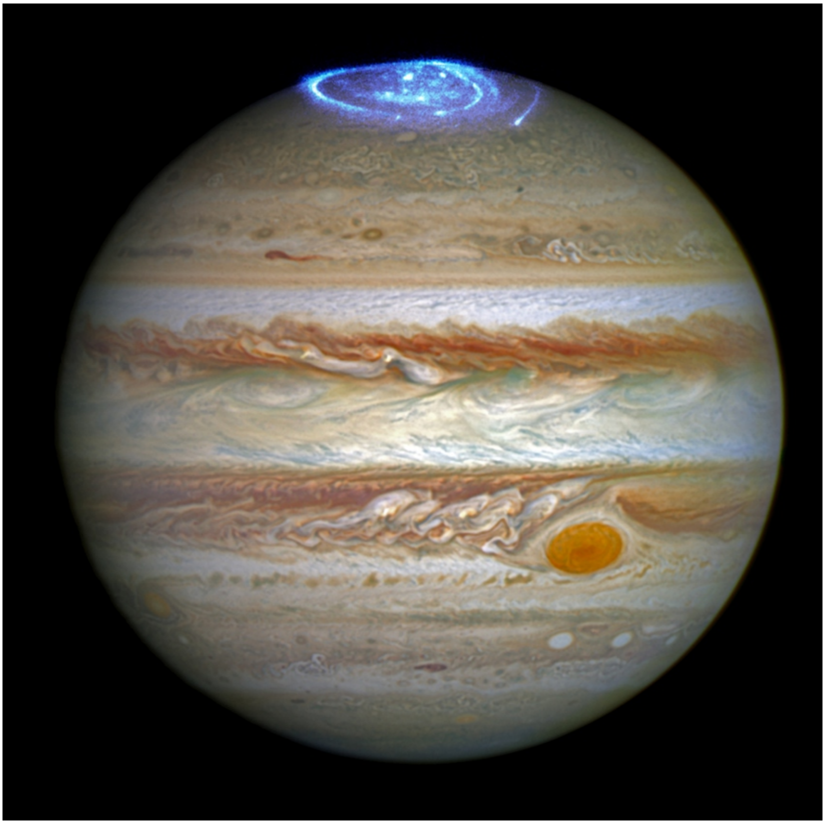
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2018
Letnik 65
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2018, letnik 65, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

OCENJEVANJE PARAMETROV V BAYESOVI STATISTIKI

ALEŠ TOMAN

Ekonomska fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 62F15, 62F10

Čeprav začetki Bayesove statistike segajo v drugo polovico 18. stoletja, je svoj razcvet doživela šele z razvojem računalnikov ob koncu 20. stoletja. V članku bomo na enostavnem zgledu prikazali ključne korake in lastnosti Bayesovega pristopa k ocenjevanju parametrov.

BAYESIAN PARAMETER ESTIMATION

Although the beginnings of Bayesian statistics date back to the second half of the 18$^{\text{th}}$ century, it started to flourish at the end of the 20$^{\text{th}}$ century when computers became widely available. In this paper we go through some basic steps and properties of Bayesian parameter estimation.

Uvod

Statistika je veda, ki razvija in proučuje metode zbiranja podatkov ter njihove analize in predstavitve. Statistiki pri svojem delu lahko le redkokdaj razpolagamo s podatki za celotno populacijo ali poznamo natančne lastnosti opazovanega pojava. Pogosteje imamo na voljo le informacije za nekaj na slepo izbranih enot, ki sestavljajo slučajni vzorec. Osrednja naloga sklepne statistike je opisovanje lastnosti populacije ali pojava na osnovi lastnosti, ki jih opazimo oziroma izmerimo na vzorcu [7].

Obstaja več pristopov k statističnemu sklepanju. Danes je bolj znan **frekventistični pristop**, ki so ga v prvi polovici 20. stoletja utemeljili R. A. Fisher (1890–1962), E. S. Pearson (1895–1980) in J. Neyman (1894–1981). Za ta pristop so značilne cenilke največjega verjetja, intervali zaupanja ter preizkušanje domnev [7].

Manj znan, a vse pomembnejši je **Bayesov pristop**. Za njegov začetek štejemo zapiske T. Bayesa (1702–1761), ki jih je leta 1763 objavil R. Price. V njih je nakazana znamenita Bayesova formula in razprava o tem, kako se ob opazovanju pojavov spreminjajo naša prepričanja [6]. Ob koncu 18. stoletja je P.-S. de Laplace (1749–1827) podrobneje (neodvisno od Bayesa) predstavil, kako Bayesovo formulo uporabimo v različnih statističnih problemih. Med drugim je iz podatkov o rojstvih v pariških porodnišnicah ocenil verjetnost za rojstvo deklice [4]. V nadaljevanju si bomo ogledali podoben primer.

Bayesov pristop je prevladoval v statistiki 19. stoletja. Čeprav je v teoriji omogočal enostavno analizo zapletenih modelov, je bil v praksi zaradi računskih zahtev manj uporaben. Razvoj učinkovitih simulacijskih algoritmov ter široka dostopnost računalnikov ob koncu 20. stoletja pa sta Bayesovemu pristopu vrnila mesto v statistični znanosti.

Bayesova formula

Bayesovo formulo pogosto povezujemo z **dvofaznimi poskusi**, kjer v prvi fazi nastopi natanko eden od dogodkov iz popolnega sistema dogodkov (hipotez) $H_1, \ldots, H_n$ in so od tega, kateri se je pripetil, odvisni pogoji poskusa v drugi fazi, v katerem opazujemo dogodek A [3].

Privzemimo, da poznamo verjetnosti $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ vseh hipotez ter pogojne verjetnosti $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$ dogodka A glede na posamezne hipoteze. **Formula za popolno verjetnost** nam pove, kako izračunati brezpogojno verjetnost dogodka A v drugi fazi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

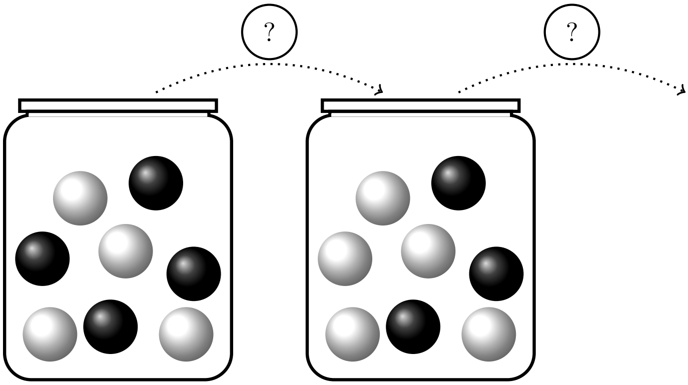
Postavimo si še obratno vprašanje: Če vemo, da se je dogodek A v drugi fazi zgodil, kolikšna je pogojna verjetnost, da se je v prvi fazi zgodila hipoteza H_i? Odgovor nam da **Bayesova formula**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Verjetnosti $P(H_i)$ pravimo apriorna, verjetnosti $P(H_i|A)$ pa aposteriorna verjetnost hipoteze H_i. Opazimo, da imenovalec v Bayesovi formuli ni odvisen od i in je pri vseh hipotezah enak. Potrebujemo ga za to, da se aposteriorne verjetnosti vseh n hipotez seštejejo v 1. Zato v Bayesovi statistiki pogosto zapišemo samo sorazmerje

$$P(H_i|A) \propto P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Zgled 1. V prvem kozarcu so dobro premešane 4 črne in 4 bele kroglice, v drugem pa 3 črne in 5 belih. Iz prvega kozarca na slepo izvlečemo eno kroglico in jo preložimo v drugi kozarec. Tega pretresemo in nato iz njega na slepo izvlečemo eno kroglico. Kolikšne so verjetnosti dogodkov A, da iz prvega kozarca izvlečemo belo kroglico, B, da iz drugega kozarca izvlečemo belo kroglico, in C, da smo iz prvega kozarca izvlekli belo kroglico, če vemo, da smo iz drugega kozarca izvlekli belo kroglico?



Slika 1. Shema dvofaznega poskusa s kroglicami.

Naloga opisuje dvofazni poskus, njegova shema je prikazana na sliki 1. V prvi fazi iz prvega kozarca izvlečemo kroglico in jo preložimo v drugi kozarec. Pri tem sta možni dve hipotezi: H_1, da izvlečemo črno kroglico, in H_2, da izvlečemo belo kroglico. Ker so v prvem kozarcu 4 črne in 4 bele kroglice, sta apriorni verjetnosti hipotez

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

V drugi fazi poskusa izvlečemo kroglico iz drugega kozarca. Možna sta dva dogodka (je črna ali bela); v nalogi nas zanima dogodek B, da izvlečemo belo kroglico. Po formuli za popolno verjetnost izračunamo

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(B|H_1) + P(H_2) \cdot P(B|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{11}{18}.$$

Pri računanju $P(B|H_1)$ smo si pomagali z vsebinsko interpretacijo dogodkov. Če v prvi fazi izvlečemo črno kroglico (pogoj H_1), imamo nato v drugem kozarcu 4 črne in 5 belih kroglic. Verjetnost, da iz njega izvlečemo belo kroglico (dogodek B), je zato $P(B|H_1) = \frac{5}{9}$. Podobno izračunamo še $P(B|H_2) = \frac{6}{9}$.

Z Bayesovo formulo izračunamo še aposteriorni verjetnosti hipotez

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1) \cdot P(B|H_1)}{P(B)} = \frac{(1/2) \cdot (5/9)}{11/18} = \frac{5}{11} < \frac{1}{2},$$

$$P(H_2|B) = \frac{P(H_2) \cdot P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{(1/2) \cdot (6/9)}{11/18} = \frac{6}{11} > \frac{1}{2}.$$

Ob tem opazimo:

- Aposteriorni verjetnosti hipotez se razlikujeta od apriornih. Razlog za razliko je informacija o dogodku, ki se je zgodil v drugi fazi poskusa.
- Razmerje aposteriornih verjetnosti hipotez $(5 : 6)$ je enako razmerju pogojnih verjetnosti dogodka B v drugi fazi. To je posledica enakih apriornih verjetnosti hipotez.

Za končno rešitev zapišimo še verjetnosti dogodkov A in C. Ker je $A = H_2$, je $P(A) = \frac{1}{2}$, in ker je $C = H_2|B$, velja $P(C) = \frac{6}{11}$.

Evrski kovanec in neznani parameter p

Opišimo enostaven statistični problem, na katerem bomo prikazali vse korake Bayesovega pristopa k ocenjevanju neznanih parametrov ter ga na kratko primerjali s frekventističnim pristopom. Zamislimo si stavo z ne nujno poštenim evrskim kovancem. Kovanec bomo vrgli enkrat, dobitek pa prejmemo, če smo pred tem napovedali pravi izid. Na kaj bomo stavili? Splača se staviti na izid, ki je bolj verjeten.

Pri metu kovanca sta možna dva dogodka: dogodek C, da pade cifra, ter dogodek G, da pade grb. Ker drugih možnosti ni, je

$$P(C) + P(G) = 1.$$

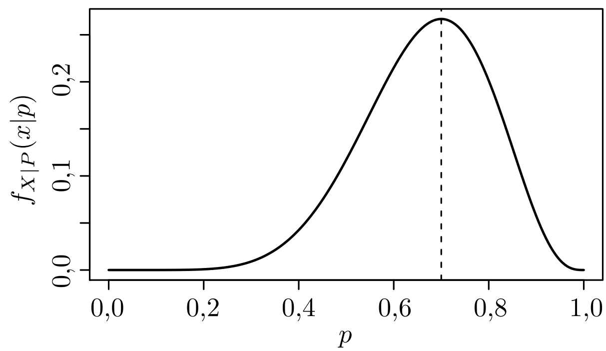
Ker ne vemo, ali je kovanec pošten, označimo $P(C) = p$ ter $P(G) = 1-p$. Število p je neznani populacijski parameter (neznana verjetnost) oziroma lastnost kovanca. Od njega bo odvisna naša stava. Naloga statistike je zanj podati čim boljšo oceno.

Privzemimo, da smemo pred stavo z nekaj meti preizkusiti kovanec. Kovanec smo vrgli $n = 10$-krat in pri tem je cifra padla $x = 7$-krat. Zaporedje 10 črk, med katerimi se 7-krat pojavi C in 3-krat G, je slučajni vzorec, s katerim bomo ocenili neznani parameter p. Pri tem bomo uporabili frekventistični ter Bayesov pristop.

V obeh pristopih je pomembna **funkcija verjetja** $f_{X|P}(x|p)$. Ta podaja verjetnost na danem vzorcu izmerjenih vrednosti (x cifer v n metih) v odvisnosti od neznanega parametra p. V našem primeru je verjetnost, da v 10 metih kovanca opazimo 7 cifer, enaka

$$f_{X|P}(x|p) = \binom{10}{7} p^7 (1-p)^3.$$

To je binomsko verjetje. Graf funkcije verjetja je na sliki 2. V frekventistični statistiki lahko oceno $\hat{p}$ parametra p določimo z metodo največjega verjetja. Ta za $\hat{p}$ izbere tisto vrednost p, pri kateri funkcija verjetja $f_{X|P}(x|p)$ doseže najvišjo vrednost. Zlahka preverimo, da je to pri $\hat{p} = \frac{x}{n} = 0{,}7$. Vrednost prikazuje črtkana navpičnica na grafu na sliki 2.



Slika 2. Graf funkcije verjetja.

Dobljena **točkovna ocena** parametra p je korektna, a je navedba zgolj točkovne ocene lahko zavajajoča. Če bi pri samo enem izmed metov kovanca opazili drugačen izid, bi se naša ocena parametra p spremenila za 0,1. Več informacij (natančnost naše ocene) o neznanem parametru p predstavimo z **intervalom zaupanja**. Konstrukcij intervalov zaupanja za neznano verjetnost je več. Tu bomo uporabili le dve, ki ju zaradi njunih lastnosti najpogosteje priporočajo za uporabo v praksi [1, 2]. Wilsonov[1] 95 % interval zaupanja za p je [0,397; 0,892], Clopper-Pearsonov[2] 95 % interval zaupanja pa [0,348; 0,933].

