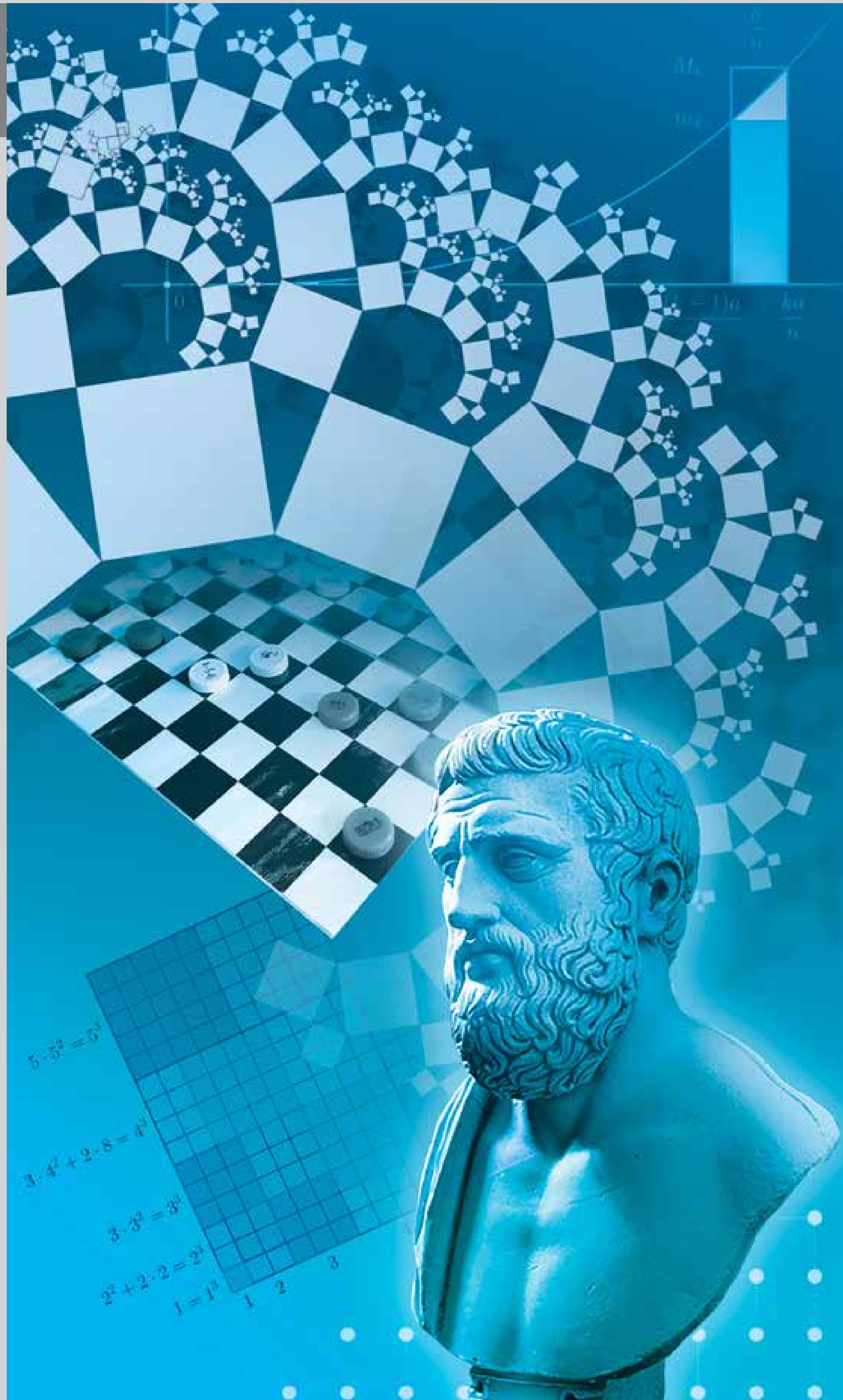
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2020, letnik 26 1



IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Karakteristike domačih nalog pri matematiki v povezavi z matematičnimi dosežki osnovnošolcev

IZ RAZREDA

Različni načini vrednotenja znanja pri pouku matematike

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

Nikomahov izrek

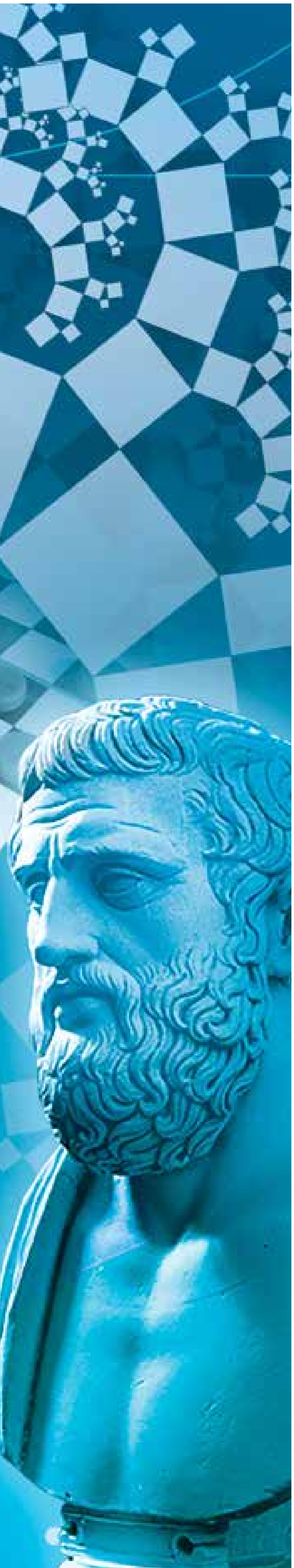
NOVICE

Poučevanje in učenje matematike na daljavo

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2020, letnik 26 1



VSEBINA

Delimo in raziskujemo lastno prakso

Matematika si je skozi zgodovino oblikovala bogato teoretično strukturo, ki se je oblikovala ob reševanju konkretnih problemov. Eden od takih je gotovo Nikomahov izrek, ki je rezultat raziskovanja lastnosti figurativnih števil. Zgodovinska vrednost matematike pa je sama po sebi vrednota le za nekatere, zato na poučevanje matematike lahko gledamo kot na poslanstvo, da poskušamo njeno lepoto približati našim učencem. Ena od takih dejavnosti so gotovo didaktične igre. Didaktične igre so priložnost izobraževanja, ki zbujajo radovednost in pozornost, motivirajo, ciljev pa se običajno učenci niti ne zavedajo, kljub temu pa imajo visok učinek na trajnost znanja. O eni od takih iger smo pisali v prejšnji številki revije, v tej številki pa smo igro uporabili še v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju.

Domača naloga je na(d)loga – ali je to resnica ali le besedna igra? O vlogi in pomenu domačih nalog v našem šolskem prostoru je bilo v preteklosti napisanih in izrečenih kar nekaj besed. Katere karakteristike domačih nalog vplivajo na dosežke naših učencev in na kaj je treba biti pozoren pri domačih nalogah, lahko preberemo v uvodnem članku. Prav pa je, da domačo nalogo pri matematiki razumemo širše kot samo utrjevanje proceduralnih znanj in naj bodo zato usmerjene tudi v reševanje problemov, razvijanje procesnih znanj, razvijanje digitalne kompetence … Domače delo pa so tudi raziskovalne naloge, s katerimi naši učenci sodelujejo na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije. O enem od teh lahko preberete v nadaljevanju.

Kako učenci znajo pojasniti, razmišljati, oblikovati razlage o postopkih, strategijah reševanja, ki so jih uporabili, da bi opredelili rešitve proceduralnih nalog, rešitve problemov v različnih kontekstih, lahko preberemo v članku o nalogah utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja.

Dejavnosti preiskovanja olimpijskih krogov v projektu ATS 2020 iz prejšnje številke nadaljujeta dva primera o velikih številih iz osnovne in srednje šole, ki pokažeta potrebo po simbolu za zapis potence, ki ga je v današnji obliki prvi uvedel René Descartes. Kako pomembno je, da razmišljamo o različnih načinih izkazovanja znanja, pa se je pokazalo v teh pomladnih mesecih, ko so bile naše šole zaprte in so se učenci učili doma. Sedaj lahko razmislimo, v kolikšni meri znamo naše učence zaposliti z dejavnostmi, kjer razvijamo njihovo ustvarjalnost, radovednost in razvijanje procesnih znanj.

Vabljeni k branju in pisanju prispevkov za objavo.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

Spoštovane bralke in bralci,

tokrat smo vam poslali **revijo brez zaščitne folije**. Za to smo se odločili po premisleku zaradi škode, ki jo le-ta povzroča. Na leto namreč razpošljemo prek **14.000** izvodov revij, zavitih v folijo.

Zavedamo se, da se nezaščitena revija lahko pri dostavi poškoduje, pa vendar se nam to zdi sprejemljivo v primerjavi s škodo, ki jo 14.000 zaščitnih folij povzroča okolju.

Upamo, da boste našo odločitev sprejeli z razumevanjem.

Na e-naslovu *zalozba@zrss.si* bomo veseli vašega odziva.

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXVI, številka 1, 2020

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec Škraba, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
Tisk: Tisk Žnidarič, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Karakteristike domačih nalog pri matematiki v povezavi z matematičnimi dosežki osnovnošolcev

dr. Alenka Lipovec in Jasmina Ferme
Pedagoška fakulteta in Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru

Izvleček

Z vidika domačih nalog je matematika eden izmed tistih šolskih predmetov, ki zavzema pomembno mesto, saj od učencev pogosto pričakuje delo tudi izven šolskih ur. Zato splošna javnost in raziskovalna skupnost posvečata problematiki domačih nalog pri matematiki že tradicionalno veliko pozornosti. Prispevek predstavlja karakteristike matematičnih domačih nalog in povezave teh z matematičnimi dosežki učencev. Glavni namen prispevka je opisati tiste karakteristike domačih nalog pri matematiki, ki so pomembne za matematične dosežke. Podani so zbirni rezultati dveh raziskav, omejenih na matematiko, v katerih so sodelovali učenci prvega (N = 192) in zadnjega triletja (N = 417) osnovnošolskega izobraževanja. Opazovane so karakteristike, ki so vezane na šolsko okolje (npr. pogostost domačih nalog); karakteristike, ki so vezane na domače okolje (npr. podpora in kontrola staršev) in karakteristike, ki so vezane na učenca samega (npr. razlogi za nedokončane naloge). V prispevku so izpostavljene karakteristike matematičnih domačih nalog, ki so statistično značilno povezane z matematičnimi dosežki učencev: tiste, za katere velja pozitivna zveza (npr. optimizacija časa) in tiste z razkrito negativno korelacijo (npr. časovna obsežnost domačih nalog). Prav tako so navedene tiste karakteristike matematičnih domačih nalog, ki na osnovi rezultatov raziskave z matematičnimi dosežki niso povezane (npr. pogostost domačih nalog). Rezultati obeh raziskav imajo direktne aplikacije v šolski praksi.

Ključne besede: domače naloge, matematika, osnovna šola, učitelji, starši

Characteristics of Homework in Mathematics Class in Connection with Primary School Students' Learning Outcomes in Mathematics

Abstract

From the perspective of homework, mathematics is among the school subjects that play an important role, because it requires students to work outside school hours. For this reason, the general public and research community traditionally give a great deal of attention to homework in mathematics class. The article introduces the characteristics of homework in mathematics and their connection with students' mathematical achievements. The main purpose is to describe those characteristics which are important for achieving students' learning results in mathematics. Presented are aggregated results of two studies, limited to mathematics, which included primary school students from the first (N = 192) and last triad (N = 417). The characteristics observed relate to school environment (e.g. frequency of homework), home environment (e.g. support and monitoring of parents) and students themselves (e.g. reason for not completing their homework). The article focuses on the characteristics of homework in mathematics that are statistically significantly connected with students' learning outcomes in mathematics: those with a positive (e.g. time optimization) and those with a negative correlation (e.g. amount of time for the homework). The characteristics of homework in mathematics that, based on the study results, show no connection with students' learning outcomes (e.g. frequency of homework) are also included. The results of both studies have a direct application in school practice.

Keywords: homework, mathematics, primary school, teachers, parents

Raznolikost karakteristik matematične domače naloge

V prispevku bomo izraz domača naloga razumeli glede na opredelitev, povzeto po Čagran (1993), ki zapiše, da je »domača naloga pisna, ustna ali praktična oblika učenčevega dela, ki jo posreduje učitelj učencem, in je neposredno povezana s poukom ter jo učenci opravljajo praviloma *samostojno* po rednem šolskem delu« (str. 144). Domače naloge imajo mnogo funkcij, od npr. konsolidacije znanja do npr. razvijanja sposobnosti upravljanja s časom (Xu, 2018). Kakovost domačih nalog je v pozitivni povezavi z učenčevimi matematičnimi dosežki (Rosário in dr., 2018), toda »Domača naloga je učinkovita le, če je njena kakovost visoka. Potrebujemo dodatne raziskave, da bi najprej sploh lahko odgovorili na vprašanje: Kakšna je kakovostna domača naloga?« (Dettmers in dr., 2010, str. 467).

Raziskovalci s področja opozarjajo, da je domača naloga kompleksen izobraževalen pojav, ki vključuje mnogo raznolikih spremenljivk, ki lahko vplivajo na učenčeve dosežke (npr. Rosário in dr., 2019). Kompleksnost pojava je morda razlog za številne poenostavljene interpretacije učinkovitosti domače naloge. Cooper, eden izmed vodilnih raziskovalcev na področju domačih nalog, zapiše: »Domača naloga povzroča več trenj med šolo in domom kot katerikoli drug vidik izobraževanja ter postane glavno bojišče, ko šole, družine in skupnost drug drugega vidijo kot nasprotnika.« (Cooper, 2015, str. 4). Učenci na domače naloge pogosto gledajo kot na najmanj priljubljene dejavnosti po pouku (Xu in Yuan, 2003), zato je motiviranje za opravljanje domače naloge večkrat ena izmed najbolj frustrirajočih aktivnosti za učitelje (Xu, 2013).

Po trenutni slovenski zakonodaji domače naloge niso obvezne ter posledično niso ocenjevane. Regulative, ki se tičejo domačih nalog, so po svetu zelo različne, navedimo le nekatere. V ZDA priporočajo »pravilo 10 minut na razred«, Avstralija se bolj osredotoča na kakovost in namen domačih nalog, Finska in Francija sledita principu, ki učencem omogoča opravljanje domačih nalog v šoli, v več državah južne Amerike so razpravljali o zakonski ukinitvi domačih nalog, a so se odločili, da tega ne storijo, v Angliji zakonodaja omogoča šolam, da se same odločijo, ali bodo sankcionirale neopravljanje domače naloge (Hanratty in dr., 2019).

V Sloveniji je meta raziskava, ki jo je leta 2006 opravil Cooper s sodelavci (Cooper, Robinson in Patall, 2006), požela burne odzive javnosti, predvsem staršev osnovnošolcev. Za nižje razrede osnovne šole je raziskava namreč nakazala možnost neznatne negativne povezave med domačimi nalogami in dosežki učencev. Čeprav trenutno veljavni slovenski učni načrt za matematiko zapiše: »Domače naloge so integralni del šolskega dela in so pri matematiki zelo pomembne.« (Žakelj in dr., 2011, str. 76), so nekatere slovenske (pojav je zaznan tudi na Hrvaškem) osnovne šole v dogovoru s starši domače naloge ukinile. Novejša meta raziskava, ki jo je opravil Fan s sodelavci (Fan in dr., 2017), je nasprotno pokazala za isto populacijo majhno pozitivno povezavo med domačimi nalogami in dosežki. Ta raziskava žal v splošni slovenski javnosti ni bila zaznana. Avtorji obeh omenjenih meta raziskav sicer sami svarijo pred poenostavljanjem rezultatov in prehitrimi sklepi ter navajajo tudi številne omejitve obeh raziskav. Kot pomembne vidike kritične presoje obeh omenjenih raziskav izpostavljamo naslednje: a) obe raziskavi se ne omejita na domače naloge pri enem predmetu, temveč preučujeta domače naloge pri več predmetih (npr. materni jezik, naravoslovje), b) obe raziskavi zajemeta raznolike šolske sisteme na različnih celinah ter c) gre za meta raziskavi, ki sta zajeli velik vzorec zelo raznoliko zastavljenih empiričnih raziskav.

Empirične raziskave, ki preučujejo zvezo med dosežki učencev in domačimi nalogami, dajejo nekonsistentne rezultate. Medtem ko večina raziskav sicer nakazuje pozitivno statistično značilno zvezo med omenjenima spremenljivkama (npr. Núñez in dr., 2015; Fernández-Alonso, Suárez-Álvarez in Muñiz, 2015), pa obstajajo tudi raziskave, ki te zveze ne zaznavajo ali zaznavajo celo negativne učinke (nekaterih karakteristik) domačih nalog na dosežke učencev (npr. Epstein in Van Voorhis, 2012; De Jong in dr., 2000; Trautwein in dr., 2002).

Preučevanje številnih in raznolikih karakteristik domačih nalog je morda eden izmed razlogov za nekonsistentnost rezultatov raziskav. Zavedati se je namreč treba, da na domače naloge in opravljanje le-teh vplivajo številni dejavniki, ki posegajo tako v šolsko okolje (npr. vpliv učitelja) kot tudi v domače okolje (npr. vključenost staršev v opravljanje otrokovih domačih nalog). Dodatno pa je treba upoštevati tudi učenčeve osebne karakteristike (npr. razlogi za neopravljanje domačih nalog) in karakteristike njihovega opravljanja domače naloge (npr. delež dokončanih nalog itd.).

Učitelji običajno igrajo pomembno vlogo pri domači nalogi v dveh fazah: pri načrtovanju domačih nalog, ki jih dajejo učencem (npr. pogostost, obseg nalog), ter s podajanjem povratnih informacij učencem glede domačih nalog (Núñez et al., 2015). Fernández-Alonso in soavtorji (2015) pišejo o večji vlogi pogostosti domačih nalog kot pa količini teh. Po drugi strani pa Murillo in Martínez-Garrido (2013) na vzorcu več kot 5000 učencev ugotavljata, da ne pogostost, ne tip in ne čas, porabljen za opravljanje domačih nalog, na akademske dosežke učencev ne vplivajo, medtem ko individualizirane domače naloge pozitivno vplivajo na dosežke učencev.

Učiteljevi odzivi glede domačih nalog naj bi bili po mnenju raziskovalcev različno povezani z dosežki učencev. Núñez in soavtorji (2015) so izvedli raziskavo, v kateri je sodelovalo 454 otrok v starosti od 10 do 16 let. Ta raziskava je pokazala, da je odziv učitelja na opravljeno domačo nalogo, kot ga zaznavajo učenci, posredno povezan z akademskimi uspehi učencev (slednje so v raziskavi merili s končnimi ocenami učencev) preko vpliva na učenčevo vedenje in aktivnosti glede domačih nalog (Núñez in dr., 2015). Pozitivne učinke spremljanja, pregledovanja in (takojšnjega) popravljanja domačih nalog navajajo tudi Murillo in Martínez-Garrido (2013).

V raziskavah o domačih nalogah je pozornost pogosto namenjena tudi vlogi staršev (npr. Cooper in dr., 2012; Núñez in dr., 2015a). Pomembno vlogo pri vključevanju staršev v otrokovo matematično izobraževanje, in s tem tudi v opravljanje domačih nalog, imajo tudi predhodne matematične izkušnje staršev in njihova kompetentnost na področju matematike. Núñez in soavtorji (2015a) so z vidika starševske vključenosti preučevali dve dimenziji, to sta: a) kontrola staršev (preverjanje, če je domača naloga opravljena; kaznovanje, če naloga ni opravljanja; poudarjanje prednosti domačih nalog pred drugimi aktivnostmi; …) in

b) starševska podpora otrokom pri opravljanju domačih nalog (nudenje in odziv na otrokovo potrebo po pomoči, ustrezna pomoč). Raziskava je pokazala, da je zaznana starševska vključenost povezana z učenčevimi dosežki. Medtem ko zaznava kontrole vpliva negativno, je učinek zaznane starševske podpore na akademske dosežke pozitiven (Núñez in dr., 2015a). Raziskave sicer bolj kot direktno vključenost staršev v otrokovo opravljanje domačih nalog poudarjajo pomen posredne vključenosti na načine, kot so podpiranje otrokove avtonomije, samostojnosti pri opravljanju domačega dela ter zagotavljanje pozitivno naravnanega in čustveno podpirajočega okolja (Dumont in dr., 2012; Cooper in dr., 2000), ki naj bi bilo pozitivno povezano z dosežki učencev (Cooper in dr., 2000). Negativni vplivi vključevanja staršev pa se kažejo v primerih, ko otrokom pomagajo na razvojno neustrezen način, jih s pomočjo zmedejo ter v primerih, ko je njihova pomoč neusklajena s pričakovanji učiteljev, usmerjena v kontrolo, preveč nadležna, nezaželena ter jo spremljajo negativna starševska čustva (v Dumont in dr., 2012). Antolin Drešar in Lipovec (2017) sta primerjali vključevanje staršev, ki so matematiki (glede na izobrazbo), in staršev, ki niso matematiki, v matematično izobraževanje njihovih otrok. Njuna raziskava nakazuje, da se starši matematiki v primerjavi z nematematiki le redko in neradi vključujejo v proces reševanja domače naloge, po drugi strani pa nudijo izjemno bogato podporo svojim otrokom pri razvijanju matematičnega znanja.

Karakteristike domačih nalog so povezane tudi z (osebnostnimi) lastnostmi učencev. Ker pa domače naloge pogosto potekajo popoldan in za čas »tekmujejo« s privlačnejšimi dejavnostmi, opravljanje domačih nalog mnogim učencem, tudi tistim, ki se jim domače naloge zdijo pomembne in zanimive, predstavlja številne izzive. Management oz. upravljanje s časom, porabljenim za opravljanje domačih nalog, je odvisen od številnih osebnostnih lastnosti učencev. Med pomembnejšimi je gotovo sposobnost optimizacije časa, ki vključuje regulacijo motečih dejavnikov oz. osredotočenost na potrebe določene naloge (Xu, 2013). Na domačo nalogo osredotočen učenec je tisti, ki se med opravljanjem naloge osredotoča na delo in ga pri tem ne motijo dejavniki iz okolja. Torej ne dovoli, ne dopušča (ker ima to možnost), da njegovo osredotočenost na delo ovirajo nepovezane dejavnosti iz okolja (kot so na primer sporočila prijateljev, govorjenje drugih ljudi, televizija), prav tako se med opravljanjem naloge ne ukvarja z drugimi nepovezanimi dejavnostmi, ki bi ga odvrnile od domačih nalog (npr. spletnim klepetom) (Xu, 2013). Raziskave so pokazale, da je sposobnost optimizacija časa opravljanja domačih nalog pozitivno povezana z deležem domačih nalog, ki jih učenci dokončajo (Núñez, in dr., 2015; Núñez in dr., 2015a; Xu, 2011; Ferme in Lipovec, 2019). Slednje, torej dokončevanje nalog, pa bi, glede na rezultate že izvedenih raziskav, lahko vplivalo na boljše dosežke učencev (Núñez in dr., 2015; Núñez in dr., 2015a; Cooper in dr., 1998; Ferme in Lipovec, 2019).

Kot naslednja pomembna lastnost učencev se kaže pripravljenost vlaganja truda v opravljanje domačih nalog (Xu, 2011). Trud je karakteristika, ki jo raziskovalci zelo različno definirajo in posledično tudi različno merijo, zato rezultati niso zanesljivi, dodatno pa so tudi kulturno pogojeni. Xu (2018) je na primer pri kitajskih osmošolcih zaznal, da je učenčev trud pozitivno povezan z matematičnimi dosežki. Podobno ugotovitev je za kulturno nam bolj podobne nemške osmošolce poročal Trautwein s sodelavci (Trautwein in dr., 2006).

Novejših raziskav, ki preučujejo zvezo med matematičnimi domačimi nalogami in akademskimi dosežki učencev pri matematiki ter so vezane na šolski sistem Slovenije, je po našem vedenju malo. Podgoršek, Ferme in Lipovec (2017), ugotavljajo, da je za 10-letnike možno najti le neznatne povezave med karakteristikami domačih nalog in dosežki učencev v raziskavi TIMSS 2015. Podobno Lipnik (2015), ki je v dveh srednješolskih oddelkih sistematično spremljal dajanje matematične domače naloge, zapiše, da vpliva na oceno skoraj ni zaznati. V zadnjem času so bili objavljeni nekateri začetni rezultati večje raziskave, ki se dotika povezave med kakovostno domačo nalogo in dosežki pri slovenskih učencih v starosti od 7–10 let (Ferme in Lipovec, 2019) in v starosti od 11–14 let (Lipovec in Ferme, 2018). Slovenske raziskave sicer nekoliko več pozornosti namenjajo motivaciji za opravljanje domačih nalog pri matematiki (npr. Lokar, 2015, Habjan, 2017, Gracej, 2018), poglobljeno pa se posvečajo tudi nekaterim posamičnim karakteristikam, kot je npr. povratna informacija (npr. Žitko, 2018).

Kot smo omenili, je področje raziskovanja domačih nalog močno zastopano v literaturi, a rezultati so premalo osredotočeni na specifike predmeta (v našem primeru na matematiko) in specifike šolskega sistema (v našem primeru na Slovenijo). Zato v nadaljevanju predstavljamo temeljne ugotovitve dveh raziskav o matematičnih domačih nalogah, izvedenih na populaciji slovenskih učencev.

Delno so rezultati posamičnih raziskav podrobneje predstavljeni v Lipovec in Ferme (2018), Lipovec in Ferme (2019a), Lipovec in Ferme (2019b) ter v Ferme s sodelavci (2019) za zadnje triletje in v Ferme in Lipovec (2019) za prvo triletje, nekateri preliminarni poudarki pa so bili predstavljeni tudi na KUPM 2018 (Ferme in dr., 2018).

