 090001.

[12] A. Peters, P. Bicudo, K. Cichy in M. Wagner, *Investigation of $B\bar{B}$ four-quark systems using lattice QCD*, `arXiv:1602.07621`.

[13] S. Prelovsek, C. B. Lang, L. Leskovec in D. Mohler, *Study of the Z_c^+ channel using lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **D91** (2015), 014504, `arXiv:1405.7623`.

[14] S. Prelovsek in L. Leskovec, *Evidence for X(3872) from DD^* scattering on the lattice*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 192001, `arXiv:1307.5172`.

[15] S. Prelovsek in L. Leskovec, *Search for Z_c^+(3900) in the 1^{+-} Channel on the Lattice*, Phys. Rev. Lett. **B727** (2013) 172, `arXiv:1308.2097`.

[16] S. Prelovsek, L. Leskovec, C. Lang in D. Mohler, *$K\pi$ scattering and the K^* decay width from lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **D88** (2013), 054508, `arXiv:1307.0736`.

MATEMATIČNE SPOSOBNOSTI PRI OTROCIH: NEKAJ VROJENEGA, NEKAJ PRIDOBLJENEGA, A VEDNO LAHKO VIR ZADOVOLJSTVA

TINA BREGANT

Univerzitetni rehabilitacijski inštitut – URI Soča
Ljubljana

Ocenjevanje številčnosti neke skupine, primerjanje dveh vrednosti oziroma količin ter osnovno seštevanje (dodajanje) in odštevanje (odvzemanje) so biološko določene sposobnosti, ki so prirojene tako nekaterim živalim kot ljudem. Že novorojenček razlikuje nekatere količine, z zorenjem možganov pa ta sposobnost še napreduje, tako da lahko ljudje kasneje razločujemo količine, ki se tudi zelo malo razlikujejo med seboj. Razumemo tudi velike količine. Kasneje ta vrojena znanja nadgradimo z uporabo števk, simboličnim učenjem in učenjem algoritmov. Matematične kompetence se povezujejo z zgodnjimi zaznavnimi in gibalnimi izkušnjami, telesno shemo in celo s socialno-čustvenimi kompetencami, ki smo jih razvili v otroštvu znotraj družine. Ker so tudi matematične kompetence v otroštvu tiste, ki določajo kasnejšo akademsko uspešnost, lahko razumevanje njihovega razvoja pomaga oblikovati spodbude pri usvajanju matematičnih veščin.

MATHEMATICAL ABILITIES IN CHILDREN: SOME INBORN, SOME ACQUIRED BUT ALWAYS A POTENTIAL SOURCE OF PLEASURE

Numerosity, comparison of two values or quantities as well as addition and subtraction are biologically inherent abilities in people and some animals, too. A newborn can already distinguish between some quantities. Through development her ability increases up to the adult level where even small differences are detected and big quantities are understood. Later on, we add to inborn abilities the use of numbers, symbolic learning, and learning of algorithms. Mathematical competences are linked to sensory and motor experiences, body scheme, and even socio-emotional competencies we have acquired within the family during childhood. By understanding how mathematical abilities develop we can create opportunities and encourage mathematical competences which determine academic success later in life.

Uvod

»Za božjo voljo, prosim te, odnehaj! Boj se je toliko kot strasti in čutne obsedenosti, saj ti bo prav tako vzela ves čas, tvoje zdravje, mir v duši in srečo v življenju!« moleduje Farkas Bolyai svojega sina Jánosa Bolyaija (eden od očetov neevklidske geometrije), da naj le odneha s proučevanjem hiperbolične geometrije [8].

Za večino ljudi je matematika zelo abstrakten, čutom nedostopen, šolski predmet, ki jim je vrh tega grenil veselje pri pouku. Matematik Zagier celo napiše, da večina ljudi ne more niti od daleč razumeti, da obstaja povezava med matematiko in zadovoljstvom in da jih straši že zgolj misel na matematiko [23]. Da obstaja povezava med matematiko in umetnostjo, je morda lažje razumeti, če se spomnimo renesanse, ko so umetniki poskusili prenesti naš tridimenzionalni svet na dvodimenzionalno platno; če pomislimo na uganke, ki jih je postavil M. C. Escher; če se ozremo na arabske mozaike in na fraktale. Da se matematika lahko napaja iz uporabne umetnosti, kot je kvačkanje, pa je pokazala latvijska matematičarka Daina Taimina [12].

Matematiko in njene zakonitosti lahko spremljamo povsod, ne le na računih pri trgovcih, tehtanju sadja pri branjevkah in nakupu varčnega avtomobila. Vseprisotnost matematike v našem življenju je fascinantna. Če je matematično mišljenje del naših miselnih procesov, kdaj in kje se v našem umu prične porajati matematično mišljenje?

V prispevku se bomo sprehodili skozi otrokov razvoj. Na poti od zaznavno-telesnega do abstraktnega bomo lahko uvideli, zakaj je spodbujanje matematčnih kompetenc pomembno za otrokov razvoj in čemu šele po usvojenih matematičnih veščinah v matematiki lahko tudi uživamo in občutimo lepoto, celo strast, ki nas lahko zasvoji za celo življenje.

Telesna shema in matematične sposobnosti

Človeški možgani so omreženi za prepoznavo antropomorfnih struktur, kar opazimo že pri novorojenčkih, ki z zanimanjem opazujejo človeške obraze in tako spodbujajo svoj čustveni, socialni in miselni razvoj. Nekatere funkcionalne raziskave kažejo, da smo omreženi tudi za prepoznavo simetrije. Za zaznavanje prostora in našega mesta v njem je zelo pomembna telesna shema. Osna simetrija in »človeškost« naših teles sta pri oblikovanju telesne sheme izjemnega pomena. Vemo, da nekateri bolezenski procesi shemo porušijo oz. jo v otroškem obdobju, ki je zanjo ključno, ne izgradijo dovolj funkcionalno.

Prostorske predstave, ki so ključne tako pri geometriji kot pri umetnosti, otrok prične usvajati zelo zgodaj, takrat ko pričenja oblikovati lastne telesne sheme: ko leži na hrbtu kot dojenček in z roko namensko poseže po predmetu okoli tretjega meseca starosti. Sprva je njegov poseg v prostor negotov: premočan ali prešibak, nenatančno usmerjen na predmet, a sčasoma se dojenček izuri in s spoznavanjem svojega telesa poseže ne le z roko po predmetu, pač pa tudi s telesom v prostor: prične s kotaljenjem, plazenjem, kobacanjem in okoli prvega rojstnega dne tudi shodi. S celim telesom otrok spoznava, kaj je daleč in kaj blizu; kaj je več in kaj manj. Njegovo telo mu omogoča razumeti osnovne koncepte: več-manj, močno-šibko, daleč-blizu, ostro-topo, ravno-ukrivljeno itd. Prve koračnice otroku omogočijo novo modalnost: matematične količine spoznava s celim telesom, ko koraka po taktu in s celim telesom občuti zaporedje in ritem. Otroci praviloma štejejo na prste in tudi mi, odrasli, ker imamo 10 prstov, uporabljamo desetiški sistem, čeprav je dvanajstiški sistem preprostejši za uporabo.

Ljudje smo praviloma šele v obdobju šolanja sposobni abstraktnega mišljenja, ko se nam ni več treba zanašati na telesno shemo. Marsikdo pa tega prehoda iz telesnega v abstraktni svet ne zmore nikoli. Sposobnost abstraktne koncepte preigrati le z miselnim procesom, brez vpletenosti svojega telesa, je za naše možgane precej zahtevno opravilo, za katero je treba poleg bioloških danosti in dobrega delovanja osrednjega živčevja tudi veliko vaje in urjenja. Kljub temu so še vedno nekateri koncepti označeni s telesno shemo.

Lakoff in Nunez sta uporabila sistem metafor (teorijo kognitivnih ali konceptualnih metafor), v katerem predlagata aritmetiko kot način zbiranja predmetov oziroma aritmetiko kot gibanje vzdolž osi [15]. Če ste desnični, kar velja za večino zdrave populacije, in uporabljate evropski način pisanja od leve proti desni, potem je za vas vse, kar je večje, boljše in prihodnje, umeščeno na vašo desno. Zahodnoevropejci smo znani po linearnem razmišljanju, z numerično osjo, ki se pričenja na levi in po velikosti raste proti desni [6]. Pri poskusih s številčnimi vrednostmi na ekranih smo pri pritisku na gumb, kot reaktivnem času prepoznave vrednosti, pri večjih količinah hitrejši z desnico kot levico. Podobno za nas velja pri vertikalni številčni osi, kjer višje za nas pomeni tudi večje. Zanimivo, da tudi odrasli to zaznavamo s celim telesom. Tako so preiskovanci pri generiranju števil ob premikih telesa navzgor generirali večje vrednosti, kot če so se premikali navzdol [11]. Če so preiskovanci kimali navzgor, so generirali višje vrednosti, kot če so kimali z glavo navzdol [22]. Naši možgani poleg tega enačijo modalnosti. Tako razumemo večje napisano številko tudi kot količinsko večjo od drobno napisane [21] in količino pikic precenimo, če prekrivajo večjo površino [13].

