

Z NAJMANJ TRUDA NA ŠMARNO GORO!

GAŠPER JAKLIČ^{1,2,3}, TADEJ KANDUČ⁴,
SELENA PRAPROTNIK² IN EMIL ŽAGAR^{1,2}

¹Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

²Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

³Primorski inštitut za naravoslovne in tehnične vede, Univerza na Primorskem

⁴Turboinštitut

Math. Subj. Class. (2010): 41A05, 41A15, 65D05, 65D07, 65D17

Iskanje krivulje na ploskvi z danimi omejitvami je v splošnem težak problem. Nanj naletimo npr. v gradbeništvu pri gradnji cest in železnic po razgibanem terenu. V tem članku se bomo omejili na problem iskanja vzpona na goro, pri katerem porabimo najmanj energije.

Dane so diskretne meritve terena, na podlagi katerih s pomočjo makroelementov konstruiramo gladek opis reliefa. Energijski funkcional definiramo v odvisnosti od naklona in dolžine poti. Z izračunom energije na robovih polinomskih ploskev zastavljeni problem prevedemo na diskretni problem iskanja najcenejše poti na mreži polinomskih krivulj. Numerični rezultati kažejo, da se dobljene poti dobro ujema z naravnimi, kar predstavimo na primeru realnih podatkov.

OPTIMAL MOUNTAIN ASCENT

Finding a curve on the surface with constraints is a difficult problem frequently encountered in civil engineering at road and railway construction. In this article, an optimal mountain ascent (in the sense of energy consumption) will be considered.

Discrete terrain data are given. A smooth terrain description is constructed using macroelements. An energy functional which depends on terrain inclination and on path length, is defined. By computing energy on the boundaries of polynomial patches, the problem transforms into a discrete problem of finding the cheapest path on a mesh of polynomial curves. Numerical results indicate that the resulting paths are good approximations of the natural routes. Some examples on real data are presented.

Uvod

Iskanje optimalne poti med danima točkama na ploskvi je težak problem. Prva težava je predstavitev ploskve in s tem povezan zapis iskane krivulje, vložene na ploskev. Druga težava je kriterij optimalnosti. Tu običajno krivulji pripišemo energijski funkcional, s katerim utežimo dele krivulje glede na izbrani kriterij. Bralec lahko več o energijskih funkcionalih krivulj in ploskev izve v [2] ali [7].

Problem je zelo zanimiv v praksi, na primer pri načrtovanju ceste ali železnice po razgibanem terenu. Tu je treba upoštevati več faktorjev, kot

so omejitve naklona, radija ovinkov, geomorfološke lastnosti terena, cena gradnje, ki je višja tam, kjer je treba graditi mostove in tunele, optimizacijo pri gradnji (izkop materiala, transport na drugo lokacijo in uporaba za zasipanje).

V članku bomo obravnavali bolj enostaven problem, načrtovanje optimalne planinske poti na vrh gore. Kriterij za optimalnost bo poraba energije. Dobre planinske poti potekajo po naravnih prehodih, strme dele premagajo z vzpenjanjem v ključih [4]. Predpostavili bomo, da strmina optimalne poti ni večja od 45° in s tem ostali v mejah pohodništva. Med klasične kriterije optimizacije sicer spadajo zahteve, da je dolžina poti najkrajša, da je čas vzpona minimalen, da je poraba energije (kalorij) čim manjša. Bralec lahko nekaj o tem prebere v [5].

Zvezni variacijski problem iskanja optimalne poti bomo aproksimirali z reševanjem diskretnih problemov. Površja hriba ne moremo opisati eksaktno, saj imamo običajno dano samo mrežo geodetskih podatkov, ponavadi točk (x_i, y_i, z_i) . Zato je prvi korak interpolacija danih podatkov s primerno ploskvijo, za kar bomo uporabili posebno vrsto nedavno razvitih dvorazsežnih zlepkov, makroelemente [6, 3]. Optimalno pot bomo iskali na krivočrtni mreži njihovih robov.

