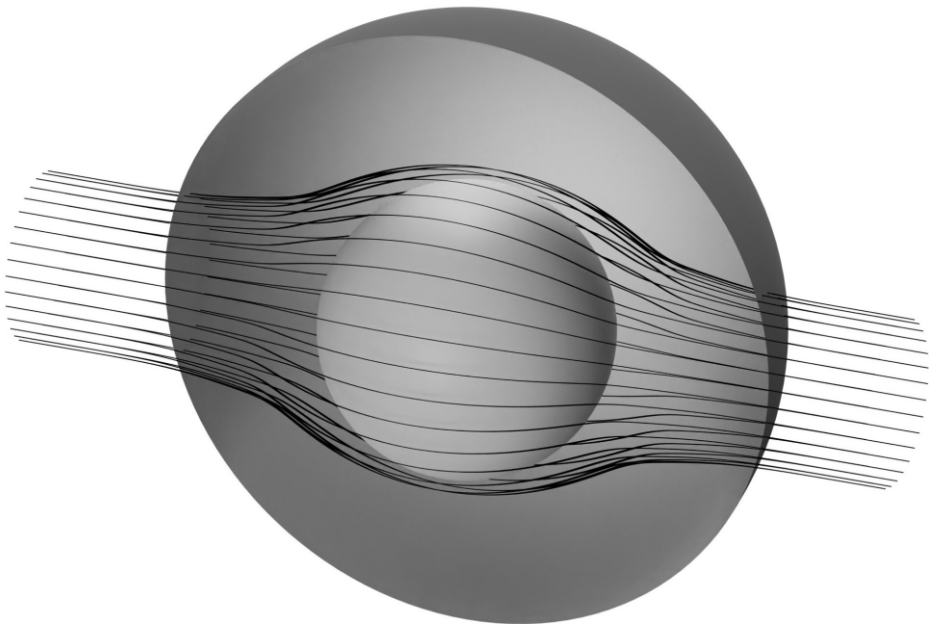


OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2020, letnik 67, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2020 DMFA Slovenije – 2130

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

POVABILO V INVERZNE POLGRUPE

GANNA KUDRYAVTSEVA¹

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 20M18, 20M20, 20M05

Ključne besede: inverzna polgrupa, simetrična inverzna polgrupa, parcialno delovanje, razširitev grupe, prosta inverzna polgrupa

V članku predstavimo uvod v teorijo inverznih polgrup. Poseben poudarek je na simetrični inverzni polgrupi, ki jo sestavljajo vse parcialno definirane injektivne preslikave iz množice vase, ter na inverznih polgrupah, ki jih dobimo iz grup, ki parcialno delujejo na polmrežah s pomočjo konstrukcije semidirektnega produkta. Podrobno opišemo nekaj pomembnih primerov inverznih polgrup, ki nastanejo s pomočjo omenjene konstrukcije. Bralcu tako predstavimo ne le uvod v osnove teorije inverznih polgrup, pač pa tudi uvod v področje trenutnih aktivnih raziskav iz inverznih polgrup in njihovih posplošitev.

INVITATION TO INVERSE SEMIGROUPS

We present an introduction to inverse semigroup theory with a special focus on the symmetric inverse semigroup that consists of all partial injective maps from a set to itself, and also on inverse semigroups which can be obtained from a group acting partially on a semilattice using a semidirect product construction. We present a detailed description of several examples which arise from this construction. We thus provide a reader not only with an introduction to the basics of the inverse semigroup theory, but also with an introduction to active ongoing research on inverse semigroups and their generalizations.

Uvod

Potreba po vpeljavi inverznih polgrup je prišla iz raziskav v diferencialni geometriji v sredini 20. stoletja. V tistem obdobju je bila teorija grup kot abstraktna veda o komponiranju obrnljivih preslikav praktično edino poglavje algebre, ki je spodbujalo razvoj geometrije. V geometriji pa je pogosto naravno obravnavati bijektivne preslikave med različnimi množicami ali med podmnožicami neke univerzalne množice. S pomočjo teorije grup takih objektov ni bilo možno opisati, zato je ruski matematik V. V. Vagner² na začetku petdesetih let 20. stoletja predlagal za parcialno definirane preslikave uporabo operacije kompozituma binarnih relacij in je prvi razvil osnove teorije takih algebraičnih struktur [12], ki jih je imenoval posplošene grupe. Neodvisno od Vagnerja je eno leto kasneje iste algebraične strukture

¹ Avtorica je bila delno podprta s strani programa P1-0288, ki ga financira ARRS.

² ki je sam raje transliteriral svoj priimek Wagner.

vpeljal G. B. Preston [10], ki jih je imenoval z njihovim sedanjim imenom – inverzne polgrupe. Poleg diferencialne geometrije so inverzne polgrupe kasneje našle uporabo tudi v teoriji C^* -algeber, kombinatorični teoriji grup in linearni logiki. Inverzne polgrupe se uporabljajo tudi v fiziki, in sicer v teoriji kvazikristalov ter v fiziki trdne snovi. Več informacij bralec lahko najde v knjigi [7] in njeni bibliografiji.

Parcialne permutacije

Parcialna permutacija množice X je injektivna preslikava $p: X_1 \rightarrow X$, kjer je X_1 podmnožica množice X . Množici X_1 in $p(X_1)$ imenujemo *domena* in *kodomena* parcialne permutacije p in ju označimo z $\text{dom}(p)$ in $\text{ran}(p)$. Naj bo $\mathcal{I}(X)$ množica vseh parcialnih permutacij množice X . V primeru, ko je $X_1 = X$ in je $p: X \rightarrow X$ bijekcija, postane parcialna permutacija množice X kar permutacija. Množico vseh permutacij množice X označimo s $\mathcal{S}(X)$.

Če je $X_1 = X$, parcialna permutacija še ni nujno permutacija, na primer preslikava $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definirana s predpisom $p(n) = n + 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ni permutacija, ker njena kodomena ni enaka množici \mathbb{N} . Če je množica X končna, potem je parcialna permutacija p permutacija natanko tedaj, ko je $X_1 = X$.

Rang parcialne permutacije $p: X \rightarrow X$ je število $\text{rang}(p) = |X_1| = |p(X_1)|$, kjer je $|X|$ oznaka za moč množice X . Če je množica X končna, potem so permutacije množice X natanko tiste parcialne permutacije, katerih rang je enak $|X|$.

Podobno kot permutacije tudi parcialne permutacije lahko podamo s pomočjo tabel. Oglejmo si naslednji primer. Naj bo $X = \{1, 2, 3, 4\}$ in naj bo $p: \text{dom}(p) \rightarrow X$ parcialna permutacija množice X , kjer je $\text{dom}(p) = \{1, 3\}$, $p(1) = 2$ in $p(3) = 1$. Parcialno permutacijo p potem lahko zapišemo v obliki tabele

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \emptyset & 1 & \emptyset \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ker je $p(1) = 2$, smo pod številom 1 zapisali število 2. Podobno smo pod številom 3 zapisali število 1. Pod številoma 2 in 4 pa smo zapisali simbol prazne množice \emptyset , s čimer smo označili dejstvo, da $2, 4 \notin \text{dom}(p)$.

Kompozitum parcialnih permutacij p in q je nova parcialna permutacija pq , kjer za vsak $x \in X$ velja $pq(x) = p(q(x))$, seveda če je $x \in \text{dom}(q)$ in $q(x) \in \text{dom}(p)$. Če $x \notin \text{dom}(q)$ ali pa $x \in \text{dom}(q)$ a $q(x) \notin \text{dom}(p)$, potem $x \notin \text{dom}(pq)$. Ekvivalentno, pq je parcialna permutacija množice X , kjer je

$$\text{dom}(pq) = q^{-1}(\text{dom}(p)) = \{x \in X : q(x) \in \text{dom}(p)\}$$

in $pq(x) = p(q(x))$ za vsak $x \in \text{dom}(pq)$. Da se pokazati, da je tako definirana operacija kompozituma parcialnih permutacij na množici X asociativna.

Izračunajmo na primer produkt pq , kjer sta

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \emptyset & 1 & \emptyset \end{pmatrix} \text{ in } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najprej zapišemo nastavek za pq – naslednjo tabelo s prazno drugo vrstico

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

in nato zapovrstjo izračunamo $pq(n)$ za $n = 1, 2, 3, 4$, seveda, če je ta definiran. Ker $1 \notin \text{dom}(q)$, tudi $1 \notin \text{dom}(pq)$ in zato v tabeli pod številom 1 zapišemo \emptyset :

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & & & \end{pmatrix}.$$

Ker je $q(2) = 1$ in $p(q(2)) = p(1) = 2$, je $2 \in \text{dom}(pq)$ in $pq(2) = 2$. Zato v tabeli pod številom 2 zapišemo 2:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 2 & & \end{pmatrix}.$$

Ker je $q(3) = 4$ in $4 \notin \text{dom}(p)$, potem $3 \notin \text{dom}(pq)$. Zato zapišemo:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 2 & \emptyset & \end{pmatrix}.$$

Končno, ker je $q(4) = 3$ in $p(3) = 1$, je $4 \in \text{dom}(pq)$ in $pq(4) = p(q(4)) = p(3) = 1$. Zdaj je produkt pq izračunan:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 2 & \emptyset & 1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $Y \subseteq X$. Označimo z 1_Y parcialno permutacijo, za katero je $\text{dom}(1_Y) = Y$ in $1_Y(y) = y$ za vsak $y \in Y$. Na primer, za $Y = \{1, 3\}$ in $X = \{1, 2, 3, 4\}$, je

$$1_Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \emptyset & 3 & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Spomnimo se, da se neprazna množica S z asociativno binarno operacijo imenuje *polgrupa*. Polgrupa S se imenuje *monoid*, če obstaja tak element $1 \in S$, da velja $1x = x1 = x$ za vsak $x \in S$. Ker za vsako parcialno permutacijo $p \in \mathcal{I}(X)$ drži $p1_X = 1_X p = p$, je $\mathcal{I}(X)$ monoid.

Zastavimo si vprašanje, ali za parcialno permutacijo $p \in \mathcal{I}(X)$ obstaja njej inverzna parcialna permutacija. Tu je vse odvisno od definicije inverzne

parcialne permutacije. Če uporabimo definicijo grupnega inverza, se hitro vidi, da ima $p \in \mathcal{I}(X)$ inverz natanko tedaj, ko je p bijekcija, torej, ko je $p \in \mathcal{S}(X)$. Zato $\mathcal{I}(X)$ ni grupa.

Poskusimo prilagoditi definicijo inverza. Vzamemo parcialno permutacijo p iz (1) in opazimo, da za parcialno permutacijo

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

velja:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} = 1_{\{1,2\}} \text{ in } qp = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \emptyset & 3 & \emptyset \end{pmatrix} = 1_{\{1,3\}}.$$

Produkta pq in qp sta torej identični preslikavi na podmnožicah množice X . Razen tega s pomočjo preprostega računa vidimo, da je $pqp = p$ in $qpq = q$. Zato je smiselno definirati $p^{-1} = q$. Na splošno, če je $p \in \mathcal{I}(X)$, je njen *inverz* definiran kot parcialna permutacija p^{-1} , kjer je $\text{dom}(p^{-1}) = \text{ran}(p)$ in za vsak $x \in \text{dom}(p^{-1})$ drži $p^{-1}(x) = y$, kjer je $p(y) = x$. Ker je vsak element $p \in \mathcal{I}(X)$ bijekcija med $\text{dom}(p)$ in $\text{ran}(p)$, njegov inverz p^{-1} obstaja in je enolično določen.

Inverzne polgrupe: definicija in prve lastnosti

Inverzne polgrupe in monoidi

Naj bo S polgrupa. Element $p \in S$ imenujemo *regularen element*, če obstaja tak $q \in S$, da velja $pqp = p$ in $qpq = q$. Element q potem imenujemo *inverz* elementa p . Se pravi, element $p \in S$ je regularen natanko tedaj, ko ima inverz. Naj bo S grupa. Potem je seveda $aa^{-1}a = a$ in $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ za vsak $a \in S$. Poleg tega iz enakosti $aba = a$ sledi, da je $b = a^{-1}$: če enakost $aba = a$ pomnožimo z a^{-1} z desne, dobimo $abaa^{-1} = aa^{-1}$, se pravi $ab = 1$. Če isto enakost pomnožimo z a^{-1} z leve, podobno dobimo $ba = 1$. Torej je po definiciji grupnega inverza $b = a^{-1}$. Zato je pojem inverza v polgrupi posplošitev pojma inverza v grupi.

Če je S polgrupa in $p \in S$ regularen element, se lahko zgodi, da ima p več inverzov (to se zgodi na primer v polgrupi vseh transformacij množice X , kjer je $|X| \geq 2$, podrobnosti najdete v knjigi [4]). Polgrupo S imenujemo *regularna polgrupa*, če je vsak element $s \in S$ regularen.

Polgrupo S imenujemo *inverzna polgrupa*, če ima vsak $p \in S$ natanko en inverz. Na primer, vsaka grupa je inverzna polgrupa. Polgrupa $\mathcal{I}(X)$, ki smo jo definirali v prejšnjem razdelku, je, kot smo že preverili, tudi inverzna polgrupa. Ker ima $\mathcal{I}(X)$ identični element, je $\mathcal{I}(X)$ tudi *inverzni monoid*. Inverzni monoid $\mathcal{I}(X)$ se imenuje *simetrični inverzni monoid* na množici X .

Včasih pravimo, da je $\mathcal{I}(X)$ *simetrična inverzna polgrupa* na množici X . Obe terminologiji sta korektni, uporaba besede »monoid« poudarja dejstvo, da je $\mathcal{I}(X)$ monoid, uporaba besede »polgrupa« pa tega dejstva posebej ne izpostavlja.

Inverz elementa a inverzne polgrupe S označimo z a^{-1} . Element a^{-1} je torej edini element b , za katerega veljata enakosti $aba = a$ in $bab = b$. Iz definicije takoj sledi, da je $(a^{-1})^{-1} = a$.

Element e polgrupe S , za katerega velja $e^2 = e$, imenujemo *idempotent*. Množico idempotentov polgrupe S označimo z $E(S)$. Vsaka grupa vsebuje natanko en idempotent – identiteto, polgrupe pa lahko vsebujejo več idempotentov (ali pa sploh nobenega).

Naj bo S inverzna polgrupa in $a \in S$. Iz $(aa^{-1})(aa^{-1}) = (aa^{-1}a)a^{-1} = aa^{-1}$ sledi, da je $aa^{-1} \in E(S)$. Podobno je tudi $a^{-1}a \in E(S)$. Označimo $\mathbf{d}(a) = a^{-1}a$ in $\mathbf{r}(a) = aa^{-1}$. V primeru $S = \mathcal{I}(X)$, je $\mathbf{d}(a) = 1_{\text{dom}(a)}$ in $\mathbf{r}(a) = 1_{\text{ran}(a)}$. Zato idempotenta $\mathbf{d}(a)$ in $\mathbf{r}(a)$ imenujemo *domenski idempotent* in *kodomenski idempotent* elementa a .