Miselne predstave smo v otroštvu namreč izoblikovali s pomočjo telesa. Celo tako abstraktne koncepte, kot je negativnost, npr. zakaj je zmnožek dveh negativnih števil pozitiven, nekateri strokovnjaki razlagajo s konkretnimi primeri [14].

Ob procesiranju števil in količin se v možganih aktivira temenski reženj, pri čemer je aktivacija podobna kot pri procesiranju prostorskih informacij [4]. Temu se ne izognejo niti študenti matematike, ki celo pri razlagi integralov uporabljajo značilne geste, ki sovpadajo z osnovnimi količinskimi pojmi (desno-levo, višje-nižje) [17].

Aritmetika in občutek za količino

Poznavanje števil je nujno za razumevanje matematike. Razvoj aritmetičnih sposobnostih ne temelji zgolj na pridobivanju izkušenj in učenju, temveč so nam nekatere aritmetične sposobnosti, predvsem občutek za količino, vrojene [16]. Ocenjevanje številčnosti neke skupine, primerjanje dveh števil po velikosti ter osnovno seštevanje ali dodajanje in odštevanje ali odvzemanje so biološko vrojene ločene sposobnosti. Presoja, kje bo veverica našla več orehov ali v kateri čredi je možnost ulova največja, določa obstoj osebka in vrste. Živali sicer zelo verjetno ne štejejo v lingvističnem pomenu štetja. Torej živali ne štejejo ena, dve, tri, . . . pač pa imajo vrojeno sposobnost določanja in razločevanja količine. Gre najverjetneje za evolucijsko prednost teritorialnih živali, ki jim ta sposobnost omogoča določiti teritorij, kjer je več hrane za celotno čredo [3].

Že majhni otroci zmorejo prepoznati različne količine. Otroci se med seboj sicer precej razlikujejo, kdaj usvojijo določene veščine, drži pa predsodek, ki velja med vzgojitelji in učitelji, da so tisti otroci, ki prej in bolj uspešno rešujejo matematične probleme, tudi kasneje akademsko bolj uspešni. V laičnem jeziku takim otrokom rečemo, da so »pametni«. Zanimivo je, da aritmetične sposobnosti otrok korelirajo tudi z nekaterimi socialnimi veščinami in čustvenimi vedenji [9], kar pa je v nasprotju s predsodkom, da so ti otroci »samotarji« in nezainteresirani za družbo.

Že dojenčki so sposobni razlikovati množici z različnimi elementi, številčnost pa dojemajo amodalno. Pri šestih mesecih ločijo množici, katerih število elementov je v razmerju $1\colon 2$, s starostjo pa se to razmerje hitro izboljšuje [7]. Petletni otroci že ločijo skupini, katerih število elementov je v razmerju $7\colon 8$ [10]. Sposobnost primerjanja dveh količin se začne razvijati šele po 15. mesecu starosti, preštevanja pa se otroci naučijo spontano, z učenjem jezika. Govor otroku omogoči, da števila dobijo abstrakten, simbolni pomen, s tem pa se odpre pot k simbolni aritmetiki. Otroci v predšolskem obdobju računajo po intuiciji, v šoli pa aritmetika temelji na učenju postopkov za reševanje problemov. Pri šolskem usvajanju matematičnih znanj prevzame glavno nalogo spomin in avtomatizacija procesov, pri čemer intuicijo zapostavimo. Vendar so raziskave pokazale, da je intuicija zelo pomembna in je celo napovedni dejavnik razvoja matematičnih kompetenc skozi celotno šolanje.

Uspeh pri matematiki – spodbuda na jezikovnem, socialnem in čustvenem področju

Zanimivo in morda celo intrigantno je spoznanje, da na uspešnost učencev pri pouku matematike vplivajo odnosi. Recipročnost odnosov med šolo in domom je tako pomembna, da so otroci bolj osredotočeni na šolske naloge, in zanimivo, hkrati tudi bolj uspešni pri matematiki, če njihovi starši mislijo, da so njihovi otroci uspešni [1]. Ravno obratno pa nezaupanje v otrokove sposobnosti vodi v splošno učno manjuspešnost in tudi slabše matematične kompetence. Zanimivo, da starši, zlasti očetje, s trajanjem šolanja povečujejo zaupanje v sinove matematične kompetence, medtem ko jih za hčere zmanjšujejo. Kako matere razumejo otrokove matematične sposobnosti, pa določa formalno in neformalno matematično znanje ter tudi uspešnost, pri čemer je materino znanje matematike tisto, ki določa formalni nivo znanja otroka [2].

Predšolske izkušnje in spodbudno predšolsko okolje je tisto, ki določa kasnejše uspehe pri matematiki [5]. Učinki obogatenih materialov, dejavnosti in interakcij med vzgojitelji-učitelji in učenci v najzgodnejših letih učenja se kažejo še štiri leta po učinkoviti intervenciji, usmerjeni v matematiko [19]. Če spodbujamo učenje matematike pri ekonomsko in socialno manj privilegiranih učencih, pri njih pride do boljšega uravnavanja in zmanjšanja težavnih vedenj, pridobijo več samonadzora in pripadnosti šoli in učenju. Bolj pogosto kot pred intervenco so pridružena pozitivna socialno-čustvena vedenja [9].

Matematične sposobnosti se povezujejo s pismenostjo. Tako pričetki opismenjevanja sovpadajo tudi s štetjem in preprostimi operacijami seštevanja in odštevanja. Predšolski otrok, ki zmore pripovedovati zgodbo in jo osvetliti z logičnimi opisi sosledja dogodkov in morda celo z več vidikov, je po nekaterih raziskavah kasneje tudi pri matematiki uspešnejši [18]. Vzrok je verjetno v tem, da pri usvajanju matematičnih veščin ne gre zgolj za fonološko spretnost, pač pa za prepoznavanje in reševanje besedilnih problemov ter širši nabor spretnosti. Dobre matematične sposobnosti se povezujejo z jezikovnimi spretnostmi do te mere, da intervencijski programi, ki spodbujajo matematično pismenost, vplivajo na statistično značilen, količinsko merljiv porast jezikovnih spretnosti [20].

Z govorom se otrokom odpre pot k simboličnemu računanju. Do tretjega leta starosti otroci štejejo avtomatično, brez težav do 10. Triinpolletni otrok že zazna napako v preštevanju, do četrtega leta pa usvoji osnovni princip preštevanja, tj. da je vsak predmet štet le enkrat in da si števila morajo slediti zaporedno. Domnevamo, da gre za vrojeno sposobnost, ki spremlja sposobnost spontanega učenja jezika. Šele po četrtem letu starosti otroci začnejo razumeti, čemu je preštevanje namenjeno, tj. da končno število pomeni število vseh elementov v skupini.

Matematične sposobnosti se ne povezujejo s sposobnostjo in hitrostjo poimenovanja in izražanja, ki so tudi eno od meril kognitivnega razvoja. Podatki iz raziskav nakazujejo, da so matematično »sposobnejši« posamezniki boljši ne toliko v priklicu aritmetičnih znanj, pač pa v delovanju višjih, kognitivnih procesov, zlasti pri procesiranju matematičnih simbolov. Te procese lahko zaznamo s slikanjem s funkcijsko magnetno resonanco (fMRI). Pri dobrih matematikih ti procesi zelo aktivno potekajo v levem angularnem girusu, ki je pri njih bolj dejaven kot pri slabih matematikih.

Sklep

Kljub temu da je ljudem občutek za količino in števila vrojen, ima tudi učenje aritmetike z začetkom že v predšolskem obdobju velik vpliv na razvoj kasnejših matematičnih sposobnosti. Dobra telesna shema, ki smo jo kot malčki zgradili na podlagi zaznav in gibanja telesa, ter poznavanje količin in števil sta temelj za poznejše uspešno razumevanje matematike. Uporaba matematične intuicije pri izgradnji miselnih modelov in hkrati uporaba aritmetike in razumevanja algoritmov se ne izključujeta, pač pa dopolnjujeta, in le tako lahko pričakujemo, da bo razumevanje matematike boljše, razvoj matematičnih kompetenc pa hitrejši in uspešnejši. V matematiki bomo lahko uzrli lepoto in v njej preprosto – uživali.