Bayesov pristop

Bayesova statistika neznane parametre obravnava kot (zvezne) slučajne spremenljivke, naše védenje o njihovih vrednostih pa opiše s porazdelitvami, najlažje z gostoto verjetnosti te slučajne spremenljivke. Bayesov pristop k ocenjevanju parametrov idejno sledi Bayesovi formuli. Najprej privzamemo neko **apriorno gostoto verjetnosti** $f_P(p)$ za neznani parameter p in izračunamo verjetje $f_{X|P}(x|p)$ na danem vzorcu izmerjenih vrednosti v odvisnosti od parametra p. Pri tem lahko apriorno gostoto verjetnosti izberemo na osnovi preteklih analiz ali splošnih dognanj. Nato določimo **aposteriorno**

[1] Wilsonov $100(1-\alpha)\,\%$ interval zaupanja omejujeta vrednosti $\frac{x+z^2/2}{n+z^2} \pm \frac{z\sqrt{n}}{n+z^2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})+\frac{z^2}{4n}}$, kjer z označuje $(1-\alpha/2)$-kvantil standardne normalne porazdelitve.

[2] Spodnja meja Clopper-Pearsonovega $100(1-\alpha)\,\%$ intervala zaupanja je $\alpha/2$-kvantil porazdelitve $\mathrm{Beta}(x, n-x+1)$, zgornja meja pa $(1-\alpha/2)$-kvantil porazdelitve $\mathrm{Beta}(x+1, n-x)$.

gostoto verjetnosti $f_{P|X}(p|x)$ parametra p po Bayesovi formuli

$$f_{P|X}(p|x) = \frac{f_P(p) \cdot f_{X|P}(x|p)}{f_X(x)}.$$

Imenovalec $f_X(x)$ predstavlja robno (brezpogojno) porazdelitev vzorčnih vrednosti in ni odvisen od p, zagotovi pa, da je integral aposteriorne gostote verjetnosti enak 1. Poenostavljeno lahko zapišemo samo sorazmerje

$$f_{P|X}(p|x) \propto f_P(p) \cdot f_{X|P}(x|p)$$

in nato določimo ustrezno normirno konstanto. Aposteriorna gostota verjetnosti predstavlja naše védenje o neznanem parametru p, potem ko smo združili naše apriorno znanje in informacije iz podatkov.

Vrnimo se k našemu kovancu. Funkcijo verjetja smo že spoznali. Ker bomo normirno konstanto v aposteriorni gostoti verjetnosti določili na koncu, zapišemo samo funkcijski del funkcije verjetja

$$f_{X|P}(x|p) \propto p^7(1-p)^3.$$

Izbrati moramo še apriorno porazdelitev parametra p. Jasno je, da p leži med 0 in 1, zato je smiselna izbira gostote verjetnosti iz družine porazdelitev beta [4]. Ta ima dva parametra, označimo ju z α in β. Oglejmo si njene lastnosti. Naj bo $p \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$. Gostota verjetnosti spremenljivke p je tedaj

$$f_P(p) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \text{ za } p \in [0,1],$$

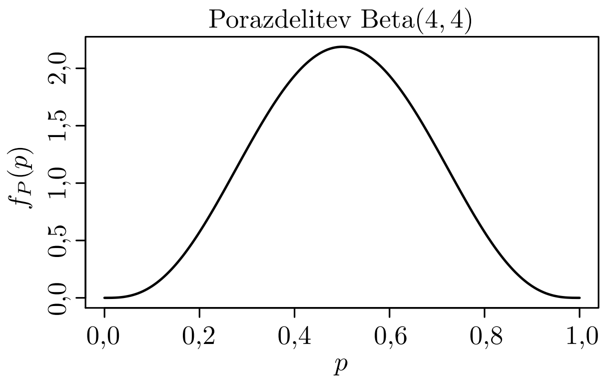
upanje $E(p) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ter varianca $\mathrm{var}(p) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$. Tu smo z $B(\alpha,\beta)$ označili vrednost funkcije beta. Tudi pri apriorni porazdelitvi lahko ohranimo samo njen funkcijski del, zato zapišemo

$$f_P(p) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}.$$

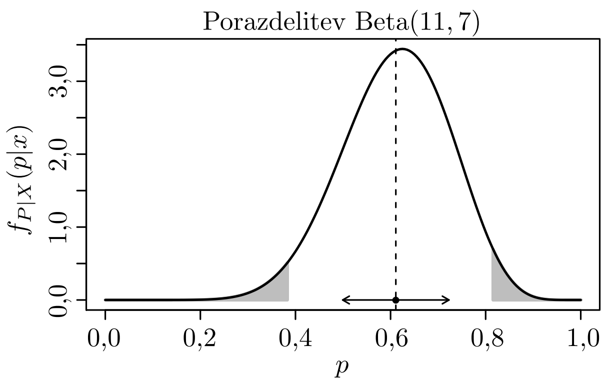
Določiti moramo še parametra α in β; parametrom apriorne porazdelitve pravimo **hiperparametri**. Privzemimo, da iz izkušenj vemo, da naj bi bil kovanec pošten, zato α in β določimo tako, da bo $E(p) = \frac{1}{2}$. Torej mora biti $\alpha = \beta$. Varianca je tedaj enaka $\mathrm{var}(p) = \frac{1}{4(2\alpha+1)}$, standardni odklon pa $\sigma(p) = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha+1}}$. Z njim povemo, kako prepričani smo v poštenost kovanca. Zaradi enostavnosti izberimo $\alpha = 4$, kjer dobimo $\sigma(p) = \frac{1}{6}$. Graf apriorne gostote verjetnosti parametra p je na sliki 3.

Z uporabo Bayesove formule ugotovimo, da je aposteriorna gostota verjetnosti parametra p sorazmerna

$$f_{P|X}(p|x) \propto \underbrace{p^{4-1}(1-p)^{4-1}}_{\text{apriorna}} \cdot \underbrace{p^7(1-p)^3}_{\text{verjetje}} = p^{10}(1-p)^6.$$



Slika 3. Apriorna gostota verjetnosti parametra p.



Slika 4. Aposteriorna gostota verjetnosti parametra p.

V zadnjem izrazu prepoznamo obliko gostote porazdelite beta, zato velja

$$p|x \sim \text{Beta}(11, 7) = \text{Beta}(\alpha', \beta').$$

Graf njene gostote verjetnosti je na sliki 4. Za točkovno oceno parametra najpogosteje izberemo matematično upanje aposteriorne gostote verjetnosti; to znaša $\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} = 0{,}611$ in ga prikazuje črtkana navpičnica na grafu na sliki 4. Natančnost točkovne ocene lahko podamo s standardnim odklonom aposteriorne gostote; ta je $\sqrt{\frac{\alpha'\beta'}{(\alpha'+\beta')^2(\alpha'+\beta'+1)}} = 0{,}012$ in ga prikazujeta vodoravni puščici na grafu; še pogosteje pa s **centralnim intervalom** aposteriorne gostote verjetnosti. 95 % centralni interval dobimo tako, da na levem in desnem repu porazdelitve odrežemo po 2,5 % verjetnosti [4]. Ustrezna repa sta na grafu označena s sivo, med njima (med kvantiloma) pa nam ostane intervalna ocena [0,383; 0,816].

Lastnosti Bayesovega pristopa

Konjugirane apriorne porazdelitve. V primeru s kovancem smo opazili, kako prikladna je bila izbira apriorne gostote verjetnosti iz družine porazdelitev beta. Tudi aposteriorna porazdelitev je pripadala isti družini porazdelitev. Temu rečemo, da je družina porazdelitev beta konjugirana k binomski funkciji verjetja. Normirne konstante v aposteriorni gostoti verjetnosti sploh nismo eksplicitno zapisali, upanje in standardni odklon te porazdelitve pa smo določili brez uporabe računalnika.

Pri izbiri drugačne apriorne porazdelitve analiza ne bi bila več tako enostavna. Ker moramo integrirati funkcijo $f_P(p) \cdot f_{X|P}(x|p)$, lahko račun analitično sploh ni mogoč. To nas privede do uporabe računalniških simulacij in pojasni, zakaj je Bayesova statistika svoj razcvet doživela šele dve stoletji po svojem nastanku.

Aposteriorna porazdelitev je kompromis med apriorno porazdelitvijo in informacijami iz podatkov. Pri apriorni gostoti verjetnosti $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ in na vzorcu opaženih 7 cifrah in 3 grbih, je aposteriorna gostota verjetnosti oblike

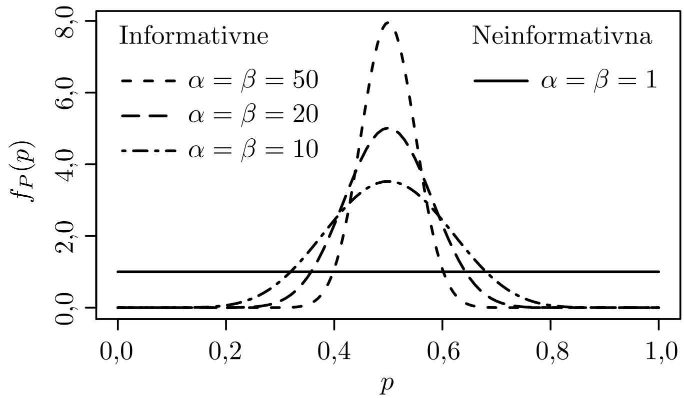
$$f(p|x) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \cdot p^7(1-p)^3.$$

Pri majhnih α in β imata v aposteriorni porazdelitvi vodilno vlogo vrednosti 7 in 3 iz vzorca, pri velikih α in β pa ima vodilno vlogo apriorna porazdelitev neznanega parametra. V Bayesovi statistiki so aposteriorne porazdelitve vselej kompromis med apriornimi porazdelitvami in podatki. Pri tem z rastočo velikostjo vzorca čedalje večji pomen pridobivajo podatki.

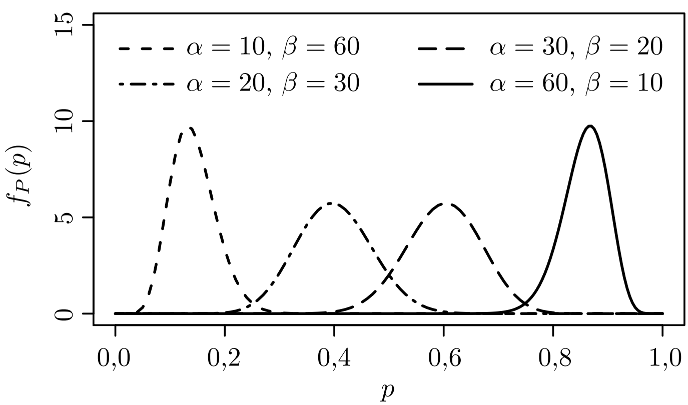
Bayesova statistika je subjektivna. Z izbiro hiperparametrov v Bayesovo analizo vnesemo naše apriorno znanje o proučevanem pojavu, kar je vsekakor lahko subjektivno, ni pa nujno. Če smo v preteklosti že analizirali drug evrski kovanec in ugotovili, da je bil pošten, lahko podobno pričakujemo tudi od kovanca, ki ga proučujemo sedaj, in to izrazimo z izbiro hiperparametrov apriorne porazdelitve. Kadar vsebinsko podobnih raziskav ne poznamo, lahko uporabimo neinformativne apriorne porazdelitve. Statistično analizo lahko ponovimo z različnimi apriornimi porazdelitvami in tako natančno analiziramo njihov vpliv na končne rezultate [4].

Informativne in neinformativne apriorne porazdelitve

Da bi zmanjšali očitke subjektivnosti, so v Bayesovi statistiki vpeljali **neinformativne** apriorne porazdelitve. Vrnimo se k družini porazdelitev beta. Z različnimi izbirami hiperparametrov α in β lahko opišemo zelo različna apriorna znanja. Simetrične porazdelitve dobimo pri izbiri $\alpha = \beta$. Grafe gostot verjetnosti pri različnih parametrih prikazuje slika 5. Opazimo, da pri



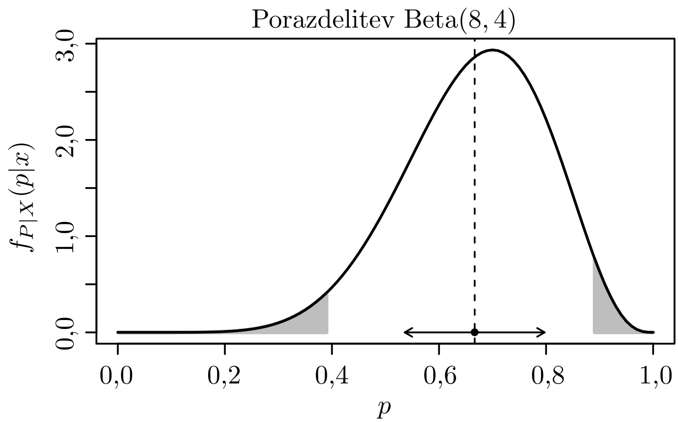
Slika 5. Družina simetričnih porazdelitev beta.



Slika 6. Družina nesimetričnih porazdelitev beta.

izbiri $\alpha = \beta = 1$ dobimo zvezno enakomerno porazdelitev na intervalu $[0, 1]$. Uporaba te porazdelitve pomeni, da nimamo nikakršnih apriornih znanj o možnih vrednostih parametra p. Taka porazdelitev je neinformativna.

Če sta parametra α in β različna, porazdelitve beta postanejo nesimetrične. S takšno izbiro hiperparametrov lahko izrazimo apriorno znanje, da kovanec ni pošten. Grafe gostot verjetnosti pri različnih parametrih prikazuje slika 6.



Slika 7. Aposteriorna gostota verjetnosti parametra p pri neinformativni apriorni porazdelitvi.

Analiza kovanca z neinformativno apriorno porazdelitvijo

Če je apriorna porazdelitev zvezno enakomerna na intervalu $[0, 1]$ oziroma Beta$(1, 1)$, je aposteriorna gostota verjetnosti

$$f_{P|X}(p|x) \propto \underbrace{f_P(p)}_{=1} \cdot f_{X|P}(x|p) = f_{X|P}(x|p)$$

sorazmerna funkciji verjetja [7]. V našem primeru dobimo $p|x \sim$ Beta$(8, 4)$. Njeno upanje je 0,667, standardni odklon 0,131 in 95 % centralni interval aposteriorne verjetnosti [0,390; 0,891]. Njen graf je prikazan na sliki 7.

Bayes in Laplace sta v svojih delih uporabila neinformativne apriorne porazdelitve. Laplace jo je utemeljil s **principom nezadostnega razloga**. Ta pravi, da moramo, kadar odločamo v popolni negotovosti, vse možne vrednosti neznanega parametra obravnavati kot enako verjetne [4].