Lema 1. *Naj bo S inverzna polgrupa in $e, f \in E(S)$. Potem je $ef \in E(S)$ in $ef = fe$.*

Dokaz. Označimo $x = (ef)^{-1}$. Iz enakosti $(fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe$ sledi, da je $fxe \in E(S)$. Ker je

$$(ef)(fxe)(ef) = (ef)x(ef) = ef, \quad (fxe)(ef)(fxe) = (fxe)(fxe) = fxe,$$

je $(fxe)^{-1} = ef$. Po drugi strani, iz $eee = e$ sledi, da je $e^{-1} = e$ za vsak $e \in E(S)$. Zato je $(fxe)^{-1} = fxe$ in posledično $fxe = ef$. Torej je $ef \in E(S)$ in podobno $fe \in E(S)$. Ker smo označili $x = (ef)^{-1}$, je $x = ef$. Zato velja $ef = fxe = f(ef)^{-1}e = fefe = (fe)(fe) = fe$. ■

Lema 1 nam pove, da je množica $E(S)$ zaprta za množenje in je tako podpolgrupa polgrupe S . Omenimo še eno ključno lastnost inverza, ki posplošuje ustrezno lastnost grupnega inverza.

Lema 2. *Naj bo S inverzna polgrupa in $a, b \in S$. Potem je $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Dokaz. Po definiciji inverza moramo preveriti, da veljata enakosti $(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = ab$ in $(b^{-1}a^{-1})ab(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$. Z upoštevanjem tega, da je $bb^{-1}, a^{-1}a \in E(S)$, in leme 1, preoblikujemo levo stran prve enakosti v $(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = a(a^{-1}a)(bb^{-1})b = ab$. Drugo enakost preverimo na podoben način. ■

Naravna delna urejenost

Za elementa a, b inverzne polgrupe S definiramo $a \leq b$, če je $a = be$ za neki $e \in E(S)$. Relacija \leq je refleksivna, ker je $a = a\mathbf{d}(a)$, in tranzitivna, ker iz $a = be$ in $b = cf$ sledi, da je $a = cfe$ in je $ef \in E(S)$ na podlagi leme 1. Pokažimo, da je relacija \leq antisimetrična. Predpostavimo, da je $a \leq b$ in $b \leq a$. Po definiciji je $b = ae$ in $a = bf$, kjer sta $e, f \in E(S)$. Potem je $b = ae = bfe = bef$. Če enakost $b = bef$ pomnožimo z desne s f , dobimo $bf = bef$ in tako $a = b$. Zato je \leq delna urejenost na S , ki jo imenujemo *naravna delna urejenost*.

Naj bo $a \leq b$ in $e \in E(S)$ tak element, da je $a = be$. Potem je $ae = bee = be = a$. Če enakost $ae = a$ pomnožimo z a^{-1} z leve, dobimo $\mathbf{d}(a)e = \mathbf{d}(a)$. Posledično imamo $a = a\mathbf{d}(a) = be\mathbf{d}(a) = b\mathbf{d}(a)$. Zato $a \leq b$ drži natanko takrat, ko je $a = b\mathbf{d}(a)$. Na podoben način se da pokazati, da enakost $a = eb$ za neki $e \in E(S)$ velja natanko takrat, ko je $a = \mathbf{r}(a)b$.

Spet naj bo $a \leq b$, se pravi $a = b\mathbf{d}(a)$. S pomočjo leme 2 imamo $a^{-1} = \mathbf{d}(a)b^{-1}$. Če to enakost pomnožimo z leve z a in z desne z b , dobimo: $aa^{-1}b = a\mathbf{d}(a)b^{-1}b = b\mathbf{d}(a)\mathbf{d}(a)b^{-1}b = (bb^{-1}b)\mathbf{d}(a) = b\mathbf{d}(a) = a$. Torej je $a = \mathbf{r}(a)b$. Podobno se da pokazati, da iz enakosti $a = \mathbf{r}(a)b$ sledi, da je $a = b\mathbf{d}(a)$. Dokazali smo naslednjo trditvev.

Trditev 3. Naj bo S inverzna polgrupa in $a, b \in S$. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. $a \leq b$;
2. $a = eb$ za neki $e \in E(S)$;
3. $a = b\mathbf{d}(a)$;
4. $a = \mathbf{r}(a)b$.

V primeru $a, b \in \mathcal{I}(X)$ neenakost $a \leq b$ drži natanko takrat, ko je a zožitev elementa b , torej je $a = 1_{\text{ran}(a)}b = b1_{\text{dom}(a)}$. Z drugimi besedami, $a \leq b$ velja natanko takrat, ko je $\text{dom}(a) \subseteq \text{dom}(b)$ in $a(x) = b(x)$ za vsak $x \in \text{dom}(a)$. Na primer, zožitve parcialne permutacije

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 2 & \emptyset & 1 \end{pmatrix}$$

so

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & 2 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Označimo z 0 parcialno permutacijo z $\text{dom}(0) = \emptyset$. Ker velja $a0 = 0a = 0$ za vsak $a \in \mathcal{I}(X)$, parcialno permutacijo 0 imenujemo *ničelna* parcialna permutacija.

Polmreže

Oglejmo si še strukturo polgrup, ki vsebujejo zgolj idempotente. Naj bo E taka polgrupa. Najprej povejmo, da je E avtomatično inverzna polgrupa, ker ima vsak $e \in E$ en sam inverz, in to je ravno element e . Vzemimo $e, f \in E$. Potem je $ef \leq e, f$. Predpostavimo, da je $g \leq e, f$. Potem je $g = \mathbf{ed}(g) = eg$ in podobno $g = fg$. Zato je $g = eg = efg$ in tako $g \leq ef$. Pokazali smo, da je ef največja spodnja meja za elementa e in f glede na delno urejenost \leq na E . Delno urejeno množico, kjer ima vsak par elementov največjo spodnjo mejo, imenujemo *polmreža*. Torej je (E, \leq) polmreža in največja spodnja meja $e \wedge f$ elementov e in f je enaka ef . Nasprotno, naj bo (E, \leq) polmreža in z $e \wedge f$ označimo največjo spodnjo mejo elementov e in f . Potem je E z operacijo \wedge polgrupa, katere elementi so vsi idempotenti. Zato polgrupe, ki vsebujejo le idempotente, lahko identificiramo s polmrežami. Pogosto take polgrupe imenujemo kar *polmreže*. Za inverzno polgrupo S rečemo, da je $E(S)$ njena *polmreža idempotentov*.

Enostavno je videti, da so idempotenti polgrupe $\mathcal{I}(X)$ natanko parcialne permutacije oblike 1_Y , kjer je $Y \subseteq X$. Razen tega za $Y, Z \subseteq X$ velja

$$1_Y 1_Z = 1_{Y \cap Z}. \quad (2)$$

To pomeni, da je struktura polmreže idempotentov polgrupe $\mathcal{I}(X)$ »podobna«
strukturi polmreže potenčne množice $\mathcal{P}(X)$ z operacijo preseka podmnožic. Matematično natančno to opišemo z uporabo pojma *izomorfizem polmrež*: preslikava $Y \mapsto 1_Y$, kjer je $Y \subseteq X$, je izomorfizem med polmrežo $\mathcal{P}(X)$ in polmrežo $E(\mathcal{I}(X))$. To pomeni, da je dana preslikava bijekcija, ki zaradi (2) ohranja polmrežno operacijo.

Vagner-Prestonov izrek

Spomnimo se, da nam Cayleyjev izrek pove, da se da vsako grupo natančno upodobiti v neki simetrični grupi. Z drugimi besedami, vsaka grupa je izomorfná podgrupi neke simetrične grupe $\mathcal{S}(X)$. Ideja dokaza je dokaj preprosta: poljubno grupo G lahko zvesto upodobimo v simetrični grupi $\mathcal{S}(G)$ s pomočjo *leve regularne upodobitve*, ki je preslikava $\varphi: G \rightarrow \mathcal{S}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, kjer je $\varphi_g(h) = gh$ za vsak $h \in G$.

Vagner-Prestonov izrek, ki ga je prvi dokazal leta 1953 V. V. Vagner [12] in eno leto kasneje neodvisno še G. B. Preston [10], je posplošitev Cayleyjevega izreka na inverzne polgrupe. Pri tem vlogo simetrične grupe $\mathcal{S}(X)$ prevzame simetrična inverzna polgrupa $\mathcal{I}(X)$. Vagner-Prestonov izrek nam pove, da vsako inverzno polgrupo lahko z levo regularno upodobitvijo vložimo v simetrično inverzno polgrupo $\mathcal{I}(S)$. *Leva regularna upodobitev* $\varphi: S \rightarrow \mathcal{I}(S)$ je definirana takole. Najprej opazimo, da za vsak $s \in S$ velja $s^{-1}sS = s^{-1}S$: očitno je $s^{-1}sS \subseteq s^{-1}S$, poleg tega pa za $a = s^{-1}b$ velja $a = s^{-1}ss^{-1}b$, zato je tudi $s^{-1}S \subseteq s^{-1}sS$. Zaradi simetrije velja tudi

$ss^{-1}S = sS$. Za $s \in S$ je $\text{dom}(\varphi_s) = s^{-1}sS = s^{-1}S$ in za $t \in s^{-1}S$ je $\varphi_s(t) = st \in ss^{-1}S = sS$. Da se pokazati, da je φ injektiven homomorfizem polgrup, glejte [9, Theorem IV.1.6] in [7, 1.5].

Konstrukcija inverznih polgrup iz grup in polmrež

Kot smo že omenili, je vsaka polmreža primer inverzne polgrupe, ki vsebuje le idempotente. Poleg tega je polmreža idempotentov grupe sestavljena le iz identičnega elementa. Vidimo, da so polmreže in grupe neke vrste »ekstremni« primer inverznih polgrup. Zastavimo si vprašanje: ali lahko iz grup in polmrež konstruiramo nove, bolj zanimive inverzne polgrupe? Katere inverzne polgrupe dobimo?

Semidirektni produkti grup in polmrež glede na delovanja

Naj bo G grupa in X neprazna množica. Grupa G deluje na množici X (z leve), če je za vsaka $g \in G$ in $x \in X$ definiran element $g \cdot x \in X$ ter velja:

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \text{ za vsaka } g, h \in G \text{ in } x \in X;$$

$$1 \cdot x = x \text{ za vsak } x \in X.$$

Element $g \cdot x$ označujemo tudi s $\varphi_g(x)$. Tako imamo za vsak $g \in G$ definirano preslikavo $\varphi_g: X \rightarrow X$, $x \mapsto g \cdot x$. Ker je $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$, je φ_g bijekcija, zato imamo homomorfizem grup $\varphi: G \rightarrow \mathcal{S}(X)$, definiran s predpisom $g \mapsto \varphi_g$. Velja tudi obratno: homomorfizem grup $\psi: G \rightarrow \mathcal{S}(X)$ definira delovanje grupe G na množici X s predpisom $x \mapsto \psi(g)(x)$, $g \in G$, $x \in X$. Zato obstaja bijekcija med delovanji grupe G na množici X in homomorfizmi $G \rightarrow \mathcal{S}(X)$.

Naj bo zdaj E polmreža. Predpostavimo, da je podano delovanje grupe G na E , ki je usklajeno z urejenostjo polmreže E , se pravi, zadošča pogoju:

$$e \leq f \Leftrightarrow g \cdot e \leq g \cdot f \text{ za vse } e, f \in E \text{ in } g \in G. \quad (3)$$

Če za delovanje grupe G na polmreži E velja pogoj (3), pravimo, da G deluje na E z *urejenostnimi avtomorfizmi*.

Navedimo primer delovanja grupe na polmreži z urejenostnimi avtomorfizmi. Naj bo G simetrična grupa $\mathcal{S}(X)$, kjer je $X = \{1, 2, \dots, n\}$, in naj bo $E = \mathcal{P}(X)$ polmreža vseh podmnožic množice X glede na operacijo preseka podmnožic. Za $g \in \mathcal{S}(X)$ in $Y \subseteq X$ definirajmo

$$g \cdot Y = g(Y) = \{g(y) : y \in Y\}.$$

Enostavno je videti, da smo definirali delovanje G na E z urejenostnimi avtomorfizmi.

Če imamo podano delovanje grupe G na polmreži E z urejenostnimi avtomorfizmi, lahko na množici $E \times G = \{(e, g) : e \in E, g \in G\}$ vpeljemo strukturo polgrupe s predpisom

$$(e, g)(f, h) = (e \wedge (g \cdot f), gh). \quad (4)$$

Hitro se da preveriti, da je $E \times G$ inverzna polgrupa, kjer je

$$(e, g)^{-1} = (g^{-1} \cdot e, g^{-1}).$$

Dobljeno inverzno polgrupo označimo z $E \rtimes G$ in jo imenujemo *semidirektni produkt* grupe G in polmreže E glede na podano delovanje.

Semidirektni produkti grup in polmrež glede na parcialna delovanja

Opisano konstrukcijo se da posplošiti z delovanj grup na polmrežah na tako imenovana parcialna delovanja. Parcialna delovanja se naravno pojavijo v različnih vejah matematike, glejte pregledni članek [2].

Naj bo G grupa in X neprazna množica. Funkcijo $Z \rightarrow X$, kjer je $Z \subseteq G \times X$, bomo imenovali *parcialna funkcija* iz $G \times X$ v X . Sliko elementa $(g, x) \in Z$ označimo z $g \cdot x$. Če je $(g, x) \in Z$, je element $g \cdot x$ *definiran*. Pravimo, da parcialna funkcija iz $G \times X$ v X , $(g, x) \mapsto g \cdot x$, definira *parcialno delovanje* grupe G na množici X (z leve), če veljajo pogoji:

- (A) če sta definirana $h \cdot x$ in $g \cdot (h \cdot x)$, potem je definiran $gh \cdot x$ in velja $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;
- (B) če je definiran $g \cdot x$, potem je definiran $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ in velja $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$;
- (C) za vsak $x \in X$ je $1 \cdot x$ definiran in enak x .

Za vsak $g \in G$ s $\varphi_g \in \mathcal{I}(X)$ označimo parcialno permutacijo, za katero je

$$\text{dom}(\varphi_g) = \{x \in X : \text{element } g \cdot x \text{ je definiran}\}$$

in za $x \in \text{dom}(\varphi_g)$ je $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Pogoj (A) nam pove, da je $\text{dom}(\varphi_g \varphi_h) \subseteq \text{dom}(\varphi_{gh})$ za vse $g, h \in G$ in $\varphi_g \varphi_h(x) = \varphi_{gh}(x)$ za vse $x \in \text{dom}(\varphi_g \varphi_h)$. Zato je parcialna permutacija $\varphi_g \varphi_h$ zožitev parcialne permutacije φ_{gh} . Preslikava $\varphi : G \rightarrow \mathcal{I}(X)$ tako zadošča pogoju $\varphi_g \varphi_h \leq \varphi_{gh}$, kot tudi pogojema $\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$ za vsak $g \in G$ in $\varphi_1 = 1_X$. Take preslikave so posplošitve homomorfizmov in se imenujejo *prehomomorfizmi*. Podobno kot so delovanjem grupe G na množici X prirejeni homomorfizmi $G \rightarrow \mathcal{S}(X)$, so parcialnim delovanjem grupe G na množici X prirejeni prehomomorfizmi $G \rightarrow \mathcal{I}(X)$.