Temeljni namen tega prispevka je povzeti ugotovitve omenjenih raziskav in nato predstaviti, katere karakteristike domačih nalog pri matematiki so se izkazale kot statistično značilno pomembne za slovenski šolski prostor. Z namenom preučiti karakteristike domačih nalog pri matematiki in jih povezati z dosežki učencev ter na podlagi tega izpeljati implikacije za šolsko prakso in tako izboljšati matematične dosežke učencev, smo si zastavili naslednja raziskovalna vprašanja.

1. Kakšna je povezava med karakteristikami matematičnih domačih nalog, ki so vezane na šolsko okolje (obseg, pogostost, tip domače naloge) in dosežki učencev pri matematiki?

2. Kakšna je povezava med karakteristikami matematičnih domačih nalog, ki so vezane na domače okolje (kontrola in pomoč staršev otrokom pri njihovem opravljanju domačih nalog) in dosežki učencev pri matematiki?

3. Kakšna je povezava med karakteristikami matematičnih domačih nalog, ki so vezane na učenca samega (dokončevanje nalog in optimizacija časa) in dosežki učencev pri matematiki?

Metodologija

Metodi kvantitativnega empiričnega pedagoškega raziskovanja, ki smo ju uporabili, sta deskriptivna in kavzalno neeksperimentalna metoda. Raziskava je bila izvedena na podlagi vodeno izpolnjevanih vprašalnikov. Anketiranje je potekalo v letih 2017, 2018 in 2019. Prva raziskava je bila izvedena na populaciji učencev prvega triletja, druga pa na populaciji učencev tretjega triletja. V vzorec raziskave smo vključili 417 učencev tretjega triletja (7., 8. in 9. razred) in 192 učencev prvega triletja (1., 2. in 3. razred) osnovnošolskega izobraževanja. V prvem triletju je bil razred izbran namensko, v zadnjem triletju pa je bila šola izbrana slučajnostno. Učencem smo poleg vprašanja o njihovih matematičnih dosežkih zastavili še vprašanja, povezana z domačimi nalogami pri matematiki. Reševanje vprašalnika so učenci izvedli vodeno, kar pomeni, da jim je bilo vsako vprašanje (z možnimi odgovori) tudi natančno obrazloženo.

Matematični dosežki in matematično znanje

Raziskava govori o povezavah med matematičnimi dosežki učencev in nekaterimi karakteristikami domačih nalog. Matematične dosežke smo zaradi specifike ocenjevanja v vsakem izmed triletij izmerili nekoliko drugače. V prvem triletju smo učence povprašali *Kako dobro znaš matematiko? Kakšna je/bi bila po tvojem mnenju tvoja ocena pri matematiki? Oceni svoje znanje z oceno od 1 do 5.* Za zadnje triletje pa smo raven matematičnih dosežkov učencev določili s pomočjo končne ocene učencev pri matematiki v preteklem šolskem letu ter zadnje pisno pridobljene ocene pri matematiki. V prvem triletju je 41,7 % učencev poročalo, da menijo, da znajo matematiko za oceno, ki je manjša kot 5, 51,3 % učencev pa je poročalo, da njihovem znanju ustreza ocena 5. V zadnjem triletju je bila povprečna končna ocena pri matematiki (s standardnim odklonom) udeležencev 3,56 (1,069), povprečna zadnja pisno pridobljena ocena (s standardnim odklonom) pa 3,23 (1,218).

Matematičnih dosežkov ne gre enačiti z matematičnim znanjem. Šolske ocene (tiste, ki jih da učitelj, in tiste, ki si jih dodelijo učenci sami) bi sicer naj sledile primerjavi s kriteriji (npr. predpisanimi standardi), a so večkrat normirane glede na razred. Jurman (1989) napako prilagoditve skupini opredeli kot splošno napako ocenjevanja in zapiše, da se v tem primeru pokaže neprimerljivost ocen, se pravi, da za istimi ocenami ne stroji enaka kvaliteta znanja« (Jurman, 1989, str. 91). Podobno zapiše tudi Svetina (v Bregant in dr., 1991), da »učitelj navadno ocenjuje otroka tako, da primerja njegovo znanje z znanjem drugih otrok v istem razredu ali na isti razredni stopnji iste šole« (Bregant in dr., 1991, str. 8). Učitelj torej oceno dodeli tudi glede na relativni dosežek učenca v razredu. Zato se lahko zgodi, da »znanje« in »ocena« nimata dosti skupnega, učenec lahko zaradi t. i. normiranega ocenjevanja (*ang. norm-referencing*) za isto znanje pri različnih učiteljih dobi različne ocene (Dalbert, Schneidewind in Saalbach, 2007). Tudi specifično za matematiko v slovenskem šolskem sistemu Felda (2018) zapiše, da je »znano, da šolska ocena poleg izkazanega znanja odraža še mnoge druge prvine« (Felda, 2018, str. 177).

Karakteristike domačih nalog, ki so vezane na šolsko okolje

V nadaljevanju prispevka bomo uporabljali kratico DNm s pomenom »domača naloga pri matematiki«.

V Tabeli 1 so prikazani rezultati glede pogostosti in časovnega obsega domačih nalog pri matematiki. Na podlagi pridobljenih podatkov smo izračunali indeks pogostosti domačih nalog, tj. povprečje pogostosti, kjer smo z 1 označili odsotnost matematičnih domačih nalog, s 5 pa vsakodnevne domače naloge pri matematiki. Na podoben način smo izračunali še indeks časovne zahtevnosti domačih nalog pri matematiki. Oba indeksa sta navedena v Tabeli 1.

Podobne rezultate kažejo tudi ostale nam znane raziskave pri učencih iz Slovenije (npr. Lokar, 2015; Japelj Pavešić in Svetlik, 2016; Habjan, 2017; Gracej, 2018; Podgoršek, Lipovec in Ferme, 2017). Na osnovi naših rezultatov lahko torej najprej ovržemo dvom marsikaterega učitelja ali pretirano skrb starša, da matematične domače naloge učencem vzamejo cele popoldneve. Domače naloge pri matematiki učence v zadnjem triletju v povpreč-

Tabela 1: Pogostost in časovna obsežnost domačih nalog pri matematiki.

Pogostost	1. triletje *f* (*f* %)	3. triletje *f* (*f* %)	Časovna zahtevnost	1. triletje *f* (*f* %)	3. triletje *f* (*f* %)
Ne dobivamo DNm.	0 (0,0)	1 (0,2)	15 minut ali manj.	88 (45,9)	87 (20,9)
Manj kot enkrat na teden.	13 (6,8)	1 (0,2)	Več kot 15 minut, a manj kot eno uro.*	93 (48,4)	/
Enkrat do dvakrat na teden.	47 (24,5)	6 (1,4)	16–30 min*	/	215 (51,7)
			30–60 min*	/	78 (18,7)
Trikrat na teden.	76 (39,6)	130 (31,2)	Več kot eno uro.	10 (5,2)	7 (1,7)
Vsak dan/vsakič, ko imamo matematiko.	55 (28,6)	279 (66,9)	Ne vem, ker naloge ne opravljam.	1 (0,5)	29 (7,0)
Indeks pogostosti DNm	**3,9**	**4,6**	**Indeks časovne zahtevnosti DNm**	**1,6**	**1,8**

*Časovne postavke so bile prilagojene glede na udeležence.

Tabela 2: Učiteljevi odzivi glede DNm.

Trditev	1. triletje $\overline{x}$(SO)	3. triletje $\overline{x}$(SO)
a) Učitelj preveri, če si naredil DNm.	4,60 (0,695)	4,35 (0,996)
b) V razredu DNm pregledamo in popravimo napake.	4,35 (0,967)	4,30 (0,902)
c) Učitelj da pozitivno povratno informacijo, če si naredil DNm.	4,23 (1,114)	3,48 (1,406)
d) Učitelj upošteva DNm pri končni oceni.	/	3,98 (1,199)
e) Učitelj večkrat reče, da je pomembno, da DNm naredimo v celoti.	4,56 (0,814)	3,24 (1,316)
Indeks odzivanja	**4,4**	**3,9**

ju obremenijo za manj kot 30 minut. Moramo pa priznati, da ta obremenitev nastopi pogosto, praviloma vsakič, ko imajo učenci na urniku matematiko (kar je vsaj trikrat tedensko). Povezave med matematičnimi dosežki učencev in pogostostjo DNm nismo mogli potrditi, časovna obsežnost DNm pa je v negativni korelaciji z omenjenimi dosežki (Tabela 6).

Učiteljeve odzive, kakor jih zaznavajo učenci, smo določili na podlagi ravni strinjanja učencev s trditvami, ki so zapisane v Tabeli 2 (Núñez in dr., 2015). Učenci so stopnjo strinjanja s posamezno trditvijo izrazili s pomočjo pet stopenjske lestvice, kjer je 1 pomenilo, da se s trditvijo sploh ne strinjajo, 5 pa, da se s trditvijo popolnoma strinjajo. V Tabeli 2 so navedene povprečne vrednosti (s standardnimi odkloni) ravni strinjanja učencev s posameznimi trditvami.

Po pričakovanjih učenci prvega triletja zaznavajo učiteljeve odzive v večji meri kot učenci tretjega triletja. Rezultati sicer kažejo, da slovenski učenci zaznavajo visok nivo učiteljevih odzivov glede domačih nalog. Slovenski učitelji DNm preverjajo, popravljajo, pri učencih poudarjajo njeno pomembnost in učence spodbujajo k opravljanju domače naloge. De Jong, Westerhof & Creemers (2000) npr. poročajo o tem, da le 15 % nizozemskih učiteljev redno preverja, ali so učenci naredili domačo nalogo, 12 % učiteljev pa te aktivnosti sploh ne izvaja. V slovenskih razmerah so rezultati pri trditvi d) nenavadni, saj domača naloga ni obvezna in kot taka naj ne bi bila ocenjevana. Žal pa rezultati naše raziskave ne morejo ponuditi odgovora na to, na kakšen način je DNm upoštevana pri končni oceni. Analiza rezultatov je pokazala, da korelacije med indeksom odzivanja in matematičnimi dosežki učencev ne moremo potrditi (Tabela 6).

Karakteristike domačih nalog, ki so vezane na domače okolje

Vključenost staršev v otrokovo opravljanje DNm, zaznano s strani učencev, smo določili na podlagi ravni strinjanja učencev s trditvami, ki so zapisane v Tabeli 3. Prvih pet se nanaša na star-

Tabela 3: Starševska vključenost v opravljanje DNm.

V kolikšni meri so resnične spodaj navedene trditve?	1. triletje $\overline{x}$(SO)	3. triletje $\overline{x}$(SO)
a) Moje opravljanje domačih nalog je za moje starše zelo pomembno.	4,55 (0,948)	3,73 (1,241)
b) Moji starši vedo, ali sem zaključil vso domačo nalogo.	4,51 (0,898)	2,87 (1,332)
c) Preden se ukvarjam z obšolskimi dejavnostmi (na primer plavam, igram nogomet itd.), moji starši preverijo, če sem naredil vso domačo nalogo.	4,08 (1,193)	2,46 (1,369)
d) Moji starši mi ne dovolijo gledati televizije, druženja s prijatelji, dokler ne zaključim domače naloge.	4,04 (1,248)	2,46 (1,422)
e) Moji starši me okregajo in me kaznujejo, če ne naredim vse domače naloge.	3,12 (1,448)	2,32 (1,291)
Indeks kontrole	**4,06**	**2,80**
f) Običajno me starši vprašajo, če imam vprašanja glede DNm, ali potrebujem pomoč.	4,22 (1,177)	2,98 (1,397)
g) Ko moram narediti DNm, so razlage mojih staršev zelo uporabne.	4,45 (0,867)	3,43 (1,301)
h) Starši mi pomagajo pri DNm, če jih prosim za pomoč.	4,86 (0,437)	3,93 (1,319)
Indeks podpore	**4,51**	**3,46**

ševsko kontrolo nad otrokovim opravljanjem domačih nalog, zadnje tri trditve pa se navezujejo na njihovo podporo, pomoč otrokom pri opravljanju DNm. Vse zapisane trditve so povzete po prispevku Núñez in dr. (2015a). Raven strinjanja z zapisanimi trditvami so učenci izrazili na petstopenjski lestvici (od 1 do 5), kjer je 1 pomenilo popolno nestrinjanje, 5 pa popolno strinjanje s posamezno trditvijo. V Tabeli 3 so prikazane povprečne vrednosti (s standardnimi odkloni) ravni strinjanja učencev s posameznimi trditvami. Zapisani so tudi indeksi kontrole in podpore staršev, izračunani kot povprečja povprečnih vrednosti ravni strinjanja posameznikov s trditvami, ki se nanašajo na starševsko kontrolo oziroma starševsko podporo pri opravljanju DNm.

Kot je razvidno iz Tabele 3, učenci 1. triletja v večji meri zaznavajo vključenost staršev v njihovo opravljanje DNm (kontrolo in podporo) v primerjavi z učenci 3. triletja. Za učence 3. triletja smo ugotovili tudi, da je indeks kontrole v negativni povezavi s končnimi ocenami pri matematiki, za indeks podpore pa povezave s končno oceno nismo potrdili (Tabela 6). Ti rezultati so skladni z raziskavo, ki je bila izvedena na španskem vzorcu učencev (Núñez, et al., 2015a), in implicirajo spodbujanje staršev k ustrezni, ne v kontrolo usmerjeni vključenosti v otrokovo opravljanje domačih nalog. Tudi drugi raziskovalci (npr. Fernández-Alonso, Suárez-Álvarez & Muñiz, 2015) poudarjajo, da je pomembna kakovostna starševska vpetost v domače delo otrok, ki se kaže kot podpiranje otrokove avtonomije in se izogiba direktni vključenosti.

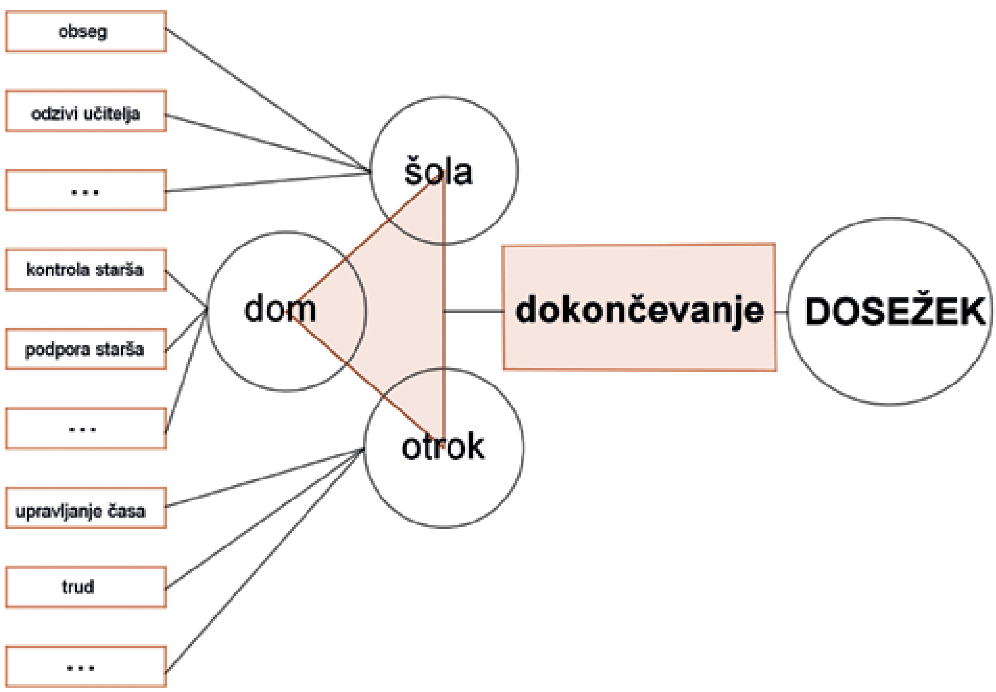
Karakteristike domačih nalog, ki so vezane na učenca samega

Z vidika karakteristik DNm nas je zanimalo predvsem dokončevanje nalog, torej kolikšen delež domačih nalog učenci dokončajo. Kot smo že omenili, je glede na rezultate več raziskav ravno ta karakteristika tista, ki naj bi bila pozitivno povezana z dosežki učencev. Karakteristika verjetno ne izvira direktno iz šolskega okolja, niti iz domačega okolja, prav tako ni le odraz osebnostnih lastnosti učenca. Zato bi lahko rekli, da je dokončevanje nalog sekundarna karakteristika, na katero bi lahko vplivali učitelji (npr. z zastavljanjem nalog ustrezne težavnosti), starši (npr. s spodbujanjem otroka k dokončevanju naloge), učenec sam (npr. s trudom, ki ga vloži v delo) … (prim. Slika 1).

Kljub temu smo se odločili, da dokončevanje kot karakteristiko uvrstimo v poglavje karakteristik, ki so vezane na učenca, saj menimo, da je najbolj tesno povezana z osebnostnimi karakteristikami otroka, na primer z matematično samopodobo, emotivno odpornostjo (rezilientnost), sposobnostjo optimizacije časa opravljanja dela ipd. Konec koncev pa je opravljanje in s tem dokončevanje nalog v domeni učenca samega (ne starša ali učitelja), kar izpostavi že Čagran (1993), ko domačo nalogo opredeli kot »oblika učenčevega dela, ki jo učenci opravljajo praviloma *samostojno*« (Čagran, 1993, str. 144).

Vprašanje, zastavljeno učencem, in njihovi odzivi so predstavljeni v Tabeli 4. Dodatno, zapisani so indeksi dokončevanja DNm (povprečja opravljenih nalog, kjer smo označili z 1 nič ali skoraj nič opravljenih nalog in s 3 vse ali skoraj vse opravljene naloge), tudi glede na različne matematične dosežke učencev.

Kot lahko vidimo, več kot 18 % učencev prvega triletja in več kot 36 % učencev zadnjega triletja ne dokonča (skoraj) vseh DNm. Dodatno, zapisani indeksi nakazujejo pozitivno zvezo med spremenljivkama delež dokončanih nalog in dosežki učencev pri matematiki, kar potrjujejo tudi izvedeni statistični testi (Tabela 6). Navedena ugotovitev je skladna z ugotovitvami drugih raziskav (Núñez in dr., 2015; Núñez in dr., 2015a; Cooper in dr., 1998; Ferme in Lipovec, 2019).



Slika 1: Karakteristike DNm in dosežek.

Matematika v šoli, št. 1., letnik 26, 2020

Tabela 4: Delež dokončanih DNm.

	1. triletje *f* (*f* %)		3. triletje *f* (*f* %)	
Koliko nalog, ki jih dobiš za domačo nalogo pri matematiki, običajno tudi dokončaš (narediš do konca)?				
Nobene ali skoraj nobene.	3 (1,6)		22 (5,3)	
Nekaj jih dokončam, nekaj ne.	33 (17,2)		129 (30,9)	
Vse ali skoraj vse.	156 (81,3)		266 (63,8)	
Indeks dokončevanja				
			ocena 1	2,50
			ocena 2	2,20
			ocena 3	2,48
	samoocena < 5	2,69	ocena 4	2,75
	samoocena = 5	2,90	ocena 5	2,82
Povprečje		**2,80**		**2,59**

Opazovali smo tudi, kako učenci optimizirajo čas med tem, ko opravljajo DNm (se osredotočajo na delo). To karakteristiko smo merili preko odgovorov učencev na vprašanje: *Ali te, ko delaš domačo nalogo za matematiko, motijo druge stvari (na primer mobilni telefon, govorjenje drugih ljudi, televizija)? Ali medtem, ko delaš domačo nalogo za matematiko, razmišljaš o drugih stvareh?* Vprašanje je povzeto po Núñez in dr. (2015a), rezultate pa predstavljamo v Tabeli 5. Kot vidimo, 40,1 % učencev iz prvih treh razredov in le 14,4 % učencev iz zadnjih treh razredov osnovne šole med opravljanjem DNm razmišljajo le o matematični domači nalogi in jih nič ne moti.

Dodatno Tabela 5 razkriva tudi podatke glede povezanosti spremenljivke optimizacija časa opravljanja DNm s spremenljivkama delež dokončanih nalog in matematični dosežki učencev pri matematiki. Na podlagi zapisanih indeksov oziroma ocen menimo, da višja raven optimizacije časa pomeni več dokončanih nalog oziroma boljše akademske dosežke otrok. Slednje, torej pozitivno korelacijo med optimizacijo časa opravljanja DNm in dokončevanjem DNm oziroma matematičnimi dosežki učencev potrjujejo izvedeni statistični testi (Tabela 6). Te ugotovitve so v skladu z že izvedenimi raziskavami (Núñez in dr., 2015; Núñez in dr., 2015a; Xu, 2011; Ferme in Lipovec, 2019).

Povezave med karakteristikami in matematičnimi dosežki in iskanje vzrokov

Cilj prispevka je bila preučitev karakteristik matematičnih domačih nalog, ki so povezane z matematičnimi dosežki učencev. Številnost in vzajemna povezanost rezultatov, navedenih v predhodnih poglavjih potrjujeta, da so domače naloge »komplicirana stvar« (Corno, 1996). Omenjene rezultate iz predhodnih poglavij smo povzeli v Tabeli 6. V tabelo smo vključili le parametre, ki so vezani na posamezne učence. Parametrov, ki so vezani na učitelja, namreč ni smiselno navajati, saj so ocene, kot že zapisano, pogosto normirane.

Na podlagi rezultatov, zapisanih v Tabeli 6, in ugotovitev, navedenih v predhodnih poglavjih, ugotavljamo, da kot pomembna karakteristika DNm izstopa dokončevanje nalog. Zato so nas zanimali tudi razlogi, ki jih učenci navajajo za neopravljanje oz. nedokončevanje DNm. Najpogostejši razlog učencev 1. in 3. triletja je naslednji: *Naloge ne dokončam, ker je ne znam rešiti.* V prvem triletju je ta razlog navedlo 21,9 % učencev, v zadnjem triletju pa kar 64,5 % sodelujočih učencev. V prvem triletju kot najpogostejša razloga sledita: *Zaradi drugih aktivnosti - nimam dovolj časa* (16,7 %) in *Nalogo pozabim dokončati* (16,7 %). V tretjem triletju pa sta pogosta razloga: *Nalogo pozabim dokončati* (36,0 %) in *Naloge ne dokončam, ker sem preveč utrujen* (31,2 %). Gracej (2018) navaja podobne razloge za drugo triletje in doda, da učenci v tretjem triletju nalogo tudi pogosto prepišejo.

Tabela 5: Optimizacija časa opravljanja DNm, dokončevanje DNm in matematični dosežki učencev.

	1. triletje *f* (*f* %)	3. triletje *f* (*f* %)	1. triletje		3. triletje	
			indeks dokončevanja (1–3)	samoocena (1–5)	indeks dokončevanja (1–3)	ocena (1–5)
Naloge ne delam.	1 (0,5)	20 (4,8)				
Vedno me motijo druge stvari ali razmišljam o drugih stvareh.	19 (9,9)	37 (8,9)	2,42	3,71	2,27	3,22
Včasih me motijo druge stvari ali razmišljam o drugih stvareh.	95 (49,5)	300 (71,9)	2,77	4,44	2,66	3,54
Ko delam domačo nalogo za matematiko, razmišljam le o nalogi. Nič me ne moti.	77 (40,1)	60 (14,4)	2,94	4,67	2,83	4,03

Tabela 6: Karakteristike DNm in korelacije z matematičnimi dosežki.

Karakteristika domače naloge	Povezanost z matematičnimi dosežki	
	1. triletje	3. triletje
Časovna obsežnost DNm	šibka negativna korelacija ($\rho = -0{,}285$)	šibka negativna korelacija ($\rho = -0{,}254$)
Starševska kontrola pri DNm	neznatna pozitivna korelacija ($\rho = 0{,}152$)	Neznatna negativna korelacija ($\rho = -0{,}100$)
Starševska podpora pri DNm	ni korelacije	ni korelacije
Dokončevanje DNm	šibka pozitivna korelacija ($\rho = 0{,}300$)	zmerna pozitivna korelacija ($\rho = 0{,}412$)
Optimizacija časa pri DNm	šibka pozitivna korelacija ($\rho = 0{,}296$)	neznatna pozitivna korelacija ($\rho = 0{,}196$)

Ker učenci naloge ne dokončajo, ker je ne znajo, smo v nadaljevanju preučevali tudi prilagojenost domačih nalog sposobnostim učencev oz. tako imenovano diferenciacijo DNm.

Podatki, prikazani v Tabeli 7, kažejo, da so diferencirane DNm redke. Večina učencev prvega in zadnjega triletja (nad 85 % za vsako triletje) poroča, da vsi v razredu pogosto ali vedno dobijo enake domače naloge. Indeksa individualiziranih nalog, izračunana kot povprečji pogostosti individualiziranih nalog (1 pomeni vedno, 4 nikoli), sta za učence 1. in 3. triletja relativno nizka in zelo podobna, kar nakazuje, da je situacija glede redkih individualiziranih nalog v obeh triletjih (prvem in zadnjem) podobna.

Tudi Habjanova (2017) na osnovi mnenj slovenskih devetošolcev zapiše, da bi »učitelji morali bolj upoštevati didaktično načelo diferenciacije domačih nalog« (str. 47). Podobno o pomembnosti motivacije in nujnosti dviga »zanimivosti« domačih nalog pri matematiki govori Slatenšek (2016). Rezultati o pogostosti individualiziranih nalog v Sloveniji odstopajo od situacije v Latinski Ameriki, kjer sta Murillo in Martínez-Garrido (2013) ugotovila, da več kot 50 % učiteljev daje učencem z nižjimi oziroma z višjimi sposobnostmi pogosto ali zelo pogosto prilagojene domače naloge. Na podlagi te raziskave je bilo ugotovljeno tudi, da diferencirane domače naloge vplivajo na višje dosežke učencev.

Tabela 7: Pogostost diferenciranih DNm.