Posodabljanje ocen v Bayesovem pristopu

Denimo, da smo isti evrski kovanec vrgli še 5-krat ter pri tem dobili 2 cifri in 3 grbe. Skupaj smo torej v 15 metih dobili 9 cifer in 6 grbov. Oglejmo si, kako v statistično analizo vključimo dodatne podatke. Naša informativna apriorna porazdelitev je bila Beta$(4, 4)$. Z upoštevanjem 7 cifer in 3 grbov v desetih metih smo v prejšnjih razdelkih prišli do aposteriorne porazdelitve Beta$(4 + 7, 4 + 3) =$ Beta$(11, 7)$. Podobno lahko sklepamo z razširjenimi podatki (skupaj 15 metov) in dobimo aposteriorno porazdelitev Beta$(4 + 9, 4 + 6) =$ Beta$(13, 10)$.

Obstaja še druga pot. Namesto da analizo začnemo od začetka in združimo stare in nove podatke, lahko nove podatke le dodamo zaključkom stare analize. Pri tem aposteriorno porazdelitev $\mathrm{Beta}(11, 7)$ na osnovi začetnega vzorca uporabimo kot apriorno porazdelitev pri analizi dodatnih podatkov. Ko upoštevamo 2 cifri in 3 grbe, pridemo do iste končne aposteriorne porazdelitve $\mathrm{Beta}(11+2, 7+3) = \mathrm{Beta}(13, 10)$. Zaradi enostavnega dodajanja novih podatkov v že obstoječo analizo je Bayesova statistika uporabna v aplikacijah, za katere je značilen avtomatski zajem podatkov.

Sklepne misli

V članku smo predstavili glavne korake Bayesovega pristopa k ocenjevanju neznanih parametrov. Obravnavali smo neinformativne in informativne apriorne porazdelitve, s katerimi lahko v statistično analizo vključimo naše predhodno (ne)védenje o neznanem parametru. Na vzorcu zbrane informacije predstavlja funkcija verjetja, ki ima pomembno vlogo tudi v frekventistični statistiki. Z Bayesovo formulo nato predhodno znanje in vzorčne informacije združimo v aposteriorno porazdelitev, ki opisuje naše védenje o neznanem parametru po končani raziskavi. Tega najpogosteje povzamemo z matematičnim upanjem in centralnim intervalom aposteriorne verjetnosti. Postopek smo si ogledali na primeru ocenjevanja neznane verjetnosti. Izbira primernih apriornih porazdelitev je v praksi težka naloga in zahteva sodelovanje med statistiki in drugimi znanstveniki. Pravi potencial Bayesovega pristopa zato lahko izkoristimo le z interdisciplinarnim sodelovanjem.

LITERATURA

[1] A. Agresti in B. A. Coull, *Approximate is better than »exact« for interval estimation of binomial proportions*, The American Statistician **52** (1998), 119–126.

[2] L. D. Brown, T. T. Cai in A. DasGupta, *Interval estimation for a binomial proportion*, Statistical Science **16** (2001), 101–133.

[3] J. A. Čibej, *Matematika. Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika*, DZS, Ljubljana, 1994.

[4] A. B. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern in D. B. Rubin, *Bayesian data analysis*, 2. izdaja, Chapman & Hall/CRC, 2004.

[5] H. Hoijtink, *Bayesian data analysis*, v: *The SAGE handbook of quantitative methods in psychology* (R. E. Millsap in A. Maydeu-Olivares), The SAGE, 2009.

[6] S. B. McGrayne, *The theory that would not die*, Yale University Press, New Haven & London, 2011.

[7] J. A. Rice, *Mathematical statistics and data analysis*, 3. izdaja, Thomson Brooks/Cole, 2007.

POLARNI SIJ IN ZEMLJINO MAGNETNO POLJE

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Odsek za fiziko trdne snovi, Institut Jožef Stefan, Ljubljana

PACS: 92.60.hw, 94.20.Ac, 94.30.Aa

Polarni sij je pojav interakcije Sončevega vetra in Zemljine magnetosfere. Nastane, ko delci Sončevega vetra zaidejo v termosfero in vzbujajo zračne molekule. Opisane so lastnosti polarnega sija in mehanizem nastanka.

AURORA AND EARTH'S MAGNETIC FIELD

Aurora is caused by interaction of solar wind and Earth's magnetosphere. It forms when particles of the solar wind enter the thermosphere and excite air molecules. The properties of aurora and its mechanism are described in the article.

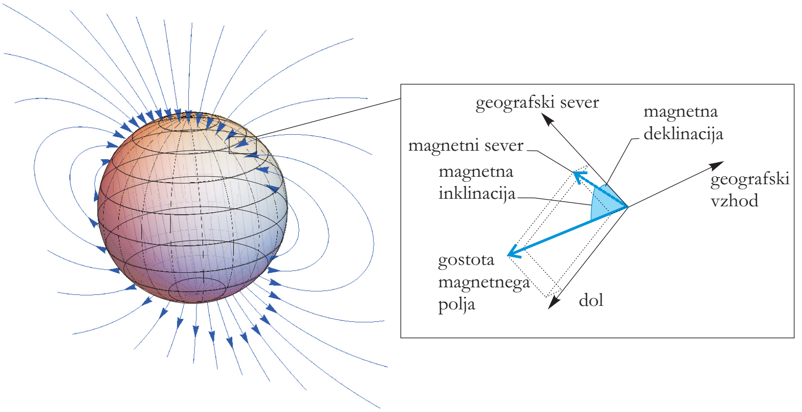
Uvod

Polarni sij, na severni polobli imenovan Aurora Borealis na južni pa Aurora Australis, je svetlobna zavesa, ki se občasno pojavi na nebu. Ima značilne barve, pogosto zeleno zaradi značilnih atomskih prehodov kisika, včasih se obarva tudi rdeče, in se s časom spreminja. Vidnost je geografsko omejena na skrajna poseljena območja (Aljaska, Kanada, Islandija, Norveška). Občasno pa ga je mogoče zaznati tudi bližje ekvatorju, predvsem na dolgo osvetljenih fotografijah svetlobno neonesnaženega neba. Najpogosteje se pojavlja v obdobju povečane Sončeve aktivnosti, seveda pa je viden le v dolgih temnih nočeh. Sij povzročajo delci Sončevega vetra, ki v Zemljinem magnetnem polju zavijejo proti polom in na poti s trki vzbujajo molekule v ozračju.

Avroro ljudje poznajo že iz davnine in so jo zaradi rdečega sija imeli za znanilko vojn in težav. Pojav je z Zemljinim magnetizmom prvi povezal A. Celsius. Kot vsak optični pojav v atmosferi jo je težko opazovati v kontroliranih razmerah. Višino plasti, iz katerih izvira sij, je prvi določil J. Dalton s tem, da je uporabil triangulacijo pri primerjavi opazovanj sija več opazovalcev na različnih mestih. A. J. Ångström je prvi izmeril svetlobni spekter avrore in pokazal, da ni posledica sipanja sončne svetlobe na ledenih kristalih v atmosferi. Seveda je pri raziskavah prihajalo tudi do zmot, tako je npr. J. B. Biot mislil, da povzročajo avroro delci, ki jih izbruhajo ognjeniki.

Zemljino magnetno polje

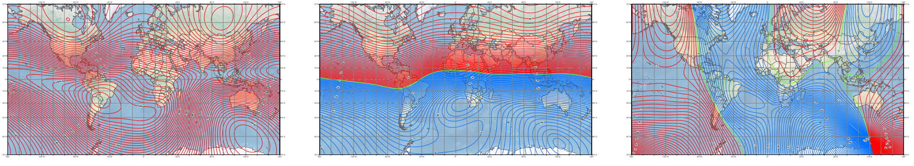
Zemljino magnetno polje izvira iz njene notranjosti in se razteza daleč v prostor. Največ izkušenj imamo seveda z bližnjim poljem, s poljem ob površju



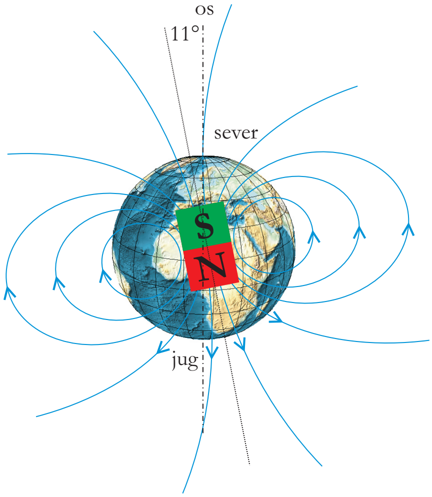
Slika 1. Komponente Zemljinega magnetnega polja.

Zemlje. Silnice polja tečejo ob ekvatorju približno vzporedno s površjem v smeri od juga proti severu, navpična komponenta pa je tem večja, čim bližje pola smo. To lastnost magnetnega polja že dolgo izkoriščamo pri navigaciji. Namagnetena igla, prosto vrtljivo vpeta v težišču, se usmeri vzdolž silnice magnetnega polja in kaže, kje je sever. V magnetnem polu na severni polobli je gostota magnetnega polja usmerjena navpično navzdol, na južni pa navzgor. Magnetno polje na površini Zemlje opišemo s tremi podatki: z velikostjo gostote magnetnega polja, z odklonom silnice od smeri jug-sever (magnetna deklinacija) in odklonom od vodoravne ravnine (magnetna inklinacija), kakor kaže slika 1.

Lastnosti magnetnega polja na Zemljini površini se najbolj spreminjajo z geografsko širino. Poleg geografske lege na polje vpliva tudi sestava tal,



Slika 2. Lastnosti Zemljinega magnetnega polja na Zemljinem površju: velikost gostote (levo, interval med krivuljami 1000 nT), magnetna inklinacija (sredina, interval med krivuljami 2°, rdeče – pozitivno (dol); modro – negativno (gor); zeleno – nič) in magnetna deklinacija (desno, interval med krivuljami 2°, rdeče – pozitivno (vzhod); modro – negativno (zahod); zeleno – nič). Vir: NOAA/NGDC & CIRES, `ngdc.noaa.gov/geomag/WMM`, pregled NGA in BGS, objavljeno december 2014.

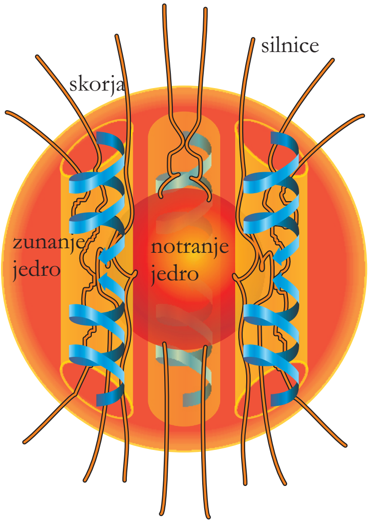


Slika 3. Magnetno polje Zemlje je podobno polju paličastega magneta. Ker silnice vstopajo v Zemljo blizu severnega geografskega pola, to pomeni, da je tam južni pol tega magneta. Magnetni dipol je usmerjen približno nasprotno vzporedno vrtilni osi Zemlje.

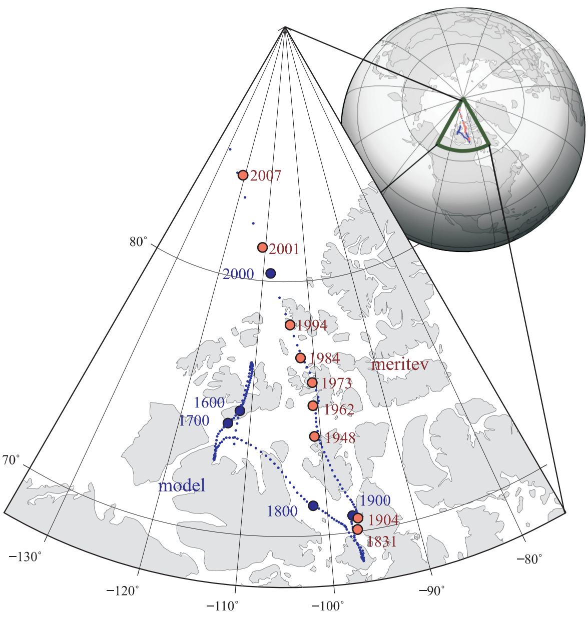
spreminjajo pa ga tudi drugi vplivi npr. Sončev veter in procesi v Zemljini notranjosti. Velikost gostote magnetnega polja je med 25 mikrotesla blizu ekvatorja in 65 mikrotesla blizu pola. Tri glavne značilnosti magnetnega polja na Zemljinem površju kaže slika 2.

Zemljino magnetno polje je približno takšno, kot da bi v njenem središču tičal dipolni magnet z dipolnim momentom $8 \cdot 10^{22}$ Am^2 in osjo nagnjeno pod kotom 11° glede na geografsko os (slika 3). Severni pol magnetnega dipola leži bliže južnega geografskega pola. Magnetno polje ustvarja v magnetohidrodinamskem dinamu inducirani električni tok, ki ga poganjajo tokovi staljenih zlitin železa na robu Zemljine sredice, kakor demonstrira slika 4.

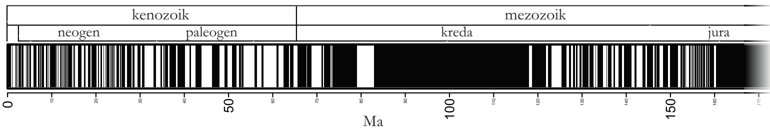
Zemljino magnetno polje se s časom spreminja, kar je verjetno posledica kompleksnega sodelovanja masnega in električnega toka v magnetohidrodinamskem dinamu Zemlje. Spremembe polja na krajši časovni skali povzroča tudi Sončev veter. Spreminjanje magnetnega polja lahko opazujemo lokalno po spreminjanju velikosti, inklinacije in deklinacije. Počasnejše spremembe polja preprosto opazimo po potovanju lege severnega magnetnega pola po Zemljinem površju. Severni magnetni pol je območje, proti kateremu kažejo magnetni kompasi. Magnetni pol ni na istem mestu kot severni geografski pol. Geografski pol je točka, ki jo na površju prebada vrtilna os Zemlje. Magnetni pol se premika po površju in je v zadnjih nekaj stoletjih prepotoval razdaljo, ki ustreza velikosti Grenlandije, kakor kaže slika 5. Premika se dovolj počasi, da so kompasi še vedno uporabni za navigacijo.



Slika 4. Model tokov magme v sredici Zemlje, ki povzročajo Zemljino magnetno polje.



Slika 5. Zemljino magnetno polje se s časom spreminja in zato se magnetni pol seli po površju. Krivulja kaže lego severnega magnetnega pola v zadnjih stoletjih.