Parcialna delovanja grup so natanko zožitve delovanj. Predpostavimo, da je podano delovanje grupe G na množici X , $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Naj bo $Y \subseteq X$

neprazna podmnožica in $g \in G$. Najprej opazimo, da se za $y \in Y$ lahko zgodi, da $g \cdot y \notin Y$. Definirajmo parcialno funkcijo $G \times Y \rightarrow Y$, $(g, y) \mapsto g \circ y$, kjer je za $g \in G$ in $y \in Y$ element $g \circ y$ definiran natanko tedaj, ko je $g \cdot y \in Y$ in je v slednjem primeru $g \circ y = g \cdot y$. Parcialna funkcija $(g, y) \mapsto g \circ y$ definira parcialno delovanje grupe G na množici Y , ki ga imenujemo *zožitev* delovanja $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Obratno, da se pokazati, da je vsako parcialno delovanje grupe G na množici Y zožitev delovanja grupe G na neki množici X , ki vsebuje Y . Delovanje grupe G , katerega zožitev je dano parcialno delovanje, se imenuje *globalizacija* danega parcialnega delovanja. Več podrobnosti o parcialnih delovanjih grup lahko bralec najde v člankih [3, 5].

Potrebujemo še naslednjo definicijo. Naj bo E polmreža in $I \subseteq E$, kjer je $I \neq \emptyset$. Rečemo, da je I *urejenostni ideal* polmreže E , če za vsak $x \in I$ in vsak $y \leq x$ velja $y \in I$. Drugo ime za urejenostne ideale je *navzdol zaprte množice*.

Naj sedaj grupa G parcialno deluje na polmreži E s preslikavo $(g, e) \mapsto g \cdot e = \varphi_g(e)$ in naj velja naslednji pogoj, ki je podoben pogoj (3):

$$e \leq f \Leftrightarrow g \cdot e \leq g \cdot f \text{ za vse } g \in G \text{ in } e, f \in \text{dom}(\varphi_g).$$

Predpostavimo dodatno, da je za vsak $g \in G$ množica $\text{dom}(\varphi_g)$ urejenostni ideal polmreže E (nato se hitro vidi, da je tudi $\text{ran}(\varphi_g)$ urejenostni ideal polmreže E). Potem pravimo, da G parcialno deluje na E z *urejenostnimi izomorfizmi med urejenostnimi ideali polmreže E* . Na množici

$$E \rtimes G = \{(e, g) : g \in G, e \in \text{ran}(\varphi_g)\} \quad (5)$$

vpeljemo operacijo množenja s predpisom

$$(e, g)(f, h) = (g \cdot ((g^{-1} \cdot e) \wedge f), gh) \quad (6)$$

in operacijo inverza s predpisom

$$(e, g)^{-1} = (g^{-1} \cdot e, g^{-1}). \quad (7)$$

Ker imamo podano le parcialno delovanje grupe G na polmreži E , je pravilo (6) neizogibno tehnično bolj zapleteno kot pravilo (4). In sicer, na desni strani v definiciji produkta ne bi smeli obdržati kar $e \wedge g \cdot f$, ker se lahko zgodi, da $f \notin \text{dom}(\varphi_g)$. Pogoj $e \in \text{ran}(\varphi_g)$ v (5) nam zagotavlja, da je $e \in \text{dom}(\varphi_{g^{-1}})$ in zato obstaja $g^{-1} \cdot e$. Ker je $(g^{-1} \cdot e) \wedge f \leq g^{-1} \cdot e$ in je $g^{-1} \cdot e \in \text{dom}(\varphi_g)$, je tudi $(g^{-1} \cdot e) \wedge f \in \text{dom}(\varphi_g)$, saj je množica $\text{dom}(\varphi_g)$ navzdol zaprta. Z nekaj računanja, ki temelji zgolj na (6) in (7), se lahko prepričamo, da je množica $E \rtimes G$ z operacijama iz (6) in (7) inverzna polgrupa. Imenujemo jo *semidirektni produkt* polmreže E in grupe G glede na podano parcialno delovanje.

Uvod v E -unitarne inverzne polgrupe in McAlisterjev P -izrek

Kasneje bomo navedli nekaj pomembnih primerov inverznih polgrup, ki nastanejo iz parcialnih delovanj grup na polmrežah s pomočjo konstrukcije semidirektnega produkta. V tem razdelku pa si bomo na kratko ogledali vprašanje, ali morda tvorijo tako nastale inverzne polgrupe kak poseben razred inverznih polgrup.

Inverzna polgrupa S se imenuje E -unitarna, če za vsak $e \in E(S)$ in $s \in S$ iz $s \geq e$ sledi, da je $s \in E(S)$. Obstaja več različnih ekvivalentnih definicij E -unitarnosti [7, 9]. Omenimo, da je vsaka grupa E -unitarna inverzna polgrupa, ker v grupi $a \geq b$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$. Ni vsaka inverzna polgrupa E -unitarna. Na primer, če je $|X| \geq 2$, simetrična inverzna polgrupa $\mathcal{I}(X)$ ni E -unitarna: za vsak $x \in \mathcal{I}(X)$ je $x \geq 0$, ničelna parcialna permutacija 0 je idempotent, ni pa vsak $x \in \mathcal{I}(X)$ idempotent.

Odgovor na vprašanje na začetku tega razdelka prinaša ena od ekvivalentnih formulacij [5] slavnega McAlisterjevega P -izreka o strukturi E -unitarnih inverznih polgrup. Ta pove, da je razred E -unitarnih inverznih polgrup enak razredu inverznih polgrup, ki se jih da predstaviti kot semidirektni produkt grupe in polmreže glede na parcialno delovanje.

Model Szendreiieve za Birget-Rhodesovo razširitev grupe

Navedimo zanimiv in pomemben primer inverzne polgrupe, ki jo konstruiramo iz grupe G s pomočjo semidirektnega produkta glede na parcialno delovanje. Označimo s $\mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ množico vseh končnih podmnožic grupe G . Definirajmo

$$E = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) : 1 \in A\}.$$

Na množici E vpeljimo relacijo $A \leq B$, če je $B \subseteq A$. Urejena množica (E, \leq) je polmreža z $A \wedge B = A \cap B$. Množica $\{1\}$ je očitno največji element polmreže E . Poudarimo, da je polmreža E »konstruirana« zgolj iz grupe G . Za $g \in G$ definirajmo

$$\text{dom}(\varphi_g) = \{A \in E : g^{-1} \in A\} = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) : 1, g^{-1} \in A\}$$

in za $A \in \text{dom}(\varphi_g)$ naj bo $\varphi_g(A) = gA = \{ga : a \in A\}$. Ker je $g^{-1} \in A$, je $1 = gg^{-1} \in gA$. Torej je $gA \in E$. Da se preveriti, da smo s tem zares definirali parcialno delovanje grupe G na polmreži E z urejenostnimi izomorfizmi med urejenostnimi idelali.

Čeprav je konstrukcija preprosta in naravna, tu ne gre za delovanje, ker enakost $\varphi_g \varphi_h = \varphi_{gh}$ ne drži za vse $g, h \in G$. O tem se najhitreje prepričamo, če vzamemo $g \in G$, kjer je $g \neq 1$, in primerjamo elementa $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}$ in φ_1 . Ker je $\text{dom}(\varphi_{g^{-1}}) = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) : 1, g \in A\}$, je $\text{ran}(\varphi_{g^{-1}}) = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) : 1, g^{-1} \in A\} = \text{dom}(\varphi_g)$. Zato je $\text{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}}) = \{A \in$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(G): 1, g \in A\}$ in za $A \in \text{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}})$ velja $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}(A) = gg^{-1}A = A$. Torej je $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}$ identična preslikava na množici $\text{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}})$ in je različna od φ_1 , ki je identična preslikava na E .

Semidirektni produkt polmreže E in grupe G glede na definirano parcialno delovanje je množica

$$E \rtimes G = \{(A, g): A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \text{ in } 1, g \in A\}$$

z operacijama

$$(A, g)(B, h) = (g(g^{-1}A \cup B), gh) = (A \cup gB, gh) \text{ in } (A, g)^{-1} = (g^{-1}A, g^{-1}).$$

Inverzno polgrupo $E \rtimes G$ je konstruirala Mária B. Szendrei leta 1989 v članku [11]. Pokazala je, da je konstruirana polgrupa izomorfná prej znani Birget-Rhodesovi prefiksni razširitvi grupe G in da inverzni monoid $E \rtimes G$ spada v razred tako imenovanih F -inverznih monoidov, ki je vsebovan v razredu E -unitarnih inverznih monoidov.

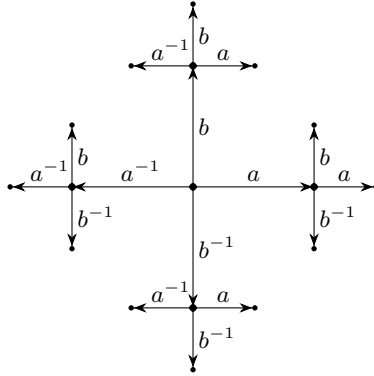
Struktura proste inverzne polgrupe

V tem razdelku si bomo ogledali strukturo proste inverzne polgrupe $FI(X)$ nad množico generatorjev X , in sicer jo bomo konstruirali kot semidirektni produkt proste grupe $FG(X)$ glede na parcialno delovanje le-te na polmreži, ki jo bomo najlažje definirali s pomočjo Cayleyjevega grafa proste grupe $FG(X)$. Tako je $FI(X)$ še en primer, tokrat geometrijsko definiran, semidirektnega produkta grupe in polmreže glede na parcialno delovanje.

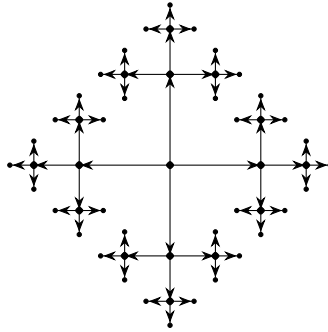
Prosta grupa $FG(X)$ in njen Cayleyjev graf

Naj bo X neprazna množica. Množico vseh besed nad X označimo z X^* in jo imenujemo *prosti monoid* nad X . Prazno besedo označimo z 1. Naj bo $X^{-1} = \{x^{-1}: x \in X\}$. *Reducirana beseda* nad $X \cup X^{-1}$ je element $(X \cup X^{-1})^*$, ki ne vsebuje podbesed oblike aa^{-1} ali $a^{-1}a$, kjer je $a \in X$. Na primer, če je $X = \{a, b\}$, je prazna beseda 1 reducirana, prav tako beseda $aba^{-1}b^2a^{-1}$, beseda $a^3b^{-1}b^2a$ pa ni reducirana, ker vsebuje podbesedo $b^{-1}b$. Množico vseh reduciranih besed iz $(X \cup X^{-1})^*$ označimo s $FG(X)$. Na tej množici definiramo produkt na naslednji način: za $u, v \in FG(X)$ je uv reducirana beseda, ki jo dobimo, če besedo v napišemo na desni od besede u in v primeru potrebe pokrajšamo vse nastale izraze oblike aa^{-1} in $a^{-1}a$, kjer je $a \in X$. Na primer, če je $u = a^2b$ in $v = b^{-1}a^{-1}b^3$, je uv reducirana beseda, ki jo dobimo, ko pokrajšamo besedo $a^2bb^{-1}a^{-1}b^3$, zato je $uv = ab^3$. Če je $u = a_1 \dots a_n \in FG(X)$, definirajmo $u^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$. Da se preveriti, da je $FG(X)$ grupa. Še več, $FG(X)$ je prosta z X generirana grupa, kar

Povabilo v inverzne polgrupe



Slika 1. Cayleyjev graf grupe $FG(\{a, b\})$: besede dolžine ≤ 2 .



Slika 2. Cayleyjev graf grupe $FG(\{a, b\})$: besede dolžine ≤ 3 .

pomeni, da je vsaka druga z X generirana grupa kvocient grupe $FG(X)$, kjer je kvocientna preslikava identična na generatorjih.

Spomnimo se, da je *Cayleyjev graf* z X generirane grupe G usmerjen označen graf $\text{Cay}(G; X)$, oglišča katerega so elementi grupe G . Oglišči u in v sta povezani s povezavo (u, y, v) , kjer je $y \in X \cup X^{-1}$, če je $v = uy$. Povezavi (u, y, v) in (v, y^{-1}, u) imenujemo *nasprotni*. Na slikah 1 in 2 sta predstavljena dela Cayleyjevega grafa grupe $FG(X)$ za $X = \{a, b\}$. Na sliki 1 so prikazana oglišča, ki pripadajo reduciranim besedam dolžine dva ali manj, na sliki 2 pa oglišča, ki pripadajo reduciranim besedam dolžine tri ali manj. Za vsaki dve povezani oglišči in za vsak par nasprotnih povezav med njima je na slikah prikazana le ena povezava iz para.

Prosta inverzna polgrupa kot semidirektni produkt glede na parcialno delovanje

V Cayleyjevem grafu $\text{Cay}(FG(X); X)$ bomo za podgrafe privzeli, da hkrati z vsako povezavo vsebujejo tudi njeno nasprotno povezavo. Naj bo \mathcal{X} množica vseh končnih povezanih podgrafov grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$ in E množica tistih končnih povezanih podgrafov grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$, katerih eno od oglišč je 1. Na množici \mathcal{X} vpeljemo relacijo \leq nasprotnosti podgrafov, se pravi $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ velja natanko takrat, ko je Γ_2 podgraf grafa Γ_1 . Enostavno je videti, da je \leq delna urejenost in da je (E, \leq) polmreža, kjer je $\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Za $g \in FG(X)$ in $\Gamma \in \mathcal{X}$ naj bo $g\Gamma \in \mathcal{X}$ podgraf grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$, dobljen iz Γ s pomočjo *leve translacije* za g : njegova oglišča so gh , kjer h teče po ogliščih grafa Γ , njegove povezave pa so (gh_1, x, gh_2) , kjer (h_1, x, h_2) teče po povezavah grafa Γ . Za $g \in FG(X)$ definirajmo

$$\text{dom}(\varphi_g) = \{\Gamma \in E : g^{-1} \text{ je oglišče } \Gamma\} = \{\Gamma \in \mathcal{X} : 1, g^{-1} \text{ sta oglišči } \Gamma\}.$$

Za $\Gamma \in \text{dom}(\varphi_g)$ naj bo $\varphi_g(\Gamma) = g\Gamma$. Ker je g^{-1} oglišče Γ , je $1 = gg^{-1}$ oglišče $g\Gamma$, iz česar sledi $g\Gamma \in E$. Da se preveriti, da smo s tem definirali parcialno delovanje grupe $FG(X)$ na polmreži E s pomočjo urejenostnih izomorfizmov med urejenostnimi ideali. Podobno kot prej tu ne gre za delovanje, in sicer enakost $\varphi_g\varphi_h = \varphi_{gh}$ ne drži za vse $g, h \in FG(X)$.