S pomočjo energijskega funkcionala bomo izračunali porabo energije po robovih. Optimizacijski problem bomo tako prevedli na diskretni problem iskanja najcenejše poti v omrežju, ki ga bomo ugnali z znanim Dijkstrovim algoritmom.

Interpolacijski problem in makroelementi

V praksi terena nimamo danega v zaključeni obliki s predpisom. Običajno v naravi izmerimo diskretne podatke, iz katerih nato aproksimiramo teren. Relief območja določimo iz točk v prostoru $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, V$. Eden od načinov je iskanje interpolacijske ploskve, torej take, ki poteka skozi dane točke. Običajno jo zapišemo v obliki odsekoma linearne ploskve, saj je taka konstrukcija najbolj enostavna za uporabo. Vendar pa v tem primeru dobimo le zvezno ploskev in za dobro aproksimacijo potrebujemo veliko meritev. Ker bomo študirali krivulje, vložene na ploskev, potrebujemo večjo fleksibilnost. Namesto linearnih bomo uporabili odsekoma polinomske ploskve (zlepke) višjih stopenj. Tako lahko dobimo ploskev, ki je vsaj zvezno odvedljiva, zato bodo tudi iskane krivulje bolj naravnih oblik.

Z najmanj truda na Šmarno goro!

Zapišimo problem natančneje. Konveksno ovojnico danih točk $\mathbf{v}_i := (x_i, y_i)$ v ravnini označimo z Ω .

Definicija 1. Funkciji

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

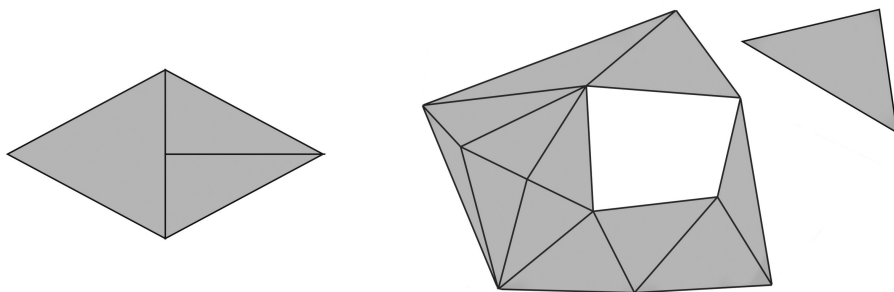
ki zadošča pogojem

$$f(\mathbf{v}_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, V,$$

pravimo *interpolacijska funkcija*.

Razdelitvi območja Ω na trikotnike z oglišči v točkah \mathbf{v}_i pravimo *triangulacija območja Ω* .

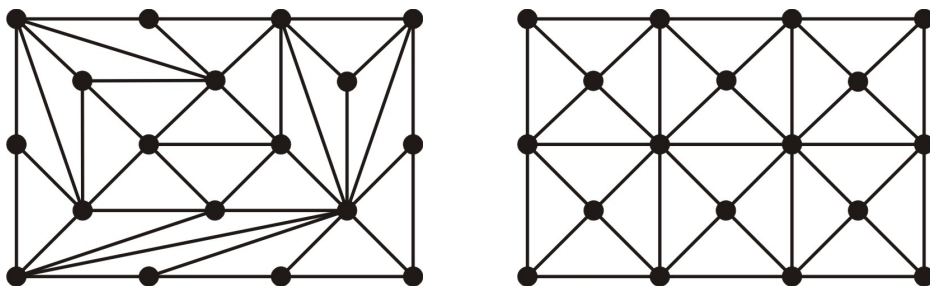
Definicija 2. Triangulacija je *regularna*, če je neprazen presek poljubnih dveh različnih trikotnikov bodisi skupno oglišče bodisi skupna stranica.



Slika 1. Leva množica ni regularna triangulacija, desna je.