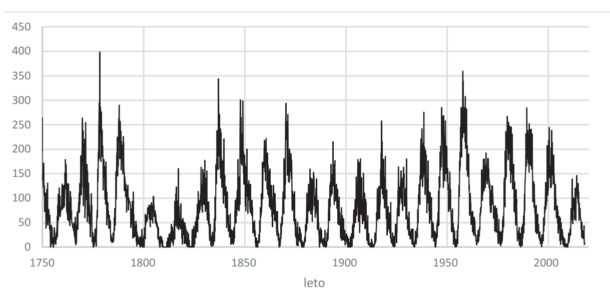


Slika 6. Smer magnetnega polja (proti geografskemu severu ali proti jugu) v Zemljini geološki zgodovini. Prikaz temelji na raziskavah orientacije magnetizacije kamnin, ki se strjujejo ob razpokah, kjer tektonske plošče lezejo narazen. Čas je označen v milijonih let (Ma).

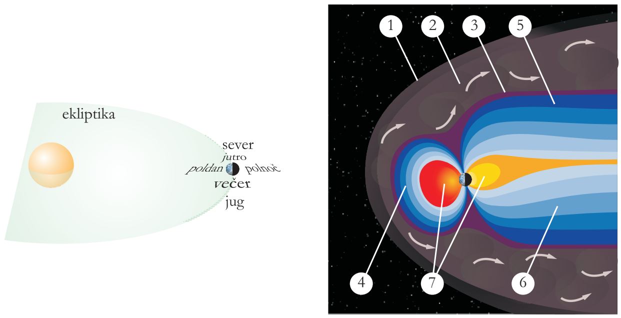
V prejšnjem odstavku je bilo govora o potovanju pola, kakor je bilo dejansko izmerjeno. Kaj pa lahko sklepamo o usmerjenosti magnetnega polja skozi zemeljsko zgodovino? V naključnih časovnih razmikih, ki so v povprečju dolgi več sto tisoč let, se magnetno polje popolnoma obrne (slika 6), tako da kaže v drugo smer. Če polje kaže danes proti severu, je prej kazalo proti jugu. Ta pojav opazimo na kamninah, ki nastajajo ob robovih razmikajočih se tektonskih plošč. Magnetni delci se v staljeni kamnini usmerijo v smeri silnic magnetnega polja. Ko se kamnina ohladi in strdi, ostane namagnetena v smeri gostote Zemljinega magnetnega polja iz časa svojega nastanka.

Sončev veter in magnetosfera

Zemljino magnetno polje interagira s Sončevim vetrom – tokom nabitih delcev s Sonca. Ti delci imajo visoko energijo in hitrosti v povprečju 400 km/s. Na leto odda Sonce v Osončje okoli milijon ton snovi. Sončev veter je električno nevtralen, a vsebuje nabite delce: približno enako število elektronov in ionov, v glavnem protonov. Številska gostota delcev blizu Zemlje je nekaj



Slika 7. Wolfovo število za zadnji dve stoletji in pol. Pege so različnih velikosti in se pojavljajo v gručah, zato število peg pravzaprav ni dobro definirana količina in Wolfovo število je indikator za povprečno število peg (povzeto po `www.sidc.be/silso/datafiles`).



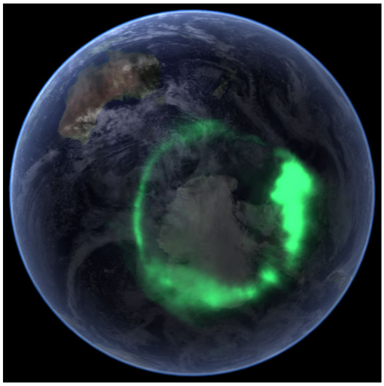
Slika 8. Levo: smeri okoli Zemlje glede na lego Sonca. Desno: daljno Zemljino magnetno polje – magnetosfera in njegova značilna območja: 1. udarni val, 2. magnetni ščit, 3. magnetopavza, 4. magnetosfera, 5. severna in 6. južna polovica magnetnega repa, 7. plazmosfera. Magnetno polje je na poldnevni strani stisnjeno proti Zemlji, na polnočni strani se raztegne v magnetni rep.

delcev na kubični centimeter. Številska gostota se znatno spreminja z aktivnostjo Sonca. Aktivnost Sonca lahko spremljamo po številu Sončevih peg. Število se s časom spreminja, kakor kaže slika 7. Že na prvi pogled je zelo očiten 11-letni cikel. Kadar je aktivnost Sonca zelo velika, lahko polarni sij opazujemo tudi pri zmernih geografskih širinah.

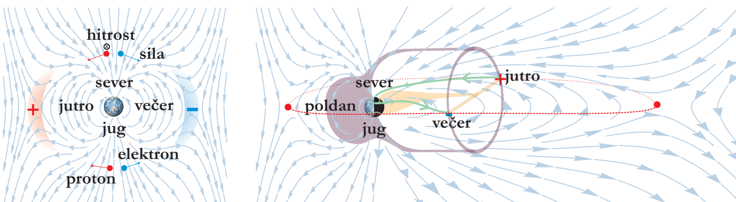
Delci na poti od Sonca naletijo na Zemljino magnetno polje približno na razdalji deset Zemljinih polmerov od središča Zemlje. Tam je gostota energije Zemljinega magnetnega polja približno enaka gostoti energije Sončevega vetra. Magnetno polje se zaradi vpliva Sončevega vetra nenehno spreminja. Zaradi učinka magnetnega polja pride do Zemlje le približno tisočina energije Sončevega vetra.

Magnetno polje Zemlje imenujemo magnetosfera in ga delimo na več območij, ki jih kaže slika 8. Magnetosfero od Sončevega vetra deli ozka mejna plast – magnetopavza. Območje nad magnetopavzo je udarni val, ker je tam hitrost Sončevega vetra večja od hitrosti zvoka in se Sončev veter zgosti ter odteče ob magnetopavzi naprej, podobno kot udarni val pred premcem ladje. V udarni fronti se delci upočasnijo in plazma se segreje. Magnetosfera ni okrogla. Na strani obrnjeni proti Soncu je sploščena, na nasprotni strani pa se raztegne v magnetni rep.

V vesolju sega proti Soncu le manjši del silnic Zemljinega magnetnega polja, na nočni strani pa jih Sončev veter ukrivi stran od Sonca. Silnice blizu ekvatorja se na poldnevni strani zaključijo same vase že blizu Zemlje. Nabiti delci Sončevega vetra se ujamejo v vijačnico okoli silnic, zaradi opisanega poteka magnetnega polja pa vodijo te vijačnice do Zemljine atmosfere le na omejenem območju. Zato je tudi polarni sij geografsko omejen na relativno ozek pas okoli polov. Tak pas je prikazan na satelitski sliki 9.



Slika 9. Satelitska slika južnega pola je sestavljena iz dveh slik, prve v vidnem in druge v ultravijoličnem delu spektra. Slika v ultravijoličnem delu spektra, ki jo je posnel NASIN satelit IMAGE, je tu predstavljena v zeleni barvi. Vir: NASA.



Slika 10. Skupno magnetno polje Sonca in Zemlje odklanja delce Sončevega vetra v magnetni rep na polnočni strani Zemlje tako, da se med jutranjo in večerno stranjo vzpostavi napetost kot pri magnetohidrodinamičnem generatorju (levo, pogled iz poldnevne strani). Ta napetost pospeši delce v plazmi proti območju v bližini Zemljinih polov. Z rdečima točkama sta označeni presečišči ravnine slike z elipso (črtkano), ki leži v ekliptiki in na kateri je skupna gostota magnetnega polja Sonca in Zemlje enaka nič. Silnice, ki izvirajo blizu te elipse, vodijo delce Sončevega vetra proti območjem s sijem.

Silnice Sončevega magnetnega polja prebadajo ekliptiko v smeri od severa proti jugu in magnetni polji Zemlje in Sonca se seštejeta. Nekatere silnice Zemljinega magnetnega polja so sklopljene s Sončevim poljem, kakor kaže slika 10. V skupnem polju se plazma sončevega vetra odklanja. Na severnem delu se elektroni odklonijo v smeri urnega kazalca proti večernemu delu Zemlje (relativne smeri so opisane na sliki 8, levo), protoni pa v nasprotni smeri, proti jutranjemu delu, kakor kaže slika 10. Pojav generira napetost na tak način kot magnetohidrodinamični generator in deluje z električno močjo 10^{12} W. Električna napetost 50 kV požene skozi plazmosfero električne tokove velike $2 \cdot 10^7$ A. Manjši del, kaka desetina tega toka, se sklene skozi atmosfero na polarnem delu in teče vzdolž silnic, ki so posebej označene na sliki 10 desno. Ta tok imenujemo tudi Birkelandov tok. Električni tok teče proti Zemlji na jutranjem delu, na večernem pa teče od Zemlje stran. To pomeni, da na večernem delu elektroni padajo proti Zemlji in se v električnem polju pospešijo do energij 10 keV. Na višinah 100 km povzročajo avroro. Večinoma vzbujajo kisik, ki seva belkasto zeleno svetlobo z valovno dolžino 557,7 nm. Mehanizem nastanka polarnega sija pa še ni popolnoma pojasnjen in znan.

Barve polarnega sija so značilne za višino, na kateri sij nastane. Vidni del spektra barv kaže slika 11. V spektru prevladujejo zelena, vijolična in rdeča. Katere valovne dolžine sestavljajo spekter, je odvisno od plinov, ki sestavljajo ozračje. Le manjši del svetlobe se sprošča neposredno zaradi trkov z delci Sončevega vetra. Največkrat so vzbujene molekule ali atomi, ki nato sevajo, produkti kemijskih reakcij, ki jih vzbudijo ali na katere vplivajo delci Sončevega vetra. Najpogosteje opažena zelena svetloba je posledica reakcije:

$$\mathrm{N^+ + O_2 \rightarrow NO^+ + O(^1S)}.$$

Kisik, ki nastane pri tej reakciji, je v vzbujenem stanju in med relaksacijo

$$\mathrm{O(^1S) \rightarrow O(^1D)} + \gamma$$

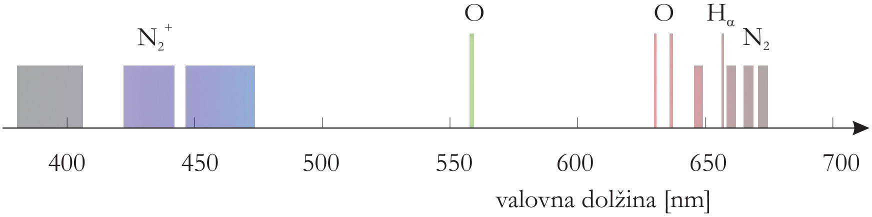
odda foton z valovno dolžino 555,7 nm. Ko se ta kisik vrne v osnovno stanje s procesom

$$\mathrm{O(^1D) \rightarrow O(^3P)} + \gamma,$$

odda še značilno rdečo svetlobo z valovno dolžino 630 nm. Dušik vzbudijo vpadni elektroni Sončevega vetra, reakcijo opiše

$$\mathrm{N_2} + e \rightarrow \mathrm{N_2^+}(\mathrm{B}^2 \sum_u^+) + e + e_{\mathrm{sekundarni}}.$$

Po trku ostane dušikova molekula v vzbujenem vibracijskem stanju, ki lahko prehaja v druga vibracijska stanja, kar vzbudi fotone s trakastim modro-



Slika 11. Vidni spekter svetlobe polarnega sija. Izrazite so zelena, vijolična in rdeča. Trakaste spektre vibracijskih stanj dušika predstavljajo širši pasovi, kisik in vodik pa prispevata spektralne črte.

Slika 12. Rdeči in zeleni polarni sij nad Fairbanksom na Aljaski. Vir: Wikipedia.

vijoličnim spektrom. Emisijski spekter nevtralne dušikove molekule obsega ultravijoličen in rdeč interval valovnih dolžin.

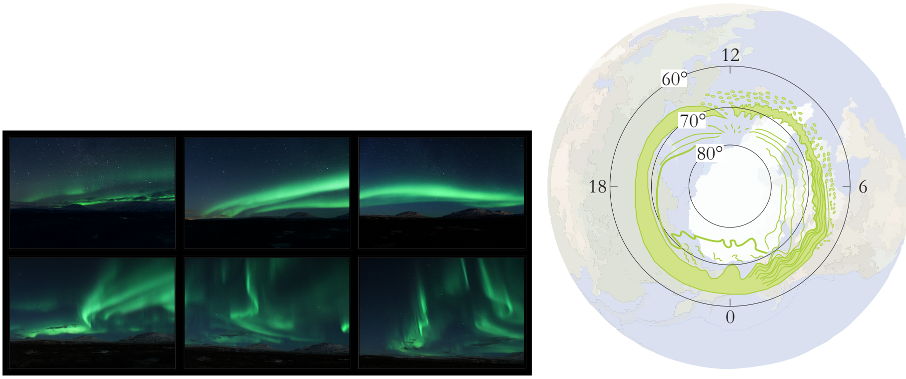
Zelena spektralna črta in rdeči dublet ustrezata relaksaciji kisika z relativno dolgim relaksacijskim časom – od 1 s do 110 s. Pri normalnem tlaku blizu Zemljinega površja taka vzbujena stanja hitro relaksirajo s trki z drugimi atomi in molekulami, saj je povprečna prosta pot in s tem čas med zaporednimi trki relativno kratek. Na višini nad 100 km pa je ozračje milijonkrat redkejše in taka vzbujena stanja lahko relaksirajo z izsevanjem svetlobe. Značilno rdečo in zeleno barvo polarnega sija kaže slika 12.

Do sedaj smo opisali strukture in barve sija, ki jih povzročajo elektroni. Protoni se v višjih plasteh ozračja s trki z molekulami plina M (npr. O_2 ali N_2) pretvorijo v vzbujen vodik $M + p \rightarrow M^+ + H^*$.

Vzbujeni vodik nato kaskadno relaksira proti osnovnemu stanju, pri čemer seva npr. L_α (ultravijolična svetloba z valovno dolžino 121,57 nm) in H_α (rdeča, 656,3 nm). Ta sij je na splošno difuzen. Te rdeče svetlobe z očmi ne moremo razločiti od svetlobe, ki jo oddaja kisik.

Polarni sij je dinamičen pojav in sčasoma spreminja obliko. Sončev veter ni stalen in hkrati tok nabitih delcev spreminja Zemljino magnetno polje. Polarni sij je lahko difuzen, pri njem svetlobo opazimo na večjem območju in območje nima izrazite oblike, ali diskreten. Pri diskretnem prepoznamo različne oblike, kot so loki, trakovi, zavese, stebri in otočki (slika 13 levo). Prevladujoča oblika je značilna za geografsko širino in del dneva, v katerem sij opazujemo, kakor kaže slika 13 (desno). Difuzni sij nastane, ko se delci z energijami pod 1 keV naključno sipajo na višinah nad 150 km. Tak sij nastane običajno popoldan in zvečer na južnem robu aktivnega območja.