LITERATURA

[1] K. Aunola, J. E. Nurmi, M. K. Lerkkanen, in H. Rasku-Puttonen, *The role of achievement-related behaviors and parental beliefs in children's mathematical performance*, Educational Psychology **23** (2003) 4, 403–421.

[2] B. Blevins-Knabe, L. Whiteside-Mansell in J. Selig, *Parenting and mathematical development*, Academic Exchange Quarterly **11** (2007) 2, 76–80.

[3] T. Bregant, *Ali je matematika doma le v človekovih možganih*, Proteus **75** (2013) 5, 209–216.

[4] T. Bregant, *Nevrokognitivne osnove numeričnega procesiranja*, Psihološka obzorja **21** (2012) 3/4, 69–74.

[5] J. Brooks-Gunn, A. S. Fuligni in L. J. Berlin, *Early child development in the 21st Century: Profiles of current research initiatives*, New York: Teachers College Press (2003).

[6] S. Dehaene, S. Bossini in P. Giraux, *The mental representation of parity and number magnitude*, Journal of Experimental Psychology: General **122** (1993), 371–396.

[7] S. Dehaene, N. Molko, L. Cohen in A. J. Wilson, *Arithmetic and the brain*, Current Opinion in Neurobiology **14** (2004), 218–224.

[8] T. Denes, *Real face of Janos Bolyai*, Notices of the American Mathematical Society **58** (2011) 1, 41–51.

[9] J. Dobbs, G. L. Doctoroff, P. H. Fisher in D. H. Arnold, *The association between preschool children's socio-emotional functioning and their mathematical skill*, Journal of Applied Developmental Psychology **27** (2006), 97–108.

[10] L. Feigenson, S. Dehaene in E. Spelke, *Core systems of number*, Trends of Cognitive Science **8** (2004) 7, 307–314.

[11] M. Hartmann, L. Grabherr in F. W. Last, *Moving along the mental number line: Interactions between whole-body motion and numerical cognition*, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance **38** (2012) 6, 1416–1427.

[12] D. W. Henderson in D. Taimina, *Crocheting the hyperbolic plane*, Mathematical Intelligencer **23** (2001) 2, 17–28.

[13] F. Hurewitz, R. Gelman in B. Schnitzer, *Sometimes area counts more than number*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, **103** (2006), 599–604.

[14] M. Kline, *Mathematics for the nonmathematician*, Toronto, Canada: General Publishing Company (1967).

[15] G. Lakoff in R. E. Nunez, *Where mathematics comes from*, New York: Basic Books (2000).

[16] T. Levstek, T. Bregant in A. Podlesek, *Razvoj aritmetičnih sposobnosti*, Psihološka obzorja **22** (2013), 115–121.

[17] T. Marghetis in R. Nunez, *The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics*, Topics in Cognitive Science (2013), 1–18.

[18] D. K. O'Neill, M. J. Pearce in J. L. Pick, *Predictive relations between aspects of preschool children's narratives and performance on the Peabody Individualized Achievement Test – Revised: Evidence of a relation between early narrative and later mathematical ability*, First Language **24** (2004), 149–183.

[19] E. S. Preisner-Feinberg, M. R. Burchinal in R. M. Clifford, *The relation of preschool child-care quality to children's cognitive and social developmental trajectories through second grade*, Child Development **72** (2001) 5, 1534–1553.

[20] M. Shayer in M. Adhami, *Realizing the cognitive potential of children 5–7 with a mathematics focus: Post-test and long-term effects of a 2-year intervention*, British Journal of Educational Psychology **80** (2010) 3, 363–379.

[21] H. J. Tzelgov, *Is three greater than five: The relation between physical and semantic size in comparison tasks*, Memory & Cognition 10 (1982), 389–395.

[22] B. Winter in T. Matlock, *More is up . . . and right: Random number generation along two axes*, v M. Knauff, M. Pauen, N. Sebanz, I. Wachsmuth (Eds.), Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Austin, TX: Cognitive Science Society (2013), 3789–3974.

[23] D. Zagier, *The beauty of numbers*, MaxPlanckResearch – The Science Magazine of the Max Planck Society (2012) 1, 12–17.

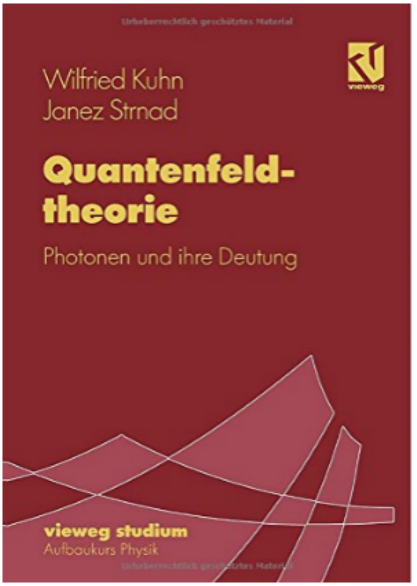
V SPOMIN PROFESORJU JANEZU STRNADU

Novembra se je v dvainosemdesetem letu od nas poslovil najplodovitejši sodelavec Obzornika, kolega fizik, zaslužni profesor *Univerze v Ljubljani*, dr. Janez Strnad. Njegov članek je izšel še v predzadnji izdaji revije, v zadnjem letniku pa je prispeval k polovici številk.

Spoznal sem ga, ko sem prestopil prag univerze. Brucem nam je predaval *Fiziko*, osrednji predmet našega študija. S svojim resnim in zavzetim načinom, pripravljenostjo odgovoriti na vsa vprašanja, poštenostjo ter odličnostjo pri ocenjevanju je pustil pečat generacijam fizikov. Na predavanjih smo lahko slutili, da ve mnogo več, kot pove. Izvrstno je poznal tako učno snov kot težave, ki spremljajo njeno razumevanje. Ta globoki vpogled je imel zato, ker je temeljito poznal zgodovino fizike. To plat svoje razgledanosti je pokazal v predavanjih *Razvoj fizike* in v pisanju poljudnih in strokovnih člankov za večino slovenskih časopisov in naravoslovno usmerjenih revij. V tej vlogi sem ga kot urednik spoznaval prav do zadnjih dni.

Janez Strnad je bil rojen leta 1934 v Ljubljani. Po osnovni šoli in nižji gimnaziji v Slovenj Gradcu ter višji gimnaziji v Mariboru se je vpisal na *Fakulteto za naravoslovje in tehnologijo*. Po študiju tehniške fizike je postal asistent na današnjem *Oddelku za fiziko*. Kasneje je študiral na inštitutu za teoretično fiziko univerze v Heidelbergu. Leta 1963 je opravil doktorat in bil izvoljen za docenta. Leta 1969 je bil izvoljen za izrednega profesorja in leta 1974 za rednega profesorja. Na *Oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo* in kasneje *Fakultete za matematiko in fiziko* je dolgo časa predaval *Fiziko* študentom fizike v prvem in drugem letniku in *Razvoj fizike* v tretjem.

Njegovo raziskovalno delo je manj znano, saj se skoraj izgubi v obsežnem opusu drugih del. Pa vendar, Janez je bil tudi izvrsten raziskovalec, z objavami v tako prestižnih revijah, kot sta *Science* in *Nature*. Raziskovalno se je ukvarjal z difuzijo nevtronov, posebno teorijo relativnosti in jedrsko fiziko in je delal na *Odseku za teorijsko fiziko* na *Institutu Jožef Stefan*. Zanimala ga je tudi didaktika fizike, posebno teorije relativnosti in kvantne fizike. Na tem področju je objavil veliko znanstvenih člankov. Skupaj skoraj sto. Sodeloval je z inštitutom za didaktiko fizike univerze v Giessenu, kjer je bil na obisku večkrat po nekaj mesecev. Pozornost je posvečal tudi posredovanju fizike širši javnosti.



V angleščini in nemščini je objavil prek sto raziskovalnih in strokovnih člankov in šestdeset referatov, s katerimi je večinoma sodeloval na mednarodnih sestankih. Objavil je tudi več kot štiristo strokovnih in poljudnoznanstvenih člankov v slovenščini, predvsem v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, *Preseku* in *Proteusu.* V časopisih in revijah je objavil več kot sto štirideset prispevkov.

Skupaj z Wilfriedom Kuhnom je objavil v nemščini knjigo *Quantenfeldtheorie. Photonen und ihre Deutung* (1995). Napisal je štiridelni univerzitetni učbenik za fiziko in učbenik ter del učbenika za srednjo šolo.