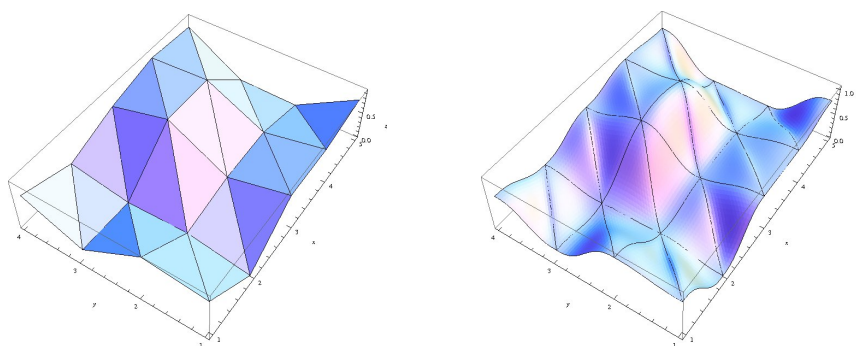
Na sliki 1 sta prikazana primera neregularne in regularne triangulacije. Triangulacijo na točkah \mathbf{v}_i lahko izberemo na več načinov. Na sliki 2 sta prikazani dve različni regularni triangulaciji na istih točkah. Desna triangulacija je bolj simetrična. Izkaže se, da je zaradi numerične stabilnosti bolje izbirati triangulacije s trikotniki, ki povezujejo bližnje točke in nimajo premajhnih notranjih kotov. Izbira triangulacije močno vpliva na obliko interpolacijske ploskve.

Nad dano triangulacijo želimo konstruirati gladko interpolacijsko funkcijo, katere zožitev na poljuben trikotnik triangulacije je dvorazsežni polinom predpisane stopnje. Razredu takih funkcij pravimo *zlepki*.



Slika 2. Dve različni triangulaciji istega območja glede na dane točke v ravnini. Desna triangulacija je za interpolacijo primernejša.

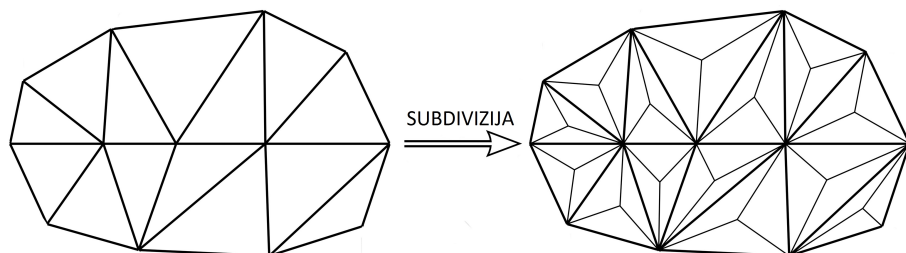
Glavne težave, ki nastanejo pri konstrukciji zlepka, so obstoj in enoličnost interpolanta, praviloma je treba reševati velik sistem linearnih enačb, oblika zlepka pa ni odvisna samo od bližnjih podatkov (sprememba enega interpolacijskega podatka lahko vpliva na obliko celotnega zlepka). Omenjenim težavam se izognemo tako, da za reševanje problema uporabimo poseben razred gladkih zlepkov, *makroelemente* (slika 3). Makroelementi so odsekoma polinomske funkcije, pri katerih se polinomi, definirani na sosednjih trikotnikih triangulacije, „zlepajo“ gladko (po navadi vsaj enkrat zvezno odvedljivo), obenem pa je konstrukcija posameznih polinomskih delov lokalna. To pomeni, da polinomsko funkcijo, ki definira del makroelementa nad izbranim trikotnikom, določimo samo na podlagi podatkov nad tem trikotnikom. Nad stranico, ki je skupna sosednjima trikotnikoma, uporabimo



Slika 3. Zvezen linearen interpolant (levo) in C^1 gladek makroelement (desno).

enake podatke za konstrukcijo obeh sosednjih polinomov. Zlepek je tako odvisen le od lokalnih podatkov, pri reševanju interpolacijskega problema pa je treba reševati le majhne sisteme linearnih enačb.