Diskretni sij povzročijo delci z energijo nekaj keV. Energija teh delcev je večja, kot je energija delcev v plazmosferi, zato mora obstajati neki me-



Slika 13. Sij se s časom spreminja in opazimo lahko različne oblike (levo), ki so odvisne od geografske širine in dela dneva (desno). Krogi na shemi predstavljajo geografsko širino, na obodu je nanesen lokalni čas, 0 je polnoč. Obarvani trak v obliki loka predstavlja difuzni sij. Debelejša črta predstavlja stabilen lok, ki se po devetih zvečer začne zvijati in razpade na več posameznih lokov. Proti jutru se na južnem robu sija začnejo pojavljati svetlobni otočki. Vir fotografij na levi: Schnuffel2002, Wikipedia.

hanizem, ki te delce pospeši. Ta mehanizem še ni popolnoma znan, možna razlaga je pospeševanje v električnem polju magnetohidrodinamičnega generatorja, kot je opisano zgoraj [3]. Zaradi pospeševanja se točka magnetnega zrcaljenja teh delcev premakne nižje v ozračje in lahko dosežejo višine med 90 km in 150 km, kjer nastajajo diskretne strukture sija.

Oblika diskretnega sija je odvisna od porazdelitve tokov nabitih delcev, ki tečejo iz plazmosfere proti Zemlji, in oblike Zemljinega magnetnega polja. Predstavljamo si lahko, da magnetno polje plapola podobno kot zastava v vetru. Kadar je Sončev veter stabilen, takrat so stabilne tudi diskretne strukture in sij se le počasi spreminja. Strukture se razpenjajo v smeri zahod-vzhod. Sunki v Sončevem vetru povzročajo, da se diskretne strukture spreminjajo, nagubajo in trgajo. Zavese so običajno debele kak kilometer, dolge več tisoč kilometrov, segajo pa od višine 100 do 500 km. Polarni sij lahko opazimo preko celega dne, vendar podnevi običajno le v razmerah polarne noči.

Gibanje nabitega delca v magnetnem polju

Nastanek in dinamika sija sta posledica gibanja nabitih delcev v magnetnem polju. Dinamiko delcev z nabojem e in maso m v magnetnem polju $\mathbf{B}$ opiše Newtonov zakon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, v katerem upoštevamo, da na delec deluje Lorentzova sila $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Pri obravnavi zanemarimo električna polja. V homogenem magnetnem polju se delec giblje po vijačnici. Komponenta hitrosti delca vzporedna magnetnemu polju $v_{||}$ se s časom ne spreminja, komponenta pravokotna na polje $v_\perp$ pa se vrti s krožno frekvenco $\omega = \frac{eB}{m}$. Vijačnica, po kateri kroži delec, ima polmer $r = \frac{mv_\perp}{eB}$. Če obrnemo magnetno polje v smeri osi z, se prejšnje ugotovitve zapišejo s komponentami gibalne količine kot $\dot{p}_x = -\omega p_y$, $\dot{p}_y = \omega p_x$ in $\dot{p}_z = 0$. Ocenimo polmer vijačnic protonov in elektronov v Sončevem vetru na razdalji 10 Zemljinih polmerov $10r_Z$ od Zemlje. Za vsakega privzemimo hitrost 400 km/s. Gostoto magnetnega polja Zemlje ocenimo tako, da upoštevamo padanje gostote polja dipola s tretjo potenco razdalje. Na površju Zemlje, ob ekvatorju, je gostota magnetnega polja 30 μT. Na mestu magnetopavze, ki je oddaljeno $10r_Z$, pa je gostota magnetnega polja enaka:

$$B_{mp} = \frac{r_Z^3}{10^3 r_Z^3} B_Z = 30\ \mathrm{nT}.$$

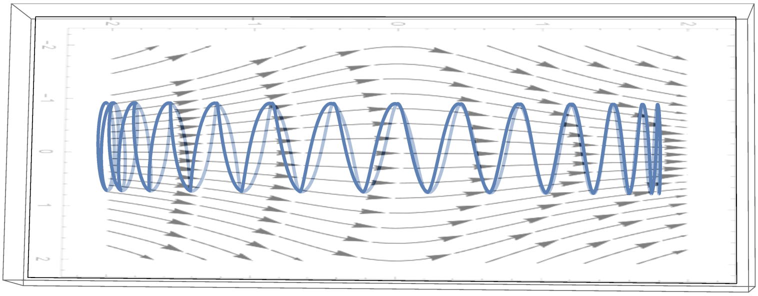
Polmer krožnega loka za proton je torej 140 km, za elektron pa 70 m.

Gibanje delca v nehomogenem magnetnem polju je težje opisati. Oglejmo si najbolj preprost primer, ko je magnetno polje parabolično in se v smeri osi z spreminja kot: $B_z = B_0\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)$. Gibanje bomo obravnavali s teorijo perturbacij in Hamiltonovim formalizmom. Gibanje po vijačnici okoli silnice magnetnega polja razklopimo na gibanje po krožnici, ki ustreza homogenemu polju, in gibanje središča krožnice, ki ga povzroči motnja zaradi nehomogenosti polja. Hamiltonova funkcija, ki opiše nabit delec v magnetnem polju, je $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$. $\mathbf{A}$ je magnetni vektorski potencial, ki ustreza magnetnemu polju $\mathbf{B}$, in s katerim avtomatično upoštevamo, da je divergenca magnetnega polja enaka nič: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. S $\mathbf{p}$ označimo gibalno količino delca. Zahtevi za parabolično komponento z magnetnega polja ustreza potencialno polje $\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}yB_z, \frac{1}{2}xB_z, 0\right)$, o čemer se zlahka prepričamo z računom: $\nabla \times \mathbf{A} = \left(-\frac{B_0 xz}{z_0^2}, -\frac{B_0 yz}{z_0^2}, B_0\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)\right)$ in $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$. Magnetno polje ima torej poleg komponente v smeri osi z tudi komponente vzdolž osi x in y, da zadosti divergenčnemu pogoju. Tako magnetno polje kaže slika 14.

Neperturbirana Hamiltonova funkcija ustreza polju $B_z = B_0$ in $\mathbf{A}_0 = \left(\frac{-1}{2}yB_0, \frac{1}{2}xB_0, 0\right)$:

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(-p_0^2 + \left(p_x + \frac{1}{2}eyB_0\right)^2 + \left(p_y - \frac{1}{2}exB_0\right)^2 + p_z^2\right).$$

Časovni odvod spremenljivke v Hamiltonovem formalizmu izračunamo s Poissonovim oklepajem spremenljivke in Hamiltonove funkcije, če spremenljivka eksplicitno ni odvisna od časa. Hitro lahko pokažemo, da se gibalna



Slika 14. Parabolično magnetno polje (črne silnice) in tirnica v njem gibajočega se nabitega delca (modra krivulja). Os z je usmerjena proti desni. To polje imenujemo tudi polje magnetne steklenice, saj je v njem gibanje nabitih delcev omejeno z magnetnim zrcaljenjem – vijačnica ima v gostejšem polju čedalje krajši korak.

količina nabitega delca v smeri homogenega magnetnega polja ne spreminja:

$$\dot{p}_z = \{p_z, H_0\} = 0.$$

Enako velja za vrtilno količino delca v smeri osi z: $l_z = xp_y - yp_x$, saj je $\{l_z, H_0\} = 0$. Ohranja se tudi polmer vijačnice: $\{(x^2 + y^2), H_0\} = 0$. Oglejmo si odvod gibalne količine delca v smeri osi z v paraboličnem polju:

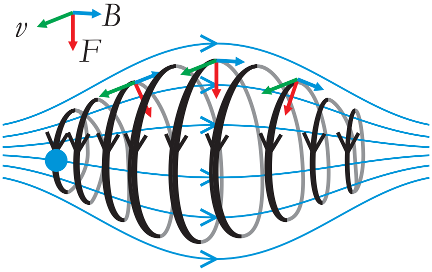
$$\dot{p}_z = \{p_z, H\} = -\frac{eB_0}{m} z \left(-\frac{l_z}{z_0^2} + \frac{eB_0}{2mz_0^2} \left(x^2 + y^2\right) \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)\right)$$

Upoštevajmo $p_z = m\dot{z}$, $e = -e_0$ (obravnavamo elektron), $\omega_0 = \frac{e_0 B_0}{m}$, $r^2 = x^2 + y^2$, $l_z = \omega_0 m r^2$ in zanemarimo člen z $\left(\frac{z}{z_0}\right)^2$. Tako dobimo:

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{r^2}{z_0^2} z.$$

To je enačba nihanja za središče krožnice, okoli katere elektron ciklotronsko kroži. Središče niha s frekvenco $\frac{\omega_0 r}{\sqrt{2} z_0}$ v smeri magnetnih silnic. Amplituda nihanja je odvisna od začetne hitrosti delca, njegove smeri in lastnosti magnetnega polja. V našem približku se polmer kroženja ne spreminja. Delec je ujet med grla steklenice – med območja z gostejšim poljem. Pojav, ko precesirajoči delec spremeni smer gibanja v gostejšem magnetnem polju, imenujemo magnetno zrcaljenje. Magnetno polje, ki lahko zadržuje delec v omejenem prostoru, ustrezno imenujemo magnetna steklenica. Tirnica delca v takem polju je vijačnica s korakom, ki je čedalje krajši, dokler delec ne spremeni smeri gibanja.

Statično magnetno polje ne more povečevati energije delca, saj je magneta sila vedno pravokotna na hitrost delca. Zato je kinetična energija delca $W_k = \frac{1}{2}m\left(v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)$ konstanta gibanja. Ko se delec seli po vijačnici okoli silnice v območje z večjo gostoto magnetnega polja, se mu krožna frekvenca povečuje sorazmerno z gostoto polja B, polmer krožnice pa ustrezno manjša. Ali se pravokotna komponenta hitrosti spreminja, je odvisno od tega, katera od količin, frekvenca ali polmer, se hitreje spreminja, saj velja $v_\perp = \omega r$. Zanki vijačnice, ki jo med gibanjem opiše nabit delec, pripišemo magnetni moment $\mu = IS = \frac{e}{t_0}\pi r^2 = \frac{e\omega r^2}{2}$. Tudi ta moment je adiabatno ohranjena količina in od tu sledi, da polmer vijačnice pada s korenom gostote magnetnega polja in torej pravokotna komponenta hitrosti narašča sorazmerno s korenom gostote magnetnega polja. Ker se kinetična energija delca ohranja, se mora ustrezno zmanjševati komponenta hitrosti delca vzporedna silnici magnetnega polja, dokler ne pade na nič in potem se smer potovanja vzdolž osi vijačnice (silnice magnetnega polja) spremeni in pride do magnetnega zrcaljenja. Pojav oriše slika 15.



Slika 15. Delec se v nehomogenem polju, ki je gostejše na levi in desni strani, giblje po vijačnici s čedalje manjšim polmerom in večjo ciklotronsko frekvenco, dokler se njegovo gibanje vzdolž osi vijačnice ne ustavi in se magnetno zrcali v drugo smer. Ustavljanje je posledica vzdolžne komponente magnetne sile, ki se pojavi v nehomogenem magnetnem polju.

Zemljino magnetno polje opišemo v prvem približku z magnetnim poljem dipola $\mathbf{p}_m$ v izhodišču koordinatnega sistema. V točki, ki jo opišemo s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$, polje poda izraz:

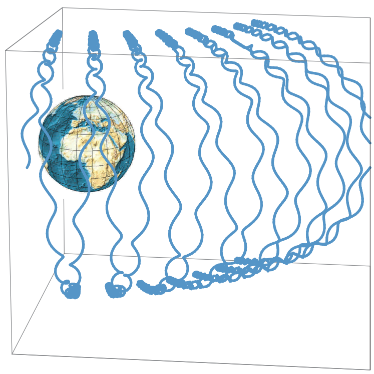
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}\right).$$

Usmerimo os z v smeri dipola, upoštevajmo cilindrično simetrijo polja in s polarnim kotom ϑ izrazimo polje v sferičnih koordinatah

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\left(2\cos\vartheta\mathbf{e}_r + \sin\vartheta\mathbf{e}_\vartheta\right).$$

Magnetno silnico za dano gostoto magnetnega polja B opiše torej v polarnih koordinatah izraz $r = \left(\frac{\mu_0 p}{4\pi B}\right)^{1/3} \sin^2 \vartheta$.

Gibanja delca v dipolnem polju ni enostavno analitično opisati, ni pa težko poiskati numerične rešitve dinamične enačbe. Za tipičen primer kaže gibanje delca slika 16. Nabit delec se torej na svoji poti proti Zemljinemu polu, kjer je gostota polja večja, ustavlja, dokler se na koncu ne začne gibati v drugo smer (npr. najprej se je delec gibal proti severnemu polu, nato pa se vrača proti jugu, k ekvatorju). Poleg tega gibanja od severa proti jugu in nazaj, se zaradi spreminjanja velikosti in smeri magnetnega polja elektron počasi giblje še proti vzhodu. Elektrone ujame Zemljino magnetno polje na višini 12.000 do 60.000 km, protone pa na 400 do 12.000 km. Tu je gostota plazme povišana in območje imenujemo tudi van Allenovi pasovi.



Slika 16. Gibanje delca v dipolnem magnetnem polju Zemlje. Prepoznamo ciklotronsko vijačnico, ki se ovija vzdolž dipolne silnice. Opazimo tudi magnetno zrcaljenje v območju blizu pola, kjer se magnetno polje zgosti, opazimo pa tudi lezenje delca proti vzhodu.

LITERATURA

[1] K. Schlegel, Polarlicht, K.-H. Lotze, W. B. Schneider (ur.), *Wege in der Physikdidaktik*, Band 5, ISBN 3-7896-0666-9, Palm & Enke, Erlangen in Jena 2002.

[2] S. Chapman, *The Earth's magnetism*, Methuen & Co. Ltd. London, 1951.

[3] S.-I. Akasofu, *The aurora*, The Physics Teacher **17** (1979), 228.

[4] K.-H. Glassmeier, M. Scholer (ur.), *Plasmaphysik in Sonnensystem*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.

[5] M. Kaan Öztürk, *Trajectories of charged particles trapped in Earth's magnetic field*, American Journal of Physics **80** (2012), 420.