V knjigi *Atom vodi igru*, Školska knjiga, Zagreb 1973, je prispeval poglavje *Vrijeme u specijalnoj teoriji relativnosti.* Knjižici *Merim platno, trak na vatle* in *Prapok prasnov požene v dir* mlajšim bralcem dajeta pregled čez merjenje razdalj in razvoj Vesolja. Knjiga *Iz take so snovi kot sanje* obravnava zgradbo snovi, *Zgodbe iz fizike* pa to, kako fiziki prihajajo do novih spoznanj. Knjiga *Fiziki. Trinajst portretov* je nastala po nizu radijskih oddaj o življenju pomembnejših fizikov. Precej knjig in knjižic je objavil pri *Društvu matematikov, fizikov in astronomov.* V *Presekovi knjižnici* so izšle knjižice *Začetki sodobne fizike*, *Relativnost za začetnike*, *Začetki kvantne fizike*, *Jožef Stefan. Ob stopetdesetletnici rojstva* in *Do Newtonovih zakonov.*

V knjižnici Sigma so izšle *Kvantna fizika*, *Relativnost*, *Posebna teorija relativnosti*, *Mala kvantna fizika*, *Vozi me, avto, v daljave*, *Svet nihanj in valovanj*, *Mala zgodovina vesolja*, *O poučevanju fizike*, *100 let fizike* in *Mala zgodovina Dopplerjevega pojava.* V *Podiplomskem seminarju iz fizike* ali v *Izbranih poglavjih iz fizike* so izšle knjižice *Fazna, skupinska in signalna hitrost*, *Poskusi v posebni in splošni teoriji relativnosti*, *Kvantna fizika za začetnike*, *Na pot v kvantno elektrodinamiko*, *Na pot k Schwarzschildu* in *Homogeno gravitacijsko polje. Med posebno in splošno teorijo relativnosti.*

Sodeloval je še pri izdaji izpitnih vprašanj in zbirk nalog ter uredil in prevedel več knjig. Sodeloval je v uredniškem odboru *Proteusa.* Sodeloval je pri *Slovarju slovenskega knjižnega jezika* in pri *Enciklopediji Slovenije.*

Za svoje delo je dvakrat prejel nagrado *Sklada Borisa Kidriča*, plaketo *Pavla Grošlja* in *Levstikovo nagrado*. Dobil je tudi več priznanj *Društva matematikov, fizikov in astronomov*. Leta 2001 je bil imenovan za častnega člana društva.

Na *Obzorniku* pušča neizbrisljiv pečat. V njem je objavil skoraj tristo prispevkov. Bil je član uredniškega odbora 1964–1973, področni urednik 1974–1992, odgovorni urednik 1974–1976, 1981–1983, 1985–1990 ter glavni in odgovorni urednik 1977–1980.

Njegovo marljivost, skromnost in pripravljenost na pomoč bom pogrešal. Kot prijatelj mi bo ostal v toplem spominu. Kot urednik sem se lahko vedno zanesel na njegovo besedo in plodovitost. Enkrat mi je zaupal, da slovenske revije izhajajo prepočasi za vse, kar lahko napiše. Vedno je imel v zalogi kako zanimivo besedilo. Pisati je znal za širšo javnost kot tudi za zelo zahtevne bralce. In to v velikem obsegu. Njegov opus obsega več kot 1700 enot. Med njimi niso le članki, ampak tudi obsežnejša dela. Njegovi učbeniki, še posebej univerzitetni učbeniki fizike, spadajo med temeljno literaturo študija fizike.

Njegovo delo poznajo tako mlajši kot starejši bralci *Obzornika*. Prvi članek je objavil že v letu 1955 in temu je sledilo šestdeset let nepretrganega objavljanja. V prispevkih se je dotikal vseh področij fizike – od moderne fizike, interpretacij kvantne mehanike, zamotanosti posebne teorije relativnosti, kozmologije prek odkritij na področju osnovnih delcev ter do zgodovinskega pregleda razvoja znanosti.

Skozi pogovore, ki so se spletali ob tem, ko mi kaj ni bilo jasno in je bil internet preslab učitelj ali pa je on potreboval kako pomoč pri računalniku, sem ga spoznaval tudi kot osebo, ne le kot fizika. Skromen, prijazen, marljiv in razgledan. Čeprav je proti koncu bíl naporen boj z boleznijo, se to v njegovem delu ni kazalo. Še danes je v pripravi kar nekaj besedil, ki jih je pisal prav do zadnjega dne. Neizbežni konec je sprejel mirno, racionalno, tako kot je sprejemal naravne zakone. Tudi to je lekcija, ki mi jo je dal in mi bo ostala v srcu.

Aleš Mohorič

V SPOMIN PROFESORJU JOŽETU GRASSELLIJU[1]

Profesor Grasselli, rojen 24. novembra 1924, pripada prvi generaciji slovenskih matematikov, ki je na filozofski fakulteti v Ljubljani študirala matematiko takoj po koncu druge svetovne vojne in je imela kasneje pionirsko vlogo pri njeni uveljavitvi na slovenskih srednjih šolah in na ljubljanski univerzi. Po diplomi leta 1951 je učil na gimnazijah v Murski Soboti in v Celju, potem pa so ga leta 1957 povabili za asistenta na tehniško fakulteto v Ljubljani. Po enoletnem izpopolnjevanju v tujini v študijskem letu 1959/60 je leta 1961 doktoriral pri profesorju Ivanu Vidavu z disertacijo *Sebi adjungirani elementi v Banachovi algebri brez enote*. Postal je najprej predavatelj, nato leta 1963 docent, leta 1974 izredni profesor in leta 1980 redni profesor za matematiko. Ves čas je bil zaposlen na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani, na kateri se je leta 1991 tudi upokojil.

Po prvem obdobju, v katerem se je ukvarjal s funkcionalno analizo, takrat dokaj novim področjem matematike, je njegova velika ljubezen postala teorija števil, o kateri je od leta 1966 dalje napisal precejšnje število strokovnih člankov v Obzorniku za matematiko in fiziko, po letu 1985 tudi v Preseku. Predvsem pa je o teoriji števil napisal vrsto temeljnih in nujnih knjižnih del. Njegova prva knjiga *Osnove teorije števil*, ki je izšla v zbirki Sigma leta 1966, je bila predelana leta 1975 in povsem obnovljena leta 2009 s spremenjenim naslovom *Elementarna teorija števil*. V osemdesetih in devetdesetih letih so v zbirki Matematika-fizika izšla njegova *Algebraična števila* (1983), v zbirki Sigma pa *Diofantske enačbe* (1984) in *Diofantski približki* (1992). Leta 2008 je matematično javnost še enkrat presenetil z obsežnim in v slovenski matematični literaturi edinstvenim delom *Enciklopedija števil*, v katerem je na skoraj 700 straneh matematično obrazložil več kot 160 gesel. S članki in knjigami je teorijo števil populariziral kot le redkokateri slovenski

[1] Povzeto po govoru na pogrebu.

matematik svojo disciplino. Iz njegovih knjig smo se je učili tako študentje matematike kot tudi vsi drugi, ki so jo pri svojem delu potrebovali.

Profesor Grasselli je bil matematično aktiven še v visoki starosti. S svojim nekdanjim mentorjem in kasnejšim kolegom profesorjem Vidavom sta še pred nekaj leti večkrat razpravljala in skupaj premišljevala o matematiki. Občasno je tudi obiskoval matematično knjižnico in se zanimal za novosti iz teorije števil.

Vrsto let je predaval osnovno matematiko kemikom in kemijskim tehnologom, pogosto tudi tekstilcem, farmacevtom in gradbenikom ter še komu. Poleg formul, definicij in izrekov je bodoče inženirje učil predvsem matematičnega razmišljanja in natančne formulacije problemov, ki se pojavljajo v tehniških strokah. Pri njegovih predavanjih so mnogi prvič spoznali vrednost matematične eksaktnosti, ki je podlaga naravoslovnim in tehniškim vedam. Številnim generacijam slušateljev je ostal v spominu kot strog, a izredno korekten in pošten učitelj ter kot odličen predavatelj. Študente matematike pa je v osemdesetih letih in tudi še nekaj let po upokojitvi učil linearne in abstraktne algebre. Poglavje o linearni algebri, ki ga je napisal za *Višjo matematiko II*, je študentom še danes koristen študijski pripomoček. Večkrat je tudi vodil seminarje ter na podiplomskem študiju za pedagoge predaval različna poglavja iz teorije števil. V tem obdobju je bil priljubljen mentor skoraj štiridesetim diplomantom matematike.