Kako pogosto pri uri matematike vsi dobite enako domačo nalogo?	1. triletje *f* (*f* %)	3. triletje *f* (*f* %)
Vedno.	119 (62,0 %)	263 (63,1 %)
Pogosto.	49 (25,5 %)	119 (28,5 %)
Včasih.	23 (12,0 %)	28 (6,7 %)
Nikoli.	1 (0,5 %)	7 (1,7 %)
Indeks individualiziranih nalog	**1,5**	**1,5**

Zaključek

Na podlagi predstavljenih rezultatov ugotavljamo, da mnoge karakteristike DNm (npr. starševska podpora) morda z matematičnimi dosežki otrok niso povezane ali pa so povezane le šibko. Menimo, da se morajo učitelji in drugi deležniki tega zvedati. Prav tako je pomembno poznavanje karakteristik, ki bi lahko negativno vplivale na akademske dosežke učencev. Na primer zavedanje o tem, da je pri preobsežnih domačih nalogah učinek negativen, se že širi v javnosti.

Ponovno poudarimo, da dosežkov ne gre enačiti z znanjem (prim. Jurman, 1989). Tako da ni presenetljivo, da šolske ocene ne korelirajo npr. s količino oz. pogostostjo domačih nalog, ki jih daje učitelj, saj je razporeditev šolskih ocen približno enaka pri učiteljih, ki dajejo bolj ali manj pogosto domače naloge. Podobno velja za odnos med učiteljevimi odzivi na domače naloge in šolskimi ocenami učencev oz. nasploh za karakteristike, ki so vezane na šolsko okolje.

Pomemben korak k bolj učinkovitim matematičnim nalogam bodo učitelji in starši naredili tako, da bodo na različne načine, posredno ali neposredno, spodbujali učenčevo dokončevanje nalog. Glede na gotovitve je eden izmed načinov za doseganje dokončevanja nalog z vidika učitelja prilagajanje DNm sposobnostim učencev. Upoštevanje načela diferenciacije z uvedbo t. i. diferenciranih domačih nalog bi namreč lahko dvignilo delež dokončanih domačih nalog, saj bi se zmanjšal delež nalog, ki jih učenci ne dokončajo zato, ker jih ne znajo. Višji delež dokončanih nalog pa bi verjetno vplival na dvig matematičnih dosežkov učencev.

Naj omenimo, da naša raziskava sicer razkriva nekatere karakteristike matematičnih domačih nalog, a bo zaradi kompleksnosti fenomena domačih nalog potrebnih še več raziskav, ki bodo zajele širši spekter dejavnikov, ki na učinke domačih nalog lahko vplivajo. Ena izmed karakteristik, ki jo nameravamo v prihodnje podrobneje proučiti, je trud, ki ga učenci vložijo v opravljanje domače naloge (Xu, 2018).

Avtorici se zahvaljujeta anonimnemu recenzentu, katerega nasveti so pripomogli k novim uvidom na rezultate.

Literatura

Antolin Drešar, D. in Lipovec, A. (2017). Mathematical experiences and parental involvement of parents who are and who are not mathematicians. *Irish Educational Studies*, *36*(3), 357–374. doi: 10.1080/03323315.2017.1333445.

Bregant, M., Cenčič, M., Kunstelj, A., Plemenitaš, J., Razdevšek Pučko, C., Sivec, D., Strmčnik, F., Velikonja, M. in Žagar, D. (1991). *Preverjanje in ocenjevanje znanja*. Ljubljana: ZRSŠ.

Cooper, H. M. (2015). *The battle over homework: Common ground for administrators, teachers, and parents*. 3rd Edition. Simon and Schuster.

Cooper, H., Lindsay, J. J. in Nye, B. (2000). Homework in the home: how student, family, and parenting-style differences relate to the homework process. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 464–487. doi:10.1006/ceps.1999.1036.

Cooper, H., Lindsay, J., Nye, B. in Greathouse, S. (1998). Relationships among attitudes about homework, amount of homework assigned and completed, and student achievement. *Journal of Educational Psychology, 90*(1), 70–83.

Cooper, H., Robinson, J. C. in Patall, E. A. (2006). Does homework improve academic achievement? A synthesis of research, 1987-2003. *Review of Educational Research, 76*(1), 1–62. doi:10.3102/00346543076001001.

Cooper, H., Steenbergen-Hu, S. in Dent, A. L. (2012). Homework. V K. R. Harris, S. Graham, T. Urdan, A. G. Bus, S. Major in H. L. Swanson (ur.), *APA handbooks in psychology®. APA educational psychology handbook, Vol. 3. Application to learning and teaching* (475–495). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13275-019.

Corno, L. (1996). Homework is a complicated thing. *Educational Researcher, 25*(8), 27–30.

Čagran, B. (1993). Nekatere metodološke in didaktične smernice inoviranja konvencionalne prakse domačih nalog. *Sodobna pedagogika, 4*(3/4), 143–151.

Dalbert, C., Schneidewind, U. in Saalbach, A. (2007). Justice judgments concerning grading in school, Contemporary Educational Psychology, 32(3), 420-433. doi: /10.1016/j.cedpsych.2006.05.003.

De Jong, R., Westerhof, K. J. in Creemers, B. (2000). Homework and student math achievement in junior high schools. *Educational Research and Evaluation, 6*(2), 130–157. doi:10.1076/1380-3611(200006)6:2;1-E;F130.

Dettmers, S., Trautwein, U., Lüdtke, O., Kunter, M. in Baumert, J. (2010). Homework works if homework quality is high: using multilevel modeling to predict the development of achievement in mathematics. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 467–482. doi:10.1037/a0018453.

Dumont, H., Trautwein, U., Lüdtke, O. in Neumann, M. (2012). Does parental homework involvement mediate the relationship between family background and educational outcomes? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(1), 55–69. doi: 10.1016/j.cedpsych.2011.09.004.

Epstein, J. in Van Voorhis, F. (2012). The changing debate: from assigning homework to designing homework. V S. Suggate in E. Reese (ur.) *Contemporary Debates in Child Development and Education,* (str. 263–273), London: Routledge.

Fan, H., Xu, J., Cai, Z., He, J. in Fan, X. (2017). Homework and students‘ achievement in math and science:A 30-year meta-analysis, 1986-2015. *Educational Research Review, 20*, 35–54. doi:10.1016/j.edurev.2016.11.003

Felda, D. (2018). Preverjanje matematičnega znanja. *The Journal of Elementary Education*, *11*(2), 175–188.

Ferme, J. in Lipovec, A. (2019) Mathematics homework. V J. Novotná in H. Moraová, (ur.). *Opportunities in learning and teaching elementary mathematics: proceedings*. *International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (173–182). Praga: Karlova univerza, Pedagoška fakulteta.

Ferme, J., Štesl, D. in Lipovec, A. (2018). Domače naloge pri matematiki. V M. Suban in A. Jerko (ur.) *KUPM 2018: zbornik razširjenih povzetkov*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Ferme, J. Štesl, D. in Lipovec, A. (2019) Karakteristike matematičnih domačih nalog učencev iz Slovenije. V A. Lipovec (ur.). *Vloga predmetnih didaktik za kompetence prihodnosti: zbornik povzetkov, (*71–72). Maribor: Univerzitetna založba Univerze v Mariboru.

Fernández-Alonso, R., Suárez-Álvarez, J. in Muñiz, J. (2015). Adolescents' homework performance in mathematics and science: Personal factors and teaching practices. *Journal of Educational Psychology, 107(4)*, 1075–1085. doi:10.1037/edu0000032.

Gracej, N. (2018). Odnos do domačih nalog pri matematiki. *Dianoia*: *revija za uporabo naravoslovno-matematičnih znanosti, 2*, 95–104.

Habjan, A. (2017). *Stališča in izkušnje učencev glede domačih nalog pri matematiki v 3.vzgojno izobraževalnem obdobju osnovne šole. Diplomsko delo.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.

Hanratty, J., Miller, S., Brennan-Wilson, A., Cockerill, M., Davison, J., Roberts, J. in Winter, K. (2019). *Registration for a systematic review: The effectiveness of homework in primary school: a systematic review.* Dostopno na https://www.campbellcollaboration. org/media/k2/attachments/ECG_Hanratty_Title.pdf

Japelj Pavešić, B. in Svetlik, K. (2016). *Znanje matematike in naravoslovja med četrtošolci v Sloveniji in po svetu. Izsledki raziskave TIMSS 2015.* Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Jurman, B. (1989). *Ocenjevanje znanja.* Ljubljana: DZS.

Lipovec, A. in Ferme, J. (2019a). Some factors influencing effectiveness of mathematics homework. V A. Rogerson (ur.) *The mathematics education for the future project: proceedings of the 15th International Conference Theory and Practice: an Interface or a Great Divide?, 4–9 Aug, 2019, Maynooth University, Kildare, Ireland*. (330–335). Münster: WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Lipovec, A. in Ferme, J. (2019b). The influence of students' personal characteristics on their mathematical homework performance. V M. Kolar Billege (ur.) *Suvremene teme u odgoju i obrazovanju - STOO: knjižica sažetaka = Contemporary Themes in Education - CTE: book of abstracts (*str. 181–182). Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet.

Lipovec, A. in Ferme, J. (2018). Domaća zadaća iz matematike: utjecaj školskog i kućnog okruženja. *Matematika i škola*, *97*, 51–63.

Lokar, A. (2015). *Domače naloge pri pouku matematike. Diplomsko delo.* Koper: Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta.

Lipnik, R. (2015). Sprotno preverjanje domačih nalog in ocene. *Didakta, 25*(183), 40–47.

Murillo, J. F. in Martínez-Garrido, C. (2013). Homework influence on academic performance. A study of Iberoamerican students of primary education. *Revista de Psicodidáctica, 18*(1), 157–171. doi: 10.1387/RevPsicodidact.6156.

Núñez, J. C., Suárez, N., Rosário, P., Vallejo, G., Cerezo, R. in Valle, A. (2015). Teachers' feedback on homework, homework-related behaviors, and academic achievement. *The Journal of Educational research, 108(3)*, 204–216. doi:10.1080/00220671.2013.878298

Núñez, J., Suárez, N., Rosário, P., Valle, A., Vallejo, G. in Epstein, J. L. (2015a). Relationships between perceived parental involvement in homework, student homework behaviors, and academic achievement: differences among elementary, junior high, and high school students. *Metacognition and learning*. *10*(3), 375–406. doi: 10.1007/s11409-015-9135-5

Podgoršek M., Lipovec A. in Ferme. J. (2017). Vpliv nekaterih situacijskih in motivacijskih dejavnikov na dosežke četrtošolcev pri matematiki v raziskavi TIMSS 2015. *Šolsko polje*, 31–53.

Rosário, P., Núñez, J. C., Vallejo, G., Nunes, T., Cunha, J., Fuentes, S. in Valle, A. (2018). Homework purposes, homework behaviors, and academic achievement. Examining the mediating role of students' perceived homework quality. *Contemporary Educational Psychology, 53*, 168–180. doi: 10.1016/j.cedpsych.2018.04.001

Rosário, P., Cunha, J., Nunes, T., Nunes, A. R., Moreira, T. in Núñez, J. C. (2019). „Homework should be ... but we do not live in an ideal world": Mathematics teachers' perspectives on quality homework and on homework assigned in elementary and middle schools. *Frontiers in psychology*, *10*, 224. doi: /10.3389/fpsyg.2019.00224

Slatenšek, K. (2016). *Motivacija za opravljanje domačih nalog pri matematiki. Magistrsko delo.* Maribor: Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

Trautwein, U., Köller, O., Schmitz, B. in Baumert, J. (2002). Do homework assignments enhance achievement? A multilevel analysis in 7th-grade mathematics. *Contemporary Educational Psychology,* 27, 26–50. doi:10.1006/ceps.2001.1084.

Trautwein, U., Lüdtke, O., Schnyder, I. in Niggli, A. (2006). Predicting homework effort: Support for a domain-specific, multilevel homework model. *Journal of educational psychology*, *98*(2), 438–456.

Xu, J. (2011). Homework completion at the secondary school level: a multilevel analysis. *The Journal of Educational Research, 104*(3), 171–182. doi: 10.1080/00220671003636752.

Xu, J. (2013). Why Do Students Have Difficulties Completing Homework? The Need for Homework Management. *Journal of Education and Training Studies, 1*(1), 98–105. doi: 10.11114/jets.v1i1.78

Xu, J. (2018). Reciprocal effects of homework self-concept, interest, effort, and math achievement. *Contemporary Educational Psychology*, *55*, 42–52. doi: 10.1016/j.cedpsych.2018.09.002.

Xu, J., & Yuan, R. (2003). Doing homework: Listening to students,'parents,'and teachers' voices in one urban middle school community. *School Community Journal, 13*(2), 25–44.

Žakelj, A., Prinčič Rőhler, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, V., Repovž, B., ... Bregar Umek, Z. (2011). *Matematika. Učni načrt.* Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

Žitko. U. (2018). *Povratna informacija pri matematičnih domačih nalogah za učno šibkejše učence. Magistrsko delo.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.

Naloge utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike: analiza nekaterih vidikov nalog in uspešnost reševanja

Jerneja Bone
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V prispevku se osredotočimo na naloge utemeljevanja, ki so bile preverjane na Nacionalnem preverjanju znanja matematike v letih od 2006 do 2019. Naloge analiziramo z različnih vidikov, kot so besedilo naloge, način zapisa utemeljitve, taksonomija, območje, v katerega se je naloga uvrstila, ter vsebine matematike, v katere so naloge umeščene. Primerjamo dve nalogi, ki sta bili preverjani tako v 6. kot v 9. razredu v letih 2015 in 2016. Naloge smo analizirali tudi z vidika namena utemeljitve. Ugotavljamo, kateri od prej naštetih vidikov vplivajo na uspešnost reševanja tovrstnih nalog. Zaključujemo, da bomo z izbiro ustreznih didaktičnih pristopov in strategij za razvijanje utemeljevanja prispevali k boljšim dosežkom učencev.

Ključne besede: utemeljevanje, matematika, naloge

Justification Tasks in the National Assessment of Mathematical Knowledge: An Analysis of Selected Aspects and Students' Achievements

Abstract

The article focuses on mathematical justification tasks from the National Assessment of Mathematical Knowledge in years 2006-2019. The tasks are analysed from different perspectives, such as the text in the task, way of writing the justification, Gagne's Taxonomy, and level and mathematical content of the task. Two tasks are compared that were assessed both in the sixth and ninth grade in years 2015 and 2016. The tasks were also analysed in terms of the purpose of the justification. The aim is to find which of the previously mentioned aspects influence the successful solving of this type of tasks. The conclusion is that the selection of the appropriate didactic approaches and strategies for developing the proficiency of justification contributes to better learning outcomes of students.

Keywords: justification, mathematics, tasks

1 Uvod

Pri matematiki ločimo med utemeljevanjem in dokazovanjem. Pri dokazovanju uporabimo zaporedje logičnih korakov, s katerimi pridemo na formalni način do zahtevanega rezultata. Za dokaz neke trditve oz. izreka uporabimo prej dokazane izreke, trditve, definicije in aksiome.

Utemeljevanje je uporaba argumentov v podporo odgovoru ali zaključku, s pomočjo katerih verodostojno pojasnimo, zakaj neka trditev drži oz. ne drži. Utemeljevanje je torej pojasnjevanje, kjer učeči se pojasnijo svoj odgovor oz. svojo rešitev utemeljijo.

V osnovnošolskem izobraževanju utemeljevanje razumemo kot širši nabor argumentov, ki jih učenci uporabijo za to, da potrdijo domnevo. Argumenti, ki jih učenci uporabijo pri utemeljitvi pravilnega odgovora, so v bistvu utemeljitve. Podatka, koliko nalog utemeljevanja je prisotnih v učnem procesu od preverjanja predznanja do ocenjevanja, nimamo, kakor tudi ne, kakšne so naloge utemeljevanja, če so prisotne pri poučevanju. Tudi podatka, koliko je takih nalog v učbeniških gradivih, nismo našli. Naloge utemeljevanja so prisotne na Nacionalnem preverjanju znanja (NPZ) in v preizkusih raziskave PISA, kjer je utemeljevanje ena izmed pomembnih veščin, ki jo preverjajo. »Pojmovanje pismenosti v raziskavi PISA vključuje znanja in spretnosti učencev in učenk, da znanje in spretnosti iz temeljnih šolskih predmetov uporabljajo tudi v kontekstih zunaj šolskega kurikula ter da ob postavljanju, reševanju in interpretiranju problemov v različnih situacijah zmorejo svoje zamisli in ugotovitve tudi analizirati, utemeljevati ter učinkovito sporočati.« (Šterman, 2019)

Utemeljevanje lahko poteka ustno (govorno sporočanje) ali pisno (pisno sporočanje). Ne glede na način utemeljevanja so potrebne veščine, ki jih je potrebno pri učencu razvijati postopoma. V NPZ matematike so vključene naloge, ki v učbeniških gradivih niso pogoste ali jih ni in jih učitelji redkeje vključujejo v proces poučevanja. Na Nacionalnem preverjanju znanja matematike se v letih od 2006 do 2019 kontinuirano pojavljajo naloge utemeljevanja, ki zahtevajo odgovor v pisni obliki.

2 Namen raziskave

S podrobno analizo nalog utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike želimo ugotoviti, kako različni vidiki vplivajo na uspešnost reševanja oz. kaj vpliva na uspešnost reševanja tovrstnih nalog.

3 Metodologija

Pregledali smo naloge Nacionalnega preverjanja znanja matematike od leta 2006 do leta 2019 in v analizo vključili naloge, kjer so učenci utemeljevali svoje odgovore. Naloge so predstavljene v prilogi prispevka (Priloga), kjer smo označili, v katerem letu je bila naloga preverjena, v katerem razredu in zaporedno številko naloge v preverjanju znanja (npr.: 2013/9. razred/10. naloga). Za lažje navajanje nalog v nadaljevanju prispevka smo naloge kodirali s številko, ki predstavlja razred in črko abecede (npr. 9E). Naloge smo priredili za objavo.

Nalog utemeljevanja je bilo v 9. razredu 13, od tega štiri na naknadnih rokih, ostale na rednih rokih (Priloga). V 6. razredu so bile 4 naloge povezane z utemeljevanjem (Priloga). V letu 2015 in 2016 sta bili v preizkusih za 6. in 9. razred enaki nalogi, ki sta preverjali tudi utemeljevanje.

V analizo smo zajeli naloge, ki so se preverjale na rednih rokih, ker za te naloge obstajajo statistični podatki, ki smo jih potrebovali v analizi. Ker sta bili pri dveh nalogah podani dve vprašanji, smo imeli v analizi 13 različnih postavk oz. nalog. Za vsako nalogo oz. postavko, ki je bila preverjana na rednem roku, smo iz Letnih poročil o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja, Dodatne informacije o dosežkih učencev 6. in 9. razreda na nacionalnem preverjanju znanja, Opisov dosežkov učencev 6.in 9. razreda pri NPZ-ju in dodatnih podatkih, ki smo jih pridobili na Državnem izpitnem centru (RIC), razbrali cilj, ki ga je naloga preverjala, vsebinsko področje matematike, v katerega je bila naloga umeščena, taksonomsko stopnjo, indeks težavnosti (IT), indeks diskriminativnosti (ID) ter območje, v katerega je bila naloga razvrščena.

Število učencev, vključenih v Nacionalno preverjanje znanja matematike na rednih rokih v izbranem šolskem letu, vedno presega število 14000 (Prikaz 1), kar nakazuje, da so pridobljeni podatki (IT in ID) reprezentativni.

6. razred	
leto (redni rok NPZ)	št. učencev
2011	14336
2012	14803
2015	16827
2016	16110

9. razred	
leto (redni rok NPZ)	št. učencev
2007	19310
2008	18652
2009	18574
2011	17553
2013	17162
2014	16748
2015	17291
2016	16653
2018	16144

Prikaz 1: Število učencev, ki so pisali NPZ matematike na rednih rokih.

Vzorec nalog ni velik in je posploševanje težje, so pa v obravnavo zajete naloge zadnjih štirinajstih let, kar ni zanemarljivo časovno obdobje.

4 Analiza nalog utemeljevanja

Naloge smo analizirali z vidika besedila zastavljene naloge in zapisa odgovora, to je utemeljitve. Primerjali smo nalogi, ki sta se v letih 2015 in 2016 preverjali tako v 6. in 9. razredu (6C in 9K ter 6D in 9L). Pogledali smo uspešnost reševanja nalog z vidika umeščenosti v taksonomijo, območij, v katera so bile naloge uvrščene in vsebinskega vidika matematike, v katerega je bila naloga razvrščena. Namen utemeljitve posameznih nalog je različen, zato smo naloge pogledali tudi s tega vidika.

V analizi se bomo sklicevali na indeks težavnosti (IT), ki je količnik med povprečnim številom doseženih točk in najvišjim številom točk, ki jih je možno doseči. Pri Nacionalnem preverjanju znanja matematike je pri vsaki postavki (nalogi) možno doseči največ eno točko. Uspešnost reševanja posamezne naloge v odstotkih je zato enaka IT, pomnoženo s 100.

V pomoč nam bo tudi indeks diskriminativnosti (ID), ki je statistični parameter, s katerim skušamo meriti, ali so nalogo bolje reševali kandidati, ki so imeli v celoti boljši uspeh pri NPZ. Naloge z visokim ID so uspešno reševali večinoma le kandidati, ki so tudi sicer dosegli zelo dober rezultat na NPZ – uspešnejši kandidati. Nizek ID pomeni, da so nalogo dobro reševali tako uspešnejši kot manj uspešnejši kandidati.

4.1 Besedilo naloge

Med nalogami, ki smo jih analizirali, so naloge zastavljene z besedilom in skico (6A, 6B, 9B, 9G), ki podpira zapis naloge. Skice so predstavljale matematične pojme (npr. stranice geometrijskega lika, trikotnik, premico) in predmete, opisane v nalogi (npr. okrogla plošča, voščilnica, pisemska ovojnica). V besedilu je bila uporabljena matematična terminologija (kot npr. dolžina, širina, stranica trikotnika, kot, premica, verjetnost, trikotnik, krog, pravokotnik, šestkotnik, kvadrat, petkotnik) in simbolika (kot npr. grške črke, znak za vzporednost in pravokotnost, števila (naravna, ulomki), merske enote z besedami in z oznakami). Indeks težavnosti (IT) teh nalog je od 0,19 do najvišje 0,64, povprečni indeks težavnosti teh nalog je 0,43. Indeks diskriminativnosti teh nalog je v razponu od 0,44 do 0,60, povprečni ID je 0,51.

Ena naloga (6A) je imela poleg matematične terminologije in simbolike vključeno tudi skico, ki pa ni imela nobene vloge pri reševanju. Učencem je le pomagala, da so si predmet (voščilnica, ovojnica), opisan v nalogi, lažje predstavljali. Indeks težavnosti te naloge je 0,55, ID pa 0,26.

Tri naloge (9J, 9K/6C, 9L/6D) so v besedilo vključevale matematično simboliko (merske enote in merska števila) in besede iz vsakdanjega življenja (npr. kmetija, sok, steklenice, jabolka, zaboj). Indeks težavnosti teh nalog je od najnižjega 0,36 do največjega 0,49; povprečni IT je 0,44; ID je v razponu od 0,47 do 0,54; povprečni ID je 0,50.

Besedilo šestih nalog (9C, 9D, 9E, 9I, 9J, 9M) je vključevalo matematično terminologijo (npr. izraz, prizma, kocka rob, dolžina, višina, telesna diagonala, trikotnik, notranji kot, stranica, rešitev enačbe) in simboliko (npr. črke (neznanka, spremenljivka), številke, merske enote). Indeks težavnosti teh nalog je od 0,10 do 0,64, povprečni IT je 0,37. ID je v razponu od 0,43 do 0,66; povprečni ID je 0,54.

4.2 Zapis utemeljitve

Zapisana navodila, ki so učence pozvala k utemeljevanju, so bila različna in jih navajamo v nadaljevanju:

- »*Odgovor utemelji.*«,
- »*Odgovor utemelji z besedami.*«,
- »*Utemelji, zakaj je tvoja izbira pravilna.*«,
- »*Svojo izbiro utemelji z računom.*«,
- »*Utemeljitev odgovora.*«,
- »*Utemelji svojo izbiro.*«,
- »*Utemelji trditev.*«,
- »*Utemelji.*«,
- »*Utemelji, ali je …*«,
- »*Utemelji svojo odločitev.*«.

Ugotavljamo, da so zapisana navodila nakazovala način zapisa odgovora, to je utemeljitve.

1. način: Utemeljitev je ubesedena.
   »*Odgovor utemelji z besedami.*«
2. način: Utemeljitev je izražena le z računom.
   »*Odgovor utemelji z računom.*«
3. način: Utemeljitev je lahko izražena tako z besedo kot z računom ali skico, glede na kontekst naloge.
   »*Utemelji odgovor, trditev, izbiro, odločitev.*«

Iz predvidenih odgovorov, to je zapisov utemeljitev, ugotavljamo, da so odgovori, zapisi utemeljitev do sedaj bili podani na naslednje načine:

- utemeljitev z računom,
- utemeljitev s sliko, skico,
- ubeseditev utemeljitve, v zapisu katere je uporabljena matematična terminologija in simbolika ali
- kombinacija naštetih.

Pri zapisih utemeljitev se lahko pojavijo tudi še grafični prikazi, preglednice, različne konkretne reprezentacije, modeli teles …

V zapisih utemeljitev učenci uporabljajo simbolni zapis, ustrezno matematično terminologijo ali korekten zapis računske utemeljitve oz. narišejo skico ali načrtajo geometrijsko konstrukcijo. V odgovorih povezujejo različna matematična znanja: poznavanje pravil, definicij, izračunov … Pri utemeljevanju (odgovorih) je možno zapisati več različno oblikovanih utemeljitev, ki so pomensko podobne in se po navodilih za vrednotenje štejejo kot pravilne.

Preizkus pri enačbi je neke vrste utemeljitev dobljene rešitve enačbe. V tem primeru lahko rečemo, da je utemeljitev podana računsko.