Semidirektni produkt polmreže E in grupe $FG(X)$ je v tem primeru množica

$$E \rtimes FG(X) = \{(\Gamma, g) : \Gamma \in \mathcal{X}, 1 \text{ in } g \text{ sta oglišči } \Gamma\}$$

z operacijama

$$(\Gamma, g)(\Delta, h) = (g(g^{-1}\Gamma \cup \Delta), gh) = (\Gamma \cup g\Delta, gh) \text{ in } (\Gamma, g)^{-1} = (g^{-1}\Gamma, g^{-1}).$$

Za $x \in X$ naj bo Γ_x graf z ogliščema 1 in x in povezavama $(1, x, x)$ in $(x, x^{-1}, 1)$. Inverzna polgrupa $E \rtimes FG(X)$ je generirana z množico $\{(\Gamma_x, x) : x \in X\}$ in predstavlja model *proste inverzne polgrupe* $FI(X)$. To pomeni, da je vsaka z X generirana inverzna polgrupa kvocient polgrupe $E \rtimes FG(X)$, pri čemer kvocientna preslikava slika (Γ_x, x) v x za vsak $x \in X$.

Opisana konstrukcija je poseben primer splošnejše konstrukcije – t. i. Margolis-Meakinove razširitve grupne prezentacije [8], v kateri namesto Cayleyjevega grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$ proste grupe nastopa Cayleyjev graf poljubne grupe podane z generatorji in relacijami.

Zaključne opombe

Če v konstrukciji, ki smo jo navedli v prejšnjem razdelku, dovolimo tudi nepovezane končne podgrafe Cayleyjevega grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$, dobimo

na podoben način inverzni monoid $\overline{E} \rtimes FG(X)$, kjer je \overline{E} množica tistih končnih podgrafov grafa $\text{Cay}(FG(X); X)$, katerih eno od oglišč je 1. Kot smo pokazali v nedavnem članku [1], predstavlja dobljeni semidirektni produkt model prostega F -inverznega monoida. Če pa namesto proste grupe $FG(X)$ vzamemo poljubno grupo G podano z generatorji in relacijami, dobimo F -inverzni monoid, ki ima določeno univerzalno lastnost in združuje tako Margolis-Meakinovo razširitev kot tudi model Szendrieve za Birget-Rhodesovo razširitev grupe G .

Za konec naj omenimo še posplošitev inverznih polgrup na tako imenovane omejitvene polgrupe. Slednje so polgrupe, ki za razliko od inverznih polgrup nimajo operacije inverza, imajo pa dodatni unarni operaciji $+$ in $*$, ki posplošujeta operaciji $a \mapsto aa^{-1}$ in $a \mapsto a^{-1}a$ na inverzni polgrupi. Na primer, naj bo $S = \{\varphi \in \mathcal{I}(X) : \varphi(x) \geq x \text{ za vsak } x \in \text{dom}(\varphi)\} \subseteq \mathcal{I}(X)$, kjer je $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Za $\varphi \in S$ je $\varphi^* = \varphi^{-1}\varphi$, $\varphi^+ = \varphi\varphi^{-1} \in S$, kljub temu da v splošnem $\varphi^{-1} \notin S$. Polgrupa S je tako primer omejitvene polgrupe. Omejitvene polgrupe, konstruirane kot semidirektni produkti monoidov in polmrež glede na parcialna delovanja, so predmet aktivnih trenutnih raziskav, glejte na primer članek [6] in v njem navedeno literaturo.

LITERATURA

- [1] K. Auinger, G. Kudryavtseva in M. B. Szendrei, *F-inverse monoids as algebraic structures in enriched signature*, Indiana Univ. Math J., sprejeto v objavo, preprint je prosto dostopen na spletu: www.iumj.indiana.edu/IUMJ/Preprints/8685.pdf, ogled 20. 12. 2020.
- [2] M. Dokuchaev, *Recent developments around partial actions*, São Paulo J. Math. Sci. **13** (2019), 195–247.
- [3] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3481–3494.
- [4] O. Ganuyshkin in V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups. An introduction*, Algebra and Applications **9**, Springer-Verlag, London, 2009.
- [5] J. Kellendonk in M. V. Lawson, *Partial actions of groups*, Internat. J. Algebra Comput. **14** (2004), 87–114.
- [6] G. Kudryavtseva, *Two-sided expansions of monoids*, Internat. J. Algebra Comput. **29** (2019), 1467–1498.
- [7] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, River Edge, 1998.
- [8] S. W. Margolis in J. C. Meakin, *E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group presentation*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 45–76.
- [9] M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
- [10] G. B. Preston, *Inverse semi-groups*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 396–403.
- [11] M. B. Szendrei, *A note on Birget-Rhodes expansion of groups*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 93–99.
- [12] V. V. Vagner, *The theory of generalized heaps and generalized groups*, Mat. Sbornik N. S. **32** (1953), 545–632 (v ruščini).

NEVIDNOST

LINDA BITENC¹ IN MIHA RAVNIK^{1,2}

¹Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani,

²Institut »Jožef Stefan«

Ključne besede: ogrinjalo nevidnosti, transformacijska optika, negativni lomni količnik, metamateriali

V članku je predstavljena ideja oblikovanja ogrinjala nevidnosti s pomočjo transformacijske optike. Transformacija prostora in s tem geometrija širjenja elektromagnetnega valovanja je tesno povezana z lastnostmi medija, skozi katerega se valovanje širi, kar pomeni, da potrebujemo ustrezno krajevno odvisnost lomnega količnika, tudi z negativnimi vrednostmi. Zahtevano se – v principu, vsaj v zelo določenem frekvenčnem območju in ob primernem obvladovanju izgub svetlobe – lahko doseže z umetno oblikovanimi optičnimi metamateriali, katerih lastnosti so posledica njihove strukture na skali pod valovno dolžino svetlobe. Predstavljen je tudi eksperiment dvodimenzionalnega cilindričnega plašča nevidnosti v mikrovalovnem frekvenčnem območju.

INVISIBILITY

In this contribution we present the concept for creating an invisibility cloak using transformation optics. Coordinate transformation and the geometry of propagation of electromagnetic waves are closely connected to the properties of the medium through which the waves travel, meaning that appropriate spatially dependent refractive index profiles are needed, including with negative values. Negative refractive index is connected to new material properties which are not present in conventional materials. Today, in principle, the required material parameters can be realised with the use of optical metamaterials, whose properties are determined by their structure, subjected to limitations in the material absorption and sufficient frequency width of the response. We also present an experiment of two-dimensional invisibility cloak at microwave frequencies.

Uvod

Predmet vidimo, ker zaznamo od njega odbito, oddano ali sipano svetlobo. Odboj lahko preprečimo z uporabo popolnih absorberjev, katerih pomanjkljivost je, da ustvarijo senco, ki opazovalcu izda njihovo prisotnost. Tudi z ustrezno geometrijo objekta lahko onemogočimo odboj nazaj proti viru elektromagnetnega valovanja. Omenjena tehnika se uporablja npr. pri letalih, ki jih želijo skriti pred radarjem. Očitno pa je, da bo na ta način oblikovano letalo nezaznavno le iz smeri vpadnega valovanja, iz vseh drugih smeri pa ne bo učinka nevidnosti. Za popolno nevidnost predmeta moramo torej doseči, da se bo vpadno elektromagnetno valovanje širilo v prostoru enako, kot če predmeta ne bi bilo. Ker po navadi ne želimo spremeniti lastnosti izbranega

predmeta z namenom, da bi ga naredili nevidnega, oz. bi bilo to zelo težko, če sploh mogoče, za to uporabimo tako imenovani plašč nevidnosti. S tem imamo v mislih optično napravo, ki naredi predmet nezaznaven v nekem frekvenčnem območju elektromagnetnega valovanja, pri čemer posplošimo pojem nevidnosti, ki ga navadno povezujemo z vidno svetlobo, na – vsaj v principu – poljubno frekvenčno območje [1].

Svetloba se v prostoru širi tako, da potuje po najkrajši optični poti, kar je znano kot Fermatov princip. V splošni teoriji relativnosti pa se pot svetlobe lahko ukrivi. Einstein je namreč prišel do spoznanja, da gravitacijsko polje prostor deformira. Spremeni se metrika prostora, ki podaja informacijo o tem, koliko je prostor na nekem delu stisnjen oz. raztegnjen [5, 20]. Ker je oblika Maxwellovih enačb invariantna na transformacijo v prostor z novo metriko, iz tega sledi, da se svetloba širi v skladu z novimi koordinatami, zaradi česar se žarek pri potovanju mimo telesa z veliko maso (npr. Sonca) ukrivi. Če bi nam uspelo na podoben način poljubno spremeniti metriko prostora tako, da bi elektromagnetno valovanje vodili okoli predmeta in nato nazaj na njegovo prvotno trajektorijo, ga zunanji opazovalec ne bi mogel zaznati [11, 2].

Pot širjenja svetlobe lahko spreminjamo s pomočjo medija s krajevno odvisnim lomnim količnikom. Kot primer omenimo lečo, na kateri se žarek zlomi v skladu z lomnim zakonom. Skratka, optične lastnosti medija, skozi katerega potuje svetloba, določajo poti žarkov [2, 19]. Na ta način lahko z uporabo medijev oblikujemo zelene učinke geometrije in s tem svetlobo poljubno usmerjamo, kar nam omogoča zanimive aplikacije, med njimi tudi plašč nevidnosti. Pristop, ki nam s pomočjo koordinatnih transformacij omogoča načrtovanje ustreznih lastnosti materialov, ki nato zeleno usmerjajo elektromagnetno valovanje, imenujemo transformacijska optika [2, 19].

Za ustrezne optične transformacije – torej zelene poti in trajektorije svetlobnih žarkov – lahko potrebujemo optične materiale z lastnostmi, ki jih v naravi ne najdemo, na primer negativni lomni količnik. Zato potrebujemo optične metamateriale. To so umetno oblikovani materiali, sestavljeni iz struktur, manjših od valovne dolžine elektromagnetnega valovanja, ki določajo njihove lastnosti. Odziv metamaterialov se lahko izrazi z efektivno permeabilnostjo in dielektričnostjo, pri čemer se z ustreznim načrtovanjem njihovih sestavnih (mikro ali nano) struktur doseže zelene optične lastnosti [5, 15].

V nadaljevanju bomo opisali primer transformacij, s katerimi dosežemo, da se elektromagnetno valovanje izogne delu prostora, v katerega lahko skrijemo predmet. Predstavili bomo primer plašča nevidnosti v sferičnih koordinatah. Komentirali bomo tudi pomen negativnega lomnega količnika in način oblikovanja metamaterialov, s katerimi ga lahko dosežemo.

Ogrinjalo nevidnosti z uporabo transformacijske optike

Transformacije prostora

Sprememba faze elektromagnetnega valovanja na poti Δx je enaka $(\frac{\omega}{c})n\Delta x$, kjer je ω kotna hitrost, c hitrost svetlobe, n lomni količnik, produkt $n\Delta x$ pa imenujemo optična pot. Uvedemo preslikavo $\Delta x' = n\Delta x$, ki ohrani fazo valovanja, hkrati pa predstavlja transformacijo koordinat. Lomni količnik je, kot smo že prej omenili, lahko prostorsko odvisen. Uporabili bomo Maxwellovi enačbi pri izbrani frekvenci in upoštevali linearno konstitutivno relacijo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (1)$$

Ker so Maxwellove enačbe invariantne na koordinatne transformacije, imajo v novem prostoru enako obliko [11, 2]

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -i\omega\mu'\mu_0\mathbf{H}', \quad \nabla' \times \mathbf{H}' = i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\mathbf{E}'. \quad (2)$$

V novem koordinatnem sistemu zapišemo polji \mathbf{E} in \mathbf{H} ter μ in ε , ki se transformirata kot tenzorja, saj po navadi postaneta anizotropna. Dobimo torej [8]

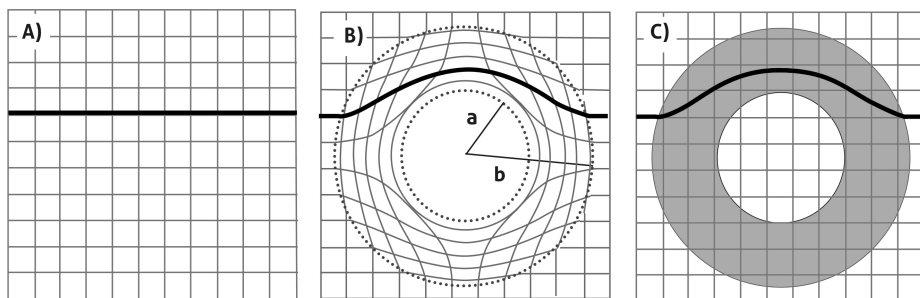
$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= (A^T)^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{x}), & \mathbf{H}'(\mathbf{x}') &= (A^T)^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{x}), \\ \varepsilon' &= \frac{A\varepsilon A^T}{\det A}, & \mu' &= \frac{A\mu A^T}{\det A}, \end{aligned} \quad (3)$$

kjer je A Jacobijeva matrika, $A_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ [14].

Invarianca Maxwellovih enačb na koordinatne transformacije je ključna lastnost, ki nam v transformacijski optiki omogoča tesno povezavo med preslikavo koordinat in lastnostmi medija. Maxwellove enačbe pretvorjene v prostor z novo metriko predstavljajo enolično obnašanje svetlobe, lahko pa ga interpretiramo na dva načina. Pri prvem razumemo, da tenzorja na levi in desni strani enačaja v enačbah (3) predstavljata iste lastnosti materiala, a v drugih prostorih (topološka interpretacija). Pri drugi možni interpretaciji pa sta oba tenzorja zapisana v običajnem prostoru kartezičnih koordinat (v Evklidski metriki), a predstavljata različne lastnosti materiala (materialna interpretacija). Razliko lahko vidimo na sliki 1.

Primer (A) predstavlja prazen prostor v kartezičnih koordinatah, v katerem je pot žarka narisana z odebeljeno črto. Primera (B) in (C) predstavljata transformiran prostor, v katerem veljajo Maxwellove enačbe s transformiranimi količinami (2). Primer (B) prikazuje prazen prostor, v katerem je znotraj kroga z radijem b upoštevana koordinatna transformacija. Slika (C) prikazuje primer, kjer se ohranijo kartezične koordinate, spremenijo pa se lastnosti medija na kolobarju med radijema a in b . Na ta način lahko najprej izračunamo želeno transformacijo praznega prostora in jo nato s

pomočjo enačb (3) prevedemo na lastnosti materiala, ki jih potrebujemo za doseg želenega učinka [14]. To nam omogoča dejstvo, da imata sprememba metrike prostora in lomni količnik medija (oz. ε in μ) enako vlogo v Maxwellovih enačbah [20].