Prispeval je tudi k delu in razvoju matematične skupnosti na ljubljanski univerzi; od 1969 do 1971 je bil predstojnik matematično-fizikalnega oddelka, prej in potem nekaj let njegov namestnik, kasneje pa je imel vrsto drugih, manj pomembnih funkcij. Prav tako je bil aktiven v društvenem življenju, kjer je že konec petdesetih let sodeloval pri izvedbi matematičnih krožkov, predavanj in tekmovanj za srednješolce ter bil tajnik društva. Kasneje je večkrat predaval tudi na društvenih seminarjih za učitelje. Funkcijo predsednika DMFA Slovenije je opravljal v letih 1967 do 1970, potem pa bil konec sedemdesetih let član nadzornega odbora. Leta 1994 je bil zaradi zaslug izbran za častnega člana društva.

Tako kot redno delo univerzitetnega učitelja je tudi vse svoje dodatne dolžnosti, celo najvišje, opravljal vestno in z veliko mero odgovornosti, čeprav se ni nikoli rad silil v ospredje. Med kolegi in sodelavci je bila poleg bogatega znanja teorije števil cenjena zlasti njegova neverjetna delavnost, skromnost, vljudnost in nevsiljiva prijaznost. Bil je tiste vrste dragoceni sodelavec, brez katerih noben sistem ne more dobro delovati. Bil je profesor stare šole v najboljšem pomenu besede.

Hvala mu za vse, kar je dobrega storil za slovensko matematiko!

Milan Hladnik

PROFESOR MITJA ROSINA – OSEMDESETLETNIK

Že nekaj mesecev je minilo od 80. rojstnega dneva profesorja Mitje Rosina, enega najbolj zavzetih fizikov v slovenskem prostoru. Težko bi našli fizika, ki lahko poveže toliko stvari okoli nas s fiziko. Ta okrogla obletnica je primerna, da si ogledamo njegove prispevke.

Rodil se je 3. maja 1935 v Ljubljani. Po diplomi iz tehniške fizike leta 1959 se je najprej zaposlil na Institutu Jožef Stefan in nato kot asistent na Katedri za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Raziskovalno delo je nadaljeval na Institutu Jožef Stefan. Doktoriral je leta 1964 z disertacijo *Dipolno stanje pri nesferičnih jedrih.* Raziskovalno je ostal zvest jedrski fiziki vse do danes. Leta 1965 je bil izvoljen za docenta in nato za izrednega profesorja leta 1971. Za rednega profesorja je bil izvoljen leta 1977. Leta 2001 je postal zaslužni profesor na ljubljanski univerzi.

Profesor Rosina je bil na številnih izpopolnjevanjih in gostovanjih na tujih univerzah in inštitutih: na univerzi v Brightonu (VB), na univerzi v Seattlu (ZDA) kot gostujoči docent, na univerzi v Kingstonu (Kanada), na Inštitutu Maxa Plancka v Heidelbergu, na univerzi v Coimbri (Portugalska), na jedrskih inštitutih v Molu (Belgija) in Krakovu (Poljska), na univerzi v Davisu (ZDA) kot *distinguished visiting professor*, na univerzi v Antwerpnu, v mednarodnem centru za teoretsko fiziko v Trstu, če naštejemo le najvažnejša. Ta sodelovanja kažejo na njegovo izjemno komunikativnost. Nova znanja, ki jih je prinesel domov, je uspešno delil med svoje ljubljanske sodelavce.

Dodiplomcem je predaval predvsem Jedro in osnovne delce. Predmet je zastavil kot osnovni predmet za splošno izobrazbo vseh fizikov, kot utrditev razumevanja kvantne fizike in problema več teles in kot osnovo za razumevanje jedrskih meritev. Kot tak je predmet preživel razne reforme in si utrl pot v tradicionalni repertoar študija fizike pri nas. Predmet je bil pri študentih priljubljen in pri domačih nalogah so radi in uspešno sodelovali, saj so bili problemi izvirni in zanimivi, profesor Rosina pa jim je posvetil veliko časa za poglobitev razumevanja. Občasno je predaval tudi Kvantno mehaniko, Fiziko 1, Toploto, Elektromagnetno polje in Optiko.

Podiplomcem je predaval Teorijo osnovnih delcev in jedra in jo zastavil dovolj široko, da so predavanja služila slušateljem atomske, jedrske in delčne fizike. Predaval jim je tudi Višjo kvantno mehaniko, ki jo je napravil privlačno in razumljivo za vse, zlasti uvod v Feynmanove grafe, tako da je večina študentov prišla na izpit takoj po predavanjih. Napisana skripta so bila primeren poenostavljen uvod v teorijo polja. Podiplomce pedagoge je vpeljal v Fiziko delcev in snovi. Večkrat je predaval učiteljem fizike v okviru stalnega strokovnega izpopolnjevanja.

Bil je mentor 14 diplomantom, 5 magistrandom in 5 doktorandom. Napisal je več učbenikov: Jedrska fizika (1969, 1977, 1981), Višja kvantna mehanika (1995) ter pri založbi Springer skupaj s profesorjem Bogdanom Povhom iz Heidelberga *Streuung und Strukturen* (2002) in angleško verzijo *Scattering and Structures* (2005).

V več kot 50 letih delovanja na področju jedrske fizike in fizike delcev je profesor Rosina opravil vrsto zanimivih raziskav. V teoretični jedrski fiziki je raziskoval strukturo lahkih jeder in kolektivna vzbujanja jeder zlasti pri fotonuklearnih reakcijah. Razširil je metodo vzbujanja delec-vrzel s primesmi dveh delcev in dveh vrzeli in tako rešil problem strukture dipolne veleresonance. Reševal je konceptualne probleme za razumevanje in prikaz kolektivnih stanj, kvantnomehanskih tokovnic pri vrtečih se jedrih in koherentnih rotacijskih stanj jeder in molekul. Soustvarjal je nove metode za reševanje problema več teles: variacijski račun gostotne matrike – njegovo ime nosi sklop izrekov o pogojih, ki jim morajo zadostiti gostotne matrike –, metodo rodovne koordinate za jedrske spektre in za trke nukleona na nukleonu v modelu s kvarki, projekcijo dobrih kvantnih števil za deformirana jedra in za mezonski oblak v nukleonu.

V teoriji osnovnih delcev je raziskoval sisteme kvarkov: efektivno silo med kvarki, jedrsko silo kot residualno silo med gručami kvarkov, resonančna stanja dveh barionov, mezonski oblak v nukleonu, vzbujena stanja mezonov in vezane sisteme dveh mezonov. Poudariti velja pionirsko delo, ki ga je opravil skupaj s sodelavci pri študiju jedrske sile, ki je posledica barvne sile med kvarki iz obeh gruč, ki tvorita nukleone. To delo je vodilo do prvih uspešnih predlogov za opis dibarionskih resonanc, ki jih lahko tvorita gruči kvarkov. V modelu je uspešno napovedal lego dibarionskih resonanc, ki nastanejo pri trkih devterona na atomskih jedrih. Nadaljevanje dela je vodilo do študija vloge mezonskega oblaka v nukleonu pri statičnih in dinamičnih lastnostih nukleona. Njegova zasluga je vpeljava metode za projekcijo dobrih kvantnih števil pri variacijskem računu strukture nukleona. Skrbno je študiral uporabnost in konsistentnost različnih modelov za opis hadronov kot gruče kvarkov, oblaka kvarkov in antikvarkov ter gluonskega oblaka. Raziskoval je povezavo modelov s kromodinamskimi izračuni na mreži ter fazni prehod med jedrsko snovjo in kvarkovskim plinom. Pozornost je posvetil konkretnim napovedim, kot so število pionov v nukleonu, naravi mezona sigma ter vezanemu stanju dveh težkih mezonov. Večinoma v soavtorstvu je predvsem v tujem tisku objavil 55 znanstvenih člankov, 56 objavljenih referatov in predavanj ter 24 strokovnih člankov.

Profesor Rosina je bil tudi med organizatorji številnih znanstvenih srečanj, od mednarodnih letnih šol iz fizike v Hercegnovem na začetku kariere, letnih srečanj jedrskih fizikov Jugoslavije, pa tja do petih mednarodnih znanstvenih srečanj doma in dveh na Mednarodnem centru za teoretično fiziko v Trstu. Profesor Rosina je *spiritus movens* mednarodne znanstvene delavnice iz hadronske fizike, ki od leta 1999 vsako poletje poteka v Plemljevi hiši na Bledu. Zavzeto skrbi tako za strokovni program kot za raznovrstne spremljevalne kulturne in športne dejavnosti, ki prispevajo k ustvarjalnemu in sproščenemu ozračju na srečanjih in dodatno utrjujejo vezi med raziskovalci z vseh koncev sveta. Bil je tudi pobudnik in sedaj sourednik zbornika prispevkov udeležencev *Blejske delavnice iz fizike*, ki jo izdaja DMFA – založništvo. Naj omenimo še vrsto uspelih obiskov slovenskih naravoslovcev pri fizikalnih ustanovah v sosednjih državah, ki jih še vedno skrbno organizira profesor Rosina skoraj vsako leto.