Dodatna prednost makroelementov je tudi enostaven in učinkovit postopek *subdivizije*, tj. razbitja obstoječe ploskve na več manjših delov. Eno izmed možnih subdivizij zleпка dobimo tako, da vsak trikotnik triangulacije razbijemo na tri trikotnike (slika 4), kar razdeli tudi pripadajočo polinomsko ploskev. Ker z vsakim korakom subdivizije povečujemo število robnih krivulj, lahko omenjeni postopek uporabimo za povečevanje natančnosti optimalne poti.



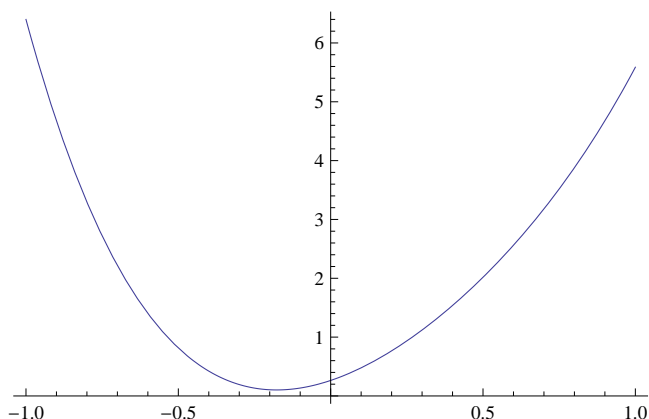
Slika 4. Osnovna triangulacija (levo) in en korak subdivizije (desno).

Energijski funkcional

Robne krivulje makroelementa so polinomske krivulje. Zanima nas energija, ki jo porabimo za premik vzdolž ene od njih. Označimo porabo energije na enotsko dolžino poti z M . Očitno je funkcija M odvisna od naklona terena v smeri gibanja in ni simetrična glede na gibanje po klancu navzgor ali navzdol. Intuitivno je najlažje gibanje po rahlem klancu navzdol, pri velikih naklonih pa je gibanje navzgor lažje od gibanja navzdol. Z aproksimacijo empiričnih meritev po metodi najmanjših kvadratov [4] dobimo porabo energije za povprečnega pohodnika v obliki

$$M(s) = 0.2635 + 1.737 s + 4.237 s^2 - 2.143 s^3 + 1.493 s^4.$$

V zgornji izražavi je s tangens naklonskega kota terena v smeri gibanja, M pa merimo v kJ/m. S slike 5 vidimo, da se M obnaša po predvidevanjih. Iz



Slika 5. Graf porabe energije na meter prehojene poti (kJ/m) v odvisnosti od naklona poti. Pozitivni naklon pomeni gibanje po klancu navzgor.

izkušeni pričakujemo, da bomo pri nekem kritičnem naklonu začeli hoditi v ključih, da bi se izognili prestrmi poti, in bomo kljub nekoliko daljši poti prihranili pri celotni porabi energije. Analiza poti s konstantnim naklonom to potrjuje [4]. Pri hoji navzgor je kritični naklonski kot enak 15.6° , pri hoji navzdol pa 12.5° .

Naj bo $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, kjer je $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ vektorska funkcija parametra $t \in [0, 1]$, robna krivulja makroelementa. Naklon φ pri gibanju po krivulji seveda ni konstanten, zato moramo uporabiti infinitezimalne pre-mike. Prispevek energije E na delu loka krivulje $d\ell$ je enak

$$dE(\mathbf{r}) = M(s(t)) d\ell,$$

kjer je

$$s(t) = \tan \varphi(t) = \frac{\dot{r}_z(t)}{\sqrt{\dot{r}_x^2(t) + \dot{r}_y^2(t)}}.$$

Iz diferencialne geometrije vemo, da je

$$d\ell = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt,$$

zato je poraba energije po celotni krivulji enaka integralu

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^1 M(s(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt.$$

Tako izpeljani funkcional je posplošitev funkcionala, uporabljenega v [4] za primer konstantnega naklona.