Glede na podano navodilo ugotavljamo, da je med nalogami, ki smo jih zajeli v analizo, ena naloga (9E), ki izrecno zahteva utemeljitev z računskim postopkom. Indeks težavnosti te naloge je 0,19 (ID je 0,44). Zasledili smo tudi samo eno nalogo (9B), ki v navodilu zahteva utemeljitev z besedami. Indeks težavnosti te naloge je 0,10 (ID je 0,43). Ostale naloge dopuščajo zapis utemeljitve tako z besedami kot z računskimi postopki oz. skicami (če kontekst naloge seveda to dopušča). Povprečni indeks težavnosti teh naloge je 0,46, povprečni ID pa 0,51.

4.3 Primerjava dosežkov učencev 6. in 9. razreda

Predmetna komisija za matematiko je leta 2015 in 2016 v Nacionalni preizkus znanja matematike za 6. in 9. razred uvrstila enako nalogo (6C/9K, 6D/9L), pri kateri so učenci morali utemeljiti svoj odgovor. Naloga je izhajala iz problemske situacije iz vsakdanjega življenja. Dober pokazatelj za ugotavljanje morebitnih razlik v dosežkih učencev 6. in 9. razreda so enake naloge (Preglednica 1).

Preglednica 1: IT in ID pri enakih nalogah v letih 2015 in 2016.

	6. razred			9. razred		
	naloga	IT	ID	naloga	IT	ID
2015	6C: 9. b)	0,25	0,46	9K: 2. b)	0,49	0,50
	6C: 9. c)	0,26	0,46	9K: 2. c)	0,46	0,54
2016	6D: 10. c)	0,25	0,44	9L: 3. c)	0,36	0,47

Četrtina učencev 6. razreda je uspešno rešila nalogo v obeh letih, leta 2015 je bila uspešna polovica učencev 9. razreda, dobra tretjina pa leta 2016. Opazimo, da je razlika v IT opazna, v ID pa razlika ni tolikšna, kar nakazuje, da so nalogo uspešneje reševali učenci, ki so na NPZ dosegli višji dosežek. To potrjuje dejstvo, da sta se v obeh razredih v obeh letih nalogi razvrstili v modro območje.

4.4 Taksonomija na NPZ

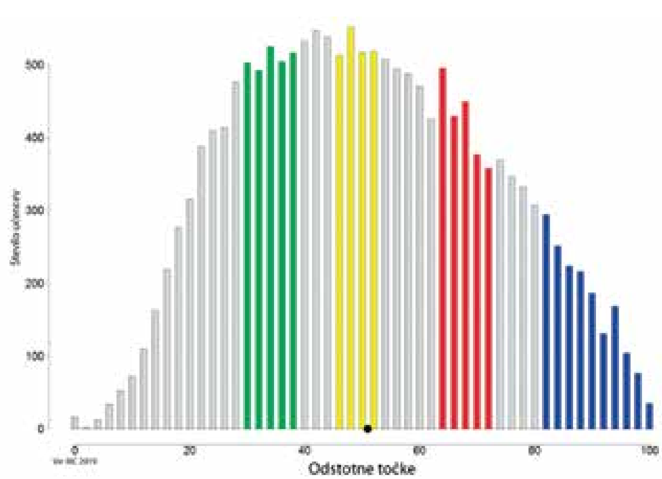
Predmetna komisija za matematiko uporablja pri razvrščanju nalog glede na taksonomske stopnje prirejeno Gagnejevo klasifikacijo znanj, ki ima štiri stopnje:

1. Poznavanje in razumevanje pojmov in dejstev.
2. Izvajanje rutinskih postopkov.
3. Uporaba kompleksnih postopkov.
4. Reševanje in raziskovanje problemov.

Naloge utemeljevanja je Predmetna komisija za matematiko razvrstila v vse štiri stopnje. Ena naloga (9G) je bila umeščena k 1. stopnji (IT je 0,64, ID je 0,49), tri (6A, 9K/6C (b), 9M) so bile umeščene k 2. stopnji (IT od 0,36 do 0,55; povprečni IT je 0,46, ID je v razponu od 0,26 do 0,54, povprečni ID je 0,43), štiri naloge oz. pet postavk (6B, 9E, 9I(a, b), 9K/6C (a)) k 3. stopnji (IT od 0,10 do 0,64; povprečni IT je 0,40; ID je od 0,43 do 0,60, povprečni ID je 0,53), štiri (9B, 9D, 9J, 9L/6D) pa k 4. stopnji (IT je od 0,19 do 0,41; povprečni IT je 0,34; ID je od 0,44 do 0,66, povprečni ID je 0,52).

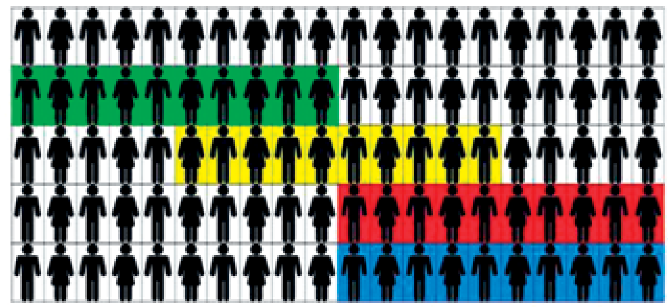
4.5 Območje dosežkov

Dosežki vseh učencev, ki sodelujejo na NPZ matematike (Prikaz 1), so razvrščeni od najnižjega do najvišjega, višina stolpca pa nakazuje število učencev z danim dosežkom.



Prikaz 1: Porazdelitev točk pri matematiki, 9. razred, 2019.
(Vir: RIC. Letno poročilo o izvedbi NPZ v šolskem letu 2018/2019)

S posebno barvo so označena štiri območja: zeleno, rumeno, reče in modro območje. Zeleno območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo spodnje četrtine dosežkov. Rumeno območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo med polovicama dosežkov. Rdeče območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo zgornje četrtine dosežkov. Modro območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki so v zgornji desetini dosežkov. Nalog, ki so v območju nad modrim, v 65 % primerov ne rešijo niti učenci z najvišjimi skupnimi dosežki (RIC, 2019).



Prikaz 2: Prikaz štirih podskupin v celotni populaciji učencev posameznega predmeta.
(Vir: RIC. Priročnik za uporabo orodja za ugotavljanje kakovosti izkazanega znanja ORKA)

Pri učencih, ki dosežejo na NPZ od 20 do 30 %, se naloge, ki so jih reševali z uspešnostjo vsaj 65 %, uvrstijo v zeleno območje (prikaz 2). Podobno je npr. pri učencih, ki dosežejo na NPZ od 70 do 80 %. Naloge, ki so jih ti učenci reševali z uspešnostjo vsaj 65 %, se uvrstijo v rdeče območje (Prikaz 2).

Naloge utemeljevanja ni v zelenem območju, kar nakazuje, da večina učencev v spodnji četrtini dosežkov ne zna zapisati utemeljitve. V rumeno območje sta bili uvrščeni dve nalogi (9G, 9I(a)), IT obeh nalog je 0,64, v rdeče območje prav tako dve nalogi (6A, 6B), povprečni IT nalog je 0,50 (0,55 in 0,45). V modro območje je uvrščenih največ nalog (9C, 9D, 9F, 9H, 9I(b), 9J, 9K/6A, 9L/6D, 9M), povprečni IT teh nalog je 0,40. Dve nalogi (9B, 9E) sta bili umeščeni v območje nad modrim, povprečni IT teh dveh nalog je 0,15.

V rumeno območje sta umeščeni nalogi iz geometrije (koti) in verjetnosti. V rdeče območje sta umeščeni nalogi iz merjenja in števil (deli celote), obe nalogi sta bili v preizkusu za 6. razred. Naloge modrega območja so iz vsebin algebre in analize, merjenja in geometrije ter iz drugih vsebin.

V letih 2011 in 2013 sta bili nalogi (9G, 9I) v 9. razredu uvrščeni v rumeno območje, v letih 2011 in 2012 sta bili nalogi (6A, 6B) 6. razreda uvrščeni v rdeče območje. V preostalih letnih, kjer je bila naloga utemeljevanja, pa se je naloga uvrstila v modro območje.

4.6 Vsebinsko področje nalog

Učni načrt matematike vsebinske sklope razvrsti v tri teme: analiza in algebra, geometrija in merjenje ter druge vsebine. Naloge utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike so iz vseh treh sklopov, in sicer šest postavk (6A, 9B, 9E, 9I (a, b), 9J) je iz teme geometrije in merjenja, tri naloge (6B, 9D, 9M) iz teme analiza in algebra ter štiri postavke (9G, 9K/6C, 9L/6D (a, b)) iz drugih vsebin. Povprečni IT nalog iz geometrije in merjenja je 0,36 (povprečni ID teh nalog je 0,49), iz analize in algebre 0,41 (povprečni ID teh nalog je 0,53), iz drugih vsebin pa 0,49 (povprečni ID teh nalog je 0,50).

4.7 Namen utemeljitve

Slovar slovenskega knjižnega jezika opredeli glagol utemeljiti kot »narediti, da je kaj logično upravičeno« oz. »navesti vzroke, razloge za kako dejanje, ravnanje, stanje«. Zelo podoben pomen ima glagol pojasniti, ki ga SSKJ opredeli kot »narediti, da postane komu kaj (bolj) jasno, razumljivo« oz. »narediti, da kdo izve, spozna, kar je potrebno, zaželeno«. Glede na to lahko vsa navodila »utemelji« preoblikujemo v »pojasni«. To razmišljanje podkrepi model DIVINE (Chua, 2017), ki naloge utemeljevanja razvrsti v naloge:

- odločanja (pojasni, ali … ; pojasni, kateri …),
- sklepanja (pojasni, kaj …),
- potrjevanja (pojasni, zakaj …) in
- izvajanja (pojasni, kako …).

Za primerjanje nalog utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike z modelom DIVINE smo navodila nalog smiselno preoblikovali iz utemelji v pojasni.

Po preoblikovanju navodil sedem postavk pri nalogah (6A, 9I, 9K/6C, 9L/6D, 9M) umestimo k odločanju (povprečni IT je 0,63, povprečni ID je 0,48), k sklepanju smo razvrstili le eno (9J) nalogo (IT je 0,38, ID je 0,66), tri naloge (9B, 9E, 6B) k potrjevanju (povprečni IT je 0,25; povprečni ID je 0,49) in dve nalogi (9D, 9G) k izvajanju (povprečni IT je 0,53; povprečni ID je 0,50).

5 Razprava

Poznavanje pomena besed in situacije iz vsakdanjega življenja, razumevanje matematične terminologe in simbolike, povezovanje znanj znotraj matematične vsebine tako znotraj posameznega razreda kot po vertikali izobraževanja, nakazuje, da so učenci uspešneje reševali naloge (npr. 6A, 9K/6C, 9L/6B), kjer je bil podan problem iz življenjske situacije z uporabo znanih predmetov in pojmov iz realnega sveta ter uporaba merskih števil in merskih enot, torej količin. Slabše so reševali naloge (npr. 9B, 9C, 9D, 9I, 9J), kjer je bila v navodilu uporabljena matematična terminologija in simbolika. Indeks diskriminativnosti je v večini primerov nad 0,50, kar nakazuje na to, da so naloge utemeljevanja ne glede na način, na katerega so zastavljene, bolje reševali tisti, ki so imeli v celoti boljši dosežek na NPZ.

Ugotovili smo, da so učenci uspešnejši pri nalogah utemeljevanja, če lahko izbirajo način zapisa utemeljitve oz. če lahko pri zapisu odgovora uporabijo tako računske postopke kot besedilo ali skico. Največ težav učencem predstavlja zapis utemeljitve samo z besedilom ali samo z računskim postopkom, vendar bi bilo to treba še preučiti, ker je bila v analizo zajeta le ena naloga iz posamezne kategorije. Ob tem se zastavlja vprašanje, kako so učenci uspešni pri izvedbi preizkusa pri reševanju enačb, če je preizkus pri enačbi računska utemeljitev rešitve dane enačbe.

Tako učenci 6. kot učenci 9. razreda še nimajo razvitih strategij utemeljevanja. Rezultati kažejo, da učenci v treh letih šolanja pridobijo nekatera matematična znanja, razvijejo določene strategije utemeljevanja, pridobijo izkušnje v življenjskih situacijah, ki jim pomagajo pri logičnem sklepanju in utemeljevanju, vendar še ne na zadovoljivi ravni.

Naloge utemeljevanja so bile na NPZ v letih od 2006 do 2019 razvrščene v vse štiri stopnje po taksonomiji na NPZ. Z uvrstitvijo naloge v višjo taksonomsko stopnjo je delež učencev, ki naloge te taksonomske stopnje reši pravilno, manjši. Naloge utemeljevanja na višjih taksonomskih stopnjah uspešneje rešujejo učenci, ki dosegajo višje dosežke na NPZ.

Naloge utemeljevanja iz različnih vsebin matematike so razpršene po vseh območjih, razen zelenega. Najvišji IT je pri nalogah, ki so umeščene v rdeče območje, najnižji pa pri nalogah, ki so umeščene v območje nad modrim, kar je pričakovano. Največ nalog je uvrščenih v modro območje, kar potrjuje, da so naloge slabše reševale generacije učencev v več letih. Zaskrbljujoč je podatek, da so bile naloge pred nekaj leti v rumenem in rdečem območju, zadnja leta so v modrem, kar nakazuje, da se stanje na področju utemeljevanja pri matematiki ne izboljšuje.

Z analizo smo ugotovili, da učenci slabše rešujejo naloge utemeljevanja iz geometrije in merjenja, boljše pa naloge utemeljevanja iz drugih vsebin. Pri geometriji in merjenju je pomembno razumevanje matematične terminologije in simbolike, kakor tudi poznavanje definicij in trditev za posamezne geometrijske pojme. Problemske naloge iz vsakdanjega življenja so učencem bližje in posledično je logično sklepanje in utemeljevanje pri teh nalogah učencem razumljivejše in lažje.

Naloge utemeljevanja na NPZ matematike lahko preoblikujemo v naloge, kjer v navodilu namesto utemelji uporabimo besedo pojasni. Po preoblikovanju navodil smo ugotovili, da je najslabše rešena naloga, kjer morajo učenci navesti razloge oz. dokaze, ki podpirajo ali ovržejo matematično trditev. Najbolje so rešene naloge, kjer morajo učenci pojasniti odločitev.

Zaključek

Skozi poučevanje učitelj pri učencih razvija matematično mišljenje in matematično pismenost, učenci ob procesu učenja pridobivajo zmožnosti za dojemanje, razumevanje in uporabo matematičnih argumentov v vsakdanjem življenju. Pomembna je zlasti zmožnost za prirejanje matematičnega argumenta iz znane situacije v neznano oziroma uporaba matematičnih argumentov v novih situacijah. Matematična pismenost torej ni zgolj skupek znanj ali spretnosti, ampak pristop pri reševanju situacije, pri katerem se pokaže sposobnost za smiselno delo z numeričnimi oziroma matematičnimi podatki, ki so bili zaznani, in smiselnih odločitev. Gre za miselno iskanje vzorcev in ne za upoštevanje danih navodil (Felda, 2012).

Predmetna komisija za matematiko v preizkuse znanja vključuje naloge, s katerimi preverja širše razumevanje matematičnega razmišljanja, s čimer posredno preverja tudi razvijanje matematične pismenosti. Morda s takimi nalogami dajemo priložnost sposobnejšim učencem, da se izkažejo znotraj (pre)široke množice prav dobrih in odličnih zaključnih ocen pri matematiki (Felda, 2018).

Na uspešnost reševanja nalog utemeljevanja na NPZ vpliva več dejavnikov. Pri tovrstnih nalogah učenci interpretirajo matematični problem in zapišejo utemeljitev, vprašanje pa je, kako pogosto so te naloge prisotne v učnem procesu. Razvijanje kritičnega odnosa do podatkov in rešitev je eden od ciljev razvijanja kritičnega mišljenja. Ugotavljamo, da učenci svojih rešitev ne znajo utemeljiti, čeprav dosežki na NPZ nakazujejo na poznavanje lastnosti matematičnih pojmov, obvladovanje in izvajanje postopkov. Naloge utemeljevanja dobro ločujejo učence z višjimi in učence z nižjimi dosežki. Težave pri zapisu utemeljitve izhajajo iz nedosledne uporabe matematične terminologije in simbolike (Bone, 2019). Izbira ustreznih didaktičnih pristopov in strategij, ki razvijajo utemeljevanje ne samo pri pouku matematike, ampak tudi pri drugih predmetih, bo pripomogla, da bodo učenci deležni več izkušenj z utemeljevanjem, kar se bo pokazalo tudi v dosežkih na naslednjih zunanjih in notranjih preverjanjih znanja.

Literatura

Bone, J. (2019). Naloge z utemeljevanjem na Nacionalnem preverjanju znanja iz matematike. V *Sedemdeset let DMFA Slovenije*, 71–72.

Cankar, G., Semen E., Knežević M., Urank., M. (2020) Priročnik za uporabo orodja za ugotavljanje kakovosti izkazanega znanja: Nacionalno preverjanje znanja. Državni izpitni center. Pridobljeno 25. 2. 2020, https://www.ric.si/mma/Orka%20prirocnik/2018090312493817/

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. CERME, Dublin, Ireland. Pridobljeno 28. 12. 2019, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873071/document

Felda, D. (2012). Pomanjkljivo zavedanje potreb po matematični pismenosti v naši šoli. Didactica Slovenica–Pedagoška obzorja, *27*(3–4), 37–50.

Felda, D. (2018). Preverjanje matematičnega znanja. *Revija za elementarno izobraževanje*, 175. Pridobljeno, 29. 12. 2019, http://rei.pef.um.si/images/Izdaje_revije/2018/2/REI_11_2_CLANEK5.pdf

Letna poročila o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja v šolskih letih od 2005/2006 do 2018/2019, Pridobljeno 27. 12. 2019, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/

Nacionalno preverjanje znanja. Preizkusi znanja. Matematika. Pridobljeno december 2019, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/ in Banka nalog https://bankanalog.ric.si

Opisov dosežkov učencev 6. in 9. razreda pri NPZ-ju od 2005/2006 do 2018/219. Pridobljeno januar 2020, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/

Šterman, I. K. (2019). PISA 2018: program mednarodne primerjave dosežkov učencev in učenk: nacionalno poročilo s primeri nalog iz branja. Pedagoški inštitut. Pridobljeno 20. 12. 2019, https://www.pei.si/wp-content/uploads/2019/12/PISA2018_NacionalnoPorocilo.pdf

Naloge utemeljevanja na NPZ matematike v 6. in 9. razredu

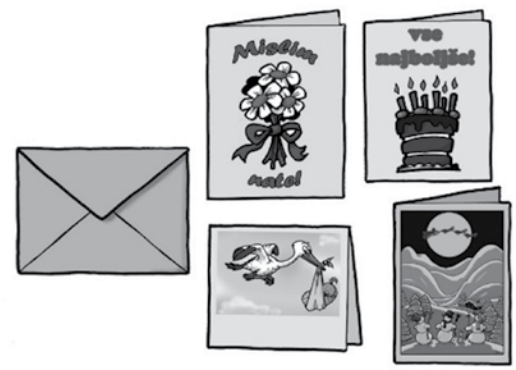
6A: 2011/6. razred/6. naloga

Pisemska ovojnica je dolga 15 cm 5 mm široka pa 11 cm.

a) Koliko milimetrov je dolžina pisemske ovojnice večja od njene širine?

b) Katere voščilnice zagotovo ne bomo mogli zapreti v pisemsko ovojnico?

Obkroži črko pred pravilnim odgovorom.



A Voščilnica, dolga 9 cm 5 mm in široka 120 mm.

B Voščilnica, dolga 15 cm in široka 12 cm 5 mm.

C Voščilnica, dolga 14 cm in široka 10 cm.

Utemelji svojo odločitev.

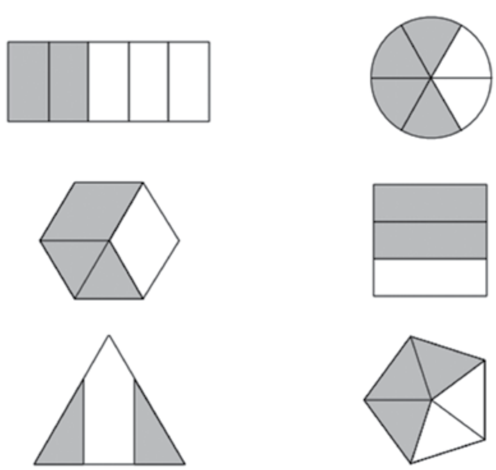
6B: 2012/6. razred/8. naloga

Nik bi moral pobarvati $\frac{2}{3}$ vsakega lika:

pravokotnika, kroga, šestkotnika, kvadrata, trikotnika in petkotnika.

a) Katere like je Nik pravilno pobarval?

b) Nik je pobarval $\frac{4}{10}$ nekega lika. Katerega? Utemelji.

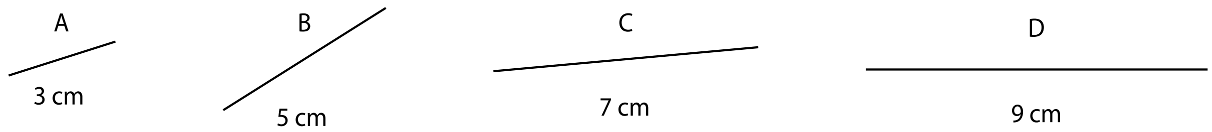


6C: glej 9K

6D: glej 9L

9A: 2006/9. razred naknadni rok/ 10. naloga

Marko ima štiri paličice z dolžinami 3 cm, 5 cm, 7 cm in 9 cm. Z njimi želi sestaviti model trikotnika. Paličice predstavljajo stranice trikotnika.



b) S katerimi tremi paličicami Marko ne more sestaviti trikotnika?

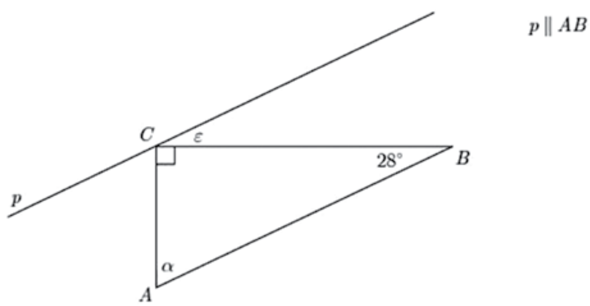
Odgovor utemelji.

9B: 2007/9. razred/12. naloga

Določi, koliko stopinj merita kota α in ε, ki sta označena na spodnji skici. Premica p je vzporedna premici AB.
Opomba: Koti na skici niso v pravi velikosti.

a) Koliko meri kot α?

b) Koliko meri kot ε? Odgovor utemelji z besedami.



9C: 2007 naknadni rok/9. razred/5. naloga

a) Marko je s premislekom reševal enačbo $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

Zapisal je množico rešitev enačbe: $R = \{0\}$
Ali je zapisal vse rešitve te enačbe? Odgovor utemelji.

9D: 2008/9. razred/7. naloga

b) Pet učencev je preoblikovalo izraz $(3 - a)^2$.
Obkroži ime učenca, ki je pravilno preoblikoval dani izraz tako, da velja za poljubno število a. Utemelji, zakaj je tvoja izbira pravilna.

Anita: $(3 - a)^2 = 3^2 - a^2$

Borut: $(3 - a)^2 = 9 - 6a - a^2$

Cilka: $(3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2$

Drago: $(3 - a)^2 = 9 + a^2$

Erika: $(3 - a)^2 = 9 - 3a + a^2$

9E: 2009/9. razred/14. naloga

Izdelati želimo žični model pravilne 4-strane prizme z osnovnim robom 4 dm in z višino 6 dm.

a) Koliko metrov žice bomo potrebovali za vse osnovne in stranske robove skupaj?

b) V modelu bomo izdelali tudi telesno diagonalo. Katera najmanjša dolžina žice od navedenih bi zadoščala za izdelavo telesne diagonale?

Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Svojo izbiro utemelji z računi.

A 6 dm
B 7 dm
C 8 dm
Č 9 dm
D 10 dm

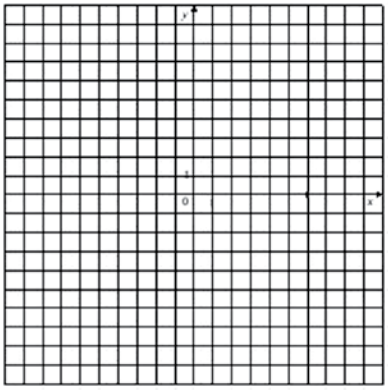
9F: 2009 naknadni rok/9. razred/7. naloga

Enačba premice p je $y = \frac{x}{2} - 4$.

a) Nariši premico p v koordinatni sistem.

b) Zapiši koordinati točke, v kateri premica p seka ordinatno os: ____________.

c) Ali leži točka A (–140, –74) na premici p? Utemelji odgovor.



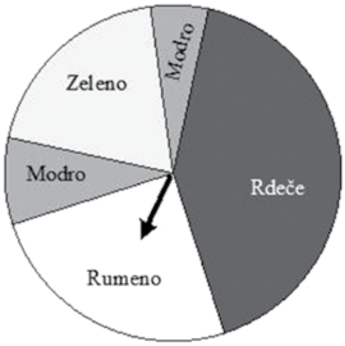
9G: 2011/9. razred/12. naloga

Na sliki je krožna plošča, razdeljena na 5 pobarvanih polj. V središču plošče je pritrjen kazalec. Kazalec zavrtimo. Opazujmo in ocenimo:

a) Kakšne barve je polje, na katerem se kazalec najverjetneje ustavi?

b) Kaj je bolj verjetno: da se ustavi kazalec na modrem ali na zelenem polju?