Pri vsem svojem delu je našel čas, da je pripravil predavanja iz zanimivih fizikalnih tem za profesorje fizike na srednjih šolah, pa tudi za dijake na poletnih šolah mladih fizikov. Mladim je namenil vrsto zanimivih fizikalnih novosti, ki so izhajale v rubriki *Igre narave* v Obzorniku za matematiko in fiziko. Še vedno organizira opazovanja sončnega mrka, kadar in kjer ga je le mogoče dobro opazovati. Oddaljenost od Ljubljane pri tem skoraj ni ovira.

Za svoje delo je dobil profesor Rosina več priznanj in nagrad. Že kot študent je prejel Prešernovo nagrado za študente 1957 in 1960 za diplomsko delo. Leta 1960 je dobil nagrado Borisa Kidriča (predhodnica Zoisove nagrade) za skupinsko delo *Meritev totalne fotonuklearne absorpcije v Al, Si, S, P in Cs*, s sodelavci leta 1974 nagrado Sklada Borisa Kidriča za uspešne raziskave problema več teles v jedrski fiziki z naslovom *Nov pristop h kolektivnim stanjem preko stanj delec-luknja in razvoj metode rodovnih koordinat* in še enkrat leta 1983 s sodelavci nagrado Sklada Borisa Kidriča za delo *Raziskave interakcije med nukleonoma in dibarionske resonance v kvarkovskem modelu*.

Vedno je imel smisel za timsko delo in uvajanje mladih v težavno problematiko. Pri tem je zlasti poudarjal potrebo po kombinaciji shematskih modelov, pomembnih za razumevanje problema, in podrobnih računov, ki omogočajo primerjavo s fenomenološkimi pristopi. Pri sodelovanju s tujimi skupinami je zlasti poudarjal potrebo po interdisciplinarnosti in po primerjavi različnih inačic modelov.

Ne nazadnje bodi omenjeno tudi požrtvovalno delo profesorja Rosine v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Gotovo je on tisti fizik med nami, ki najbolje povezuje fizike z matematiki in astronomi. Dolga leta je član nadzornega odbora društva in zastopnik fizikov pri Evropskem fizikalnem društvu. V letih 1987–1990 pa je bil predsednik društva.

Sedaj je član uredniškega odbora revije National Geographic Slovenija za področje fizike in je na voljo za posvetovanje o člankih.

Naj zapišemo, da je Mitja Rosina raziskovalec, profesor in človek v najbolj žlahtnem pomenu besede. Zaželimo mu še naprej uspešno in prijetno življenjsko pot ob dobrem zdravju!

Zvonko Trontelj in Bojan Golli

OBVESTILO

V Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/pravilniki/Pravilnik_DrustvenaPriznanja.html` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) v skladu s tem pravilnikom za letošnja priznanja pošljete do **15. septembra 2016** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za društvena priznanja, Jadranska ul. 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije: prof. dr. Matej Brešar

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za naravoslovje in matematiko v Mariboru vabita na strokovno srečanje in 68. občni zbor, ki bosta 14. in 15. oktobra 2016 na Fakulteti za naravoslovje in matematiko v Mariboru.

Urnik in povzetki predavanj bodo objavljeni na spletni strani društva: `www.dmfa.si` v začetku septembra. Vljudno vabljeni.

Predsednik DMFA Slovenije: prof. dr. Matej Brešar

STROKOVNI SEMINAR DELO Z MATEMATIČNO NADARJENIMI UČENCI

DMFA Slovenije je 5. in 6. februarja na Pedagoški fakulteti v Ljubljani organiziralo seminar z naslovom Delo z matematično nadarjenimi učenci. Seminarja se je udeležilo 65 večinoma osnovnošolskih učiteljev matematike, ki so prisluhnili 11 predavateljem različnih profilov in ustanov. Vse predstavitve, predavanja ali delavnice so bile zanimive in poučne.

Prvo predavanje z naslovom *Matematični dokaz kot izziv za nadarjene osnovnošolce* je pripravil dr. Zlatan Magajna, docent za didaktiko matematike in elementarno matematiko na Pedagoški fakulteti UL. Dotaknil se je treh vidikov uvajanja dokazovanja in poudaril, da naj učenci sami začutijo potrebo po prepričljivem utemeljevanju pri pouku matematike. Zato je nujno izbrati učne vsebine in zglede, ki so za uvajanje učencev v tak način razmišljanja primerni, na primer na področju geometrije.

O dokazovanju v geometriji je predaval tudi mag. Milan Mitrović, učitelj matematike na OŠ Sava Kladnika Sevnica, ki z obsežnim znanjem geometrije pogosto pomaga srednješolcem pri pripravah na matematična tekmovanja. Predstavil je šest različnih dokazov Pitagorovega izreka, primernih za razumevanje na nivoju osnovnošolske matematike.

Na seminarju so kot predavateljice sodelovale tudi učiteljice z bogatimi izkušnjami in prakso iz osnovne šole. Prva med njimi je bila ga. Katja Kmetec, učiteljica matematike na OŠ Brinje Grosuplje, ki je na seminar pripeljala nekaj svojih učencev, da so za udeležence skupaj izpeljali delavnico *Matematični triki in čarovnije.* Triki so zanimivi vsem učencem, nadarjenim pa ravno njihovo razkrinkanje pomeni izziv. Prisotni učenci so predstavili nekaj zabavnih trikov, ki se jih da pojasniti z osnovnošolsko matematiko, in navdušili udeležence.

Dr. Lucija Željko, učiteljica matematike na OŠ Sostro in doktorica na področju razvojne psihologije, je predstavila *Izkušnje z akceleracijo matematično nadarjenih osnovnošolcev.* Kadar se matematično nadarjenost pri otrocih opazi že v zgodnjih letih, je takim učencem treba omogočiti učenje s hitrejšim tempom. V kakšni obliki bo izvedeno, pa je odvisno tudi od socialnih dejavnikov in ne zgolj od učenčevih intelektualnih sposobnosti. Poleg teoretične in pravne podlage je bilo predstavljenih tudi nekaj načinov dela iz prakse. Med naloge, ki jih zlahka reši nadarjen tretješolec, sodi denimo preštevanje vseh kvadratov na šahovnici.

Še nekaj idej za delo z nadarjenimi matematiki je v prispevku z naslovom

Ustvarjalnost in sodelovanje tlakujeta pot do raziskovalne naloge predstavila ga. Vesna Harej, učiteljica matematike in fizike na OŠ Dravlje, ki poleg poučevanja v razredu vodi tudi matematične tabore in je že vrsto let uspešna mentorica mladim raziskovalcem, ki s svojimi raziskovalnimi nalogami zasedajo najvišja mesta na državnem nivoju. Pri pisanju raziskovalnih nalog učenci pridobijo tudi mnogo drugih veščin, kot na primer jasno izražanje svojega mnenja ali učinkovito predstavitev svojega znanja. Doslej so učenci pod njenim mentorstvom raziskovali vsebine iz verižnih ulomkov, krivulj, tlakovanj ravnine, trikotniških števil, poliedrov in še marsičesa.

Za širjenje obzorja na področju poliedrov je na seminarju poskrbel dr. Izidor Hafner. Njegova delavnica *Poliedrski izzivi* je bila postavljena kot neke vrste razstava, kjer so si udeleženci lahko ogledali modele raznih poliedrov, jih otipali ali celo sestavili in poskušali rešiti zastavljene izzive.

Delavnica *Metoda Lajosa Pósa in raziskovalno učenje za nadarjene* je bila izvedena v dveh delih in je potekala v angleškem jeziku. Vodil jo je dr. Peter Juhász, raziskovalni sodelavec na Inštitutu za matematiko A. Renyi in učitelj matematike na šoli Sz. István v Budimpešti, sicer pa tudi organizator matematičnih taborov za nadarjene. Predstavil je metodo za samostojno odkrivanje matematičnih konceptov in razvijanje matematičnega razmišljanja ob ustrezno izbranih nalogah, ki jo je utemeljil znameniti Erdösev učenec Lajos Pósa. Zastavil je po več nalog hkrati in povedal, da uspešni reševalci ne smejo drugim izdati rešitve, za ustvarjalnost pa je nujno tudi to, da poleg nalog iz izbranega področja vedno zastavimo še nekaj povsem drugačnih primerov. Problemi so se stopnjevali od lažjih k vse bolj zahtevnim ali pa so s posplošitvijo naenkrat postali lažji. Bi znali na primer med šestimi na videz enakimi utežmi samo z dvema tehtanjema poiskati utež, ki je malce težja od drugih petih, če imate na voljo ravnovesno tehtnico? Koliko največ pa je lahko vseh uteži, da bi še vedno zagotovo našli težjo utež samo z dvema tehtanjema?