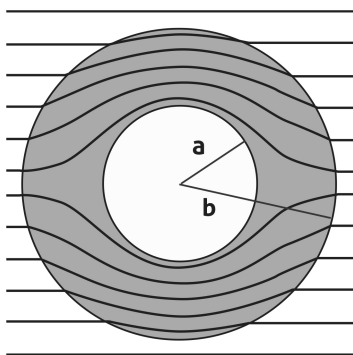
Slika 1. Prikaz poti žarka, označene z debelejšo črno črto, skozi prazen prostor kartezičnih koordinat (A) in skozi transformiran prostor prikazan s transformacijo metrike (B) ter s profilom lomnega količnika (C).

Do sedaj smo obravnavali poljubno preslikavo. Izkaže pa se, da je koordinatna transformacija, prikazana na sliki 1, tudi ustrezna transformacija za načrtovanje plašča nevidnosti. Zavedati se moramo, da to ni edina možna preslikava, je pa enostavna in zato primeren zgled. Obravnavamo dvodimenzionalen prostor.

Gre za preslikavo iz tako imenovanega virtualnega oz. elektromagnetnega prostora, ki je na sliki označen s črko A, v fizični prostor, označen s črko B. Virtualni prostor je prazen, zato elektromagnetno valovanje sledi ravnim linijam, ki se v transformiranem fizičnem prostoru zdijo ukrivljene. Preslikava namreč točko preslika v krožnico končne velikosti, v našem primeru z radijem a , in prostor znotraj radija b temu primerno deformira. V delu prostora $r < a$ se ustvari »luknja«, kamor elektromagnetno valovanje ne more prodreti, temveč potuje okoli praznega območja ter se nato vrne na začetno trajektorijo in nadaljuje pot enako, kot če predmeta ne bi bilo. Tako oblikovana optična naprava ustvari iluzijo, da se elektromagnetno valovanje širi skozi prazen prostor, medtem ko je notranjost razširjene točke skrita zunanjemu opazovalcu [11, 6]. S transformacijo na sliki 1 bi torej lahko oblikovali cilindrično ogrinjalo nevidnosti. S podobno transformacijo lahko oblikujemo tudi sferično ogrinjalo, če si na shemi namesto krožnic s polme-

roma a in b predstavljamo sferi. Iz enačb (3) opazimo, da lahko na splošno komponente transformiranega tenzorja zavzamejo katerokoli vrednost, s tem pa lahko lomni količnik v materialu, s katerim bi morali nadomestiti transformacijo, zavzame tudi negativne vrednosti. Posledično je bila realizacija takega plašča nevidnosti do odkritja metamaterialov nemogoča [2].

Primer ogrinjala nevidnosti v sferičnih koordinatah



Slika 2. Trajektorije žarkov elektromagnetnega valovanja skozi del prostora z medijem, ki ustreza koordinatni transformaciji, prikazani z enačbo (4). Slika predstavlja shemo prečnega prereza sferičnega ogrinjala nevidnosti.

Predstavimo zgled načrtovanja potrebnega profila lomnega količnika z uporabo transformacijske optike za primer sferičnega ogrinjala nevidnosti, ki je prikazano na sliki 2. Uporabimo sferno simetrično preslikavo, ki celoten volumen krogle s polmerom b preslika v del krogle z notranjim radijem a in zunanjam radijem b . Določimo transformacijo:

$$r' = f(r) = \frac{b-a}{b}r + a; \quad 0 \leq r \leq b \quad \text{in} \quad (4)$$

$$r' = r; \quad r > b.$$

Preslikava je zvezna, saj na zunanjem radiju oba pogoja določata $r'(b) = b$. Da lahko želeno preslikavo dosežemo z optično napravo (medijem) končne velikosti, je smiselno, da transformacijo definiramo na omejenem prostoru, medtem ko del prostora $r > b$ ostane nespremenjen.

Ker je transformacija sferno simetrična, velja, da so enotski vektorji v obeh prostorih ekvivalentni, kar opišemo z zvezo,

$$\frac{x_{i'}}{r'} = \frac{x_i}{r} \delta_{i'i}. \quad (5)$$

Če izrazimo r' in ga vstavimo v enačbo preslikave (4), dobimo zvezo med x' in x , ki jo potrebujemo za izračun Jacobijeve matrike. Z nekaj računanja lahko zapišemo Jacobijevo matriko kot (glej [14])

$$A_{i'j} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_j} = \frac{r'}{r} \delta_{i'j} - \frac{ax_i x_k}{r^3} \delta_{i'i} \delta_{kj}.$$

S pomočjo determinante Jacobijeve matrike lahko določimo ustrezne parametre medija za izvedbo ogrinjala nevidnosti. S krajšim računom lahko pokažemo, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka (glej [14])

$$\det A = \frac{r' - a}{r} \left(\frac{r'}{r} \right)^2. \quad (6)$$

Zdaj imamo vse potrebne elemente, da izračunamo ε' in μ' po enačbi (3). Ker smo predpostavili, da je prostor koordinat \vec{r} prazen, sta oba tenzorja v začetnem prostoru enaka identiteti. Z upoštevanjem transformacije dobimo ε' in μ' izražena z enačbo

$$\varepsilon' = \mu' = \frac{b}{b-a} \left(I - \frac{2ar' - a^2}{r'^4} \vec{r}' \otimes \vec{r}' \right) \quad (7)$$

(glej [14]), kjer je I identična matrika.

Iz enačbe (7) želimo izraziti posamezne komponente dielektričnosti in permeabilnosti. Izberemo orientacijo koordinatnega sistema, za katero vemo, da se bo izraz poenostavil, torej $\vec{r}' = (r, 0, 0)$. Ker je preslikava sferno simetrična, je ugodno izbrati sferne koordinate in bazo. V matriki tenzorskega produkta tako ostane le ena komponenta in dobimo (slika 3) (glej [11])

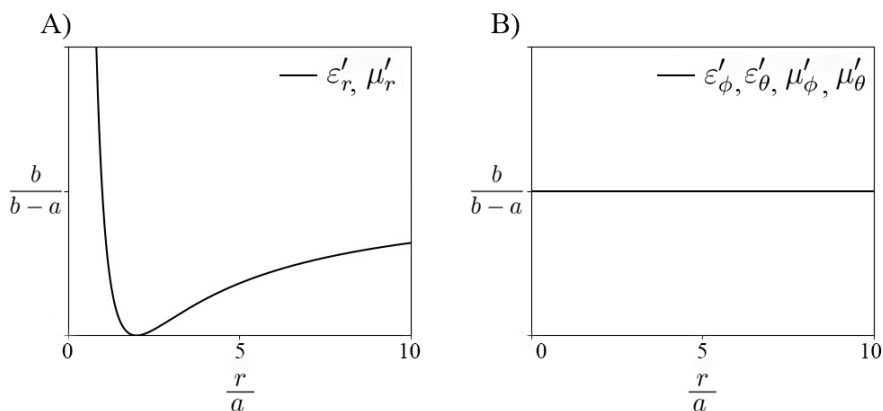
$$\varepsilon'_r = \mu'_r = \frac{b}{b-a} \frac{(r' - a)^2}{r'^2},$$

$$\varepsilon'_\phi = \mu'_\phi = \varepsilon'_\theta = \mu'_\theta = \frac{b}{b-a}.$$

Slabosti in omejitve

Dobra lastnost ogrinjala nevidnosti, oblikovanega s pomočjo obravnavane transformacije prostora, je, da bo delovalo neodvisno od oblike predmeta in njegove sestave. Poleg tega nam transformacijska optika omogoča neposredno teoretično oblikovanje ogrinjala z ustrezno transformacijo.

Po drugi strani ima obravnavani pristop močne omejitve. Spomnimo se preslikave prostora iz slike 1. Žarki imajo v novem prostoru daljšo pot, saj morajo obiti »luknjo«, hkrati pa mora žarek priti na drugo stran območja



Slika 3. Odvisnost radialnih (A) in kotnih (B) komponent dielektričnosti in permeabilnosti od radija pri določeni vrednosti parametrov a in b .

z enako fazo, kot če bi potoval skozi prazen prostor. Zato potrebujemo frekvenčno odvisne parametre materiala in posledično lahko zadostimo pogojem transformacije le pri eni frekvenci [11].

Zavedati se moramo še ene mogoče očitne lastnosti našega ogrinjala. Opazovalec, skrit v njem, bi bil sicer neviden za zunanjšega opazovalca, hkrati pa bi bil v popolni temi. Namreč, če vodimo svetlobo okrog odprtine, potem tudi nič svetlobe ne more priti do našega skritega opazovalca in posledično on ne vidi zunanjšega sveta [2].

Preslikava, opisana v poglavju Primer ogrinjala nevidnosti v sferičnih koordinatah, za realizacijo sicer ne potrebuje negativnih vrednosti lomnega količnika, a na splošno poljubna preslikava lahko zahteva tudi negativne vrednosti. Primer preslikave oz. optične naprave, ki zahteva negativni lomni količnik, je popolna leča (oz. leča z negativnim medijem) [10].

Negativni lomni količnik

Lomni količnik je definiran kot $n = \frac{c}{v}$, kjer je c svetlobna hitrost v vakuumu in v fazna hitrost svetlobe v snovi [17]. Lahko ga izrazimo tudi kot

$$n = \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (8)$$

Materiali, ki imajo eno od vrednosti ϵ in μ negativno, dovoljujejo le nepropagirajoče rešitve za elektromagnetno valovanje. To vidimo iz enačbe

$$|k|^2 = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0\omega^2.$$

Negativni produkt $\varepsilon\mu$ namreč pomeni, da je valovni vektor imaginaren in se posledično valovanje v materialu eksponentno zaduši. Negativna vrednost dielektričnosti pri optičnih frekvencah je značilna za kovine, za katere vemo, da se svetloba v njih ne more širiti. Običajni materiali, ki so prepustni za elektromagnetno valovanje, imajo pozitivni vrednosti ε in μ , kar pomeni tudi pozitiven in realen lomni količnik. Očiten zgled za materiale s pozitivnim lomnim količnikom v vidnem spektru so na primer voda, zrak in steklo. Sedaj pridemo do vprašanja, ali bi lahko obstajal tudi material, ki bi imel tako dielektričnost kot permeabilnost negativni. Pri teoretični obravnavi omenjenega primera je bilo ugotovljeno, ne samo da bi tak material lahko obstajal, temveč tudi da bi imel zanimive lastnosti, ki jih niso zasledili še pri nobenem znanem materialu, med drugim bi imel negativni lomni količnik in povzročil naj bi obraten Dopplerjev pojav [15]. Prvi, ki je proučeval lastnosti medija z ε in $\mu < 0$, je bil Victor Veselago, ruski fizik, ki je leta 1968 objavil članek [18], v katerem je predstavil naslednja spoznanja.

V primeru, ko sta dielektričnost in permeabilnost negativni, je njun produkt pozitiven in efektivni lomni količnik realen. Iz tega sledi, da so materiali z ε in $\mu < 0$ prepustni za elektromagnetno valovanje. Vzrok za njihove drugačne lastnosti izvira iz razlike med fazno in grupno hitrostjo valovanja. Grupna hitrost, definirana kot $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, opisuje energijski tok valovanja in si jo lahko predstavljamo kot hitrost celotnega valovnega paketa. Fazna hitrost, $v_p = \frac{\omega}{k}$, opisuje širjenje valovnega čela, to je množica točk z enako fazo, kar vidimo kot hitrost potovanja vrhov in dolin. Pri valovanju v običajnih materialih sta hitrosti, čeprav se lahko razlikujeta po velikosti, paralelni. Obravnavajmo sedaj posledice negativnih ε in μ . Sprememba predznaka ε in μ je v Maxwellovih enačbah (1) enakovredna spremembi predznaka magnetnega polja, medtem ko rešitev valovne enačbe,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

ostane enaka, kar pomeni, da se ohrani tudi valovni vektor. Zaradi inverzije magnetnega polja ima Poyntingov vektor, definiran kot $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, nasprotno smer. Iz tega sledi, da je pri obravnavanih materialih smer energijskega toka, določena s Poyntingovim vektorjem, nasprotna smeri valovnega vektorja, torej se valovi širijo v nasprotno smer kot žarki valovanja, kar je prikazano na sliki 5 [10, 12].

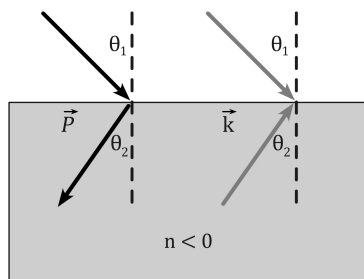
Ko smo obravnavali omejitve v izvedbi ogrinjala nevidnosti, smo že omenili, da potrebujemo disperzijo. Obravnavajmo sedaj še zahteve na nivoju energije. Za gostoto energije velja enačba (glej [18])

$$w = \frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon \varepsilon_0 \omega)}{\partial \omega} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu \mu_0 \omega)}{\partial \omega} \mathbf{H}^2, \quad (9)$$

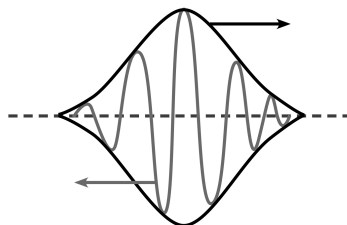
ki se v primeru, da ε in μ nista frekvenčno odvisni, poenostavi v enačbo

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0\mathbf{H}^2, \quad (10)$$

iz katere sledi, da bi bila v primeru, kjer sta tako ε kot μ negativni, skupna energija negativna, kar pa seveda ni mogoče. Iz tega sledi, da morata biti ε in μ frekvenčno odvisni [18].



Slika 4. Črni puščici predstavljata smer žarkov valovanja torej smer širjenja energije, medtem ko sivi puščici prikazujeta smer valovnega vektorja na meji med praznim prostorom ter sredstvom z negativnim lomnim količnikom.



Slika 5. S črno puščico je prikazana smer grupne hitrosti torej smer energijskega toka, s puščico sive barve pa smer valovanja oz. fазne hitrosti v sredstvu z negativnim lomnim količnikom.

Lomni zakon drži tudi za lom v materiale z negativnim lomnim količnikom,

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

kjer pridemo do spoznanja, da je lomni kot pri prehodu iz medija s pozitivnim v medij z negativnim lomnim količnikom negativen, kar pomeni, da žarek ostane na isti strani vpadne pravokotnice, kot je prikazano na sliki 4. Kot zgled si zamislimo slamico v kozarcu vode. Ker ima voda večji lomni količnik kot zrak, se svetloba na prehodu med medijema lomi k vpadni pravokotnici, zato se zdi, da je slamica zlomljena. Če bi voda imela negativni lomni količnik -1 , bi bila potopljen in nepotopljen del slamice kot preslikana čez gladino vode.