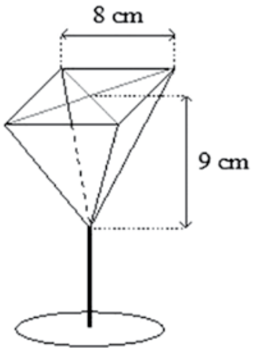
c) Jana trdi: verjetnost, da se kazalec ustavi na rumenem polju, je $\frac{1}{5}$, ker je krog razdeljen na 5 delov. Ali sklepa prav? Odgovor utemelji.



9H: 2011 naknadni rok/ 9. razred/14. naloga

Ali lahko v kozarec, ki ima obliko pokončne pravilne 4-strane piramide, natočimo 2 dl pijače, ne da bi se tekočina prelila čez rob?

Utemelji z računom. Podatke preberi na sliki.



9I: 2013/9. razred/6. naloga

Ali je trikotnik z danimi podatki pravokoten?

Obkroži pravilni odgovor in utemelji svojo izbiro.

a) Trikotnik, katerega velikost enega notranjega kota je 30°, drugega pa 60°. DA NE

b) Trikotnik, ki ima stranice dolge 15 cm, 12 cm in 11 cm. DA NE

9J: 2014/9. razred/10. naloga

Prostornina pravilne štiristrane piramide je 243 dm^3, njena višina je 9 dm.

a) Izračunaj ploščino osnovne ploskve.

b) Dolžina osnovnega roba je ____________________ dm.

c) Prostornina pokončne prizme, ki ima enako osnovno ploskev in enako višino kot dana piramida, je

____________________ dm^3.

č) Mija trdi, da se tej pokončni prizmi reče kocka. Utemelji Mijino trditev.

9K in 6C: 2015/9. razred/ 2. naloga in 2015/6. razred/9. naloga

Na kmetiji so nabrali 0,75 tone jabolk.

a) Nekaj nabranih jabolk so preložili v zaboje. Napolnili so 50 zabojev po 5 kg in 25 zabojev po 15 kg. Koliko kilogramov jabolk niso preložili v zaboje?

b) Vsa nabrana jabolka bi lahko zložili v 30 zabojev, če bi v vsak zaboj dali enako količino jabolk. Koliko kilogramov jabolk bi bilo v vsakem zaboju?

c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

9L in 6D: 2016/9.razred/3. naloga in 2016/6. razred/10. naloga

Na kmetiji so pripravili 55 l soka in dovolj stekleničk po ½ l in po 3 dl.

a) Napolnili so 50 stekleničk po ½ l, preostanek soka so pretočili v stekleničke po 3 dl. Koliko stekleničk po 3 dl so napolnili?

b) Ali bi lahko s 55 l soka napolnili le stekleničke po ½ l? Utemelji.

c) Ali bi lahko s 55 l soka napolnili le stekleničke po 3 dl? Utemelji.

9M: 2018/9. razred/5. naloga

Utemelji, ali je $x = \frac{1}{3}$ rešitev enačbe $5 - 3x = -x + 2$.

Različni načini vrednotenja znanja pri pouku matematike

Andreja Pečovnik Mencinger
Srednja šola za gostinstvo in turizem Maribor

Izvleček

Predstavljeni so različni načini vrednotenja znanja pri pouku matematike v programu srednjega strokovnega izobraževanja. Podani so konkretni primeri vrednotenja projektno sodelovalnega dela in ocenjevanja seminarskih nalog, vključno s kriteriji in opisniki vrednotenja znanja po posameznih korakih. Vključeni so tudi elementi formativnega spremljanja.

Ključne besede: vrednotenje znanja, opisniki, sodelovalno delo

Different Ways of Assessing Knowledge in Mathematics Class

Abstract

The article presents different ways of assessing mathematical knowledge in secondary vocational education programme. It gives specific examples of assessing collaborative project work and term papers, with the criteria and descriptors for assessing knowledge according to individual steps. The elements of formative assessment are also included.

Keywords: knowledge assessment, descriptors, collaborative work

Uvod

Katalog znanja za matematiko v programih srednjega strokovnega izobraževanja (2007) podaja različne primerne načine vrednotenja kompetenc, in sicer: pisni preizkusi, ustno spraševanje oz. preverjanje s pogovorom, seminarske naloge, matematična in empirična preiskovanja in projektne naloge. V srednjih šolah prevladujeta prvi dve obliki vrednotenja znanja: pisni preizkus in ustno spraševanje. Učitelji redkeje uporabljajo preostale oblike vrednotenja. S tema dvema načinoma vrednotenja znanja je nemogoče vrednotiti vse ključne kompetence, ki jih podaja omenjeni Katalog znanja.

Preverjanje in ocenjevanje znanja

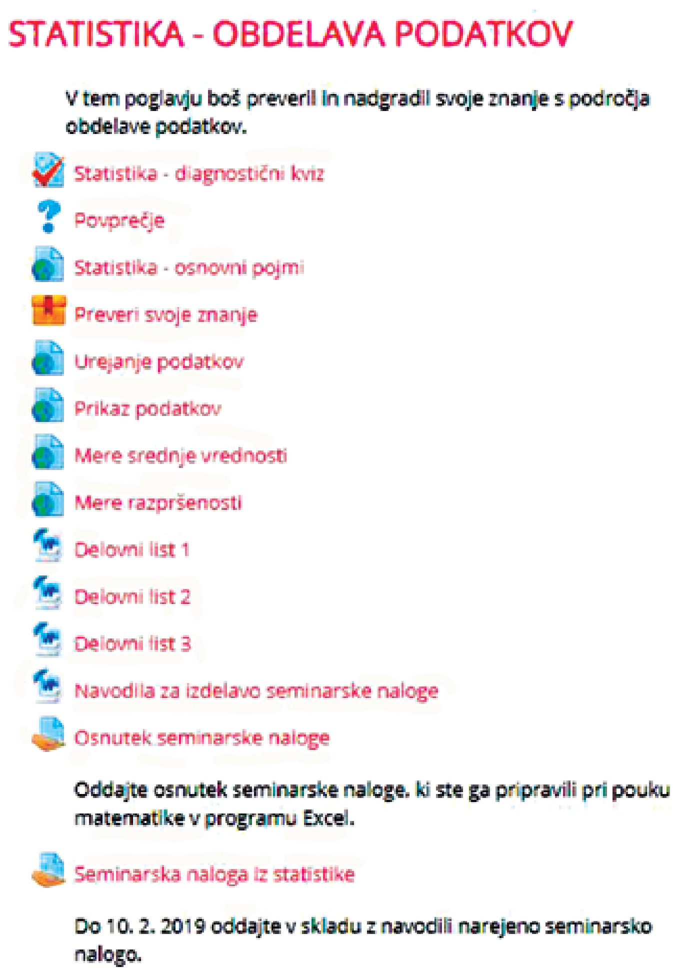
Preverjanje znanja (Žakelj, 2012) je sistematično, načrtno zbiranje podatkov o tem, kako učenec dosega učne cilje med procesom učenja. Ocenjevanje znanja (Žakelj, 2012) je presoja in vrednotenje izkazanega znanja posameznih učencev po končanem obdobju učenja in formalizacija te presoje v kvalitativni in kvantitativni obliki.

Pri ocenjevanju znanja učitelji uporabljamo kriterije ocenjevanja znanja in opisnike. Pri vrednotenju projektnih in seminarskih nalog so opisniki nepogrešljivi, prav tako pri vrednotenju (projektnega) sodelovalnega dela.

Primer vrednotenja ključnih kompetenc tematskega sklopa *Obdelava podatkov*

Vrednotenje usvojenih znanj in veščin iz tematskega sklopa *Obdelava podatkov* izpeljemo tako, da vrednotimo pisni preizkus znanja in seminarsko nalogo. V pisnem preizkusu znanja dijaki izkažejo znanje iz poznavanja osnovnih statističnih pojmov, prikazovanja podatkov z različnimi diagrami, razumevanja pomena meril za srednjo vrednost, razpršenost podatkov ipd. Seminarska naloga se izdela s pomočjo programa Excel, ki ga dijaki usvojijo v okviru modula Poslovno komuniciranje in IKT. V seminarski nalogi dijaki izkažejo znanja in veščine z urejanjem podatkov z računalniškimi preglednicami, prikazovanjem podatkov z različnimi grafikoni, izračunavanjem statističnih vrednosti s pomočjo programa Excel. Prav tako dijaki izkažejo veščine interpretacije analiziranih podatkov in grafikonov ter zmožnosti formulacije ugotovitev v matematičnem jeziku.

Dijak prejme podatke iz športnovzgojnega kartona, ki jih mora v skladu z navodili obdelati in predstaviti v seminarski nalogi, zapisani v programu Word. Obdelava podatkov poteka pri pouku matematike v učilnici, prilagojeni za delo z računalniki, končno izvedbo seminarske naloge pa dijaki opravijo doma. Delo v šoli poteka dve šolski uri. Dijaki oddajo svoje izdelke v spletno učilnico, kjer vidijo tudi povratno informacijo o svojih izdelkih in napotke za nadaljnje delo. V spletni učilnici so navodila za izdelavo seminarske naloge in kriteriji ocenjevanja seminarske naloge.



Slika 1: Pogled na dejavnosti v spletni učilnici.

Seminarska naloga se vrednoti po kriterijih, s katerimi so dijaki seznanjeni pred pričetkom dela: ustreznost gradiva glede na dana izhodišča (naslovna stran, kazalo, uvod, podatki, urejeni v preglednicah z vsemi izračuni, frekvenčna tabela, grafične predstavitve podatkov, smiselno oblikovano vezno besedilo, interpretacije preglednic, izračunov in grafičnih predstavitev, zaključek) in sistematičnost pripravljenega gradiva. Vsak kriterij za posamezne elemente gradiva je podrobno opisan.

Primer kriterijev za vrednotenje posamezne grafične predstavitve podatkov:

Smiselnost uporabe posamezne grafične predstavitve glede na dane podatke	**1 točka**
Opremljenost grafične predstavitve z legendo	**1 točka**
Označitev osi	**1 točka**

Primer kriterijev za vrednotenje interpretacij preglednic, izračunov in grafičnih predstavitev:

	2 točki	**1 točka**	**0 točk**
Interpretacija preglednic in izračunov	Iz urejenih podatkov in izračunov so izluščene bistvene informacije, npr. primerjava med izračunanimi statističnimi parametri, interpretacija razpršenosti podatkov ipd.	Interpretacija zajema zgolj izpis posameznih vrednosti brez primerjav.	Interpretacije ni.
Interpretacija grafičnih predstavitev podatkov	Interpretacija zajema informacijo o frekvenčnih razredih, ki po frekvenci izstopajo, pomenu kumulativne frekvence, modalnem razredu ipd.	Interpretacija zajema zgolj izpis posameznih vrednosti.	Interpretacije ni.

Dijaki z izdelavo seminarske naloge razvijajo zmožnost za uporabljanje tehnologije pri izvajanju matematičnih postopkov, zmožnost za organiziranje in analiziranje podatkov ter zmožnost za interpretiranje in kritično presojo pri uporabljanju matematike na drugih področjih.

Primer vrednotenja projektnega dela po vzoru »učenci poučujejo«

Z geometrijo se učenci seznanijo že v osnovni šoli. Zato izpeljemo del tematskega sklopa *Geometrija v ravnini* s projektnim delom. Predznanje dijakov diagnosticiramo s kvizom v spletni učilnici. Nato prvih nekaj uvodnih ur učitelj izvede demonstracijsko tako, da dobijo dijaki vpogled v široko možnost rabe raznolikih gradiv pri pouku geometrije: videoposnetkov, predstavitev s prosojnicami, delovnih listov, povezava z vsakdanjim življenjem (umetnost, narava …) ipd. Dijakom se predstavi tudi možnost rabe programa GeoGebra in gradiv, ki so že pripravljena v GeoGebri.

Projektno delo izvedemo tako, da se dijaki razdelijo v trojice. Vsaka trojica prejme temo in mora na to temo pripraviti predstavitev snovi, npr. Power Point/Prezi, rešiti določene naloge in jih predstaviti ter za preverjanje znanja sestaviti delovni list ali kviz. Dijaki si znotraj trojic razdelijo delo in pripravijo gradiva,

Matematika v šoli, št. 1., letnik 26, 2020

ki jih preko aplikacije Google Drive posredujejo učitelju. Dijak, ki pripravlja predstavitev snovi, posreduje dva dokumenta, in sicer celotno vsebino, ki jo namerava predstaviti, in vsebino, ki bo na prosojnicah. Dijaki imajo en teden časa za pripravo gradiv in nato še en teden časa za vnos popravkov/izboljšav in pripravo na predstavitev svoje naloge. Dijakom je ponujena tudi možnost koriščenja ur konzultacij, če bi potrebovali pri pripravi gradiv kakšno pomoč.

Predstavitve dijakov se vrednotijo po kriterijih: ustreznost gradiva glede na dana izhodišča, sistematičnost pripravljenega gradiva, kreativnost, ustreznost časovnim omejitvam, smiselna povezanost posameznih elementov gradiva, matematična korektnost predstavljenega gradiva, suverenost govornega nastopa.

Vsaki kategoriji pripada določeno število točk, seštevek točk pa odloča o končni oceni. Podajam dva primera opisnikov, in sicer za vrednotenje ustreznosti gradiva glede na dana izhodišča in vrednotenje kviza.

Primer opisnikov za vrednotenje ustreznosti gradiva za predstavitev glede na dana izhodišča:

Kriteriji vrednotenja - opisniki	**Število točk**
Gradivo zajema vse bistvene elemente: • vse bistvene lastnosti posameznega geometrijskega lika, pojma … • vključuje ustrezne grafične/slikovne reprezentacije, • nakazana je povezava z vsakdanjim življenjem, kjer je to možno.	**3 točke**
Gradivo zajema • vse bistvene lastnosti posameznega geometrijskega lika, pojma … • vključuje ustrezne grafične/slikovne reprezentacije ali je nakazana povezava z vsakdanjim življenjem.	**2 točki**
Gradivo zajema • vse bistvene lastnosti posameznega geometrijskega lika, pojma … • nima ustreznih grafičnih/slikovnih reprezentacij in ni nakazane povezave z vsakdanjim življenjem.	**1 točka**
Gradivo ne zajema nobenega od bistvenih elementov.	**0 točk**

Primeri opisnikov za vrednotenje sestavljenega kviza glede na dana izhodišča:

Kriteriji vrednotenja - opisniki	**Število točk**
Vprašanja se nanašajo na predstavljeno gradivo in so ustrezno formulirana. Kviz vsebuje vsaj eno grafično/slikovno reprezentacijo. Število vprašanj je vsaj 5.	**3 točke**
Vprašanja se ne nanašajo v celoti na gradivo ali so neustrezno formulirana in ali ni grafičnih/slikovnih reprezentacij ali je premajhno število vprašanj.	**2 točki**
Vprašanja se ne nanašajo v celoti na gradivo, so neustrezno formulirana ter ni grafičnih/slikovnih reprezentacij ali je premajhno število vprašanj.	**1 točka**
Vprašanja so neprimerna, neustrezno formulirana, ni grafičnih/slikovnih reprezentacij in je premalo število vprašanj.	**0 točk**

Dijaki se tako naučijo uporabljati matematični jezik pri komuniciranju o matematiki. Pri pisanju gradiv se naučijo pisanja matematičnega besedila in nekateri se pri predstavitvi izkažejo za prave učitelje. Učitelj prevzame vlogo mentorja dijakom.

Primer vrednotenja ključnih kompetenc pri tematskem sklopu *Geometrija v prostoru*

Vrednotenje ključnih kompetenc poteka na različne načine tako, da vrednotimo individualno delo, delo v dvojicah ter skupinsko delo in sodelovalno projektno delo. V ta namen dijaki izvedejo več dejavnosti, ki so opisane v nadaljevanju. Vsaka dejavnost se vrednoti v skladu z določenimi kriteriji, seštevek točk pa določi končno oceno.

1. Fotografiranje modelov geometrijskih teles v vsakdanjem življenju.

   Dijaki individualno zberejo fotografije v wordovem dokumentu, ki ga oddajo v spletno učilnico. Fotografije predstavljajo različne vrste geometrijskih teles (vsaj 10 vrst). Vsaka fotografija je opremljena z imenom vrste geometrijskega telesa, skupino teles, ki ji pripada, ter krajem in datumom posnetka. Izdelek se vrednoti glede na zahtevano vsebino.

2. Individualno reševanje kviza v spletni učilnici, s katerim se vrednoti poznavanje osnovnih pojmov prostorske geometrije (delitev teles, poimenovanje osnovnih pojmov geometrijskih teles, prepoznavanje mreže geometrijskega telesa, formule za izračun površine in prostornine, računanje površine in prostornine ipd.)

3. Skupinsko izdelovanje plakatov geometrijskih teles.

   Dijaki se razdelijo v skupine po 4 in izžrebajo skupino geometrijskih teles. Razdelijo si vloge/naloge in izdelajo načrt dela ter osnutek plakata. Načrt dela zapišejo na obrazec, ki ga oddajo učitelju.

   Vsak član skupine je odgovoren za svoj del naloge. Plakati se vrednotijo po naslednjih kriterijih: ustreznost prikazane vsebine, prikaz informacij/matematična korektnost, grafične reprezentacije, predstavitev vsebine plakata.

Skupinsko delo – plakat

Številka skupine: ____________________

Načrt dela

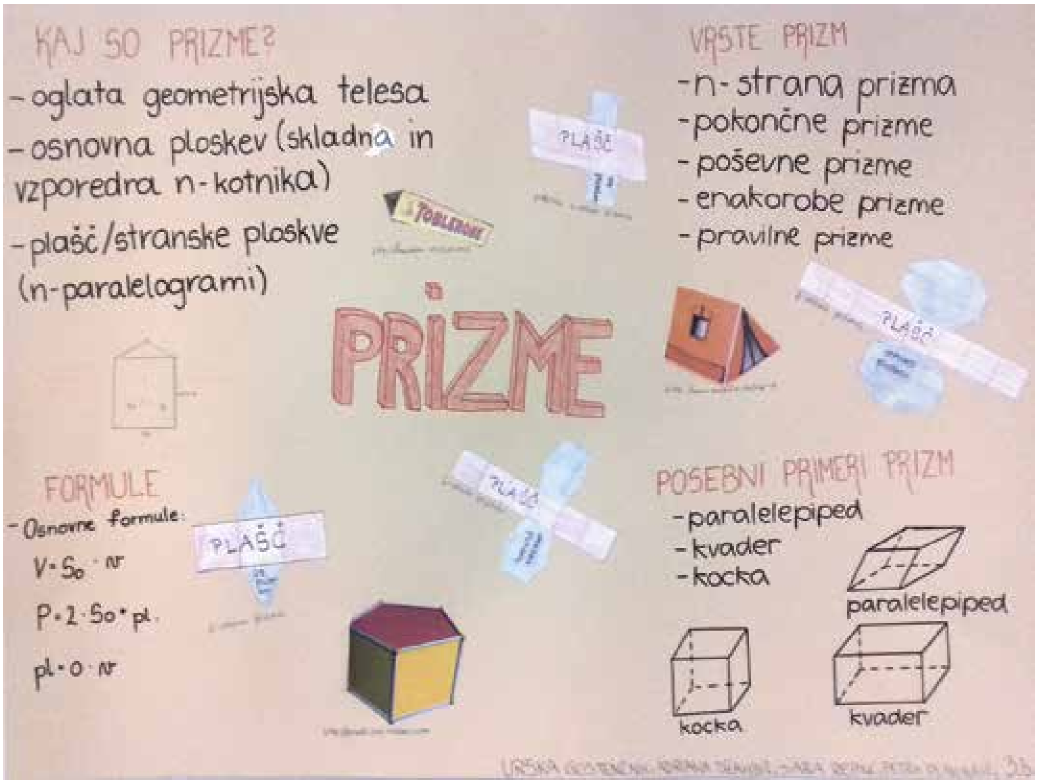
V skupini se dogovorite in zapišite, kdo bo kaj prispeval k izdelavi plakata (material, pripomočki, pisala, mreže teles, fotografije …) in kdo bo plakat predstavil. Plakat je potrebno izdelati v dveh šolskih urah, za predstavitev plakata bo na voljo največ 5 minut.

Tema:	**Datum:**
Člani skupine:	**Vloga člana skupine:**

Slika 2: Načrt dela.

Kriteriji vrednotenja plakata so razvidni iz preglednice.

	3 točke	2 točki	1 točka	0 točk
Ustreznost prikaza/ izbranega grafičnega organizatorja	Naslov je viden in ustrezen. Vsebina je dobro organizirana.	Naslov je viden in ustrezen. Vsebina ni dovolj dobro organizirana.	Naslov je premalo viden/ pomanjkljiv. Vsebina je slabo organizirana. Plakat je narejen površno.	Naslov ni viden. Vsebina ne zadošča tematiki in je slabo organizirana. Plakat je narejen površno.
Prikaz podatkov/ matematična korektnost	Plakat vsebuje samo pomembne informacije, ki so sistematično urejene, in je matematično popolnoma korekten.	Plakat vsebuje pomembne in nepomembne informacije, ki so primerno urejene, in je matematično korekten.	Plakatu manjkajo pomembne informacije, obstoječe niso matematično korektne.	Plakat vsebuje veliko nepomembnih informacij, ki niso sistematično urejene. Vsebina ni matematično korektna.
Grafične/slikovne reprezentacije	Veliko je smiselnega slikovnega in grafičnega gradiva, ki je opremljeno s podnapisi/viri. Vključene so mreže teles. Skice so nazorne. Plakat je narejen kreativno.	Plakat je manj originalen, slikovno ali grafično gradivo nima podnapisov/ virov. Vključene so mreže teles. Slike in skice so premalo nazorne.	Plakat je površen in nezanimiv. Slikovno in grafično gradivo ni nazorno. Manjkajo podnapisi/viri. Manjkajo mreže teles.	Plakat je neestetsko in površno izdelan. Manjkajo skice, slike, mreže teles.
Predstavitev vsebine plakata	Dijak glasno in jasno predstavi vsebino plakata, brez pomoči zapiskov. Povedano/ predstavljeno pokaže na plakatu.	Dijak pomanjkljivo predstavi vsebino plakata, a brez zapiskov. Povedano/ predstavljeno pokaže na plakatu.	Dijak pomanjkljivo predstavi vsebino plakata, pri tem se opira na zapiske. Povedano/ predstavljeno pokaže, a je premalo natančen.	Dijak ničesar ne predstavi/predstavi matematično nepravilno.



Slika 3: Primer plakata

Pri vrednotenju lahko vključimo tudi dijake, saj so seznanjeni s kriteriji ocenjevanja.

Dijaki po predstavitvi plakata zapišejo refleksijo. Pri tem jih usmerimo z vprašanji:

- Kolikšen je bil tvoj prispevek k izdelku v fazi ustvarjanja? Ali si z izdelkom zadovoljen? Če nisi, zakaj ne? Ali bi pri izdelku kaj spremenil? Če bi, zapiši kaj in kako.
- Ali si pri ustvarjanju potreboval pomoč? Če da, kakšno in kdo ti jo je nudil?
- Ali so vsi člani skupine dobro opravili svoj del naloge? Če niso, kaj meniš, zakaj ne?

4. Kreiranje nalog na temo »Geometrijska telesa v vsakdanjem življenju in stroki«.

Dijaki se znotraj skupin razdelijo v dvojice. Vsak par kreira nalogo iz stroke oz. vsakdanjega življenja, ki se nanaša na skupino teles, ki so jo izžrebali pri izdelavi plakatov. Eno šolsko uro namenimo iskanju virov in idej (učbeniki, zbirke nalog, spletni viri) ter zasnovi naloge. Dijaki v aplikaciji Google Drive odprejo dokument, v katerega zapišejo osnutek naloge. Vsaka naloga je zasnovana iz dveh vprašanj, vsak dijak reši eno od zastavljenih vprašanj. Učitelj pregleda osnutke in poda dijakom povratno informacijo v obliki komentarjev, na podlagi katerih dijaki nalogo izboljšajo in jo rešijo.

Kreiranje nalog se vrednoti po naslednjih kriterijih: kreativnost, matematična smiselnost, povezava s strokovnim področjem oz. realnim življenjem, matematična korektnost reševanja naloge.

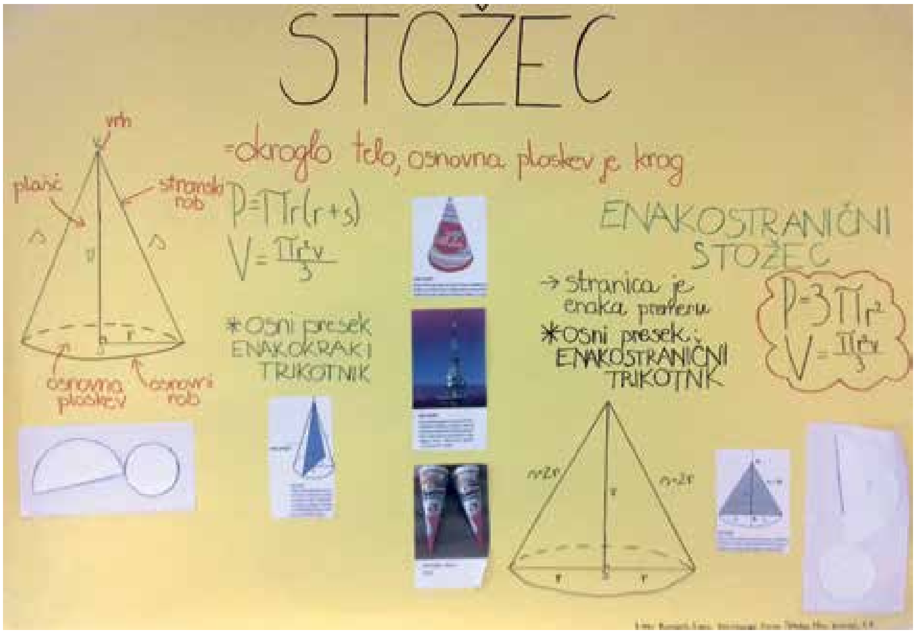
Kriteriji vrednotenja kreiranih nalog so razvidni iz preglednice.