[6] G. C. McGuire, *Using computer algebra to investigate the motion of an electric charge in magnetic and electric dipole fields*, American Journal of Physics **71** (2003), 809.

[7] `www.s.u-tokyo.ac.jp/en/utrip/archive/2013/pdf/06NgYuting.pdf`, ogled 8. 12. 2017.

UGANKE IZ ODDAJE UGRIZNIMO ZNANOST

Dobra uganka je vedno dobrodošla! Morda ne toliko v raziskovalnem, zagotovo pa v pedagoškem svetu. Uporabimo jo lahko na številne načine: za motivacijo, za promocijo, za preverjanje potencialnega kadra ali zgolj za »utišanje« petletnika med vožnjo na morje. To spoznavam vsakič, ko s pridom žanjem sadove svojega udejstvovanja v oddaji Ugriznimo znanost (TV SLO). V njej jih gledalcem zastavljam vsak teden in tako je v treh letih moj nabor postal res raznolik, zato sem se odločil, da nekaj matematično najbolj zanimivih s tem prispevkom v nadaljnjo uporabo predam tudi vam. Seveda z očitnim opozorilom: ne gre za avtorsko delo! A saj veste, kaj pravijo ... Uganka je kot vic! Dokler je cilj zabava, jo smeš povedati naprej.

Garderobne omarice

V srednji šoli so dijaške omarice označene s števili od 1 do 100. Nekega dne se sto dijakov postavi v vrsto in odigra naslednjo igro: prvi vse omarice odpre, drugi pa zapre tiste, ki so označene s sodimi številkami. Nato k vsaki tretji pristopi tretji in jo bodisi odpre bodisi zapre, odvisno od stanja, v katerem jo najde. Podobno stori tudi vsak nadaljnji dijak – odpre oziroma zapre vse omarice, katerih zaporedna številka je deljiva z njegovim mestom v vrsti. Katere omarice so ob koncu igre ostale odprte?

Rešitev: Uganka je lahko odlična popestritev učne ure o deljivosti števil, saj hiter razmislek pove, da je število dijakov, ki pristopijo k omarici, enako številu deliteljev, ki jih ima njena številka. Natančneje, omarica bo ostala odprta natanko tedaj, ko bo število obojih liho. Zapišimo ta pogoj s pomočjo razcepa na praštevila. Naj bo n neko naravno število in naj bo njegov razcep enak

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}.$$

Tedaj mora biti vsako število d, ki ga deli, oblike

$$d = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}, \;\; 0 \leq s_j \leq k_j.$$

Deliteljev števila n je torej natanko

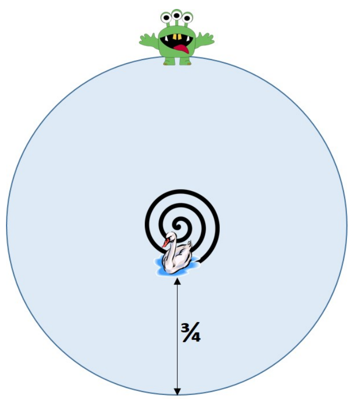
$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdots (k_l + 1).$$

Tak produkt je lih natanko tedaj, ko so lihi tudi vsi njegovi faktorji. To pa pomeni, da morajo biti vsi eksponenti k_j sodi, oziroma, da omarica ostane odprta natanko tedaj, ko je njena zaporedna številka n popolni kvadrat.

Labod in pošast

Na sredini okroglega jezera plava labod, ki želi poleteti proti svojemu gnezdu. Za to mora najprej stopiti na obalo, kjer pa ga čaka štirikrat hitrejša pošast. K sreči pošast ni zelo bistra, zato v vsakem trenutku izbere najkrajšo kopensko pot do točke, h kateri se giba labod. Po kakšni poti naj plava labod, da bo imel ob prihodu na obalo vsaj minimalno prednost?

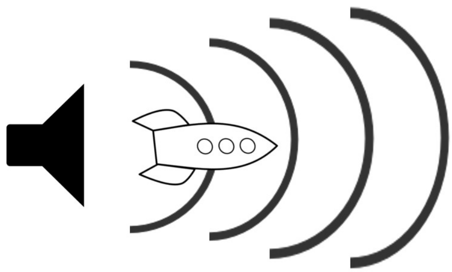
Rešitev: Jasno je, da labod ne more izbrati direktne poti na kopno, saj bi bila njegova pot v tem primeru od poti pošasti krajša največ za faktor π. Ubrati mora torej kak drug, bolj prebrisan način gibanja. Uganka tako lepo ilustrira razliko med obodno in kotno hitrostjo, saj lahko labod – čeprav je štirikrat počasnejši – kroži okoli središča z enako kotno hitrostjo kot pošast, če je radij krožnice, ki jo opiše, štirikrat manjši od polmera jezera. Še več, s krožnim gibanjem po točkah, ki so še malce bližje središču, labod z vsakim obhodom pridobi nekaj kotnih stopinj. Tako se lahko po nekem času znajde v poziciji, ki jo prikazuje slika (skicirana je le ena od možnih poti). Labodova direktna pot na kopno je sedaj za faktor $\frac{4\pi}{3}$ krajša od poti, ki jo mora do iste točke preteči pošast. Ker gre za število, ki je večje od 4, ima labod sedaj dovolj prednosti za varen vzlet.



Nadzvočna hitrost

V letalskem centru so razvili brezpilotno raketo, ki lahko doseže zelo visoke hitrosti. Vendar pa so njen pospeševalni sistem zelo nerodno vezali na zvočni signal – raketa naj bi vsakič, ko iz postaje sprejme pisk, pospešila za 100 m/s. Da tak sistem vodenja ni učinkovit, so opazili šele med testiranjem, ko so ugotovili, da raketa po več kot treh piskih ne doseže želene hitrosti. Zakaj? Kakšno hitrost doseže v takem primeru?

Rešitev: Ključen podatek pri reševanju uganke je hitrost zvoka, ki v zraku znaša okoli 340 m/s. Po štirih piskih je raketa torej že tako hitra, da je signali iz postaje ne dohitijo več. Vendar pozor, to še ni odgovor na drugo vprašanje. Na sliki je raketa v trenutku, ko jo ujame četrti pisk. Ker se od tega trenutka dalje giblje z nadzvočno hitrostjo, bo ujela in še enkrat zaznala tudi vse tri predhodne piske. Njena končna hitrost bo 700 m/s.



Lačna kamela

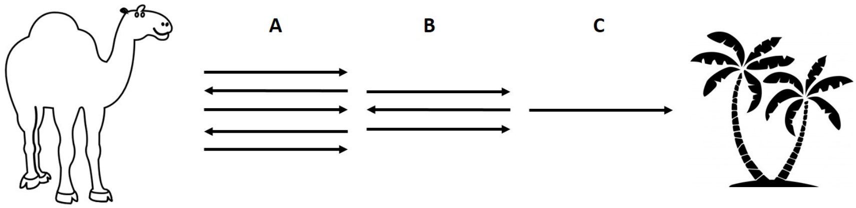
Trgovec želi 3000 banan prenesti 1000 milj daleč. Za pot ima na voljo kamelo, ki lahko nese do 1000 banan, a za vsako miljo poje en sadež. Kolikšno je maksimalno število banan, ki jih lahko spravi na cilj?

Rešitev: Očitno je, da mora trgovec, če želi na cilj prinesti vsaj kakšno banano, nekatere dele poti opraviti večkrat. Natančneje, izbrati mora primerna mesta, kjer del tovora odloži in se vrne nazaj. Za to ima na voljo kar nekaj ekvivalentnih možnosti, izkaže pa se, da je za optimalnost ključna omejitev, da nobena banana ne bo ostala »ob poti«.

Za začetek premislimo, da rešitev, pri kateri trgovec na začetku pusti 1 banano, ni optimalna. Res, z njo bi lahko svoj kup banan pred začetkom poti prestavil za $\frac{1}{5}$ milje bližje cilju in dobil problem, v katerem mora 2999 banan prenesti $999\frac{4}{5}$ milj daleč. Z enako organizacijo poti kot prej bi tako na cilj lahko dostavil vsaj dodatno petino banane.

Nadalje velja, da banane ne smejo ostati niti v vmesnih točkah. Vsaki rešitvi, ki temu ne zadosti, lahko namreč priredimo ekvivalentno rešitev, v kateri trgovec tovor najprej dostavi do takega mesta, ter se šele nato ukvarja z nadaljevanjem poti. Tako dobi nov začetni problem s spremenjenima razdaljo in številom banan, ter svojo rešitev, ki jo lahko še izboljša.

Upoštevajoč maksimalno možno obremenitev kamele je pot torej smiselno razdeliti na tri odseke (slika). Ob predpostavki, da sadeži ne ostanejo ob poti, je število banan, ki prispejo na cilj, odvisno le od dolžin odsekov A,



B in C, brez škode za splošnost pa lahko predpostavimo tudi, da se trgovec ustavi le v obeh stičiščih. Ker bo drugi odsek poti prehojen le trikrat, lahko kamela po njem prenese največ 2000 banan. Torej mora za pot do tja pojesti vsaj 1000 banan in je $A \geq 200$ milj. Po drugi strani velja, da vsaka milja prvega odseka trgovca »stane« več banan kot milji preostalih dveh odsekov. Zato je racionalno, da je njegova dolžina minimalna, $A = 200$ milj. Podobno določimo tudi razdaljo $B = 333\frac{1}{3}$ milj, na kateri kamela poje nadaljnjih 1000 banan, in ugotovimo, da je optimalno, če se kup s preostalimi 1000 bananami znajde na razdalji $466\frac{2}{3}$ milje do cilja. Trgovec tako na cilj prenese $533\frac{1}{3}$ banane.

Vedno 1089

Tri različne, neničelne cifre razporedite od največje do najmanjše, tako da dobite trimestno število. Od njega odštejte število z obratnim vrstnim redom števk (npr. $732 - 237 = 495$). Postopek ponovite tudi za dobljeno razliko, le da tokrat uporabite seštevanje ($495 + 594 = 1089$). Dokažite, da je rezultat vedno enak!

Rešitev: Naloga lepo ilustrira pomen desetiškega zapisa. Denimo, da smo izbrali števke A, B, in C. Razlika, ki jo dobimo na prvem koraku, je enaka

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99(A - C).$$

Ker velja $9 \geq A > B > C > 0$, je $2 \leq A - C \leq 8$. Dobimo torej trimestno število, ki je deljivo z 99. Zanj se lahko hitro prepričamo, da je njegov desetiški zapis oblike $a9b$, kjer je $a + b = 9$. Iskana vsota je torej enaka

$$(100a + 90 + b) + (100b + 90 + a) = 101(a + b) + 180 = 1089.$$

Einsteinova uganka

Popotnik opazi medveda in začne teči. Najprej steče na jug, nato na vzhod in nazadnje na sever, vsakič po 100 m. Na koncu se znajde v začetni točki. Kakšne barve je bil medved?

Rešitev: Gre za klasično uganko, ki jo pogosto najdemo v knjigah o neevklidski geometriji. In sicer kot vprašanje: »Ali lahko narišemo trikotnik s tremi pravimi koti!« Odgovor nanj je pritrdilen, ključno pa je, da se naloge ne lotimo na (neukrivljenem) listu papirja. Na primer, tak trikotnik najdemo na sferi, če za oglišče izberemo severni pol, za stranice pa dve priležni vzdolž poldnevnikov in nasprotno vzdolž vzporednika. To je tudi pot, ki jo je prehodil naš popotnik in torej srečal belega, severnega medveda!

Kakorkoli, čeprav je to že pravilna rešitev, pa se naš razmislek ne sme končati tu (v številnih virih je nadaljevanje izpuščeno, kar je tudi razlog, da sem to uganko vključil v svoj izbor). Natančneje, obravnavati moramo tudi množico poti, ki se nahaja v bližini južnega pola. Denimo, da se popotnik po 100 m teka na jug znajde na vzporedniku, ki je dolg natanko $\frac{100}{k}$ m za $k \in \mathbb{N}$. S tekom na vzhod bo torej napravil k obhodov južnega pola ter se nato vrnil v izhodišče. Torej, vsaj matematično gledano, je možno tudi, da se nahaja na Antarktiki … A brez panike! Rešitev skoraj stoletje stare uganke s tem ni ogrožena. Barva medveda je še vedno bela, saj v okolici južnega pola teh živali ni!

Petek 13.

Neprestopno leto ima tri nesrečne petke. Na kateri dan se začne?

Rešitev: Bolj kot odgovor na to uganko je fascinantno dejstvo, da je rešitev enolična! Do nje se najlažje prebijemo tako, da v roke vzamemo koledar neprestopnega leta in z njega po vrsti preberemo 13. dneve v mesecih. Jaz sem to storil za leto 2017 in dobil

$$petek,\ ponedeljek,\ ponedeljek,\ četrtek,\ sobota,\ torek,$$

$$četrtek,\ nedelja,\ sreda,\ petek,\ ponedeljek,\ sreda.$$

Sreče pri izbiri leta očitno nisem imel, saj sta bila lani le dva taka petka. Vseeno pa mi je zgornje zaporedje zelo v pomoč, saj lahko iz njega razberem, da obstaja natanko en dan, ki se na 13. mestu pojavi trikrat. V letu 2017 je bil to ponedeljek. Sklepam lahko torej, da bo želeni pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko bo 13. februar padel na petek (v letu 2017 je na tem mestu ponedeljek). Tako leto se začne na četrtek! Mimogrede, s podobno analizo lahko ugotovite, da se petek 13. zgodi vsako leto, a ne več kot trikrat (tudi v primeru prestopnega leta).

Kameleoni

V terariju so kupili 13 modrih, 15 rdečih in 17 zelenih kameleonov. Le-ti imajo nenavadno lastnost, da se ob srečanju dveh kameleonov različnih barv oba spremenita v tretjo barvo. Ali se lahko zgodi, da bodo po nekem času vsi kameleoni enake barve?

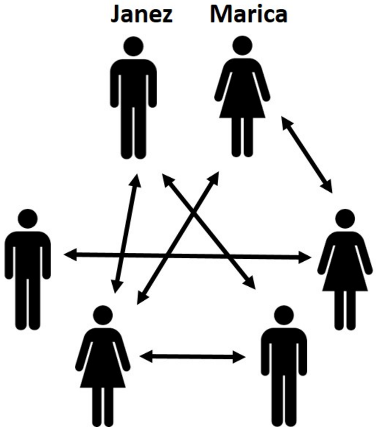
Rešitev: Uganka je lahko odlična popestritev deževnega popoldneva, če se reševanja lotite na empiričen način. Kakorkoli, kot veleva nepisano kolokvijsko pravilo, je odgovor na vprašanje, ki se začne z »ali«, najverjetneje »ne«. Tako je tudi tokrat, čeprav dokaz terja nekaj originalnosti.