Optični metamateriali

Optični metamateriali so umetno narejeni materiali, katerih optične lastnosti primarno izhajajo iz njihove praviloma mikroskopske strukture in manj

iz same kemične sestave snovi. Posebej oblikovane sestavne enote določajo odziv materiala na elektromagnetno valovanje. Zgodovina metamaterialov sega veliko dlje od njihovega uradnega odkritja. Že v srednjem veku so bili obrtniki seznanjeni z učinki, ki jih povzročijo steklu dodani kovinski nanodelci. Tako modificirano steklo ima namreč značilno barvo, odvisno od velikosti in oblike dodanih delcev. Svetovno znan primer je Likurgova čaša [21], narejena iz stekla z dodanimi zlatimi nanodelci, ki izvira še iz rimskih časov. Čaša se zdi zelenkaste barve, kadar je osvetljena od zunaj – svetloba se torej odbije – in rdečkaste barve, kadar je osvetljena od znotraj, torej da svetloba potuje skozi steklo čaše. Lastnost je posledica površinskih plazmonov na površini zlatih delcev [21].

Odziv optičnega metamateriala na elektromagnetno valovanje, ki ima valovno dolžino veliko večjo od razdalj med gradniki materiala in njihovih velikosti, lahko opišemo z dielektričnostjo in permeabilnostjo, ki predstavljata efektiven odziv sistema. Svetloba ima veliko večjo valovno dolžino od strukture zlatih delcev v steklu Likurgove čaše, zato vidimo samo efektiven odziv snovi – torej zeleno ali rdečo barvo. V takem primeru si torej nehomogen material lahko predstavljamo kot homogenega in njegov odziv opišemo z ε in μ . Prednost teh optičnih metamaterialov je, da z ustrezno oblikovanimi osnovnimi gradniki lahko dosežemo optične lastnosti, kakršnih ne zasledimo pri običajnih materialih. Med drugim lahko v določenem – praviloma ozkem – frekvenčnem območju dosežemo hkrati negativne vrednosti ε in μ [15, 12].

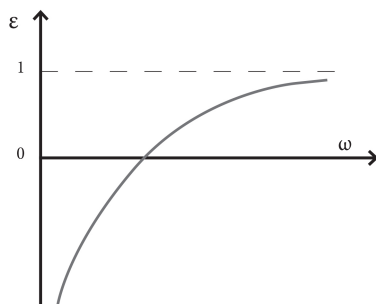
Električni odziv materiala

Podobno kot plazmo sestavlja plin nabitih delcev (ionov in elektronov) so v kovini prosto gibajoči se elektroni, zato se lahko odvisnost dielektrične konstante kovine opiše z odvisnostjo dielektričnosti plazme,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0 m_e}, \quad (11)$$

kjer je ω_p plazemska frekvenca, ρ številska gostota elektronov, e osnovni električni naboj in m_e masa elektrona. Iz frekvenčne odvisnosti dielektrične konstante iz enačbe (11) opazimo, da je za $\omega < \omega_p$, dielektričnost negativna (slika 6).

Za kovine je plazemska frekvenca navadno v ultravijoličnem frekvenčnem območju [12]. Iz odvisnosti ω_p vidimo, da lahko plazemsko frekvenco zmanjšamo, če zmanjšamo številsko gostoto elektronov ali povečamo njihovo efektivno maso. Zahtevano lahko dosežemo z oblikovanjem materiala, sestavljenega iz prepleta efektivnih »žic«, ki so lahko organizirane v mrežo [12]. Elektronska gostota je tako efektivno močno zmanjšana v primerjavi s celim kosom kovine, saj se elektroni nahajajo le v žicah, med katerimi je



Slika 6. Shema frekvenčne odvisnosti dielektrične konstante plazme.

veliko praznega prostora.

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\rho\pi R^2}{A^2},$$

pri čemer je ρ elektronska gostota v žicah, A razdalja med žicami in R njihov polmer. Poleg tega je efektivna masa elektronov povečana zaradi lastne induktivnosti žic [12]

$$m_{\text{eff}} = \ln\left(\frac{A}{R}\right) \mu_0 e^2 \pi R^2 \rho \frac{1}{2\pi}.$$

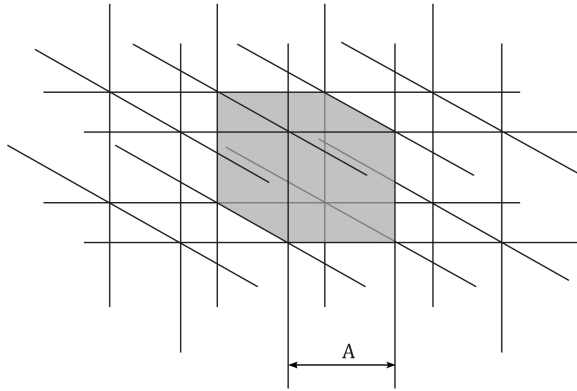
Če so žice tanke in razmaki med njimi primerno veliki, na primer nekaj mikronov za radij žice in nekaj milimetrov za razmake med njimi, lahko znižamo plazemsko frekvenco na mikrovalovno območje [12]. Struktura, prikazana na sliki 7, se tako efektivno obnaša kot redka plazma.

Resonanca v odzivu metamateriala pa nam lahko omogoči večji odziv materiala v okolici resonančne frekvence, zato se danes široko raziskuje različne geometrije optičnih metamaterialov. Znan primer so periodično urejene žice s prekinitvami, katerih dielektrični odziv se opisuje z Drude-Lorentzovim modelom [10],

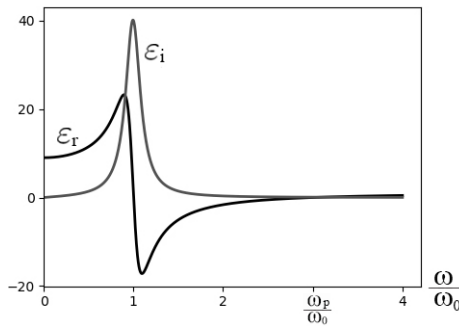
$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma},$$

kjer Γ predstavlja izgube, ω_p (plazemska frekvenca) in ω_0 (resonančna frekvenca) pa sta določeni zgolj z geometrijskimi parametri na enak način, kot je bilo predstavljeno na primeru materiala, ki je prikazan na sliki 7. Za

Nevidnost



Slika 7. Metamaterial sestavljen iz tankih neskončnih žic, urejenih v osnovno kubično mrežo.



Slika 8. Primer frekvenčne odvisnosti realne in imaginarnе komponente dielektričnosti pri določeni vrednosti parametrov Γ in ω_p ($\Gamma/\omega_0 = 0,2$, $\omega_p/\omega_0 = 3$).

$\omega_0 < \omega < \omega_p$ je realni del dielektričnosti negativen (slika 8). S spreminjanjem resonančne frekvence preko spreminjanja materialnih in geometrijskih parametrov se lahko torej nastavlja frekvenčno območje, kjer je dielektričnost negativna.

Z Drude-Lorentzovim modelom lahko razložimo tudi, zakaj v naravi ni znanega materiala z negativnim lomnim količnikom. Odziv snovi določajo elektroni, vezani v harmonskem potencialu z resonančno frekvenco ω_0 . Tako vezani elektroni se obnašajo kot harmonski oscilatorji, ki jih vzbuja oscili-

rajoče električno polje. Pri frekvencah elektromagnetnega valovanja pod resonančno nihajoči elektroni lahko sledijo polju in posledično inducirana polarizacija kaže v smeri polja. Podobno kot relativni odmik glede na smer vzbujanja pri klasičnem harmonskem oscilatorju, v vzbujanem dielektriku inducirana polarizacija nad resonančno frekvenco elektromagnetnega valovanja spremeni predznak. Nad resonančno frekvenco, in hkrati v njeni bližini, je odziv materiala torej negativen [10].

Resonančne frekvence dielektričnosti se navadno pojavljajo pri relativno visokih frekvencah, na primer za kovine v optičnem frekvenčnem območju, medtem ko so resonance v magnetnih sistemih praviloma pri nižjih frekvencah [10]. Negativna dielektričnost in permeabilnost se torej značilno ne pojavljata v enakem frekvenčnem območju, kljub temu da bi v splošnem fizikalne zakonitosti dovoljevale obstoj takega materiala [10].

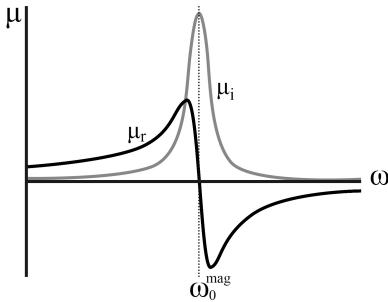
Magnetni odziv materiala

Magnetni odziv tipičnih materialov (na primer kovin) pri frekvencah nad GHz območjem praviloma postane majhen [7], zato potrebujemo umetno oblikovane materiale, pri katerih je magnetni odziv prisoten tudi pri višjih frekvencah.

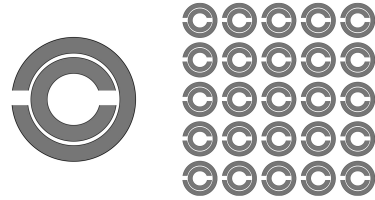
Magnetni odziv lahko dosežemo s tokovno zanko, podobno kot so pri naravnih materialih magnetne lastnosti pogosto posledica tokov zaradi kroženja elektronov (spin). Tok po zanki lahko ustvarimo s pomočjo indukcije. Induciran tok v izbranem metamaterialnem gradniku je navadno (pre)šibek in sledi, da je šibek tudi magnetni moment zanke. Strukturo zato preoblikujemo tako, da dobimo resonančno obliko odziva in posledično veliko večji odziv v okolici resonančne frekvence. Primer resonančne strukture z magnetnim odzivom so tako imenovani resonatorji z razcepljenim obročem (*split ring resonators*) oz. s kratico SRR, ki so v prikazani geometriji sestavljeni iz dveh zank, ki sta na nasprotnih straneh prekinjeni, kot lahko vidimo na sliki 10. Struktura ima tako induktivnost kot kapacitivnost in se efektivno obnaša kot nihajni krog z resonančno frekvenco $\omega_0^{mag} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ [7]. Resonančno odvisnost permeabilnosti lahko vidimo na sliki 9.

Primer materiala z negativnim lomnim količnikom

Poglejmo si sedaj primer materiala, ki združuje strukturo sestavljeno iz SRR (za magnetni resonančni odziv) in mreže žic (za električni resonančni odziv). Pri samem oblikovanju materiala je pomembno, kako sestavimo posamezne enote v dvo- ali tridimenzionalno strukturo, da bomo dosegli čim večji magnetni odziv. Za čim večjo magnetno aktivnost materiala morajo biti elementi zloženi tako, da bodo prestregli čim več magnetnega pretoka [12].

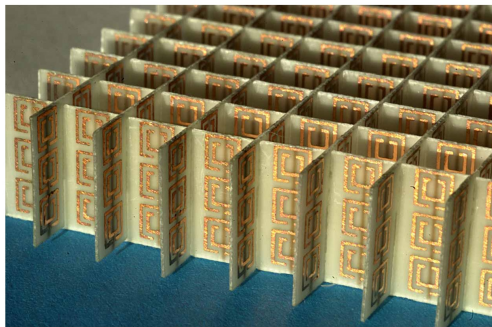


Slika 9. Shema resonančne odvisnosti realne in imaginarne komponente permeabilnosti magnetnega materiala, prikazane na sliki 10, od frekvence.



Slika 10. Shema optičnega metamateriala, sestavljenega iz resonatorjev z razcepljenim obročem.

Primer optičnega metamateriala, oblikovanega za mikrovalovne frekvence, je prikazan na sliki 11. V tem frekvenčnem območju je z upoštevanjem ustrezne geometrije potrebna značilna velikost vzorca materiala velikostnega reda 1 cm, medtem ko bi morali biti SRR za resonanco pri optičnih frekvencah velikostnega reda 100 nm, kar je veliko težje doseči [7]. Slabost metamaterialov s kovinskimi strukturami, pri katerih želene odzive materiala dobimo s pomočjo pojavov povezanih s prostimi elektroni v kovini, je, da so izgube zaradi absorpcije zelo velike. Danes se zato široko razvijajo vsedielektrični metamateriali [4].



Slika 11. Metamaterial z negativnim lomnim količnikom v mikrovalovnem frekvenčnem območju. Značilna velikost strukture je velikostnega reda 1 cm [15].

Eksperimentalna realizacija ogrinjala nevidnosti

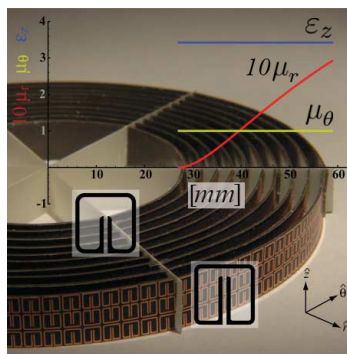
Eksperiment, s katerim so po teoretičnih napovedih poskušali realizirati ogrinjalo nevidnosti, so izvedli leta 2006 [13]. Izbrali so cilindrično geometrijo in oblikovali dvodimenzionalno ogrinjalo za delovanje v mikrovalovnem območju. Za predmet, ki so ga skrili v ogrinjalo, so izbrali prevoden valj. Transformacija prostora je podobna tisti, ki smo jo predstavili v poglavju Primer ogrinjala nevidnosti v sferičnih koordinatah, le da moramo tu upoštevati cilindrično geometrijo. Izbrali so elektromagnetno valovanje polarizirano v smeri osi z , zato so relevantne komponente ε'_z , μ'_r in μ'_θ .

$$\varepsilon'_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r' - a}{r'}, \quad \mu'_r = \frac{r' - a}{r'} \quad \text{in} \quad \mu'_\theta = \frac{r'}{r' - a}. \quad (12)$$

Za lažje implementiranje lastnosti materiala lahko izberemo reducirane parametre, ki opisujejo enako disperzijsko relacijo,

$$\varepsilon'_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2, \quad \mu'_r = \left(\frac{r' - a}{r'}\right)^2 \quad \text{in} \quad \mu'_\theta = 1. \quad (13)$$

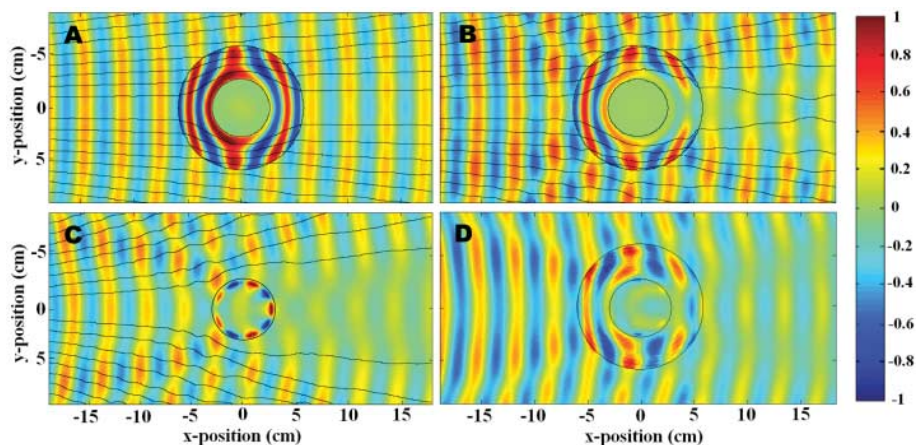
Disperzija namreč določa dinamiko valovanja v plašču. Edina omejitev te izbire je, da transformacija na robu plašča ni več zvezna, iz česar sledi, da se zaradi neujemajoče impedance na prehodu pojavijo odboji. Ogrinjalo nevidnosti – torej ustrezno konstruiran optični metamaterial – je prikazano na sliki 12.