Kriteriji vrednotenja - opisniki	**Število točk**
Naloga je inovativna, besedilo naloge je matematično smiselno, jasno je nakazana povezava z realnim življenjem/stroko.	**3 točke**
Naloga ni inovativna, besedilo naloge je matematično smiselno, jasno je nakazana povezava z realnim življenjem/stroko.	**2 točki**
Naloga ni inovativna, besedilo naloge je matematično smiselno, ni nakazane smiselne povezave z realnim življenjem/stroko.	**1 točka**
Naloga ni inovativna, besedilo naloge ni matematično smiselno, ni nakazane smiselne povezave z realnim življenjem/stroko.	**0 točk**

Dijaki po koncu opravljenega dela zapišejo refleksijo.

Nekaj primerov kreiranih nalog:

1. V mestnem parku je skulptura krogle, ki simbolizira življenje (avtor Slavko Tihec). Površina te krogle meri 19,63 m^2. Nekega dne je pihal orkanski veter in se je ta skulptura zakotalila čez celo promenado. Kolikokrat se je skulptura zakotalila okoli svoje osi, če je promenada dolga 100 metrov?



Slika 4: Primer plakata

2. Srednja šola za gostinstvo in turizem gre na ekskurzijo s turističnim avtobusom Izletnik. Na ekskurzijo gre 45 potnikov.
   Zanima nas:
   a) Volumen prtljažnega prostora, če so njegove mere 2,15 m, 1 m in 2 m.
   b) Dijaki so zraven vzeli 3 tipe dimenzij kovčkov:
      - 3 dijaki – 80 cm × 50 cm × 30 cm
      - 19 dijakov – 55 cm × 40 cm × 20 cm
      - 23 dijakov – 56 cm × 45 cm × 25 cm

      Ali je v prtljažnem prostoru dovolj prostora za vse kovčke?

3. Imamo 4 nadstropno poročno torto, ki je sestavljena iz štirih kvadrov, katerih prostornina je v razmerju 4 : 3 : 2 : 1 (največji kvader je 4-krat večji od najmanjšega ...). Najmanjša torta ima dolžino 25 cm, širino 20 cm in višino 10 cm.
   a) Koliko kvadratnih metrov fondanta bomo potrebovali, da obložimo torto?
   b) Kakšne dimenzije naj ima škatla za skladiščenje torte? (2 cm mora biti prostora na vseh straneh torte).

Zaključek

Ob takih dejavnostih dijaki razvijajo zmožnost za zbiranje, organiziranje in analiziranje podatkov, zmožnost za načrtovanje in organiziranje delovnih postopkov, zmožnost za sodelovanje in delo v timu, zmožnost za interpretiranje in kritično presojo pri uporabljanju matematike na strokovnih in drugih področjih, kreativnost, zmožnost samovrednotenja, sprejemanje in doživljanje matematike kot kulturne vrednote, zaupanje v lastne matematične sposobnosti in razvijanje pozitivne samopodobe. Vloga učitelja se iz podajalca učne snovi spreminja v mentorja in koordinatorja. Posledica tega je, da je vzdušje v razredu miselno bolj vzpodbudno, učenje je sodelovalno. Učenci se učijo samostojno in drug od drugega. Ker učenci dobivajo sprotne povratne informacije o svojem napredku in napotke za izboljšave, se počutijo bolj varne in sproščene. Preko refleksij se navajajo na kritično vrednotenje dosežkov.

Viri

Srednje strokovno izobraževanje (SSI), Katalog znanja, Matematika. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2011/programi/SSI/KZ-IK/KZ_MAT_SSI_383_408.pdf (17. 11. 2019)

Suban, M. idr. (2018). *Formativno spremljanje pri matematiki*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

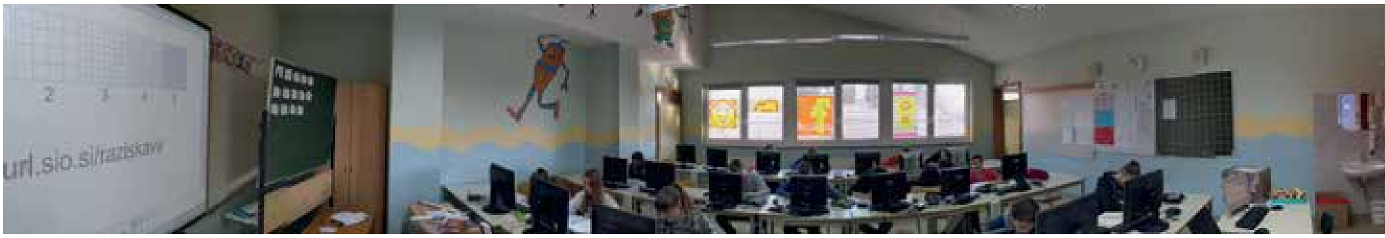
Žakelj, A. (2012). Od preverjanja do ocenjevanja znanja. V *Razvijanje in vrednotenje znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Razvijanje%20in%20vrednotenje%20znanja/files/mobile/index.html#32 (17. 11. 2019)

http://creative.eun.org/ (17. 11. 2019)

https://www.zrss.si/ustvarjalni-razred/ (17. 11. 2019)

Zaporedja in potence

Tomaž Miholič
Osnovna šola Duplek

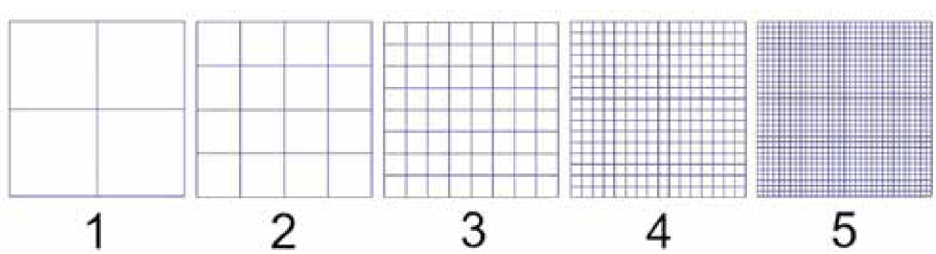


Učenci ob zaporedju in »pritisku« velikih števil začutijo uporabnost zapisa števila s potenco, nato pa še zapis n-tega člena.

Predstavljen je učni scenarij za izvedbo dejavnosti pri pouku matematike. Izvedba traja eno šolsko uro in je primerna za učence v 8. razredu.

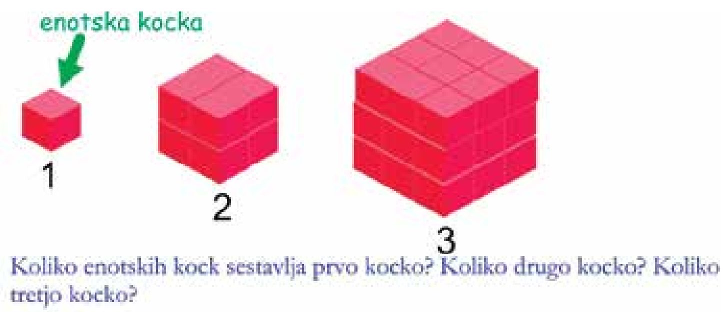
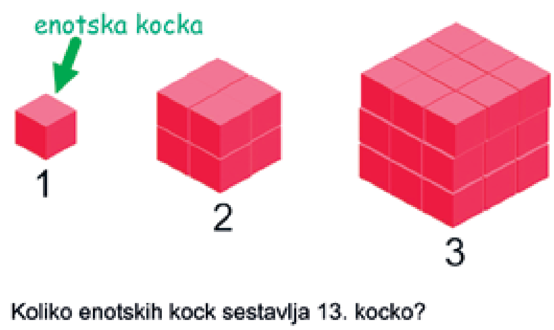
Ključna vodilna vprašanja:

- *Kdaj šteti, kdaj računati in kdaj zapisati n-ti člen zaporedja?*
- *Kako uporabiti potence za zapis velikih števil?*
- *Kako ustrezno zapisati spremembe posameznih korakov pri vzorcih/zaporedjih?*



Učni scenarij (učna priprava)

Splošne informacije	**Šola:** Osnovna šola Duplek **Učitelj:** Tomaž Miholič **Predmet/razred:** matematika, potence – 8. razred **Učna tema:** Potence **Učni cilji:** **Tema:** Uporaba potenc pri algebrskih zapisih a) **Vsebinski cilji** **Učenci:** • spoznajo način zapisa n-tega člena – posplošitev, • prepoznajo pravilo geometrijskega vzorca. b) **Procesni cilji** Učenci znajo: • Pisno in ustno argumentirajo svoje ugotovitve. • Uporabljajo/izdelajo preglednico za raziskovanje lastnosti. • Se sami odločajo med štetjem in računanjem glede na kompleksnost primera. c) **Predznanje** • Poznajo potence (osnova, stopnja, vrednost). • Znajo določiti vrednost potence. Pripomočki: • enotske kocke • računalniki/pametni telefoni

<table>
<tr>
<th>CILJI
Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z ležečo pisano označite transverzalne veščine</th>
<th>DEJAVNOSTI UČENCEV
Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela</th>
<th>PRIČAKOVANI REZULTATI</th>
</tr>
<tr>
<td>(5 minut)
Mobilizacija s pomočjo že usvojenih ciljev: prostornina kocke.</td>
<td>Ob konkretnem modelu se spomnijo, kako določiti prostornino kocki (delo v parih).

</td>
<td>Učenci s sestavljanjem kock s slike nimajo težav, zaplet pričakujem že ob kocki z robom 4e ali 5e – zaradi pomanjkanja časa in gradnikov.</td>
</tr>
<tr>
<td>(5 minut)
Uporaba potence pri izračunu prostornine kocke.</td>
<td>
</td>
<td>Učenci predvidevajo, da rob 13. kocke meri 13e in izračunajo število potrebnih enotskih kock za izgradnjo modela.</td>
</tr>
<tr>
<td>(10 minut)
Spoznajo način zapisa n-tega člena – posplošitev.

Uporabljajo/izdelajo preglednico za raziskovanje lastnosti.</td>
<td>Izdelajo preglednico in jo izpolnijo.
<table>
<tr><th>Število</th><th>Dolžina roba kocke</th><th>Število enotskih kock v kocki</th><th>Zapis s potenco</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1^3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>2^3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>27</td><td>3^3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>64</td><td>4^3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>125</td><td>5^3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>216</td><td>6^3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>13</td><td>2197</td><td>13^3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td>n</td><td>?</td><td>n^3</td></tr>
</table></td>
<td>Učenci samostojno izpolnijo preglednico (skupaj izberemo ustrezne stolpce).</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>CILJI
Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z ležečo pisano označite transverzalne veščine</th><th>DEJAVNOSTI UČENCEV
Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela</th><th>PRIČAKOVANI REZULTATI</th></tr>
<tr><td>(3 minute)
Poimenovanje zaporedja števil, razlika med zapisom s potenco in brez nje.

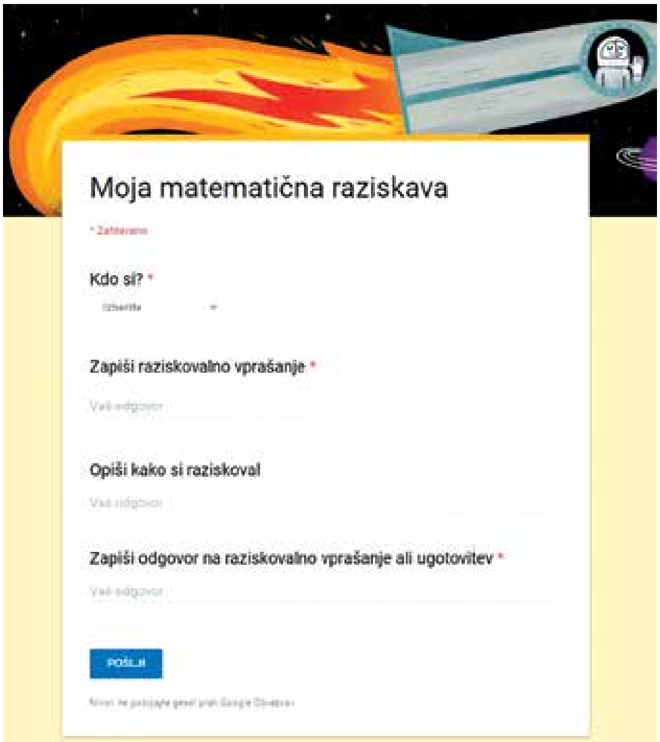
Poimenovanje n-tega člena.</td><td>Učenci izračunajo potrebno število enotskih kock za nekaj primerov (večja števila) s pomočjo računala.</td><td>Ugotovijo, da je poznavanje n-tega člena popolnoma dovolj za določitev števila enotskih kock v katerikoli kocki.</td></tr>
<tr><td>(15 minut)
Zapis n-tega člena v podobnem primeru.

Učenci si sami ob sliki postavijo raziskovalno vprašanje.

Samostojno oblikujejo preglednico in jo uporabijo za iskanje odgovora na raziskovalno vprašanje.</td><td>
</td><td>Oblikujejo preglednico s stolpci:
številka lika,
število manjših kvadratov,
zapis s potenco.
Izpolnijo prvih 5 vrstic (za like iz slike) v celoti.

Zapišejo kratko poročilo raziskave na naslov url.sio.si/raziskava.</td></tr>
<tr><td>(5 minut)
Določimo oris kriterija za raziskovanje:
Kako sem raziskoval?</td><td>Vrednotijo ugotovitve sošolcev – frontalno. Poudarek na opisu »Kako sem raziskoval?« (tretji stolpec)
Zapisi vseh učencev so v urejeni obliki zbrani na tabli.
<table>
<tr><th>Učenec/-ka</th><th>Raziskovalno vprašanje</th><th>Kako sem raziskoval/-a</th><th>Ugotovitev</th></tr>
<tr><td>A</td><td>Kako izračunaš število kvadratov?</td><td>Z razpredelnico v zvezku. Napisala sem si zaporedna števila, število kvadratov in število kvadratov s potenco.</td><td>Je enako kot pri trikotnikih samo, da npr. če je pri drugem trikotniku število trikotnikov 4 je pri kvadratu to pri prvem.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Koliko kvadratov bo imela 8. slika?</td><td>Raziskoval sem tako, da sem vse od kvadratov v spodnji vrsti podvojil in nato dobljeno število še enkrat pomnožil z 2.</td><td>8. slika bo imela 530 kvadratov.</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Koliko kvadratov je na 5. sliki?</td><td>Raziskoval sem tako, da sem računal koliko je 4^3 in nato sem preštel štirikotnik in ugotovil da je na 5. sliki 4^5 in na 1000 je 4^{1000}. Formula kvadratov je 4n.</td><td>Na 5. sliki je 4^5 in na 1000 je 4^{1000} in formula je: kvadratov je 4^n</td></tr>
</table></td><td>Razumevanje drugačnega pristopa

Ugotovitev pomembnosti urejenega zapisa pri raziskovanju (npr.: preglednica)</td></tr>
</table>



Slika 1: Vprašalnik v googlovih obrazcih (url.sio.si/raziskava).

Primeri zelo dobrega zapisa

Učenec/-ka	Raziskovalno vprašanje	Kako sem raziskoval/-a	Ugotovitev
Č	Koliko kvadratov je na poljubni sliki?	Najprej sem pogledal sliko in videl, da so na prvi sliki 4 mali kvadrati. Na drugi jih je 16 itd. Napisal sem jih kot potence. Nato sem si naredil tabelo in napisal v prvi stolpec število zaporednega trikotnika v drugem pa število, koliko malih kvadratkov je v kvadratu. Napisal sem s potenco.	Ugotovil sem, da če imamo poljubno zaporedno število kvadratov, toliko je eksponent v potenci. Primer n^n. Če imamo zaporedno število kvadratov 7, je 4^7.
D		Z Miho sva si naredila raziskovalno tabelo in sva v enem stolpcu napisala zaporedno število štirikotnikov, v drugem stolpcu sva napisala število štirikotnikov, v tretjem stolpcu pa sva napisala število s potenco.	Pri potencah se je eksponent zviševala za ena.

Primeri dobrega zapisa

Učenec/-ka	Raziskovalno vprašanje	Kako sem raziskoval/-a	Ugotovitev
E	Kako se povečuje število kvadratov, če se en poveča vedno za štiri?	V zvezek sem si narisala tabelo in si vanjo napisala zaporedna števila lika, število kvadratov v liku in število kvadratov zapisano s potenco.	Vedno se povečuje za štiri, npr. ko imaš en lik iz tega nastanejo štiri, ko imaš štiri nastane šestnajst likov. S potenco pa sem zapisala, da, če je bilo število kvadratov 256, bi bila potenca 64^2.
F	Koliko kvadratov je na 1000 sliki.	Raziskoval sem tako, da sem računal koliko je 4^3 in nato sem preštel štirikotnike. Ugotovil sem, da je na 5. slikici 4^5 in na 1000 je 4^{1000}. Formula je: kvadratov je 4^n in n slikic.	Na 5. slikici je 4^5 in na 1000 je 4^{1000}. Formula je: kvadratov je 4^n, slikic pa n slikic.

Primeri slabega zapisa

Učenec/-ka	Raziskovalno vprašanje	Kako sem raziskoval/-a	Ugotovitev
G	Koliko kvadratov bo imela 8. slika?	Raziskoval sem tako, da sem vse od kvadratov s spodnji vrsti podvojil in nato dobljeno število še enkrat pomnožil z 2.	8. slika bo imela 530 kvadratov.
H	Kako si prišla do izračuna?	Računala sem, si pomagala s tabelo.	Množila sem številke, in ko sem dobila sem za naslednji izračun, sem spet množila s prvo številko, in potem dala v potence

Eksponentna funkcija

Ana Kretič Mamič
Gimnazija Nova Gorica

Poznamo zgodbe, v katerih se pojavljajo števila. Prebrali bomo tri take zgodbe in poiskali v njih matematiko. Raziskali bomo njihove matematične rešitve in jih matematično osmislili. Predstavljen je učni scenarij za izvedbo dejavnosti pri pouku matematike v 2. letniku srednje šole. Izvedba traja tri šolske ure in je primerna za dijake stare 16 let.

Dijaki v predstavitveni dejavnosti poskušajo odgovoriti na naslednja vprašanja:

- *Kako je definirana eksponentna funkcija?*
- *Kakšen je njen graf?*
- *Katere lastnosti eksponentne funkcije poznamo?*
- *Kako so lastnosti eksponentne funkcije in graf odvisni od osnove?*
- *Znam uporabiti znanje zrcaljenj in premikov funkcij pri eksponentni funkciji?*

Vir: http://www.tojeto.info/wp-content/uploads/sah-tabla-no4.jpg

Učni scenarij (učna priprava)

Splošne informacije	**Šola:** Gimnazija Nova Gorica **Učiteljica:** Ana Kretič Mamič **Predmet/razred:** matematika/2. g (strokovna gimnazija) **Učna tema:** Eksponentna funkcija **Učni cilji:** **a) Vsebinski cilji** Dijaki: a) poznajo pomen osnove eksponentne funkcije, b) narišejo graf (tudi z danima premikoma in raztegoma v smeri abscisne in ordinatne osi) eksponentne funkcije, č) zapišejo enačbo eksponentne funkcije z dano točko, d) poznajo in uporabljajo lastnosti funkcije. **b) Procesni cilji** a) Raziskuje, rešuje probleme in jih reši z uporabo različnih strategij. b) Uporablja IKT,: uporablja računalniški program za risanje funkcij: Geogebra. c) Komunicira v matematičnem jeziku. č) Interpretira rešitve. d) Razvija zmožnosti za delo v timih.

CILJI Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z ležečo pisano označite transverzalne veščine	**DEJAVNOSTI UČENCEV** Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela	**PRIČAKOVANI REZULTATI**
V tem koraku učenec: • Ozavešča, kaj zna in česa ne zna o pojmu eksponent in o pojmu funkcija.	**A) PREDZNANJE** Dijaki si v zvezek zapišejo, kar že vedo o matematičnem pojmu **eksponent** in o pojmu **funkcija**.	Zapis, kaj že vedo o pojmu eksponent in pojmu funkcija.
V tem koraku učenec: • oblikuje lastne cilje učenja, • se seznani z dejavnostmi, ki jih je za dosego ciljev načrtoval učitelj, • načrtuje dodatne dejavnosti, ki bodo prispevali k uresničitvi cilja.	**B) CILJI IN KRITERIJI USPEHA** Dijaki individualno oblikujejo cilje v povezavi z naslovom, cilje zapišem na tablo in jih skupaj dopolnimo. Zapisani cilji bodo dijakom v pomoč pri samostojnem raziskovanju eksponentne funkcije.	Zapisani lastni cilji in cilji v povezavi z vsebino.
V tem koraku učenci: • Samostojno raziščejo in narišejo grafe eksponentne funkcij, ki rešijo zgodbe. • Raziščejo grafe eksponentnih funkcij s spremenjeno osnovo. • Postavijo hipoteze in jih preverijo (v povezavi z grafi). • Z računalniškim programom preverjajo svoje ugotovitve oz. hipoteze.	**C) DEJAVNOSTI (več): ZBIRANJE DOKAZOV O UČENJU** Ob treh zgodbah dijaki v treh skupinah samostojno narišejo graf eksponentne funkcije. Raziskujejo grafe eksponentnih funkcij s spremenjeno osnovo. Z računalniškim programom preverjajo svoje ugotovitve in razširijo znanje.	Izpolnjen učni list in naloge v zvezku. Z računalniškim programom dinamične geometrije narisan graf funkcije.
V tem koraku učenci: • Podajo povratno informacijo sošolcu. • Glede na povratno informacijo sošolca (in/ali učitelja) izboljšajo svoj izdelek.	**D) POVRATNA INFORAMCIJA (sošolca ali učitelja)** Sprotno povratno informacijo dobijo od učitelja in sošolca v skupini in nadgrajujejo svoj izdelek.	Ustno in pisno podana povratna informacija dijaku oz. sošolcu.
V tem koraku učenci: • Napravijo samorefleksijo in/ali samoevalvacijo na opravljeno delo. • Razmislijo o nadaljnjih korakih učenja obravnavane teme in veščine, ki je bila v središču pozornosti.	**E) SAMOREFLEKSIJA/SAMOEVALVACIJA** Pogovor z dijaki o takšnem načinu dela, sami ugotavljajo, kaj znajo in kaj jim še dela težave.	Sodelovanje pri pogovoru (Delo na računalniku jim je olajšalo predstave, pa tudi veliko vaj so naredili v kratkem času. Pozorni so bili na natančnost zapisa.)

Sledijo učni listi za dijake, ki jih dobijo na papirju in niso integrirani v nobeno e-učno okolje.

Dejavnost 1: Zgodbe o številih, ki so takoooo velika

Oblikujte skupino 5 dijakov. Zgodbo na listu pozorno preberite in odgovorite na zastavljeno vprašanje. Odgovor tudi zapišite.

Navodila: V tej dejavnosti boš: raziskal, preučil, primerjal, razpravljal, razmišljal in sprejel odločitev, analiziral, ovrednotil … Sledi naslednjim korakom: a) ... b) ... c)...

Zgodbe (zgodbe so zapisane na začetku učnega lista)

Dejavnost 2: Rešitev zastavljenega vprašanja

Navodila: Na listku preberite zgodbo do konca, zapišite ugotovitve in jih primerjajte.

Dejavnost 3: Izpolnjevanje učnega lista

Navodila: Rešite učni list, pomagajte si med seboj.

Priloga: Učni listi na str. 37–40 (učni listi se vsebinsko malenkost razlikujejo zaradi treh različnih zgodb)

Razlaga za učitelja pri prvem učnem listu:

Tako pripoveduje izročilo. Ali se je to res zgodilo, ni znano, toda o tem, da je mogoče nagrado, o kateri govori izročilo, izraziti s takim številom, se lahko s potrpežljivim računanjem sami prepričamo. Začenši z eno je treba sešteti števila 1, 2, 4, 8 itd. Rezultat triinšestdesetega polja, povečan dvakrat, pokaže, koliko zrn pripada štiriinšestdesetemu polju šahovnice. Iskano število, zapisano s ciframi, je: 18 446 744 073 709 551 615. Če bi si želeli predstavljati, kako orjaško je to število, si moramo zamisliti, kako velika bi morala biti shramba. Znano je, da je v enem kubičnem metru pšenice približno 15 milijonov zrn. Torej bi nagrada, ki bi jo dobil izumitelj šahovske igre, zasedla približno 1200 000 000 000 m^3 ali 1200 km^3. Če bi bila višina shrambe 4 m in njena širina 10 m, bi morala biti njena dolžina 30 000 000 km, to je dvakratna razdalja od Zemlje do Sonca.

Število zrn na 64. polju:

2^{63}, ker je na prvem 2^0, $2^{63} = 9 \times 10^{18}$

Velikost zrna 2 mm × 2 mm x 5 mm. V = 20 mm^3 = 2×10^{-8}

Prostornina zrn na 64 polju 2×10^{-8} x $9 \times 10^{18} = 18 \times 10^{10}$ m^3

Olimpijski plavalni bazen ima volumen 2750 m^3. Napolnili bi 65 454 545 olimpijskih bazenov.

Dejavnost 4: Raziskovanje z računalniškim programom za risanje funkcij Geogebra (individualno delo)

Navodila: S pomočjo programa Geogebra ali drugim računalniškim programom nariši grafe eksponentnih funkcij, zapisanih (in učnem listu) na tabli in jih primerjaj med seboj. Zapiši nekaj točk, ki ležijo na grafih funkcij. Poskušaj s pomočjo točke zapisati predpis za eksponentno funkcijo.