Označimo z M, R in Z število kameleonov treh barv. Ob poljubnem srečanju kameleonov različnih barv se dve od treh števil zmanjšata za 1, eno pa se poveča za 2. To je ekvivalentno spremembi za -1 po modulu 3. Povedano drugače, ne glede na barvo vpletenih kameleonov se ostanek števil Z, M in R pri deljenju s 3 zmanjša za 1. Ker imajo ta števila na začetku različne ostanke pri deljenju s 3, ni mogoče, da bi v nekem trenutku dve od njih zavzeli ničelno vrednost (to je potrebni pogoj, če naj bi bili vsi kameleoni enake barve).

Janez in Marica

Janez in Marica sta na večerjo povabila še dva para. Ob prihodu so se vsi, ki se niso poznali, rokovali. Marica je nato vsako od oseb vprašala, s koliko ljudmi se je rokovala, in dobila pet različnih odgovorov. S koliko ljudmi se je rokoval Janez?

Rešitev: O rešitvi je najlažje razmišljati ob pomoči diagrama na sliki (prikazano ni pravilna rešitev). Zagotovo vemo le, da se partnerji med seboj gotovo niso rokovali, vse druge kombinacije poznanstev so možne. Vsakdo se je torej rokoval z 0 do 4 osebami, oziroma, ker je Marica dobila 5 različnih odgovorov, vsakemu od navedenih števil pripada natanko eden izmed preostalih udeležencev večerje.



Pa se vprašajmo, ali bi lahko bil Janez neznan vsem gostom? Odgovor je negativen, saj bi v tem primeru ponudil roko vsem. Posledično ne bi obstajal od Marice različen gost, ki se ni rokoval z nikomer. Podobno velja za možnost, ko se Janez ne bi rokoval z nikomer. V tem primeru ne bi obstajal od Marice različen gost, ki ne bi poznal nikogar.

Pripišimo torej rokovanje s 4 osebami nekemu drugemu gostu, rokovanje z nikomer pa njegovemu partnerju (to je edina preostala možnost). To pomeni, da Janez in vsi preostali gostje v tem paru ne poznajo natanko ene, iste osebe. Je to morda edini gost, ki ga Janez ne pozna? Odgovor je znova negativen, saj potemtakem ne bi obstajala od Marice različna oseba, ki se je rokovala natanko trikrat. Končno na tak način zavrnemo tudi možnost, da se je Janez rokoval natanko trikrat, in zaključimo, da se je Janez rokoval natanko dvakrat.

Problem dveh ovojnic

Miha je Maji dal na izbiro dve ovojnici in ji povedal, da je v eni dvakrat toliko denarja kot v drugi. Dovolil ji je tudi, da pokuka v eno izmed njiju. Maja je odprla prvo ovojnico in v njej zagledala 100 evrov, nato pa razmišljala takole: »Če kuverto zamenjam, dobim bodisi 50 bodisi 200 evrov. Ker sta oba zneska enako verjetna, je moj pričakovani dobiček, ki ga zaslužim z menjavo ovojnice, enak 125 evrov. To je več od zneska v ovojnici, ki sem jo odprla, zato se – statistično gledano – bolj splača vzeti drugo ovojnico!« Ali je njeno razmišljanje pravilno?

Rešitev: Bralec, ki ni preveč pod vplivom klasičnega Monty hall problema, bo hitro uganil, da je pravilni odgovor negativen. Problem, s katerim sem se v oddaji soočil tudi sam, pa je, kako to prepričljivo in hkrati laično utemeljiti. V naslednjem odstavku predstavljam svoj najboljši poskus!

Če je Majino razišljanje pravilno, mora delovati tudi ob malce spremenjenih pogojih. Pa denimo, da ji Miha ne dovoli odpreti kuvert. Maja tako v roke vzame prvo ovojnico in razmišlja: »Če je v njej znesek A, me v sosednji kuverti čaka bodisi znesek $2A$ bodisi znesek $A/2$. Ker je pričakovani dobiček enak $\frac{5}{4}A$, se splača kuverto zamenjati!« To tudi stori! Težava nastopi, če začne sedaj, ko v rokah drži drugo kuverto, odločitev še enkrat tehtati. Zgoraj smo opazili, da njen razmislek v resnici ni odvisen od konkretnega zneska, zato bi se morala po njem znova odločiti za menjavo kuverte. To pa je v nasprotju z optimalnostjo prve odločitve.

Sedaj si oglejmo še korektno, matematično razlago. Označimo z A znesek, ki ga je videla Maja, z I in II pa slučajni spremenljivki, ki ponazarjata zneska v obeh ovojnicah. V jeziku matematičnega upanja je Majin razmislek ekvivalenten računu

$$E(II) = (2A) \cdot \frac{1}{2} + (A/2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}A.$$

Ta je seveda pomanjkljiv, saj se v korektni obliki glasi takole

$$\begin{aligned} E(II) &= E(2A|I < II)P(I < II) + E(A/2|I > II)P(I > II) \\ &= E(2A|I < II) \cdot \frac{1}{2} + E(A/2|I > II) \cdot \frac{1}{2} \\ &= E(A|I < II) + \frac{1}{4}E(A|I > II). \end{aligned}$$

Maja torej ni upoštevala, da mora za izračun količine $E(II)$ uporabiti matematično upanje in ne konkretne vrednosti spremenljivke $A \neq E(A)$, dodati pa bi morala tudi pogoje, pri katerih jo računa. No, malce smo goljufali tudi mi, saj smo konkretno vrednost $A = 100$ nadomestili z ustrezno slučajno spremenljivko … Kakorkoli, Maja bi morala razmišljati takole: »V kuvertah sta zneska X in $2X$. Za nobenega od njiju ne morem trditi, da je enak videnemu znesku $A = 100$, zato lahko sklepam le, da bom z menjavo bodisi zaslužila bodisi izgubila X evrov. Ker sta možnosti enako verjetni, je pričakovani dobiček menjave ničeln!« Ekvivalentno,

$$E(II) = E(A|I < II) + \frac{1}{4}E(A|I > II) = X + \frac{1}{4}(2X) = \frac{3X}{2} = E(I).$$

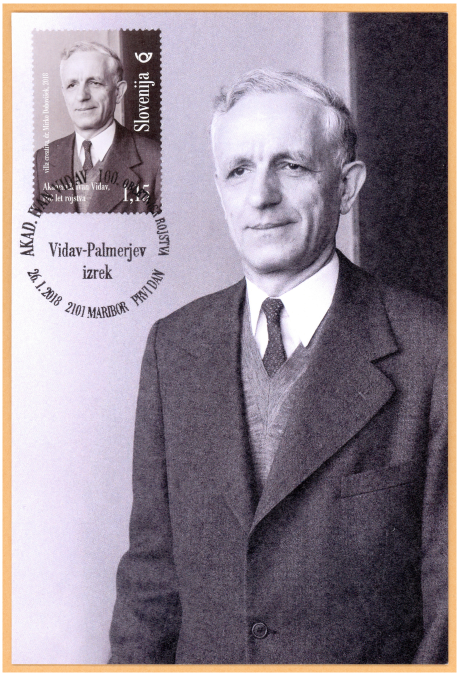
Pri tem smo upoštevali, da je v primeru, ko je znesek v prvi ovojnici manjši (tj. $I < II$), znesek A enak X, v nasprotnem primeru pa $2X$, ter da ob takem načinu računanja enak sklep velja tudi za $E(I)$.

Če ste pravi naravoslovec, vas je ta, korektna rešitev verjetno bolj zadovoljila. Ne vem pa, ali vam bo uspelo z njo o pravilnosti rešitve prepričati tudi vašo ne-matematično okolico. Meni ni, lahko pa poskusite še sami!

Uroš Kuzman

VIDAV, SPIRITUS AGENS SLOVENSKE MATEMATIKE MINULEGA STOLETJA

17. januarja 2018 je minilo sto let od rojstva Ivana Vidava. Ob tej priložnosti je v organizaciji Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Slovenske akademije znanosti in umetnosti od 26. do 28. januarja 2018 poteklo znanstveno in strokovno srečanje v spomin na akademika, učitelja in človeka, ki je v sebi združeval skromnost in avtoriteto brez primere. Na srečanju, ki je poteklo v prostorih Fakultete za matematiko in fiziko UL, je navzoče najprej nagovoril dekan Fakultete za matematiko in fiziko prof. dr. Anton Ramšak, v imenu SAZU pa akademik prof. dr. Franci Forstnerič. V okviru uvodnih nagovorov je bila velika predavalnica Oddelka za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko UL, v kateri so potekale slovesnosti, preimenovana v predavalnico Ivana Vidava.



V prvem plenarnem predavanju z naslovom Ivan Vidav (1918–2015) – Njegova vloga in pomen v slovenski matematiki je prof. dr. Milan Hladnik izjemno celovito in lepo predstavil oris obsežnega in vsestranskega dela Ivana Vidava.

Po krajšem odmoru je v drugem plenarnem predavanju z naslovom Kompleksne kompletne ploskve v krogli akademik prof. dr. Josip Globevnik, eden izmed Vidavovih doktorandov, na kar se da dostopen in poljuden način predstavil svojo rešitev sicer zapletenega in desetletja odprtega problema s področja Kompleksne analize.

Sledila je predstavitev prof. dr. Josa Vukmana (tudi Vidavovega doktoranda) in prof. dr. Jožeta Nemca (filatelista in doktoranda Vidavovega doktoranda) Vidavove spominske znamke Pošte Slovenije. Za izid Vidavove znamke PS ob njegovi stoletnici rojstva gre največja zasluga prav prof. Vukmanu in prof. Nemcu.

S tem so se osrednje dopoldanske plenarne aktivnosti, ki se jih je udeležilo okrog sto udeležencev, zaključile. Slovesnosti so se udeležili številni Vidavovi doktorandi, predstavniki matematičnih oddelkov, fakultet in univerz ter tudi Vidavova sorodnika.

V popoldanskem času se je nadaljevalo znanstveno srečanje s tremi predavanji: prof. dr. Bojana Magajne Vidav-Palmerjev izrek, prof. dr. Igorja Klepa Vidavova lema o množici omejenih elementov in posledice v realni algebraični geometriji ter prof. dr. Bora Plestenjaka Kleinovi teoremi in večparametrični problemi lastnih vrednosti.

Vzporedno je v popoldanskem času potekalo srečanje za učitelje matematike, na katerem je imel prof. dr. Joso Vukman daljše predavanje z naslovom O Halperinovem problemu.

Nekoliko pozneje pa sta bili v okviru dogodka in Zimske šole matematike in fizike za srednješolce še predavanji prof. dr. Denisa Arčona Kaj je magnetna resonanca? in prof. dr. Mateja Brešarja Kaj počnejo matematiki?

Strokovne aktivnosti so se nadaljevale v soboto s predavanji doc. dr. Boštjana Kuzmana Znamenite matematične konstante in verjetnost, prof. dr. Petra Šemrla Razumevanje nekaterih najpomembnejših izrekov Analize in asistenta dr. Jureta Kališnika Izometrije hiperbolične ravnine za učitelje matematike, ter v soboto in nedeljo s številnimi delavnicami in aktivnostmi za dijake v okviru Zimske šole matematike in fizike za srednješolce.

Več informacij o dogodku je dostopnih na spletnem naslovu `uc.fmf.uni-lj.si/vidav/`. Ob takem dogodku je z mislijo na »slavljenca« težko ostati ravnodušen. Glede na obseg in opus Vidavovega dela bi si najbrž zaslužil večjo, slovesnejšo in tudi javno bolj odmevno obeležbo. Po drugi strani bi, če bi se vprašali, kaj bi si želel Ivan Vidav, dogodek lahko bil tudi skromnejši. Kot je svoje plenarno predavanje zelo primerno zaključil prof. Hladnik, bi kljub Vidavovi človeški drži, ki jo pooseblja rek »Non multa, sed multum« (Ne veliko, ampak tisto dobro), zanj lahko rekli »Multa et multum« (Veliko in to dobro).

Najbrž je Vidavovo delo in človeško dostojanstvo težko umestiti v današnji čas tudi zaradi sprememb, ki so se zgodile v minulih sto letih, predvsem pa zaradi težkih preizkušenj in izjemne skromnosti, ki je zaznamovala njegovo osebnost. Vidav je sam zase rekel, da je imel veliko srečo, ker je živel v času, ko je bilo veliko pomanjkanje matematikov in je bil zato vsakdo dober in pač tudi on. Po njegovih besedah najzanimivejših vprašanj (znanosti) niti ni razumel, kaj šele, da bi nanje lahko odgovarjal. Živel je v času, ko je »projekt« pomenil polet na Luno.

Danes je drugače, projekte poznajo že otroci v vrtcu, imamo znanstvene kavarne, matematikov je veliko, primanjkuje služb tudi za odlične. Odličnost je bližje ambicioznim kot skromnim. Za Vidava je bil človek »ulomek med tistim, kar je in tistim, kar misli, da je«. Po tej formuli je bil Vidav zares velik. A najbrž pomen te formule bledi še hitreje kot spomin na Ivana Vidava.

Damjan Kobal

STOLETNICA ROJSTVA PROFESORJA IVANA VIDAVA (1918–2015)

Akademik profesor dr. Ivan Vidav je bil univerzitetni profesor in znanstvenik, ki je v drugi polovici 20. stoletja pomembno vplival na razvoj matematične vede na Slovenskem. Tako na raziskovalnem kot na pedagoškem področju je s svojim delom in zgledom postavil visoke standarde, ki so vodilo in obveza tudi njegovim naslednikom. Bil je hkrati predan učitelj in priljubljen mentor številnim generacijam študentov matematike, večkrat je predaval še nekaterim drugim študijskim skupinam. Njegovo ime so poleg diplomiranih matematikov in fizikov poznali naravoslovci in inženirji različnih tehniških profilov, kot vodilni slovenski matematik svojega časa pa je bil znan tudi drugim slovenskim izobražencem, zlasti v akademskih krogih.