Še ena delavnica, kjer so udeleženci prav tako aktivno sodelovali in si belili glave z raznovrstnimi problemi, je bila delavnica *Nerešeni matematični problemi za osnovnošolce.* Kako ironično, kajne? Delavnico je pripravil dr. Boštjan Kuzman, zaposlen na Pedagoški fakulteti UL ter na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko. Med učitelji je poznan tudi kot aktiven in prizadeven promotor matematike med mladimi. Udeležence je spomnil na nekaj bolj znanih nerešenih problemov v matematiki in predstavil nekaj takih, ki so manj znani, a so primerni tudi za osnovnošolce. Poskusite

Slika 1. Dr. Juhász je predstavil principe dela z nadarjenimi učenci. (Foto: Lucija Žnidarič)

razporediti števila od 1 do 8 v dva klobuka tako, da za vsako število v posameznem klobuku velja, da ni vsota dveh drugih števil iz istega klobuka. Bi znali tako razporediti tudi števila od 1 do 9? Ne skrbite, slednje ne gre. Za 5 ali več klobukov pa sploh ni znano, koliko največ števil lahko razporedimo na tak način.

Matematično zelo poglobljeno je bilo predavanje *Tlakovanje s kvadrati* dr. Milana Hladnika, upokojenega profesorja Fakultete za matematiko in fiziko UL. Predstavil je znameniti problem tlakovanja pravokotnikov in ravnine z enako velikimi ali morda s samimi različnimi kvadrati ter številne zanimive rezultate različnih matematikov s tega področja. Bi znali kvadrat razdeliti na 9 med seboj različnih kvadratov? Kakšna je v tem primeru stranica največjega kvadrata? Obravnava problema je segala od sistema linearnih enačb do teorije grafov in analogij iz fizike.

Da pa je bil seminar kar se da pester, niso predavali samo matematiki. O *vzgoji nadarjenih otrok* je govoril tudi specialni pedagog g. Marko Juhant, poznan tudi po predavanjih za starše in priročnikih za vzgojo. Poudaril je pomen mentorja in preveliko vmešavanje staršev, ki se pogosto odločajo

Slika 2. Dr. Hladnik je razlagal o tlakovanju pravokotnika s kvadrati. (Foto: Lucija Žnidarič)

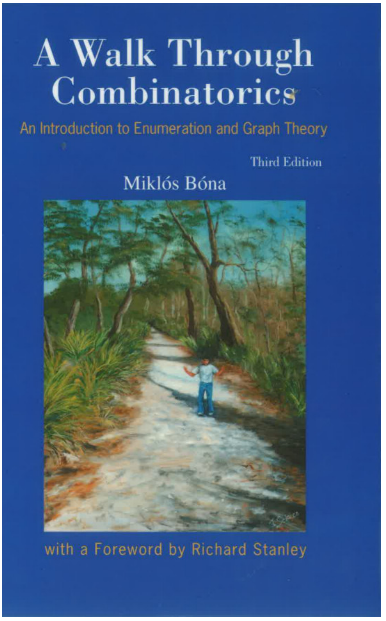
namesto svojih otrok. Menil je, da morajo nadarjeni dobiti dovolj zahtevne izzive in da težavnosti ne smemo zamenjati s količino, saj to vodi v izgubo motivacije in dolgočasje.

Za konec omenimo še prispevek dr. Marinke Žitnik, uspešne raziskovalke v Laboratoriju za bioinformatiko na Fakulteti za računalništvo in informatiko UL. Njen prispevek z naslovom *Mladi talenti po poti matematike in računalništva* je pravzaprav povzemal njeno zgodbo in predstavil nadaljnje možnosti sposobnih mladih talentov. Tudi ona je poudarila, da sta na poti do uspeha potrebna lastna volja in želja po učenju ter srečanje pravih mentorjev na pravih mestih, ki te znajo usmeriti naprej in ti pokazati nadaljnjo pot.

Povzetek o seminarju bi sklenila z mislijo, da je bilo prav vsako predavanje po svoje zanimivo in je prispevalo svoj delček k popolni celoti. Tudi organizacija seminarja je bila na visoki ravni in ne dvomim, da bomo v prihodnje deležni še več podobnih dogodkov.

Lara Kozarski

Miklós Bóna, A Walk Through Combinatorics, World Scientific Publishing Co. Ptc. Ltd. 2013, 550 strani.



Učbenikov kombinatorike je, tako kot to danes velja že skoraj za vsako področje matematike, zelo veliko, in čeprav dostikrat obravnavajo zelo podobne teme, niso vsi enako zanimivi in vredni pozornega branja. Knjiga »Sprehod po kombinatoriki« s podnaslovom Uvod v preštevanje in teorijo grafov je bila od prve izdaje 2011 že dvakrat ponatisnjena, kar samo po sebi zgovorno priča o njeni uporabnosti pri pouku kombinatorike. K njenemu uspehu je zagotovo pripomoglo več dejavnikov, od katerih je morda najpomembnejši posrečena kombinacija strokovnosti in berljivosti oziroma lepo uravnotežena tehtnost vsebine in zanimivost idejne, jezikovne in slikovne prezentacije obravnavane tematike, pri kateri teorijo (definicije, izreke, dokaze, formule, metode, itd.) lepo dopolnjujejo številni primeri in naloge, ki kažejo, kako na kombinatorične probleme pogosto naletimo ne le v matematiki, ampak tudi v vsakdanjem življenju.

Vsako od 20 poglavij se začne z duhovitim naslovom, ki gre v srž določene teme, npr.: 1. poglavje: Sedem je več kot šest. Dirichletovo načelo, 2. poglavje: En korak naenkrat. Metoda matematične indukcije, 8. poglavje: Funkcija je vredna veliko števil. Rodovne funkcije, 16. poglavje: Vsaj nekaj reda. Delne urejenosti in mreže, 19. poglavje: Čim prej, tem bolje. Kombinatorični algoritmi, itd.

Na kratko preletimo vsebino posameznih poglavij.

Knjiga se začne z obravnavo Dirichletovega načela, za katerega avtor pravi, da uteleša eno od najprivlačnejših lastnosti kombinatorike, in sicer možnost, da dobimo zelo močne rezultate z zelo preprostimi sredstvi. Primer uporabe tega načela je dokaz (s protislovjem!) presenetljive trditve, da je imel vsak danes živeči človek v obdobju zadnjih 1000 let nekega prednika A, za katerega je obstajala neka oseba P, ki je bila hkrati prednik tako očeta kot mame osebe A. Primer zanimive naloge s tega področja pa je npr. tale:

»Na našem dvorišču so štirje kupi kamenja. Kamne preložimo na pet kupov. Dokaži, da sta vsaj dva kamna na manjšem kupu kot prej.«

V drugem poglavju, posvečenem matematični indukciji, so zanimive predvsem naloge s področja t. i. močne indukcije, kjer pri dokazu indukcijskega koraka oziroma veljavnosti trditve pri $n+1$ upoštevamo njeno veljavnost pri vseh številih $1, 2, \ldots, n$. Preprost primer uporabe tega algoritma je naslednja naloga: »Naj bo $f(0) = 1, f(1) = 2$, in naj bo $f(n+1) = f(n-1) + 2f(n)$, če je $n \geq 1$. Pokaži, da je potem $f(n) \leq 3^n$.«

Bralce, ki so se v srednji šoli mučili z različnimi formulami za preštevanje, bo razveselila tabela v 3. poglavju, v kateri so lepo urejene formule za permutacije, kombinacije in variacije. A ko že misliš, da ti je končno vse jasno, že trenutek zatem v grozi spoznaš, da si v svojem učenju že spet na začetku (tipična frustracija v matematiki na vseh nivojih!), ko ti avtor zastavi nalogo: poišči število $H_3(r)$ vseh magičnih kvadratov 3×3 z vsoto elementov v vsaki vrstici in stolpcu enako r oziroma (kot da bi to bilo kaj bistveno lažje!) dokaži, da je to število enako vsoti nekih treh binomskih simbolov!