Funkcije:

- $f(x) = 2^x$,
- $f(x) = 2^{x-1}$,
- $f(x) = 2^x - 1$,
- $f(x) = -2^x$

Primeri izdelkov učencev

Preverjanje predznanja

Zapis ciljev in kriterijev uspešnosti na tabli

Zapisi o pojmu eksponent:

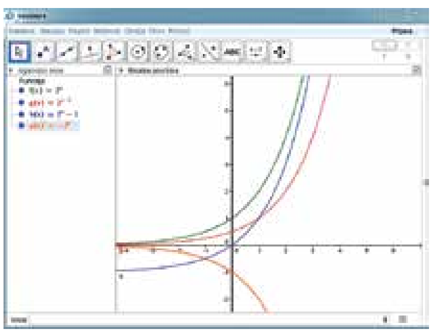
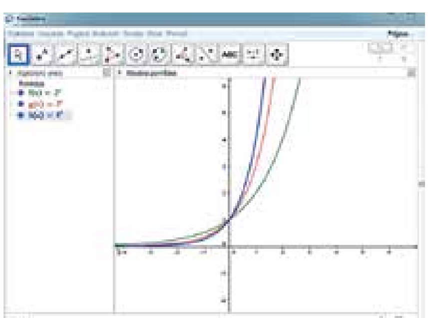
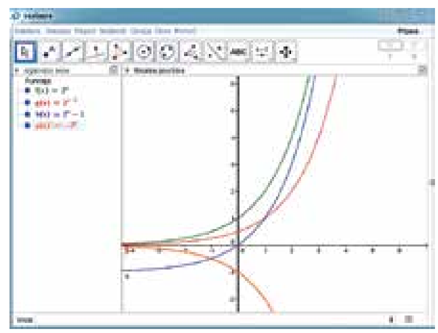
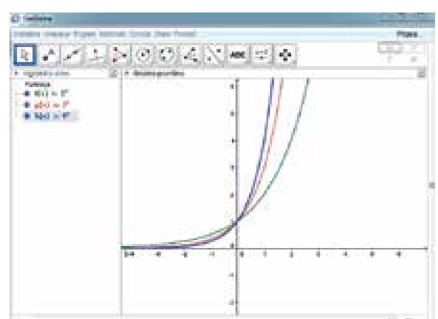
- stoji kot potenca,
- pove nam, kolikokrat moramo neko število pomnožiti samo s sabo,
- je del potence,
- eksponent nam pove, kako potenciramo osnovo

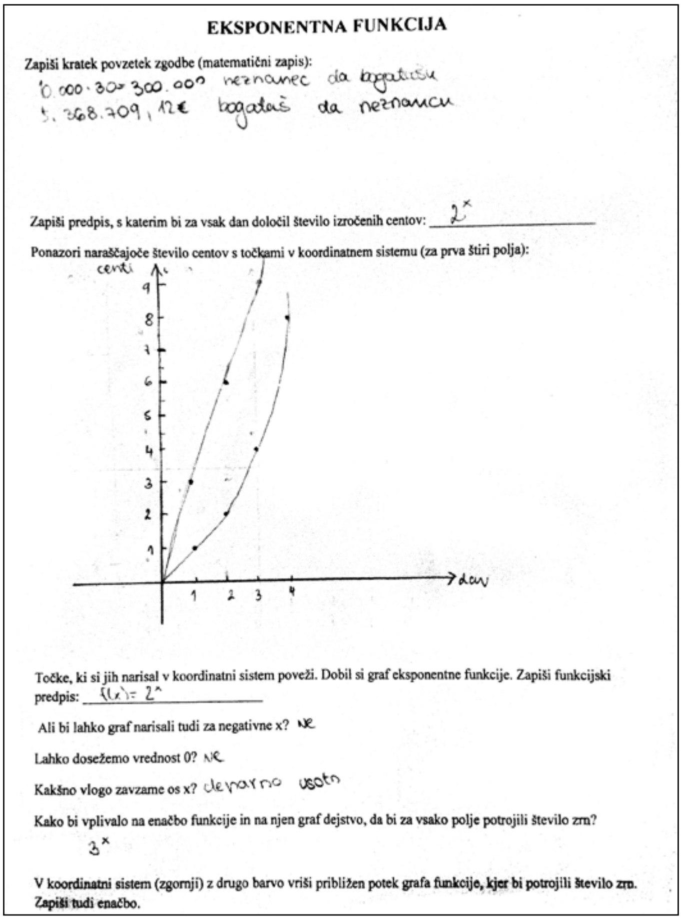
Zapisi o pojmu funkcija:

- funkcija slika x v y,
- je preslikava,
- je predpis, ki vsakemu elementu x priredi natanko en y,
- poznamo injektivno, surjektivno, bijektivno,
- ima zalogo vrednosti,
- pove definicijsko območje, to je določeno

Cilji:

- spoznali bomo nov predpis,
- ponovili bomo, kaj je funkcija,
- spoznali bomo graf,
- risali premike in raztege,
- reševali bomo enačbe
- uporabljali pravila za računanje s potencami,
- (verjetno) bodo tudi neenačbe

Dejavnost	**Odličen izdelek učenca**	**Povprečen izdelek učenca**	**Nezadovoljiv izdelek učenca**
Dejavnost 1	Na prvi dve nalogi sta skupini pravilno odgovorili.		Skupina, ki je imela tretjo nalogo, je odgovorila, da je ponudba dobra in bi jo sprejeli.
Dejavnost 2	Skupina, kjer so napačno odgovorili, je bila zelo začudena, kako je to mogoče.		
Dejavnost 3	Glej Sliko 1.	Glej Sliko 2.	Glej Sliko 3.
Dejavnost 4	  Glej Sliko 4.	 	Dijak je imel težave z zapisom enačb v Geogebro.



EKSPONENTNA FUNKCIJA

Zapiši kratek povzetek zgodbe (matematični zapis):
10.000 · 30 = 300.000 neznanec da bogatašu
5.368.709,12 € bogataš da neznancu

Zapiši predpis, s katerim bi za vsak dan določil število izročenih centov: 2^x

Ponazori naraščajoče število centov s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):

Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis: $f(x) = 2^x$

Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne x? NE

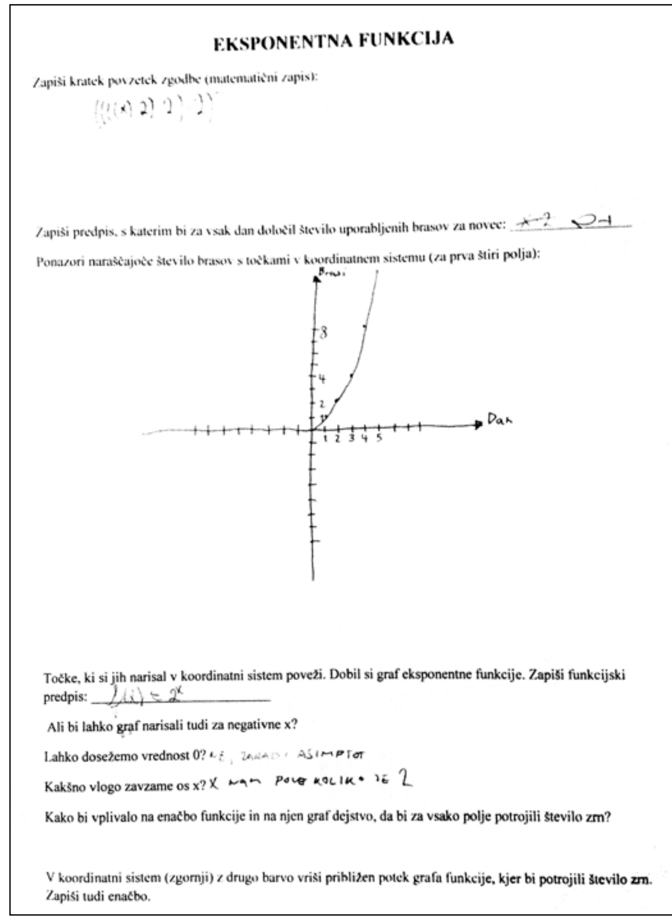
Lahko dosežemo vrednost 0? NE

Kakšno vlogo zavzame os x? je vodoravno os

Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi za vsako polje potrojili število zrn?
3^x

V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

Slika 1: Odličen izdelek učenca pri 3. dejavnosti.



EKSPONENTNA FUNKCIJA

Zapiši kratek povzetek zgodbe (matematični zapis):

Zapiši predpis, s katerim bi za vsak dan določil število uporabljenih brasov za novec:

Ponazori naraščajoče število brasov s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):

Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis: $f(x) = 2^x$

Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne x?

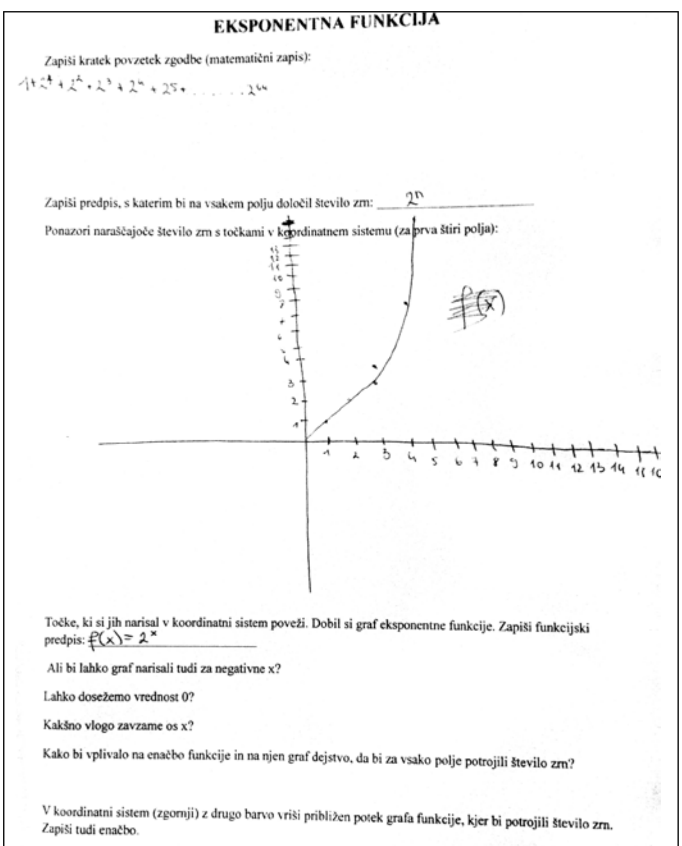
Lahko dosežemo vrednost 0? NE, ZARADI ASIMPTOT

Kakšno vlogo zavzame os x? X NAM POVE KOLIKO JE 2

Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi za vsako polje potrojili število zrn?

V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

Slika 2: Povprečen izdelek učenca pri 3. dejavnost.



EKSPONENTNA FUNKCIJA

Zapiši kratek povzetek zgodbe (matematični zapis):
$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots 2^{64}$

Zapiši predpis, s katerim bi na vsakem polju določil število zrn: 2^n

Ponazori naraščajoče število zrn s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):

Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis: $f(x) = 2^x$

Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne x?

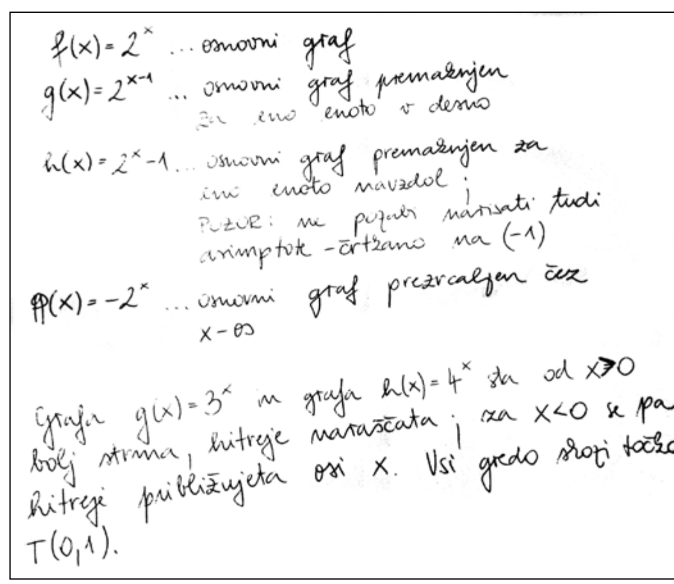
Lahko dosežemo vrednost 0?

Kakšno vlogo zavzame os x?

Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi za vsako polje potrojili število zrn?

V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

Slika 3: Nezadovoljiv izdelek učenca pri 3. dejavnosti.



$f(x) = 2^x$ … osnovni graf
$g(x) = 2^{x-1}$ … osnovni graf premaknjen za eno enoto v desno
$h(x) = 2^x - 1$ … osnovni graf premaknjen za eno enoto navzdol;
POZOR: ne pozabi narisati tudi asimptote – črtkano na (−1)
$p(x) = -2^x$ … osnovni graf prezrcaljen čez x-os

Grafa $g(x) = 3^x$ in grafa $h(x) = 4^x$ sta od $x > 0$ bolj strma, hitreje naraščata; za $x < 0$ se pa hitreje približujeta osi x. Vsi gredo skozi točko $T(0,1)$.

Slika 4: Odličen izdelek učenca pri 4. dejavnost.

ZGODBA O ŠAHU IN ŠTEVILIH, KI SO TAKOOOO VELIIIIKAAAA

Šah je ena najstarejših iger. Igrajo ga že stoletja, o njem pa obstajajo številna izročila in zgodbe. Ena izmed njih je tudi naslednja. Da bi jo razumeli, ni treba znati igrati šaha. Zadostuje, če vemo, da se šah igra na plošči v obliki kvadrata, ki ima 64 polj, majhnih kvadratkov (izmenjaje belih in črnih).

Šah so iznašli v Indiji. Ko se je indijski vladar Šeram seznanil s šahovsko igro in se jo naučil igrati, je bil navdušen nad njeno lepoto. Zvedel je, da si je igro izmislil eden od njegovih podanikov, ter ukazal, naj ga poiščejo in pripeljejo, da bi ga nagradil. Iznajditelj, ime mu je bilo Seta, je prišel pred vladarja. Bil je skromno oblečen učenjak, ki je dobival sredstva za preživljanje od učencev.

»Seta, želim te primerno nagraditi za učinkovito igro, ki si si jo izmislil,« je rekel vladar. Modrijan se je priklonil. »Dovolj bogat sem, da lahko izpolnim vsako tvojo željo,« je nadaljeval vladar. »Povej torej, kaj bi najraje dobil za nagrado in to boš tudi dobil.« Seta je molčal. »Naj ti ne bo nerodno,« ga je spodbujal vladar, »povej svojo željo! Ničesar mi ne bo žal, samo da ti jo izpolnim.«

»Velika je vaša dobrota, gospodar. Toda dajte mi čas za odgovor. Željo vam povem jutri, ko bom dobro premislil.«

Naslednjega dne je Seta spet prišel pred vladarja in ga presenetil z zelo skromno prošnjo. »Gospodar,« je rekel Seta, »ukažite, naj mi dajo za prvo polje na šahovnici eno pšenično zrno …«

»Navadno pšenično zrno?!« je bil vladar presenečen.

»Da, gospodar. Za drugo polje, ukažite, naj mi dajo dve, za tretje štiri, za četrto osem, za peto šestnajst, za šesto dvaintrideset.« »Dovolj!« ga je jezno prekinil vladar. »Dobil boš zrn za vseh 64 polj šahovnice, kakor si želel: za vsako polje dvakrat toliko kot za prejšnje. Toda vedi, da tvoja prošnja ni vredna moje darežljivosti, kajti s tem, da prosiš za tako ničevo nagrado, nespoštljivo omalovažuješ mojo dobrotljivost. Kot učitelj bi moral izkazati svojemu gospodarju več pozornosti in spoštovanja. Odidi! Moji služabniki ti bodo prinesli vrečo s pšenico.«

Seta se je nasmehnil, zapustil dvorano in v vladarjevih vrtovih čakal na nagrado.

Je nagrada dovolj dobra? Jo bo vladar izpolnil?

Med kosilom se je vladar pozanimal, ali je Seta dobil zaželeno nagrado.

»Gospodar,« so mu odgovorili, »vaš ukaz izpolnjujejo. Dvorni matematiki izračunavajo število zrn, ki pripadajo Setu.« Vladar se je nasršil, ker ni bil vajen, da tako počasi izpolnjujejo njegove ukaze. Zvečer pred spanjem se je vladar še enkrat pozanimal, ali je Seta s svojo vrečo zapustil vladarski vrt. »Gospodar,« so mu odgovorili, »vaši matematiki delajo brez odmora in upajo, da bodo do zore končali računanje.« »Zakaj zavlačujete?!« je jezno zaklical vladar. »Jutri pred zoro morate dati Setu nagrado do zadnjega zrna. Dvakrat ne ukazujem!«

Zjutraj so vladarju sporočili, da ga starešina dvornih učenjakov prosi, naj prisluhne važni novici. Vladar je ukazal, naj ga pripeljejo. »Preden mi poveš, za kaj gre,« je rekel vladar, »želim slišati, ali je Seta končno dobil ničevo nagrado, ki si jo je sam odločil.«

»Zaradi tega sem si drznil pojaviti se pred vami ob tej zgodnji uri,« je odgovoril starešina. »Skrbno smo izračunali količino zrn, ki jih želi dobiti Seta. Število je tako veliko, da …«

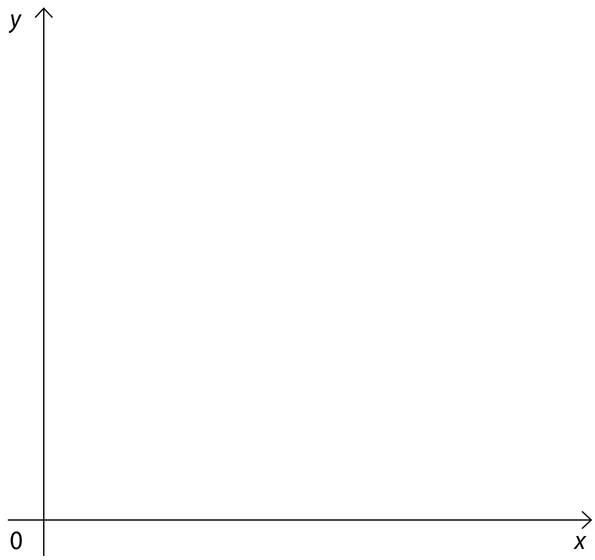
»Naj bo še tako veliko,« mu je vladar napihnjeno segel v besedo, »v mojih žitnicah ni pomanjkanja. Nagrado sem obljubil in treba jo je izročiti Setu!«

»Ni v vaših močeh, gospodar, da bi izročili obljubljeno nagrado. V vseh vaših shrambah ni toliko zrn, kolikor jih je treba dati Setu. Tudi v žitnicah vsega cesarstva jih ni dovolj. Tudi na vseh zemeljskih prostranstvih ni mogoče najti toliko zrn. Če želite izročiti obljubljeno nagrado, morate ukazati, da spremenijo v polja vsa cesarstva na zemlji; ukazati morate, naj izsušijo vsa morja in oceane; ukažite, naj stopijo ves led in sneg, ki pokriva daljne severne in južne pokrajine. Vse, kar bodo ta polja rodila, ukažite dati Setu, šele tedaj bo v celoti dobil svojo nagrado.« Vladar je presenečeno poslušal učenjakove besede. »Povej mi to pošastno število,« je končno izustil.

18 446 744 073 709 551 615, kar se prebere:

»Osemnajst kvadrilijonov štiristo šestinštirideset trilijonov sedemsto štiriinštirideset bilijonov triinsedemdeset milijard sedemsto devet milijonov petsto enainpetdeset tisoč šeststo petnajst,« se je glasil učenjakov odgovor.

1. Ponazori naraščajoče število zrn s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):



2. Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem, poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis:

   ____

   Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne *x*?
   Lahko dosežemo vrednost 0?
   Kakšno vlogo zavzame os *x*?
   Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi za vsako polje potrojili število zrn?

3. V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

ZGODBA O NOVCIH IN ŠTEVILIH, KI SO TAKOOOO VELIIIIKAAAA

To se je zgodilo pred mnogimi stoletji v starem Rimu.

Vojskovodja Terencij je po cesarjevem nalogu napravil zmagovit pohod in se s trofejami vrnil v Rim. Cesar mu je obljubil za nagrado visok položaj v senatu. Toda Terencij tega ni želel. Odvrnil je: »Mnogo zmag sem izvojeval, v boju sem se utrudil, minila je mladost, kri mi počasneje teče po žilah. Prišel je čas, da se oddahnem.«

»Kaj bi želel od mene, Terencij?«, ga je vprašal cesar. Terencij odvrne: »Reven sem, gospodar ... Ako hočeš darovati nagrado svojemu skromnemu služabniku, naj mi tvoja radodarnost pomaga, da preživim preostala leta mirno ob domačem ognjišču. Gospodar, daj mi denarja, da si zagotovim ostanek svojega življenja.« Cesar pa se ni odlikoval z veliko radodarnostjo. Rad je kopičil denar zase. Terencija je vprašal: »Kolikšna vsota Terencij pa misliš, da bi ti zadostovala?« Terencij odvrne: »Milijon denarjev.« (Denar je rimski srebrni novec) Cesar mu je obljubil, da mu bo odločitev sporočil naslednjega dne.

Naslednjega dne se je vojskovodja javil v cesarjevi palači in čakal na cesarjev odgovor. Cesar mu je rekel: »Poslušaj me! V moji blagajni leži 5 milijonov bakrenih brasov (bras je petina denarja). Šel boš v blagajno, vzel v roko 1 bras, se vrnil semkaj in ga položil pred moje noge. Drugi dan boš zopet šel v blagajno, vzel tam novec za 2 brasa in ga položil tukaj zraven prvega. Tretjega dne boš prinesel novec za 4 brase, četrtega dne novec za 8 brasov in tako dalje vsak dan še enkrat več. Dokler boš imel zadosti moči, da boš novce dvignil, jih boš lahko odnašal iz moje blagajne. Pri tem ti ne sme nihče pomagati in uporabljati smeš samo lastne moči. Vse, kar ti bo uspelo odnesti, bo tvoje.«

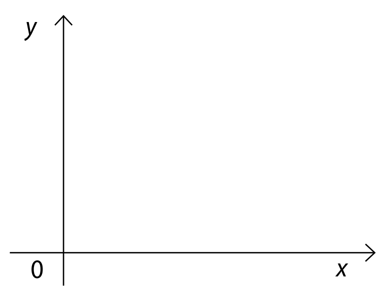
Terencij je pohlepno požiral vsako cesarjevo besedo ter zadovoljen odšel.

Ali se je Terencij dobro odločil?

Terencij je začel vsak dan obiskovati državno blagajno in na začetku ni imel s prinašanjem denarja nikakršnega truda. Prvega dne je odnesel iz blagajne 1 bras. To je majhen novec, 21 mm v premeru in 5 g težine. Nobene težave ni bilo drugič, tretjič, četrtič, petič in šestič. Sedmi novec (sestavljen iz 64 brasov) je tehtal 320 g in meril v premeru 84 mm. Devetega dne je Terencij prinesel v cesarsko dvorano novec širine 13 cm, ki je tehtal več kot 1 kg. Dvanajstega dne je novec dosegel skoraj 27 cm in tehtal več kot 10 kg. Štirinajstega dne je odnesel iz blagajne 41 kg težak in 42 cm širok novec. Nastopil je petnajst dan. Novec, ki ga je tokrat nosil Terencij, je bil sestavljen iz 16384 posameznih novcev, meril 53 cm v širino in tehtal 80 kg. Šestnajstega dne je novec tehtal 164 kg in dosegel 67 cm premera. Svojega tovora ni mogel več nositi, ampak ga je kotalil. Osemnajsti dan je bil poslednji dan Terencijevega bogatenja. Končalo se je njegovo obiskovanje državne blagajne. Novec je bil sestavljen iz 131072 posameznih novcev, meril več kot 1 m in tehtal 655 kg. Svoje kopje je uporabil kot vzvod, da ga je prikotalil v dvorano in se sesedel. Cesar se je pa zadovoljno smejal.

Blagajniki so izračunali, da je Terencij dobil 262143 brasov. Terencij ga je pa prosil za milijon denarjev to je 5000000 brasov. Dobil je torej 19-krat manj kot je prosil.

1. Ponazori naraščajoče število brasov s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):



2. Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem, poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis:

   ____

   Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne x?

   Lahko dosežemo vrednost 0?

   Kakšno vlogo zavzame os x?

   Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi za vsak dan potrojili število brasov?

3. V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

ZGODBA O UGODNI POGODBI IN ŠTEVILIH, KI SO TAKOOOO VELIIIIKAAAA

Bogataš – milijonar se je vrnil s potovanja nenavadno vesel. Na poti ga je doletelo srečno srečanje, ki mu je obetalo veliko korist. »Včasih ima človek srečo,« je pripovedoval domačim. »Ne govore brez vzroka, da denar leti k denarju. Tudi k mojemu denarju lete denarci. In kako nepričakovano! Na poti me je srečal neznanec preproste zunanjosti. Ogovoril me je in ko je zvedel, da sem premožen, mi je ponudil ugoden posel, ki me je navdušil.«

Sklenila sta pogodbo, v kateri je bilo zapisano, da bo neznanec vsak dan prinesel bogatašu 10000 evrov, bogataš mu bo pa prvi dan plačal 1 cent, drugi dan 2 centa, tretji dan 4 cente, četrti dan 8 centov in tako naprej do zadnjega dne v mesecu.

Bogataš je bil navdušen, ker bo tako zlahka prišel do velike vsote denarja.

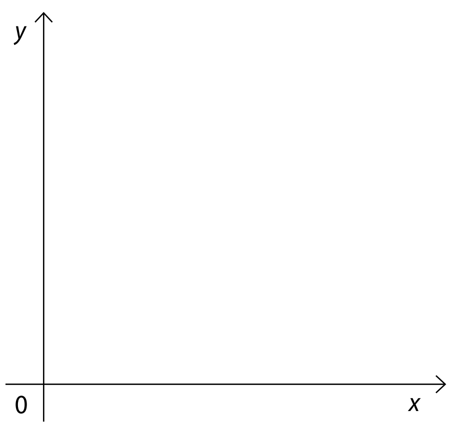
Si želiš srečati tega neznanca? Bi z njim sklenil to pogodbo?