Slika 12. Dvodimenzionalno ogrinjalo nevidnosti, ki deluje v mikrovalovnem frekvenčnem območju [13].

Parameter μ'_r ima radialno odvisnost, zato so SSR orientirani tako, da njihove osi kažejo v radialni smeri, hkrati pa se s spreminjanjem njihovih geometrijskih parametrov doseže ustrezne vrednosti ε'_z in μ'_r . Za frekvenco,

pri kateri naj bi ogrinjalo delovalo, so izbrali 8,5 GHz, iz česar sledi, da mora biti $\frac{\lambda}{a_{\theta}} \gg 10$. Na sliki 13 A vidimo primer simulacije, ki upošteva zvezen medij. Na sliki 13 B so pri simulaciji upoštevali reducirane parametre, nezvezen medij in absorpcijo. Primer C predstavlja sipanje na prevodnem valju brez plašča, primer D na sliki 13 pa predstavlja dejanski eksperiment z ogrinjalom. Polja na drugi strani predmeta so oslabljena zaradi absorpcije materiala, sicer pa vidimo, da ogrinjalo močno zmanjša tako senco kot odboje [13]. Opisani je eden prvih, če ne prvi primer realizacije, je pa danes to široko aktivno področje raziskav, tako osnovnih kot aplikativnih in industrijskih [16, 3, 9].



Slika 13. Profil elektromagnetnega valovanja, ki vpada na plašč nevidnosti iz slike 14. Primera A in B predstavljata simulacijo, primera C in D pa predstavljata eksperiment [15].

Zaključek

Zmožnost poljubnega usmerjanja elektromagnetnega valovanja bi nam omogočila izvedbo številnih zanimivih optičnih naprav, med katerimi je tudi ogrinjalo nevidnosti. Odkritje metamaterialov in negativnega loma danes omogoča, da se z razvojem metamaterialov z majhnimi izgubami in magnetno aktivnostjo tudi v optičnem frekvenčnem območju praktične izvedbe načrtovanih naprav vedno bolj približujejo teoretičnim napovedim. V prispevku smo obravnavali primer uporabe transformacijske optike za načrtovanje ogrinjala nevidnosti, poleg tega pa smo predstavili, kako lahko oblikujemo materiale z negativnim lomnim količnikom ter kakšne so njihove lastnosti.

LITERATURA

- [1] P. Alitalo in S. Tretyakov, *Electromagnetic cloaking with metamaterials*, Materials Today **12** (2009), 22–29.
- [2] H. Chen, C. T. Chan in P. Sheng, *Transformation optics and metamaterials*, Nature Materials **9** (2010), 387–396.
- [3] P. Cheben, R. Halir, J. H. Schmid, H. A. Atwater in D. R. Smith, *Subwavelength integrated photonics*, Nature **560** (2018), 565–572.
- [4] S. Jahani in Z. Jacob, *All-dielectric metamaterials*, Nature Nanotechnology **11** (2016), 23.
- [5] U. Leonhardt in T. G. Philbin, *General relativity in electrical engineering*, New Journal of Physics **8** (2006), 247.
- [6] U. Leonhardt in T. Tyc, *Broadband invisibility by non-Euclidean cloaking*, Science **323** (2009), 110–112.
- [7] Y. Liu in X. Zhang, *Metamaterials: a new frontier of science and technology*, Chemical Society Reviews **40** (2011), 2494.
- [8] G. W. Milton, M. Briane in J. R. Willis, *On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form*, New Journal of Physics **8** (2006), 248.
- [9] F. Monticone in A. Alù, *Metamaterial, plasmonic and nanophotonic devices*, Reports on Progress in Physics **80**, (2017).
- [10] J. B. Pendry in D. R. Smith, *Reversing light with negative refraction*, Physics Today **57** (2004), 37.
- [11] J. B. Pendry, D. Schurig in D. R. Smith, *Controlling electromagnetic fields*, Science **312** (2006), 1780.
- [12] J. B. Pendry, *Negative refraction*, Contemporary Physics **45** (2004), 191.
- [13] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr in D. R. Smith, *Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies*, Science **314** (2006), 977.
- [14] D. Schurig, J. B. Pendry in D. R. Smith, *Calculation of material properties and ray tracing in transformation media*, Optics Express **14** (2006), 9794.
- [15] D. R. Smith, J. B. Pendry in M. C. K. Wiltshire, *Metamaterials and negative refractive index*, Science **305** (2004), 788.
- [16] I. Staude in J. Schilling, *Metamaterial-inspired silicon nanophotonics*, Nature Photonics **11** (2017), 274–284.
- [17] J. Strnad, *Fizika 2. del: Električna. Optika*, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2020, 194–200.
- [18] V. G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Physics Uspekhi **10** (1968), 509.
- [19] L. Xu in H. Chen, *Conformal transformation optics*, Nature Photonics **9** (2014), 15–23.
- [20] The Professor Harry Messel International Science School, *Metamaterials and the science of invisibility – Prof. John Pendry*, dostopno na youtu.be/f0iZraLdNuM, ogled 27. 3. 2020.
- [21] *Lycurgus Cup*, dostopno na www.sciencedirect.com/topics/engineering/lycurgus-cup, ogled 26. 3. 2020.

Sedemindvajseto mednarodno matematično tekmovanje študentov

Med 25. in 30. julijem 2020 je potekalo 27. mednarodno matematično tekmovanje študentov (angl. International Mathematics Competition for University Students). Zaradi pandemije koronavirusne bolezni COVID-19 je običajno prizorišče iz zadnjih let, tj. Blagoevgrad v Bolgariji, zamenjala izvedba na daljavo. Poleg same lokacije tekmovanja je pandemija imela tudi številne druge posledice. Običajno so slovenske barve zastopali študenti Univerze na Primorskem in Univerze v Ljubljani. Letos so se tekmovanja udeležili le študenti prve. Pandemija je pri nas zaradi takih ali drugačnih razlogov botrovala tudi nekoliko manjšemu interesu za sodelovanje. Na FAMNIT-u¹ tako letos nismo izvedli tradicionalnega izbirnega predtekmovanja, priložnost pa so dobili tudi nekateri študenti prvih letnikov ter nematematičnih študijskih programov. Univerzo na Primorskem so zastopali Arbër Avdullahu (1. letnik magistrskega programa Matematične znanosti), Besfort Shala (2. letnik dodiplomskega programa Matematika), Ajla Šehović (1. letnik dodiplomskega programa Matematika) ter Milan Milivojčević in Jana Ristovska (oba 1. letnik dodiplomskega programa Računalništvo in informatika). Arbër Avdullahu in Besfort Shala sta prejela pohvalo.

Zaradi nižjih stroškov in olajšane logistike je bila globalno gledano udeležba sicer rekordna. Prijavljenih je bilo 564 tekmovalcev, na rezultatni listi pa je 546 tekmovalcev. Razlika 18 študentov predstavlja unijo tistih, ki kljub prijavi niso tekmovali, ter tistih, ki so jih ujeli pri goljufanju. Da bi do slednjega lahko prišlo, je bilo moč pričakovati že pred začetkom tekmovanja. Večina študentov je dostopala od doma s pomočjo spletnih aplikacij, kot je Zoom itd. Na nekaj univerzah, kjer je stanje pandemije to dovoljevalo, pa so študenti tekmovali na matični univerzi. V vsakem primeru je moral vodja ekipe poskrbeti, da do goljufanja ne pride. Dodaten riziko varnosti je ležal v dejstvu, da se tekmovanje v različnih krajih ni začelo istočasno. Slednje je bilo uvedeno z namenom, da bi bil čas pisanja čim bolj pravičen za vse udeležence po vsem svetu. Zaradi vsega omenjenega sem pred tekmovanjem, kot vodja ekipe, našim študentom zabičal, da se goljufanje enostavno ne splača. Mlad študent se pogosto ne zaveda, da bi mu tako ravnanje prilepilo črno piko v velikem delu matematične javnosti, morebitno bodoče iskanje pozicij za doktorski ali podoktorski študij pa bi bilo izjemno oteženo. Prav tako sem našim študentom razjasnil, da je že sum na goljufanje več kot dovolj za nepopravljivo škodo.

¹Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem

V zadnjih letih so študenti na tekmovanju reševali naloge v dveh dneh, pri čemer so na vsak dan imeli na voljo pet ur za pet nalog. Letos je bilo podobno, le da so vsak dan imeli na voljo štiri ure za štiri naloge. Predvidevam, da je bilo zmanjšanje števila nalog uvedeno zato, ker je izvedba na daljavo terjala dodatna opravila. Veliko študentov doma ni imelo tiskalnika, zato se je tekmovalni dan začel s prenosom nalog, ki jih je bilo treba ročno prepisati. Takoj zatem se je začelo štiriurno reševanje nalog, pri čemer je moral vodja ekipe poskrbeti, da so študenti ustrezno odmaknjeni od računalnika in ne gledajo v monitor. Na koncu so morali študenti liste s telefonom poslikati, jih z aplikacijo CamScanner² spraviti v ustrezno obliko ter naložiti na strežnik. Maksimalen razpon med prvim prenosom nalog in zadnjim nalaganjem na strežnik je bil za vsako ekipo največ šest ur. Tako kot vsako leto smo bili vodje ekip tudi letos pozvani, da prispevamo kako nalogo za morebiten izbor. Sam izbor nalog pa je bil letos nekoliko drugačen. Za slednjega je bil sprva napovedan tradicionalen sestanek komisije, ki bi jo sestavljali vse vodje ekip, a do tega ni prišlo. Naloge je izbrala javnosti neznana mednarodna skupina vodij. Kar tri izmed osmih nalog, ki so bile hkrati najslabše rešene, sta predlagala predstavnik Državne univerze v Sankt Peterburgu. Zakaj je toliko bremena padlo na eno univerzo, ne vem. Morda je primanjkovalo predlogov zelo težkih nalog. Sicer gre za univerzo z izjemnimi posamezniki, ki ima bogato tradicijo na tekmovanju. Zmagovalec letošnje izvedbe, Stanislav Krymskii, je ravno iz te univerze, ekipno pa so dosegli drugo mesto. Pri ocenjevanju nalog smo si popravljavci pomagali s programskima rešitvama Dropbox in Zulip Chat. Slednji je bil nepogrešljivo orodje predzadnji dan tekmovanja, ko je bil na vrsti boj vodij ekip za dodatne točke. Tudi tukaj se je najbolje izkazal vodja ekipe iz Sankt Peterburga, ki je svojim študentom priboril dodatnih 50 točk, od tega kar 18 točk kasnejšemu zmagovalcu. Zaradi uporabe programa Zulip Chat so bila vsa tovrstna »barantanja« vidna vsem vodjem ekip. Tako smo lahko prebrali tudi zapis vodje ekipe iz Sankt Peterburga, ki je zmagovalca opisal kot čudno osebo, ki ima zelo nenavaden način razmišljanja. Zaradi tega naj bi bili matematični pogovori z njim zelo oteženi, uspešno pa naj bi reševal vse probleme, ki mu jih zastavijo.

Za konec dodajam tri rešene naloge s tekmovanja. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko naloge. Pri prvih dveh nalogah je bilo uspešnih kar nekaj študentov, medtem ko je pri zadnji nalogi le peščica študentov dobila kakšno točko. Rešitev te naloge je tukaj zapisana nekoliko bolj detajlno kot v uradnih rešitvah, ki so na voljo na spletni strani [2].

²Uporaba omenjene aplikacije [1] bo v času pandemije prišla prav marsikateremu predavatelju pri popravljanju domačih nalog.

II.1. Poišči vse dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, ki zadoščajo neenakosti

$$f''(x)f(x) \geq 2(f'(x))^2$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

Očitno vsaka konstantna pozitivna funkcija zadošča prepostavkam. Pokažimo, da drugih takih funkcij ni. Naj bo $f(x)$ funkcija iz naloge in naj bo $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ njena recipročna vrednost. Funkcija g je konkavna, saj je

$$g''(x) = \frac{2(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f(x))^3} \leq 0$$

za vse x . Zato za poljubna realna števila $a < x < y < b$ velja

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \geq \frac{g(b) - g(y)}{b - y}.$$

Ker sta vrednosti $g(a)$ in $g(b)$ pozitivni, sledi

$$\frac{g(x)}{x - a} \geq \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \geq \frac{-g(y)}{b - y}.$$

Če pošljemo a proti $-\infty$ ter b proti ∞ , dobimo

$$0 \geq \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \geq 0,$$

kar pomeni, da velja $g(x) = g(y)$. Zato sta tako funkcija g kot tudi funkcija f nujno konstantni.

I.2. Naj bosta A in B dve realni matriki, za kateri velja

$$\text{rk}(AB - BA + I) = 1,$$

kjer je I identična matrika velikosti $n \times n$. Pokaži, da velja

$$\text{sled}(ABAB) - \text{sled}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n - 1).$$

Pri tem je $\text{rk}(M)$ rang matrike M , $\text{sled}(M)$ pa je vsota vseh njenih diagonalnih elementov.

Predpostavka o rangju implicira obstoj takih stolpičnih vektorjev \mathbf{u} in \mathbf{v} , da velja

$$AB - BA + I = \mathbf{u}\mathbf{v}^\top. \quad (1)$$

Če zmnožimo vrstico \mathbf{v}^\top in stolpec \mathbf{u} , dobimo sled matrike (1). Zato nam linearnost funkcije sled in njena lastnost

$$\text{sled}(XY) = \text{sled}(YX), \quad (2)$$

ki velja za vse kvadratne matrike X, Y enakih velikosti, porodita enakost

$$n = \text{sled}(I) = \text{sled}(\mathbf{u}\mathbf{v}^\top) = \mathbf{v}^\top \mathbf{u}. \quad (3)$$

Če še enkrat uporabimo iste lastnosti sledi ter enakost (3), dobimo

$$\begin{aligned} \text{sled}((AB - BA)^2) &= \text{sled}((\mathbf{u}\mathbf{v}^\top - I)^2) \\ &= \text{sled}(\mathbf{u}(\mathbf{v}^\top \mathbf{u})\mathbf{v}^\top + I - 2\mathbf{u}\mathbf{v}^\top) \\ &= (\mathbf{v}^\top \mathbf{u} - 2) \text{sled}(\mathbf{u}\mathbf{v}^\top) + n \\ &= (n - 2)n + n \\ &= n(n - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Po drugi strani iz večkratne uporabe enakosti (2) sledi

$$\begin{aligned} \text{sled}((AB - BA)^2) &= \text{sled}(ABAB + BABA - ABBA - BAAB) \\ &= 2(\text{sled}(ABAB) - \text{sled}(A^2B^2)), \end{aligned}$$

kar skupaj z enakostjo (4) reši nalogo.