Znanstveno in raziskovalno delo

Vidavovo znanstveno delovanje ima več vrhuncev. Prvega je dosegel že zgodaj v svoji akademski karieri. Maja 1941 je v doktorski disertaciji z naslovom *Kleinovi teoremi v teoriji linearnih diferencialnih enačb*, napisani že v četrtem letniku rednega študija, samostojno rešil problem obstoja Fuchsove linearne diferencialne enačbe drugega reda s petimi singularnimi točkami s predpisanimi eksponenti, katere rešitve omogočajo konstrukcijo enoličnih avtomorfnih funkcij. S podobnimi matematičnimi problemi se je nekoč, pred prvo svetovno vojno, ukvarjal in se v svetu uveljavil že njegov učitelj profesor Plemelj. V svojem mladem študentu je tako našel vrednega naslednika in mu odtlej gmotno in strokovno stal ob strani pri prvih korakih v znanost. O svojih nadaljnjih raziskavah v teoriji linearnih diferencialnih enačb je Vidav poročal na mednarodnem kongresu matematikov na Harvardu leta 1950 in s tem opozoril znanstveni svet nase. S klasično matematiko, zlasti s teorijo aproksimacij, se je ukvarjal še v začetku 50. let med svojimi večkratnimi krajšimi študijskimi obiski v Parizu.

Drugi vrhunec se je zgodil, potem ko je sredi 50. let Vidav, tedaj že redni profesor, začel raziskovati funkcionalno analizo, tedaj še mlado in obetavno

Slika 1. Ivan Vidav leta 1941, ko je diplomiral, doktoriral in dosegel s svojo disertacijo prvi večji znanstveni uspeh. Vir: arhiv družine.

matematično disiplino. Ena izmed prvih razprav, leta 1956 v ugledni mednarodni reviji *Mathematische Zeitschrift* objavljeni članek z naslovom Eine metrische Kennzeichnung der selbstajungierten Operatoren, v katerem je podal novo definicijo hermitskega elementa Banachove algebre, mu je že prinesla mednarodno prepoznavnost in prodor v sam svetovni vrh raziskovalcev tega področja. Njegova karakterizacija C^*-algeber med Banachovimi algebrami ga uvršča med utemeljitelje te teorije. Osnovni izrek ter več definicij in pojmov se danes imenujejo po njem. Že samo s tem svojim delom si je več kot zaslužil dodatno akademsko čast: leta 1962 je postal redni član SAZU.

Nadaljnji uspehi profesorja Vidava so povezani z uporabo funkcionalne analize v fiziki, predvsem pri reševanju linearne Boltzmannove enačbe v transportni teoriji nevtronov, kar danes štejemo za tretji vrhunec njegovega znanstvenega dela. Za svoje raziskave na tem področju je prejel leta 1970 Kidričevo nagrado, takrat najvišje republiško znanstveno priznanje.

Če je bil profesor Plemelj nekoč še osamljen mojster matematike, ki je svoja največja odkritja dosegel že nekaj let pred prihodom na ljubljansko univerzo leta 1919 in kasneje praktično ni več znanstveno deloval, pa je bil njegov najboljši učenec Vidav pol stoletja kasneje ne le izvrsten raziskovalec, temveč hkrati tudi že začetnik in utemeljitelj slovenske matematične šole. Poleg svojih šestnajstih ljubljanskih doktorskih študentov je namreč neposredno ali posredno vgojil še številne druge slovenske matematike; nekateri so danes med vodilnimi v svetu na svojem področju. S svojim delom in z deli svojih naslednikov je Slovenijo dokončno umestil na matematični zemljevid sveta.

Pedagoško, organizacijsko in vodstveno delo

Profesor Vidav ni bil le pomemben znanstvenik, temveč tudi zelo spoštovan profesor. Veliko časa je posvetil pedagoškemu delu; zaradi pomanjkanja usposobljenih učiteljev je moral v petdesetih, šestdesetih in sedemdesetih letih sam predavati različne predmete ter izpraševati množico študentov. Naravoslovcem in tehnikom je do leta 1961 predaval osnove matematike, študentom matematike pa, prej in kasneje, zelo različne predmete: sprva evklidsko in neevklidsko, afino, projektivno in diferencialno geometrijo, potem osnovno analizo, teorijo analitičnih funkcij, algebro s teorijo števil, osnove funkcionalne analize. Bil je izvrsten predavatelj, ki ga je bilo užitek poslušati. Vedno je predaval na pamet, brez pisnih pripomočkov.

Za študente matematike je napisal vrsto učbenikov, od *Višje matematike* v dveh delih (1949 in 1951) in njene nadgradnje, napisane v sodelovanju z drugimi avtorji (1975 in 1976), do še danes moderne in zelo uporabne *Algebre* (1972), *Afine in projektivne geometrije* (1981) ter *Diferencialne geometrije* (1989). Za *Višjo matematiko*, ki je bila prvi slovenski učbenik visokošolske matematike in so ga svoj čas uporabljali tudi vsi inženirji in naravoslovci, ki so pri svojem delu potrebovali matematiko, je prejel leta 1952 Prešernovo nagrado. Z zadnjo knjigo, monografijo *Eliptične krivulje in eliptične funkcije* (1991), pa je presegel šolski okvir in posegel na takrat aktualno matematično področje, ki je nekaj let kasneje prispevalo k rešitvi tristo let starega Fermatovega problema.

Bil je mentor skoraj sto diplomantom in magistrantom. Učil je tako rekoč vse današnje starejše slovenske matematike. Od leta 1960 dalje ni nobena prenova kurikuluma ali sprememba v študijskem programu potekala mimo njega. Pod njegovim vodstvom so bile izvedene večje reforme študija, kot sta bili npr. uvedba programa tehniške matematike leta 1960 in podiplomskega študija teoretične matematike leta 1971. Na slednjem je bil vodja in glavni predavatelj; za podiplomske študente je napisal nekaj pomembnih skript in specialnih del iz algebre in funkcionalne analize (npr. o kategorijah in algebrski K-teoriji 1970, o grupah K0, K1 in K2 1974, o Banachovih in C^*-algebrah 1978 in 1979, o linearnih operatorjih na Banachovih prostorih 1982). O vsem tem je tudi predaval; vrsto let je vodil takrat edini podiplomski seminar iz funkcionalne analize. Poleg tega je osnove funkcionalne analize v šestdesetih in sedemdesetih letih vsako drugo leto učil tudi na podiplomskem študiju fizike. Leta 1985 pa je bil eden od pobudnikov in prvi predavatelj na novem podiplomskem študiju pedagoške matematike, namenjenem učiteljem matematike na naših šolah. Na tem študiju je predaval diferencialno geometrijo še nekaj let po svoji upokojitvi leta 1986.

Če je bil vse do srede petdesetih let 20. stoletja v Sloveniji na področju matematike profesor Josip Plemelj tako rekoč edina avtoriteta in vodilni odločevalec, pa je po izvolitvi za rednega profesorja leta 1953 Vidav začel počasi prevzemati vse več odgovornih funkcij. Postal je predstojnik Prirodoslovno-matematičnega oddelka Prirodoslovno-matematično-filozofske fakultete in leta 1956 njen prodekan, prvi dekan na novo ustanovljene Naravoslovne fakultete leta 1957, nato za Plemljem predstojnik Matematičnega inštituta, od leta 1961 do 1967 prvi predstojnik oddelka za matematiko na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko, kasneje pa predsednik sveta tega inštituta. Leta 1960 je nastala Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, kamor je odtlej spadal tudi študij matematike. Vidav je bil na njej najprej vodja katedre in po letu 1969 odseka za matematiko, preoblikovanega leta 1975 v samoupravno enoto VTO Matematika in mehanika. Leta 1977 je vodstvene funkcije sicer prepustil drugim, a je ne glede na svoje formalne obveznosti ostal do upokojitve nesporni dejanski vodja sprva majhne, a hitro rastoče matematične družine na omenjeni fakulteti. Vodil jo je preudarno in smotrno, z velikim občutkom odgovornosti do posameznikov in celotne skupnosti. Tudi po upokojitvi so bili njegovi nasveti vedno dobrodošli in zaželeni.

Delo na področju popularizacije matematike

Poleg učbenikov in monografij je profesor Vidav v svoji dolgoletni karieri napisal več strokovnih knjig in veliko člankov, s katerimi je želel širši javnosti in zlasti mladim, dijakom in tudi osnovnošolcem, približati »kraljico znanosti«. Mnogi njegovi prispevki v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, od prvega letnika 1951 dalje pa vse do leta 2006, ter skoraj vsi članki, objavljeni v *Preseku* v letih od 1976 do 2008, so npr. namenjeni popularizaciji matematike med šolajočo se mladino in na splošno v javnosti. Enak cilj zasledujejo njegove knjige v *Knjižnici Sigma: Rešeni in nerešeni problemi matematike* (prva knjiga v tej zbirki leta 1959), *Števila in matematične* *teorije* (1965), *Teorija števil in elementarna geometrija* (1996) ter *O deljenju z ostankom in še o čem* (2016, posthumno). Zadnji dve prinašata izbor njegovih člankov in različnih drugih tekstov, ki so bili že prej objavljeni v slovenskih matematičnih revijah.

Vidavovi strokovni članki so izhajali v *Obzorniku*, glasilu Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, ki ga je vrsto let pomagal urejati. Pri društvu je opravljal pomembne funkcije, od 1951 do 1959 npr. najprej tri leta predsedniško in nato podpredsedniško; od 1958 do 1974 je bil vodja tekmovalne komisije, od 1966 do 1992 odgovorni urednik zbirke *Sigma*, poleg tega ves čas član in predsednik častnega razsodišča idr. Že v 50. letih je veliko predaval dijakom in učiteljem matematike, pozneje pa je pogosto s predavanji sodeloval na društvenih seminarjih, vse do konca 90. let 20. stoletja. Po upokojitvi ga je društvo izbralo za svojega desetega častnega člana.

Ob vsej tej njegovi, poleg raziskovalnega in pedagoškega dela gotovo postranski dejavnosti, je morda najbolj presenetljivo, da se mu ni nikoli zdelo težko spustiti z višine uglednega znanstvenika na nivo, ki je dostopen povprečnemu diplomiranemu matematiku, študentu in celo dijaku. Običajno se tudi zelo sposobni in ustvarjalni ljudje odločijo za eno ali drugo: bodisi so bolj raziskovalci in ustvarjalci novega ali pa bolj učitelji oziroma prenašalci pridobljenega znanja. Ne samo pri nas, tudi v svetu redko najdemo matematika, ki bi združeval v sebi tako sposobnost doseganja vrhunskih znanstvenih rezultatov z umetnostjo podajanja snovi začetniku na preprost in privlačen način. V tem je bil naš profesor Vidav enkraten in v današnjem času izrazite specializacije gotovo neponovljiv mojster.

Za svoje dolgoletno predano znanstveno in pedagoško delo ter za svoja druga prizadevanja v korist slovenske matematike in matematične skupnosti je prejel najvišja državna odlikovanja in nagrade ter univerzitetna priznanja in časti. Nekaj smo jih že omenili, od drugih naštejmo samo najpomembnejše: red zaslug za narod z zlato zvezdo 1978, nagrada Avnoj 1981, Žagarjeva nagrada za pedagoško delo 1988, državna nagrada za življenjsko delo na področju znanosti 1992 in zlati red za zasluge leta 2008. Univerza pa mu je podelila naziv zaslužni profesor leta 1987 in častni doktorat leta 1997.

Vidavova osebnost

Profesorju Vidavu je bila seveda matematika vse na svetu. Z njo se je aktivno ukvarjal že v svojih gimnazijskih letih, vso svojo akademsko kariero in še v visoki starosti. Preštudiral je njena obsežna in raznovrstna področja, do potankosti je poznal njene skrivnosti. Ko smo njegovi učenci in kasneje sodelavci pri svojem delu naleteli na probleme, smo radi hodili k njemu po nasvet in strokovno pomoč. Nikoli ni odklonil in čeprav je pogosto najprej skromno izjavil, da o zadevi ne ve veliko, je vedno našel primerno rešitev; če ne takoj, pa čez dan ali dva. Z njim se je bilo lepo pogovarjati tudi o drugih, nematematičnih temah. Veliko reči ga je zanimalo, veliko je prebral in veliko je vedel. Skoraj o vsaki zadevi je imel izdelano svoje mnenje, čeprav ga ni vsiljeval drugim. V svojih sodbah je bil zadržan in umirjen, v svojih odločitvah preudaren. Bil je prijeten in duhovit sogovornik, od katerega smo se veliko naučili.

Rad je seveda predaval in posredoval svoje bogato znanje študentom. Kdor je kdaj okusil njegove pedagoške prijeme, tudi ve, kako korekten je bil pri izpraševanju. Če je bil v mlajših letih, kot pravijo, še dokaj strog in zahteven, pa je z leti njegova ostrina na izpitih otopela, postal je zelo blag in uvideven do vseh mogočih študentskih težav ali izgovorov, s katerimi smo opravičevali svoje neznanje. Nikoli ni bil vzvišen, ne do študentov ne do sodelavcev; skrajno vljuden je bil tudi do naključnih obiskovalcev. Njegove izjemne intelektualne sposobnosti, izpričane vrline in dobro znane značajske poteze ga delajo ne samo velikega znanstvenika in učitelja, pač pa tudi velikega človeka.

Kljub zavidanja vrednim znanstvenim uspehom in veliki avtoriteti, ki jo je užival, je ostal osebno skromen. Ni hlepel ne po časti ne po denarju. Sam si je iz svojega žepa plačal marsikatero službeno pot ali se odpovedal zasluženemu honorarju. Finančno nagrado, ki mu je pripadala kot članu akademije, je od leta 2000 dalje namenjal za štipendije podiplomskim študentom matematike in naravoslovja. Danes deluje pri SAZU za te namene *Fundacija akademika Ivana Vidava*.

Sklepna misel

Po današnjih merilih profesor Vidav ne spada med matematike z velikim številom objavljenih znanstvenih del, saj je skupaj z disertacijo napisal samo štirideset znanstvenih razprav in člankov. Mnogi naši mladi raziskovalci matematike ga danes po tem kriteriju že močno presegajo. Morda kdo od njih celo dosega globlje rezultate na kakšnem posameznem matematičnem področju. Težko pa ga bo kdo prekosil v širini njegove znanstvene misli, v celovitem razumevanju matematike in v akademskem odnosu do študentov, sodelavcev in sopotnikov. Tako univerzalnega znanstvenika, učitelja in svetovalca, kot je bil profesor Vidav, slovenski matematiki najbrž nikoli več ne bomo imeli.

Milan Hladnik

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2018
Letnik 65, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Polarni sij na Jupitru. Fotografija je sestavljena iz dveh slik narejenih s Hubblovim teleskopom. Ena je običajna, pri drugi pa so zaznavali kratkovalovno ultravijolično svetlobo. Vir: NASA, ESA in J. Nichols (Univerza v Leicestru).