Reševanje optimizacijskega problema

Z definiranjem energijskega funkcionala v prejšnjem razdelku lahko zastavljeni problem iskanja optimalne poti vzpona prevedemo na iskanje najcenejše poti v grafu. Ta problem je dobro poznan in ga zlahka uženemo z Dijkstrovim algoritmom, ki je opisan v naslednjem razdelku.

Graf, ki ga kot vhodni podatek zahteva Dijkstrov algoritem, je kar triangulacija na točkah v_i . Točke grafa so oglišča trikotnikov, povezave grafa pa so njihove stranice. Vsaki povezavi e določimo ceno w_e s pomočjo energijskega funkcionala, tako da je $w_e = E(\mathbf{r})$, kjer je \mathbf{r} krivulja na ploskvi nad stranico, ki ustreza povezavi e .

Omenimo še, da smo izbrali triangulacijo, ki je čim bolj simetrična, da ne bi prišlo do favoriziranja smeri. Triangulacije so podobne triangulaciji s slike 2, desno. Tako zagotovimo tudi morebitno hojo v ključih.

Dijkstrov algoritem

Dana sta usmerjen graf $G = (V, E)$, kjer sta V množica točk in E množica povezav, ter začetna točka s . Vsaka povezava e ima ceno $w_e \geq 0$. (Cena v praksi lahko pomeni dolžino poti med krajiščema povezave, ceno prevoza po poti med krajiščema, ...) Cena poti P je vsota cen vseh povezav v P . Algoritem določi najcenejšo pot od s do vsake druge točke grafa G .

Definiramo množico S točk u , za katere smo že določili dolžino najcenejše poti $c(u)$ od točke s . To je „raziskani“ del grafa. Na začetku je $S = \{s\}$ in $c(s) = 0$. Za vsako točko $v \in V - S$ določimo najcenejšo pot, ki jo lahko dobimo tako, da potujemo po raziskanem delu S do neke točke u in po povezavi od u do v . Torej opazujemo količino

$$c'(v) = \min_{\substack{e=uv: \\ u \in S}} (c(u) + w_e).$$

Izberemo točko $v \in V - S$, za katero je ta količina najmanjša, dodamo v v množico S in definiramo $c(v) = c'(v)$. Zapomnimo si tudi povezavo uv , na kateri je bil dosežen minimum. Iz teh povezav potem rekonstruiramo najcenejšo pot.

Najcenejšo pot P_v od s do v dobimo tako, da začnemo v v , se premaknemo po povezavi, ki smo jo shranili za v , proti u . Zdaj se premaknemo po povezavi, ki smo jo shranili za u . Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do točke s .

Več o Dijkstrovem algoritmu je zapisano v [1].

Numerični primeri

Za konec si oglejmo primer optimalnih poti na Šmarno goro (slika 6). Iz približno 40.000 podatkov s terena, pridobljenih iz javne baze, smo nad triangulacijo, ki jo dobimo tako, da vsakemu elementu pravokotne mreže dodamo diagonali (slika 2, desno), konstruirali kubični C^1 interpolacijski zlepek. Za tri priljubljena izhodišča poti na Šmarno goro smo izračunali optimalne poti in jih primerjali z dejanskimi. Tabela 1 prikazuje porabo energije pri vzponu po posamezni poti. Izkaže se, da se izračunane poti dobro ujemajo s potmi v naravi. Na bolj strmih predelih poti se pričakovano pojavijo ključi.