Kdor se vseeno prebije do četrtega poglavja, je za svoj trud bogato nagrajen, saj tam najde binomski izrek in podobne identitete, katerih dokazi so, kot pravi avtor, morda še pomembnejši kot identitete same, v katerih leva in desna stran enačbe pomenita dva različna načina, na katera lahko preštejemo isto množico objektov; prav o takšne vrste argumentu sanjajo kombinatoriki, ko dokazujejo razne identitete. Bralca, ki pozna binomski izrek, bo zagotovo navdušila njegova posplošitev: multinomski izrek, pa tudi posplošitev binomskega izreka za izraz $(1+x)^m$, kjer je m poljubno realno število.

Peto poglavje, posvečeno particijam, se začne s problemom, na koliko načinov lahko razdelimo 20 žog 4 otrokom. Potem spoznamo Ferrerjeve diagrame (ki jim drugi avtorji pravijo tudi Youngovi tableauxi), nazoren način za predstavitev particij. S preprostim trikom zrcaljenja teh diagramov prek glavne diagonale zlahka vidimo, da je število particij števila n v največ k delov enako številu particij števila n v dele, ki niso večji od k. Pregledna tabela s formulami olajša spoznavanje različnih vrst enumeracij in olajša reševanje ustreznih nalog.

V šestem poglavju so obravnavane permutacije kot funkcije, to pa omogoča preučevanje ciklov v njih. Spoznamo tudi Stirlingova števila prve in druge vrste.

Sedmo poglavje je posvečeno pravilu vključitve in izključitve, z uporabo katerega lahko rešimo znani problem, na koliko načinov lahko n gostov po zabavi v temi izbere napačen klobuk oziroma koliko je permutacij n elementov brez fiksnih točk; za to število $D(n)$ dobimo lepo formulo $D(n) = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!}$.

Osmo poglavje predstavi eno najmočnejših orodij enumerativne kombinatorike: tehniko rodovnih funkcij (ki jo je med prvimi uporabljal že Euler!). Rodovna funkcija zaporedja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je formalna potenčna vrsta $G(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Če so členi zaporedja podani z začetnim členom in neko rekurzivno enačbo, npr. $a_0 = 50, a_{n+1} = 4a_n - 100$, potem lahko tako enačbo pomnožimo z x^{n+1} in seštejemo, kar nam da neko enačbo za rodovno funkcijo, v gornjem konkretnem primeru dobimo $G(x) - a_0 = 4xG(x) - \frac{100x}{1-x}$ oziroma $G(x) = \frac{a_0}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}$, od koder po razcepu na parcialne ulomke dobimo koeficient pri x^n, v konkretnem primeru $a_n = 50 \cdot 4^n - 100 \cdot \frac{(4^n-1)}{3}$.

V devetem poglavju spoznamo osnove teorije grafov le toliko, kolikor je potrebujemo za nekatere preproste kombinatorične probleme.

V desetem poglavju najdemo nekaj dokazov Cayleyeve formule, da je število dreves na n vozliščih $v_1, v_2, \ldots, v_n$ enako n^{n-2}. V enem od dokazov odigra pomembno vlogo $(n-1) \times (n-1)$ matrika L_0, katere elementi $l_{i,j}$ imajo vrednost stopnje v_i, če je $i = j$, vrednost -1, če je $i \neq j$ in sta vozlišči v_i in v_j povezani, ter vrednost 0 sicer, kjer je $1 \leq i, j \leq n$. Izkaže se, da je število vpetih dreves polnega grafa na n vozliščih K_n enako $\det L_0 = n^{n-2}$.

Enajsto poglavje lepo ponazori problem barvanja vozlišč grafa s primerom iz vsakdanjega življenja, kjer telefonska družba načrtuje gradnjo oddajnikov, kjer morata vsaka dva, ki sta si bliže od 50 milj, delovati na različnih frekvencah. Spoznamo pojem kromatičnega števila in dvodelnih grafov (ti imajo kromatično število 2) ter pojem prirejanja.

Dvanajsto poglavje obravnava planarne grafe, Eulerjevo poliedrsko formulo in Spernerjevo lemo.

Trinajsto poglavje predstavi osnove Ramseyjeve teorije, ki se je začela s preprostim opažanjem, da so v množici šestih ljudi vselej trije, ki se med seboj vsi poznajo, ali pa trije, ki se med seboj ne poznajo. Določitev Ramseyjevih števil $R(k, l)$, to je minimalnih števil, za katera velja, da če pobarvamo vsako od povezav polnega grafa K_n z rdečo ali modro barvo, potem je v tem grafu neki monokromatski podgraf K_k s samimi rdečimi povezavami ali neki monokromatski podgraf K_l s samimi modrimi povezavami, je v splošnem precej težek problem. Eksistenca teh števil je sicer zagotovljena (pri pogoju $k, l \geq 2$), niso pa znana niti za nekatere pare majhnih števil k, l. Vseeno pa se da iz rekurzivne zveze $R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l)$ izpeljati npr. oceno za simetrična Ramseyjeva števila $R(k, k) \leq 4^{k-1}$.

V štirinajstem poglavju je obravnavan problem števila permutacij $S_n(q)$ dolžine n brez določenih vzorcev, npr. brez vzorcev tipa $q = 132$ (kjer je prvi element manjši od tretjega, ta pa manjši od drugega). Dokazane so zveze, kot npr. $S_n(1342) < S_n(1234) < S_n(1324)$ (za $n > 4$).

Petnajsto poglavje prikaže presenetljivo uslugo, ki jo lahko kombinatoriki naredi verjetnostni račun: tako npr. za simetrična Ramseyjeva števila dobimo spodnjo mejo $R(k,k) > 2^{k/2}$ s pomočjo naslednjega preprostega trika: pred barvanjem vsake od povezav polnega grafa K_n z modro in rdečo barvo mečemo kovanec, ki odloči o rdeči oziroma modri barvi povezave. Izkaže se, da je verjetnost p dogodka, da ne dobimo nobenega monokromatskega K_k podgrafa, večja kot nič, kar pomeni, da obstaja vsaj en tak monokromatski podgraf. Podrobnejša analiza nam po nekaj vrsticah računanja da omenjeno spodnjo mejo za $R(k,k)$.

Šestnajsto poglavje obravnava delne urejenosti in mreže in vpelje razmeroma zahteven pojem Möbiusove funkcije delne urejenosti ter z njo povezane Möbiusove formule inverzije. Za mreže obstajajo preprostejši načini računanja te funkcije.

Sedemnajsto poglavje obravnava blok dizajne, uporabne npr. pri problemu odpravljanja napak pri kodiranju.

Osemnajsto poglavje prešteva neoznačene strukture (npr. drevesa z neoznačenimi vozlišči), pri čemer si pri preštevanju pomaga z grupo simetrij danega objekta.

Devetnajsto poglavje se namesto problemu, na koliko načinov lahko opravimo neko delo, posveča vprašanju, kako to narediti čim hitreje. Obravnava nekaj osnovnih kombinatoričnih algoritmov, kot so npr. algoritmi sortiranja (BubbleSort, MergeSort) in algoritmi na grafih (najcenejša vpeta drevesa, problem najkrajših poti).

Dvajseto poglavje se dotakne problema računske kompleksnosti algoritmov, Turingovega stroja in temeljnega problema $P = NP$?

Knjiga, pospremljena z izdatno bibliografijo, zainteresiranega bralca v vsakem poglavju posebej napoti k avtorjem, ki so pomembno prispevali k danemu področju. Težavnostni razpon nalog tako sega od preprostih, namenjenih le temu, da se pobliže seznanimo z definicijami, do zahtevnejših na samem robu trenutno znanega.

Tudi morebitni podrobnejši študij knjige »Sprehod po kombinatoriki« bo zagotovo, kot pravi avtor v predgovoru, bralca prepričal, da je raziskovanje, poučevanje in učenje kombinatorike vselej zabavno. Ker tega ni mogoče reči prav za vse matematične discipline, pa tudi ne za vse knjige o kombinatoriki, je izbira gornje knjige kot enega od možnih uvodov v kasnejši resnejši študij kombinatorike dobra izbira čtiva za vse, ki jih zanima diskretna matematika in bi o njej radi izvedeli kaj več!

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2016
Letnik 63, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Standardni model osnovnih delcev opisuje osnovne gradnike snovi in interakcije med njimi. Razpredelnica na naslovnici kaže osnovne delce standardnega modela: 12 fermionov in 5 bozonov. Kvarki u in d skupaj z elektroni tvorijo to, kar v običajnem svetu razumemo kot snov. Kvarke drži v jedru skupaj sila, ki jo posredujejo gluoni g, elektrone pa v atom vežejo fotoni gama.