I.3. Naj bo $d \geq 2$ naravno število. Pokaži, da obstaja taka konstanta $C(d)$, za katero velja naslednje. Za vsak konveksen politop $K \subset \mathbb{R}^d$, ki je simetričen čez izhodišče, in za vsak $\varepsilon \in (0, 1)$ obstaja tak konveksen politop $L \subset \mathbb{R}^d$ z največ $C(d)\varepsilon^{1-d}$ oglišči, za katerega velja

$$(1 - \varepsilon)K \subseteq L \subseteq K.$$

Študenti so imeli na voljo še naslednje definicije. Naj bo α realno število. Množica $T \subset \mathbb{R}^d$, ki ima neprazno notranjost, je *konveksen politop z največ α oglišči*, če je enaka konveksni ogrinjači množice $X \subset \mathbb{R}^d$, ki ima največ α elementov, tj. $T = \{\sum_{x \in X} t_x x \mid t_x \geq 0, \sum_{x \in X} t_x = 1\}$. Za realno število λ naj bo $\lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}$. Množica $T \subset \mathbb{R}^d$ je *simetrična čez izhodišče*, če velja $(-1)T = T$.

Naj bosta K in ε , kot izhaja iz naloge. V posebnem naj ima množica K neprazno notranjost. Naj bo $\text{vol}(K)$ volumen politopa K . Izberimo

tako normo $\|\cdot\|$ na vektorskem prostoru \mathbb{R}^d , da bo politop K enak enotski zaprti krogli $B(0, 1)$ v njem. Tukaj za $x \in \mathbb{R}^d$ in $r > 0$ uporabljamo oznaki $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| < r\}$ in $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leq r\}$. Norma s tako lastnostjo je sicer podana preko funkcionala Minkowskega

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in K\},$$

preverbo česar prepuščamo bralcu. Izberimo poljubno množico X , ki je vsebovana v robu množice K (tj. v enotski sferi v prostoru $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$), je maksimalna glede na inkluzijo, in vsaki njeni različni točki sta med seboj za vsaj ε narazen glede na normo $\|\cdot\|$.

Pokažimo najprej, da je množica X končna, in izračunajmo zgornjo mejo za njeno moč $|X|$. Za vsak $x \in X$ je krogla $B(x, \varepsilon/2)$ vsebovana v razliki

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \overline{B(0, 1)} \setminus \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \overline{B(0, 1)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) K \setminus \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) K. \quad (5)$$

Iz trikotniške neenakosti namreč za vsak $y \in B(x, \varepsilon/2)$ sledi

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \|x\| - \|y - x\| \leq \|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poleg tega so vse krogle $B(x, \varepsilon/2)$ ($x \in X$) paroma disjunktne. Ker ima množica (5) volumen enak $((1 + \varepsilon/2)^d - (1 - \varepsilon/2)^d)\text{vol}(K)$, vsaka krogla $B(x, \varepsilon/2)$ pa ima volumen $(\varepsilon/2)^d\text{vol}(K)$, sledi

$$\begin{aligned} |X| &\leq \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^d - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^d}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^d} \\ &= \frac{(2 + \varepsilon)^d - (2 - \varepsilon)^d}{\varepsilon^d} \\ &= \varepsilon^{-d} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (\varepsilon^i - (-\varepsilon)^i) 2^{d-i} \\ &= \varepsilon^{1-d} \sum_{j=1}^{\lceil d/2 \rceil} \binom{d}{2j-1} \varepsilon^{2j-2} 2^{d-2j+2} \\ &\leq \varepsilon^{1-d} \sum_{j=1}^{\lceil d/2 \rceil} \binom{d}{2j-1} 2^{d-2j+2} \\ &= C(d) \varepsilon^{1-d}, \end{aligned}$$

kjer smo za konstanto $C(d)$ izbrali število $\sum_{j=1}^{\lceil d/2 \rceil} \binom{d}{2j-1} 2^{d-2j+2}$.

Naj bo konveksen politop L enak konveksni ogrinjači množice X . Inkluzija $L \subseteq K$ sledi iz konveksnosti množice K . Pokazati moramo še inkluzijo $(1 - \varepsilon)K \subseteq L$. Denimo, da le-ta ne velja, tj. obstaja neki $x_0 \in (1 - \varepsilon)K \setminus L$. Ker je množica L konveksna in zaprta, iz izreka o separaciji konveksnih množic sledi obstoj takega (zveznega) linearnega neničelnega funkcionala f na $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$, da velja $\max_{x \in L} f(x) = \sup_{x \in L} f(x) \leq f(x_0)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\|f\| = 1$ (sicer f delimo z $\|f\|$). Tedaj velja

$$\max_{x \in L} f(x) \leq |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\| = 1 - \varepsilon.$$

Za vsak $x \in L$ obstaja naravno število n , točke $x_1, \dots, x_n \in X$ in nenegativna števila $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, za katera velja $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ in $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Zato je $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$ in posledično

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{x \in L} f(x) \leq 1 - \varepsilon. \quad (6)$$

Ker je prostor $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ končnorazsežen, je rob množice K , tj. enotska sfera v tem prostoru, kompaktna. Zato zvezna funkcija $|f|$ doseže maksimum na njej. Tj., obstaja tak $x_1 \in \mathbb{R}^d$, da velja $\|x_1\| = 1$ in

$$1 = \|f\| = \max_{\|x\|=1} |f(x)| = |f(x_1)|.$$

Naj bo x_2 tisti enotski vektor izmed x_1 in $-x_1$, za katerega je $f(x_2) = 1$. Iz neenakosti (6) za vsak $x \in X$ sledi

$$\varepsilon \leq |f(x_2) - f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x_2 - x\| = \|x_2 - x\|,$$

kar je v nasprotju z maksimalnostjo množice X .

LITERATURA

- [1] *How To Upload Your Solutions*, dostopno na www.youtube.com/watch?time_continue=43&v=ApJ1fBMBByow&feature=emb_title, ogled 3. 11. 2020.
- [2] *International Mathematics Competition for University Students*, dostopno na www.imc-math.org.uk, ogled 3. 11. 2020.

Marko Orel

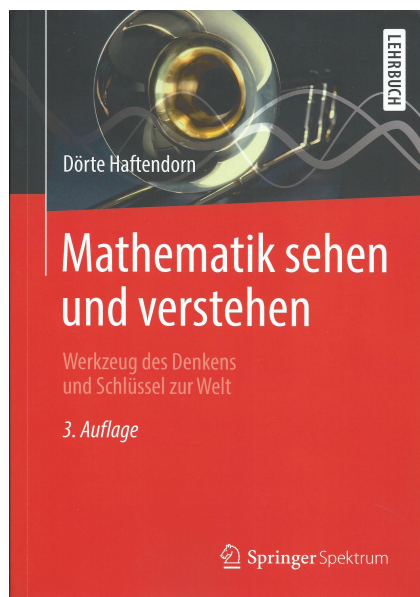
NOVE KNJIGE

Dörte Haftendorn, *Mathematik sehen und verstehen, Werkzeug des Denkens und Schlüssel zur Welt*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019, 418 strani.

Knjiga je nastala na podlagi dobro obiskanih predavanj, ki jih je avtorica imela na univerzi Leuphana v Lüneburgu (Spodnja Saška) za študente različnih študijskih smeri. Rdeča nit teh predavanj je bila *matematika za vse*. V Nemčiji so namreč opazili, da so po šolah pri matematiki zadnje čase dajali vse preveč poudarka na računanje, premalo pa na razumevanje učne snovi. Avtorica zavzema stališče, da je matematiko treba hkrati videti in jo razumeti. Matematika je zanjo orodje mišljenja in ključ do sveta. Da bi to dosegli, je treba matematiko popestriti, kjer se le da, s slikovnim materialom. Prav zato je v knjigi veliko lepih barvnih fotografij, slik in grafov, ki ji dajo še dodatno privlačnost. V knjigi seveda piše veliko več, kot je bilo povedanega in prikazanega na predavanjih.

Predavanja so naletela na odličen odziv. Več kot 1000 študentov se je želelo naučiti vsaj nekaj matematike (čeprav univerza Leuphana v Lüneburgu zagotovo ni posebno velika univerza). Pri tem je avtorica imela opravka s celim spektrom študentov: od zelo nadarjenih za matematiko prek tistih, ki jih zanima le njena uporaba, do tistih, ki zanjo niso pokazali posebnega smisla. Z vizualizacijo je skušala prepričati tudi največje matematične skeptike, da je matematika lepa in tudi uporabna. Zato je navedla veliko dobro izbranih zgledov, na primer iz zgodovine matematike, vsakdanjega življenja, narave, umetnosti in gradbeništva.

V tej obsežni knjigi je v besedi in sliki opisanih deset pomembnih matematičnih področij, in sicer: kriptografija, kodiranje, teorija grafov in vozlov, fraktali skupaj s kaosom in urejenostjo, funkcije, optimizacija, računalništvo



in matematika, numerična matematika, stohastika ter geometrija. Vsakemu od naštetih področij je namenjeno posebno poglavje. Nekatera izmed njih vsebujejo tudi naloge, katerih rešitve so na koncu knjige. Nekateri matematiki imajo na izbiro področij morda tehtne pripombe, toda za nematematike je glede na odziv izbira vsekakor primerna. Avtorica je iskala kompromis, da bi bila enako upoštevana temeljna matematična področja (geometrija, funkcije) in področja, ki so še posebej primerna za vizualno predstavitev (kriptografija, kaos). S svojim strokovnim znanjem, izkušnjami in didaktično veščino ji je uspelo predstaviti tudi nekatere težje teme.

Opišimo na primer na kratko vsebino poglavja o kodiranju. Najprej so omenjeni notni zapisi v glasbi. V njih so zakodirani toni, njihove dolžine, načini izvedbe, glasnost, takti, ključi in še kaj. Nato pridejo na vrsto opisi kodiranja, s katerimi imamo opravka v vsakdanjem življenju (v trgovini, knjižnici, bančništvu), a jim ne posvečamo posebne pozornosti. To so na primer črtna koda EAN za označevanje izdelkov, ISBN za označevanje knjig, ISSN za označevanje revij, IBAN za označevanje bančnih računov, dvorazsežna črtna koda QR in Hammingova koda.

Kot naslednji in zadnji primer si malo natančneje oglejmo poglavje o zelo uporabni numerični matematiki. Z ocenjevanjem napak posameznih numeričnih metod se ne ukvarja, le opozarja nanje. Najprej obravnava starodavno iterativno Heronovo metodo za računanje kvadratnega korena in potek predstavi grafično v koordinatnem sistemu. Sledita sekantna in Newtonova ali tangentsna metoda za iskanje ničel funkcij. Nato so na vrsti metode za računanje določenih integralov. Najprej je pojasnjeno, kako je Arhimed izračunal ploščino odseka parabole in kako je Kepler njegov rezultat uporabil za približen izračun ploščine lika pod grafom funkcije nad intervalom. Arhimed in Kepler še nista poznala pojma integrala. Razdelek o numerični integraciji zaključuje Simpsonova metoda. Tej sledijo polinomi kot preproste funkcije, še posebej Taylorjevi in interpolacijski polinomi. V naslednjem razdelku so predstavljeni zlepki, v prvi vrsti kubični in Bézierovi, ter njihova uporaba. Poglavje se nadaljuje s Fourierovimi vrstami, ki jih poveže z glasbo: s toni in zveni. Morda je nekoliko zgrešeno, da so Fourierove vrste našle mesto v tem poglavju, saj ne omenja nobene numerične metode za računanje Fourierovih koeficientov. Zadovolji se z načrtovanjem grafov delnih vsot Fourierovih vrst neke funkcije, s čimer želi pokazati, kako

se grafi teh delnih vsot z rastočim številom členov približujejo grafu funkcije. Prav tako ni opisane nobene numerične metode za reševanje diferencialnih enačb v naslednjem razdelku, niti Eulerjeve ne. Pač pa pokaže uporabnost polja smeri diferencialne enačbe. Tako polje lahko preprosto narišemo z GeoGebro, ki ima za to poseben ukaz. Polje smeri nakazuje potek rešitve. Poglavje se konča z razlago o pomembnosti numerične matematike v tehniki, gradbeništvu in medicini.

Desetim glavnim poglavjem, od katerih je vsako posvečeno enemu od omenjenih matematičnih področij, je na začetku knjige namenjeno uvodno poglavje, v katerem je razloženo, zakaj in kako je knjiga nastala in kaj je njen cilj. Nekaj malega je tam zapisanega tudi o zgodovini poučevanja matematike. Temu sledi obširna razlaga, kaj početi ob branju knjige. Moto knjige je *bolje razumeti brez računanja kot računati brez razumevanja*. Pred začetkom pravih poglavij so njihovi kratki opisi ter nekaj osebnih razmišljanj in pripomb avtorice glede matematike in študija. Zadnje, dvanajesto poglavje podaja nekaj osnov matematike, kot so izgradnja števil od naravnih do kompleksnih, dokazovanje z nekaj dobro znanimi primeri in nerešljivi antični problemi. Kot se za vsako resno matematično knjigo spodobi, sta tudi tej dodana čisto na koncu zajeten seznam literature in stvarno kazalo.

Po mnenju nekaterih je to kljub nekaterim pomanjkljivostim ena od najbolj priljubljenih knjig iz matematike za mlade v zadnjih letih. Priporočajo jo vsem, ki jih ta znanost zanima, tudi učencem in dijakom, ki se lahko iz nje naučijo veliko novega. Knjiga je doživela že tri izdaje (2010, 2016, 2019), v vsaki novejši izdaji je dodanih nekaj novih matematičnih področij. Dopnilo h knjigi je spletišče www.mathematik-sehen-und-verstehen.de, od koder lahko prenesemo številne datoteke, tudi za GeoGebro, s katero imamo možnost na preprost način spreminjati parametre.

Prof. Dörte Haftendorn, avtorica knjige, rojena leta 1948, je študirala matematiko in fiziko. Po doktoratu (algebra) je poučevala na gimnaziji in predavala bodočim učiteljem, inženirjem in informatikom na strokovni visoki šoli ter na univerzi Leuphana v Lüneburgu (Spodnja Saška). Leta 2013 se je upokojila, z univerzo pa še vedno sodeluje.

Marko Razpet

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 2020

Letnik 67, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Povabilo v inverzne polgrupe (Ganna Kudryavtseva)	121–135
Nevidnost (Linda Bitenc in Miha Ravnik)	136–152
Vesti	
Sedemindvajseto mednarodno matematično tekmovanje študentov (Marko Orel)	153–158
Nove knjige	
Dörte Haftendorn, <i>Mathematik sehen und verstehen,</i> <i>Werkzeug des Denkens und Schlüssel zur Welt</i> (Marko Razpet) ..	159–XV

CONTENTS

Articles	Pages
Invitation to inverse semigroups (Ganna Kudryavtseva)	121–135
Invisibility (Linda Bitenc and Miha Ravnik)	136–152
News	153–158
New books	159–XV

Na naslovnici: Shema prikazuje trajektorije žarkov elektromagnetnega valovanja skozi sferično ogrinjalo nevidnosti (glej članek na straneh 136–152).