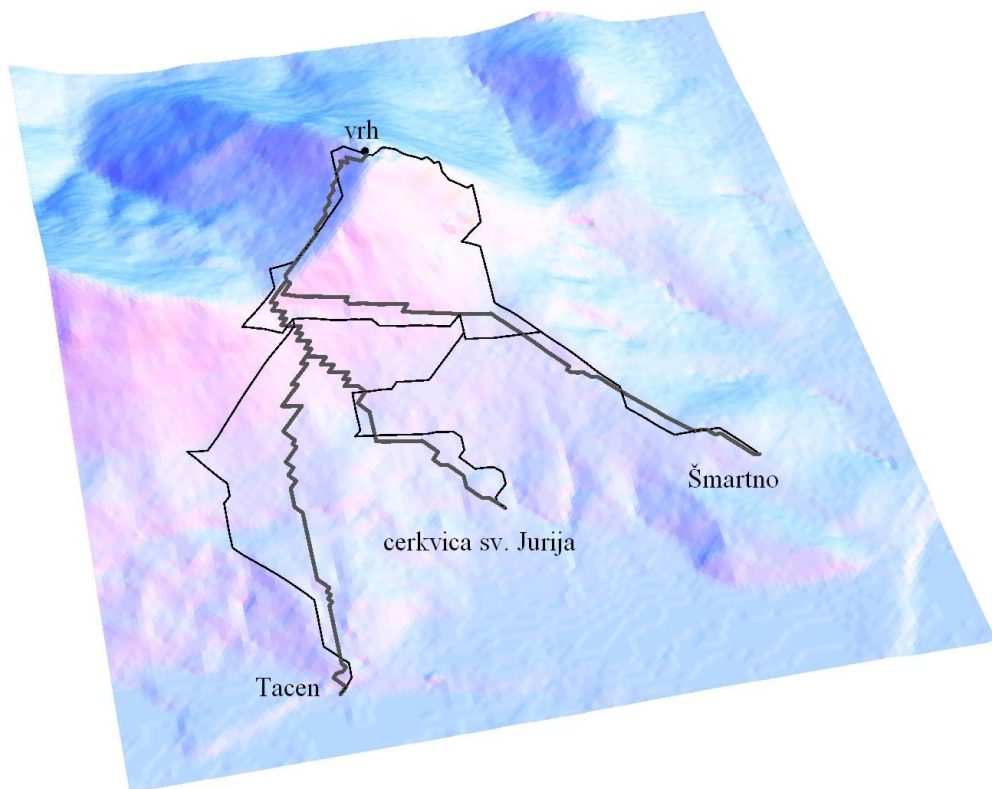
Pot iz Tacna čez Spodnjo kuhinjo zavije levo od optimalne poti, predvidevamo, da zaradi njenega naklona. Za nedeljske sprehajalce je pot pri Spodnji kuhinji prestrma in prezahtevna zaradi korenin, zato naredi ovinek. Pot, ki jo vrne naš algoritem, je bolj direktna in podobna poti, ki velja za tekmovanje „Rekord Šmarne gore“.

Romarska pot z optimalne poti zavije desno, kjer se pridruži Šmarski poti. Del optimalne poti, ki ga izpusti, je precej strm in ni preveč primeren za starejše ljudi ali ljudi z manj kondicije. Romarska pot je tako v celoti bolj naporna (ker je daljša), vendar bolj položna od optimalne.

Partizanska pot se začne v Šmartnem in nadaljuje ves čas naravnost proti vrhu, medtem ko optimalna pot poteka zelo podobno Šmarski poti (ki se na sedlu pridruži preostalim potem). Tak rezultat ne preseneča, saj so Partizansko pot uporabljali kurirji med drugo svetovno vojno, ki so želeli biti na vrhu v čim krajšem času, ne pa z najmanj porabljenimi energije.

Dober oris optimalnih poti dobimo že iz bistveno manj podatkov. Če vzamemo približno 900 podatkov s terena, se optimalne poti (slika 7, levo) dobro ujemajo s potmi s slike 6. S subdivizijo površine lahko pridemo do še boljših rezultatov (slika 7, desno). Na sliki 7, spodaj, vidimo, da odsekoma linearna ploskev preslabo aproksimira pravi relief, zato dobljene optimalne poti niso dobre.

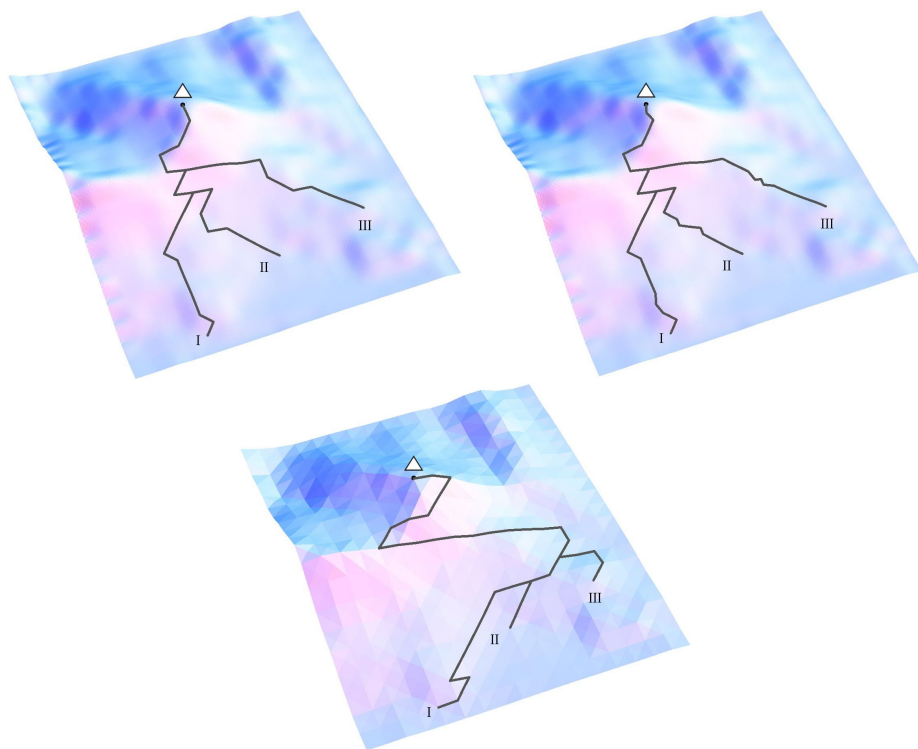
Z najmanj truda na Šmarno goro!



Slika 6. Slika Šmarne gore, nekaj najbolj priljubljenih (tanke črne črte) in izračunanih optimalnih poti (debele sive črte).

Izhodišče	Pot	Poraba (kJ)	Prihranek (kJ)	Razlika (%)
Tacen (čez Sp. kuhinjo)	prava	1589	186	11,7
	optimalna	1403		
c. sv. Jurija (Romarska pot)	prava	1484	232	15,6
	optimalna	1252		
Šmartno (Šmarska pot)	prava	1403	153	10,9
	optimalna	1250		
Šmartno (Partizanska pot)	prava	1456	206	14,1
	optimalna	1250		

Tabela 1. Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro.



Slika 7. Optimalne poti na grobi mreži (levo), na mreži po enem koraku subdivizije (desno) in na odsekom linearni ploskvi (spodaj).

LITERATURA

- [1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Edition, The MIT Press, 2009.
- [2] G. Jaklič in E. Žagar, *Shape preserving interpolation by spatial cubic G^1 splines*, Annali dell'Università di Ferrara, 54(2), 259–267, 2008.
- [3] T. Kanduč, *Makro elementi*, Univerza v Ljubljani, FMF, diplomsko delo, 2009.
- [4] M. Llobera in T. Sluckin, *Zigzagging: Theoretical insights on climbing strategies*, J. Theo. Bio, **249**, 206–217, 2007.
- [5] T. Schröter in M.-N. Glöckner, *How to Climb a Mountain? Simulating efficient ways to the mountain top*, ECMI Newsletter, **46**, 2009.
- [6] L. L. Schumaker in M.-J. Lai, *Spline functions on triangulations*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 2007.
- [7] J. Wallner, *Note on curve and surface energies*, Comput. Aided Geom. Design, 24(8–9), 494–498, 2007.