Minil je dan. Zgodaj zjutraj je potrkal na okno oni neznanec in mu prinesel 10000 evrov. Bogataš mu je pa izplačal 1 cent. Bogataš ni mogel verjeti tolikšni sreči, vedno znova prešteval denar in celo razmišljal o tem, da ni neznanec kakšen razbojnik, ki denar pri njem skriva. Naslednji dan je neznanec zopet prinesel 10000 evrov, bogataš mu je pa izročil 2 centa. In tako vsak dan. Sedmi dan je bogataš plačal 64 centov, skupaj pa je dobil že 70000 evrov. Tako se je nadaljevalo še cel teden, ko je bogataš začel spoznavati, da čudni neznanec ni tepec in da pogodba ni koristna. Petnajsti dan je moral za 10000 evrov plačati že 163,84 evrov in to plačilo je strašno hitro naraščalo. Devetnajstega dne je bogataš plačal 2621,44 evra, vendar še zdaleč ni mislil, da je na zgubi. Toda dobiček se je vsak dan manjšal in to vedno hitreje in hitreje. Petindvajseti dan je moral plačati že 167.772,16 evrov. Zadnja dva dneva v mesecu pa sta ga do konca uničila. Tridesetega dne je moral za 10000 evrov plačati 5.368.709,12 evrov.

Milijonar je na koncu izračunal, da je neznancu izplačal 10.737.418,24 evrov, kar je skoraj 11 milijonov. Prejel pa je 300.000 evrov.

Vse se je začelo z enim centom. Neznanec bi mu lahko vsak dan prinašal celo po 100.000 evrov, pa še vedno ne bi trpel izgube.

1. Ponazori naraščajoče število centov s točkami v koordinatnem sistemu (za prva štiri polja):



2. Točke, ki si jih narisal v koordinatni sistem, poveži. Dobil si graf eksponentne funkcije. Zapiši funkcijski predpis:

   ____

   Ali bi lahko graf narisali tudi za negativne x?
   Lahko dosežemo vrednost 0?
   Kakšno vlogo zavzame os x?
   Kako bi vplivalo na enačbo funkcije in na njen graf dejstvo, da bi vsak dan potrojili število centov?

3. V koordinatni sistem (zgornji) z drugo barvo vriši približen potek grafa funkcije, kjer bi potrojili število zrn. Zapiši tudi enačbo.

Uporaba didaktične igre Dapoma v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju

Julija Viličnjak
Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Izvleček

V prispevku je predstavljena uporaba didaktične igre dapoma v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju. Učenci 8. razreda Osnovne šole Videm so pri izbirnem predmetu matematične delavnice izdelali didaktično igro, ki se zgleduje po dapomi,[1] le da je spremenjena vsebina. Tako je v prispevku natančneje predstavljena izdelava igre, njena uporaba in ugotovitve ob uporabi igre. Vse to je predstavljeno z namenom, da učitelji in drugi spoznajo, kako je lahko ta didaktična igra primerna tudi za matematične vsebine 3. vzgojno-izobraževalnega obdobja ter kako lahko igro dapoma in njene različice učinkovito vpeljemo v pouk.

Ključne besede: matematika, didaktična igra, kvadratni koreni, kvadrati števil, racionalna števila, strateško mišljenje, dama

Using Draughts as a Didactic Game in the Last Triad of Primary School Education

Abstract

The article introduces the use of draughts as a didactic game in the last triad of primary school education. Eighth grade students of the Videm Primary School created a didactic game during their selective mathematics workshop class, inspired by draughts but with a different content. The article describes the creation of the game in more detail, as well as its use and the findings from its use. This is presented with the intention of demonstrating to teachers and others how this didactic game can be applied to the mathematical content of the last triad, and how draughts, including different versions of this game, can be efficiently implemented in class.

Keywords: mathematics, didactic game, square root, square roots of numbers, rational numbers, strategic thinking, draughts

Dandanes so v izobraževanju in vzgajanju mladih zelo izpostavljene kompetence 21. stoletja, med katere sodi tudi razvoj kritičnega mišljenja. Ena izmed metod razvijanja kritičnega mišljenja je lahko tudi strateška igra, kakršna je tudi igra dapoma (Viličnjak, 2018). Igra je bila predstavljena v članku z naslovom *Dapoma – didaktična igra za utrjevanje poštevanke*, v reviji Matematika v šoli, letnik 25, 2. št., leta 2019. Didaktična igra dapoma je primerna za učence 3. razreda, saj z njo utrjujejo poštevanko, katere obravnava sodi v 3. razred. Dapoma poleg utrjevanja poštevanke uri tudi strateško mišljenje, prav to pa spodbuja učni načrt matematike vseh razredov osnovne šole. Tako nas je zanimalo, ali lahko igro dapoma vsebinsko spremenimo tako, da bo primerna za učence 3. vzgojno-izobraževalnega obdobja.

Na Osnovni šoli Videm smo stopili v stik z učiteljico matematike Marijo Šmigoc, ki poučuje na predmetni stopnji, ter jo povabili k sodelovanju v tej mini raziskavi – ali lahko spremenjeno igro dapoma uporabimo tudi na predmetni stopnji osnovne šole. Učiteljici matematike smo predstavili didaktično igro, po razmisleku pa nam je ta učiteljica povedala, da vidi uporabnost didaktične igre dapoma tudi v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju. Naša mini raziskava se je nadaljevala v sodelovanju z njo ter njenimi učenci 8. razreda, ki obiskujejo izbirni predmet matematične delavnice. To so učenci, ki jim je matematika všeč ter imajo pri tem predmetu tudi dobre dosežke.

Na prvem skupnem srečanju pri predmetu matematične delavnice smo učencem predstavili igro dama ter didaktično igro dapoma, žal pa nismo imeli časa, da bi učenci igro tudi preizkusili. Po predstavitvi smo se o igrah pogovorili, njihova učiteljica matematike pa je učence vprašala, ali bi lahko igro prilagodili tudi za katero matematično vsebino. Tako so učenci razmislili, katera njihova matematična učna vsebina bi bila primerna za takšno didaktično igro. Učiteljica matematike jih je pri razmisleku opozorila, da mora biti matematična vsebina preprosta, in sicer takšna, da lahko matematični problem rešujemo na pamet, brez pisanja

1 Dapoma je didaktična igra za utrjevanje poštevanke, ki je prirejena po igri dama. Opisana je v 2. številki revije *Matematika v šoli*, letnik 25, ki je izšla v letu 2019.

dolgih postopkov. Tako so učenci sami iskali primerne učne vsebine ter na koncu ob učiteljičini pomoči izbrali 3 matematične učne vsebine 8. razreda: kvadratne korene, kvadrate števil ter računanje z racionalnimi števili. Prav zaradi teh vsebin so kasneje svojo novonastalo didaktično vsebino poimenovali dakvama (med besedo dama je vrinjen zlog kva, ki je prvi zlog besednih zvez kvadratni koreni ter kvadrati števil). Pri matematični vsebini, ki jo pri igranju didaktične igre dakvama utrjujemo, je treba poudariti, da je igra nastala ob koncu šolskega leta, zato združuje več vsebin. Če bi podobna igra nastajala med šolskim letom, bi seveda z njo utrjevali samo tisto učno vsebino, ki bi jo učenci takrat obravnavali. Na koncu šolskega leta pa učenci ponavljajo celotno učno snov, zato gre tudi pri tej didaktični igri za utrjevanje več matematičnih vsebin hkrati.

Ko so učenci izbrali učne vsebine za novo didaktično igro, so pričeli sestavljati številske izraze za igralne ploščke. Pri tem jih je učiteljica matematike znova opozorila, da morajo biti številski izrazi takšni, ki se jih da rešiti na pamet, brez dolgotrajnih postopkov. Učenci so na list zapisali številske izraze in pripadajoče rezultate, ustreznost vsega pa je na koncu preverila učiteljica matematike (vse številske izraze in pripadajoče rezultate prilagamo na koncu prispevka). Pri sestavljanju številskih izrazov smo lahko opazili, da so nekateri učenci najprej napisali željen številski izraz in nato pripadajoči rezultat, nekateri učenci pa so pri sestavljanju izrazov izhajali iz željenega rezultata, ki so mu potem poiskali pripadajoč izraz. Pri tej nalogi so se učenci tako urili tudi v sestavljanju matematičnih problemov. Na koncu prvega srečanja so se dogovorili še, da bodo doma poiskali nekoliko večje zamaške ter jih prinesli s seboj na naslednje srečanje.

Na drugem srečanju so učenci sami izdelali didaktično igro dakvama, in sicer so pripravili igralne ploščke in igralno desko. Igralno desko so naredili s pomočjo šeleshamerja (postopek je opisan v Viličnjak, 2018), igralne ploščke, pa s pomočjo zamaškov, ki so jih prinesli od doma. Glede zamaškov so na tem srečanju ugotovili, da imajo dovolj belih in rdečih zamaškov, ki so približno enake velikosti, zato so za izdelavo ploščkov uporabili

Slika 1: Didaktična igra dakvama (začetna postavitev).

kar te in tako zamaškov ni bilo treba barvati. Na zunanji del zamaška so z alkoholnim flomastrom zapisali številske izraze, na notranji del zamaška pa ustrezen rezultat. Vse številske izraze in rezultate so imeli od prejšnjega srečanja že zapisane na listu, zato so potem vse to samo prepisali na posamezne zamaške. Tako je na drugem srečanju nastala nova didaktična igra dakvama, katere pravila so popolnoma enaka kot pri igri dapoma, ta pa so zapisana v prejšnjem prispevku, zato jih tukaj ne bomo še enkrat ponavljali.

Na tretjem srečanju so mi učenci najprej predstavili njihovo novo didaktično igro dakvama, nato pa so se sami preizkusili tudi v igranju. Na tem srečanju je bilo 6 učencev, kar je pomenilo, da smo igranje igre lahko spremljali trikrat. Dva učenca sta igro igrala, drugi učenci ter midve z učiteljico matematike pa smo igro opazovali. Na koncu vseh odigranih iger pa so učenci izrazili še svoje mnenje ter opažanja.

Po tem srečanju sva se z učiteljico matematike tudi pogovorili o sami igri, o igranju te igre, učinkovitosti igre ter možnostih uporabe igre pri drugih učnih vsebinah. Vse sedaj našteto pa bomo povzeli v poglavju ugotovitve.

Ugotovitve

Didaktična igra dapoma, s spremenjeno matematično vsebino, je lahko uporabna tudi v 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju. To smo pokazali s tem, da smo igro spremenili za matematično vsebino 8. razreda. Učiteljica matematike je povedala, da vidi uporabnost igre tudi za matematične vsebine vseh ostalih razredov predmetne stopnje, in sicer: 6. razred – različni zapisi ulomkov (celo število in ulomek ter pretvorba v ulomek večji od 1 in obratno), desetiški ulomki in zapis z decimalnim številom; 7. razred – pravila o deljivosti števil, večkratniki in delitelji števil (na pamet določanje največjega skupnega delitelja in najmanjšega skupnega večkratnika), obrazci za obseg in ploščino trikotnikov in štirikotnikov; 8. razred – računanje z racionalnimi števili (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje v množici Q), kvadrati in kvadratni koreni racionalnih števil; 9. razred – opis geometrijskih teles in obrazci za izračun površine, prostornine, osnovne plošče in plašča, določanje k in n pri linearni funkciji, ali zapis funkcije z danim k in n (smerni koeficient in začetna vrednost. Učiteljica matematike vidi uporabnost te didaktične igre predvsem v tem, da učenci utrjujejo določeno matematično vsebino, da se urijo v koncentraciji, da se urijo v iskanju najboljših strategij, ki vodijo k zmagi ter s tem razvijajo strateško mišljenje. Prav tako pa meni, da učenci preko te igre matematične vsebine povezujejo z vsakdanjim življenjem ter s tem uvidijo uporabnost matematike tudi na drugih področjih, ne pa samo pri pouku matematike. Pri tem je učiteljica izpostavila problem ozkoglednosti učencev, da le ti vidijo uporabnost matematike pri pouku matematike, medtem ko pa pri drugih predmetih velikokrat ne znajo uporabljati znanja ter postopkov, ki so se jih naučili pri pouku matematike. Prav preko takšne didaktične igre pri učencih lahko vzbudimo povezanost, saj morajo med igranjem povezovati pravila igre in matematične vsebine. Učiteljica matematike vidi veliko prednost tudi v tem, da so učenci sami izdelali igro, saj jo tako znajo bolj ceniti, prav tako pa nekoliko bolje razumejo tudi pravila, kot če jim je igra dana ter samo predstavljena. Poleg tega pa so med izdelovanjem igre morali tudi kritično razmišljati o primerni matematični vsebini ter o primernih matematičnih problemih. Seveda je poudarila, da je pri takšnem načinu izdelovanja didaktične igre zelo pomemben učitelj, ki učencem nudi pomoč, jih usmerja ter skrbi za pravilno strokovnost. Kot dodatno možnost raziskovanja igre pa učiteljica matematike vidi tudi v tem, da bi lahko sedaj učenci, ki so dakvamo izdelali, to igro predstavili ostalim vrstnikom. Vrstniki namreč morajo poznati matematično vsebino, saj so jo obravnavali pri pouku matematike, zato je ta igra primerna tudi za njih. Tako bi lahko opazovali še igro vrstnikov ter jo primerjali z igro učencev, ki so dakvamo izdelali. Pri tem bi morda lahko opazili kakšne razlike oziroma prednosti učencev, ki so igro izdelali.

Med opazovanjem učencev pri igranju igre dakvama se je potrdilo tudi predvidevanje iz prispevka *Dapoma – didaktična igra za utrjevanje poštevanke*, in sicer da je uporaba didaktične igre lažja in uspešnejša, če pred igro v razredu uvajamo že tradicionalno igro dama. Pri naši mini raziskavi smo namreč imeli srečo, da je pri izbirnem predmetu matematične delavnice en učenec, ki je že prej poznal igro dama ter jo je tudi že igral. Tako smo lahko videli, da je ta učenec med igranjem veliko razmišljal tudi o strategijah, kako premakniti igralne ploščke, da mu bo najbolj koristilo. Torej se ni oziral zgolj na matematične vsebine in možnosti, kako preskočiti nasprotnikov plošček, pač pa je razmišljal tudi o tem, kako svoje ploščke obvarovati, se umikati pred nasprotnikom in kako si izboljšati možnosti za zmago s pridobitvijo kraljice. Ko je z nasprotnikom igral ta učenec, je igra potekala dlje časa kot ostale igre, prav tako pa je zmagal on, saj se je uspešnejše branil pred nasprotnikom ter razvijal uspešnejše strategije za odstranitev nasprotnikovih ploščkov.

Med opazovanjem učencev pri igranju igre pa se je potrdilo tudi predvidevanje, da se strateško načrtovanje izboljšuje z večkratnim igranjem iste igre, oziroma tudi že z večkratnim opazovanjem igranja iste igre. Učenca, ki sta igro igrala prva, sta temeljila bolj na tem, da pred nasprotnika postavita igralni plošček s težkim matematičnim problemom v upanju, da ga nasprotnik ne bo rešil pravilno ter ga s tem ne bo pobral. Torej so bili pri prvem igranju bolj kot ne v ospredju matematični problemi, nismo pa opazili nobene posebne strategije kar se tiče igre oziroma premikanja igralnih ploščkov. V igri ni noben učenec pridobil kraljice, prav tako pa se nihče ni umikal nasprotniku s tem, da bi svoje ploščke postavljal na robna polja igralne deske ali da bi jih varoval z drugimi svojimi ploščki. Igra je namreč potekala tako, da sta učenca naprej premikala en plošček, dokler ga ni nasprotnik odstranil iz igre, nato pa sta začela prestavljati drugi plošček iz začetnega položaja.

Drugo igranje igre dakvama je bilo že bolj pestro, prav tako pa je igra trajala tudi dlje. Pri tej igri sta učenca že bolj uporabljala tudi strateško mišljenje in pomikala večino ploščkov naprej, ter s tem branila svoje ploščke pred nasprotnikom. Prav tako smo lahko že zasledili tudi nekaj umikanja ploščkov na robna polja igralne deske. Pri enem igralcu se je pojavila tudi kraljica, ki je s svojimi močmi iz igre odstranila kar nekaj nasprotnikovih ploščkov, potem pa je bila odstranjena zaradi neprevidnosti ter slabega predvidevanja naslednjih nasprotnikovih potez. Učenci so tudi že bolje razumeli splošna pravila igre ter med igro videli več priložnosti za preskakovanje nasprotnikovih ploščkov in s tem odstranitev le-teh iz igre.

Slika 2: Prvo igranje igre dakvama.

Slika 3: Drugo igranje igre dakvama.

Pri tretjem igranju igre dakvama pa smo lahko opazili že kar premišljene strateške premike igralnih ploščkov. Veliko je bilo umikanja igralnih ploščkov pred nasprotnikom, veliko je bilo tudi branjenja ploščkov, igralca sta med igro pridobila kar 3 kraljice (en igralec 2, drugi 1), pojavilo pa se je tudi preskakovanje več ploščkov hkrati ter s tem odstranitev več nasprotnikovih ploščkov v eni potezi. Pri tej igri smo lahko opazili tudi izrazito premoč enega igralca, in sicer je bil to igralec, ki je že pred to igro igral tradicionalno igro dama ter s tem bolje poznal splošna pravila igre in imel razvite boljše strategije. Ta igralec je na koncu tudi prepričljivo zmagal.

Slika 4: Tretje igranje igre dakvama.

Zaključek

Z našo mini raziskavo smo dokazali, da je didaktična igra, ki se zgleduje po igri dama, uporabna pri pouku matematike. Uporabna je lahko na razredni stopnji, kot na primer dapoma v 3. razredu, uporabna pa je tudi na predmetni stopnji, kot na primer dakvama v 8. razredu. To didaktično igro je možno tudi zelo hitro prilagoditi za matematične vsebine, ki ustrezajo določenemu razredu osnovne šole. Prav tako lahko isto didaktično igro (takšno, ki temelji na pravilih tradicionalne igre dama) uporabljamo v različnih razredih, samo da pri tem prilagodimo matematično vsebino. Ta večkratna uporaba didaktične igre s spremenjeno vsebino v različnih razredih pomaga tudi pri razvijanju zahtevnejših strategij in zahtevnejšega strateškega mišljenja, saj učenci pravila igre poznajo že iz razreda, v katerem so se prvič srečali z njo. Poleg koristi na matematičnem področju, je ta igra dobra tudi za razvijanje strateškega mišljenja in s tem tudi kritičnega mišljenja.

Literatura

Viličnjak, J. (2018). *Igra dama kot didaktična igra za utrjevanje poštevanke*. Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.

Viličnjak, J. in Lipovec, A. (2019). Dapoma – didaktična igra za utrjevanje poštevanke, *revija Matematika v šoli*, *25*(2), str. 39–44. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Številski izrazi in pripadajoči rezultati igre dakvama

Beli ploščki

Zapis na zunanjem delu zamaška - številski izraz	**Zapis na notranjem delu zamaška - rezultat**
19^2	361
30^2	900
20 – 30	–10
–20 : (– 4)	5
$\sqrt{361}$	19
–35 + 19	–16
$\sqrt{441}$	21
37 : (–1)	–37
0 : (–1)	0
14^2	196
–10 · 0	0
$1{,}6^2$	2,56
$\sqrt{0{,}64}$	0,8
–6 · (+20)	–120
–3 – 4 + 7	0
–8 + 9	1
$(-15)^2$	225
0,09	0,3
0 – (–1)	1
$\sqrt{2500}$	50

Rdeči ploščki

Zapis na zunanjem delu zamaška - številski izraz	**Zapis na notranjem delu zamaška - rezultat**
0 + (–43)	–43
–33 : 11	–3
–8 + (–7)	–15
-8^2	–64
7 : (–50)	–0,14
48 : (–6)	–8
$\sqrt{144}$	12
$\sqrt{576}$	24
$-(-25)^2$	–625
18 – (+9)	9
11^2	121
$\sqrt{-100}$	/
$\sqrt{81}$	9
7 · (–4)	–28
$\sqrt{1600}$	40
–16 – 15	–31
12 – 18	–6
–9 · (–1)	9
$0{,}6^2$	0,36
$(+13)^2$	169

Trikotniku pričrtani trikotniki

Iz danega trikotnika do novih trikotnikov

Hana in Sara Sambolić
Gimnazija Bežigrad

Izvleček

V raziskovalni nalogi, ki sva jo napisali še kot učenki 9. razreda OŠ Dravlje, sva preučevali lastnosti trikotnika, ki je bil na določen način pričrtani poljubnemu trikotniku. Ugotavljali sva, na kakšen način sta pričrtani in izhodiščni trikotnik povezana, ter dokazovali različne izreke. Obravnavali sva sedem takih trikotnikov, in sicer Feurbachov trikotnik, medialni ali središčni trikotnik, nožiščni ali pedalni trikotnik, ortocentrični trikotnik, Napoleonov trikotnik, Miquelov trikotnik in Brocardov trikotnik.

Pri vsakem izmed omenjenih trikotnikov sva izpostavili nekaj njihovih zanimivih lastnosti in dokazali nekaj trditev (matematičnih resnic).

V pričujočem članku bova predstavili Feurbachov in Miquelov trikotnik ter Miquelove točke. Meniva, da sta ta dva najbolj zanimiva za branje in da so o ostali vsebini osnovnošolci in srednješolci že nekaj slišali ali prebrali.

Vse konstrukcije sva risali s programom za dinamično geometrijo Geogebra.

Ključne besede: Feuerbachov trikotnik, medialni trikotnik, ortocentrični trikotnik, nožiščni trikotnik, Napoleonovi trikotnik, Miquelov trikotnik, Eulerjeva krožnica in premica, Brocardovi trikotniki in tetivni štirikotnik

Triangles Drawn to a Triangle

Obtaining New Triangles from a Given Triangle

Abstract

The research paper, which we wrote in the 9th grade of the Dravlje Primary School, deals with the characteristics of a triangle which is joined with a random triangle in a certain way. We tried to find out the connections between the joined and the original triangle and prove different theorems. We chose seven triangles: the Feuerbach triangle, medial triangle, pedal triangle, orthocentric triangle, Napoleon triangle, Miquel triangle and the Brocard triangle. Each of the above-mentioned triangles is unique; therefore, we focused on their interesting characteristics and proved a few mathematical statements/truths.

In the article we present the Feuerbach triangle, the Miquel triangle and the Miquel points. We believe that these two triangles make for interesting reading and that primary and secondary school students have already heard or read a little about the other triangles.

All the constructions were drawn with the dynamic mathematics software Geogebra.

Keywords: Feuerbach triangle, medial triangle, orthocentric triangle, pedal triangle, Napoleon triangle, Miquel triangle, Euler's circle, Euler line, Brocard triangle, cyclic quadrilateral.

Uvod

Že kot učenki sva se spraševali, ali je trikotnik najbolj enostaven večkotnik. Presenetilo naju je, da je, tako kot naju, močno nagovarjal tudi druge matematike in nematematike, da so ga preučevali in z njim poimenovali območja, dogodke, odnose …

Najino pozornost so pritegnili različni trikotniki: od Bermudskega trikotnika, ki velja za eno najbolj skrivnostnih področij na svetu, do ljubezenskega trikotnika, ki je spodbudil številne pisatelje in pesnike v znanih delih svetovne in slovenske književnosti. Naju so nagovorili pričrtani trikotniki in njihove lastnosti, ker za njih še nisva slišali. Zato sva v raziskovalni nalogi preučevali lastnosti trikotnika, ki je bil na določen način pričrtan izhodiščnemu trikotniku. Ugotavljali sva, kako sta ta dva trikotnika povezana, ter dokazovali različne matematične resnice.

Ob tem sva skušali odgovoriti tudi na dve raziskovalni vprašanji, ki sva si jih v raziskovalni nalogi zastavili:

1. Ali je trikotnik kot najenostavnejši lik v geometriji res najbolj enostaven?
2. Ali lahko z osnovnošolskim znanjem matematike preučujemo vsebine zahtevnejših trikotnikov?

Izbrali sva sedem pričrtanih trikotnikov. Pri vsakem izmed izbranih trikotnikov sva izpostavili nekaj njihovih zanimivih lastnosti in dokazali nekaj trditev. Nalogo sva razdelili na osem poglavij.

V prvem poglavju definirava nekatere osnovne pojme: značilne točke trikotnika, skladnost trikotnikov, središčni in obodni kot, pričrtani in včrtani trikotnik, včrtano, očrtano in pričrtano krožnico. V nadaljevanju sva obravnavali krožnico devetih točk, tako imenovano Eulerjevo krožnico, ker brez teh pojmov ni bilo mogoče predstaviti in pojasniti lastnosti Feurbachova trikotnika. Nato sledita dve poglavji, ki obravnavata medialni ali središčni trikotnik ter nožiščni ali pedalni trikotnik. Opisali sva tudi posebno obliko nožiščnega trikotnika – ortocentrični trikotnik. Napoleonove trikotnike predstavljava v šestem poglavju. Sledijo Miquelov trikotnik, Miquelove krožnice in Miquelova točka, ki so delo velikega francoskega matematika Augusta Miquela. V zaključku naloge predstavljava še en pričrtani trikotnik – Brocardov trikotnik, ki so ga poimenovali po Francozu Henriju Brocardu. Opisali sva tudi nastanek prve in druge Brocardove točke.

Ko na najino raziskovalno nalogo pogledava danes, ocenjujeva, da je bila zahtevna in obsežna, preplet znanih in neznanih vsebin tako za osnovnošolce in srednješolce. Odločili sva se, da v tem članku predstaviva dva pričrtana trikotnika: Feurbachov in Miquelov trikotnik ter Miquelovo krožnico in Miquelovo točko.

Želiva si, da bi pričrtani trikotniki navdušili tudi kakšnega učitelja ali profesorja, da bi mu najina naloga pomagala pri odločitvi, ali naj o tej temi spregovori z učenci in dijaki.

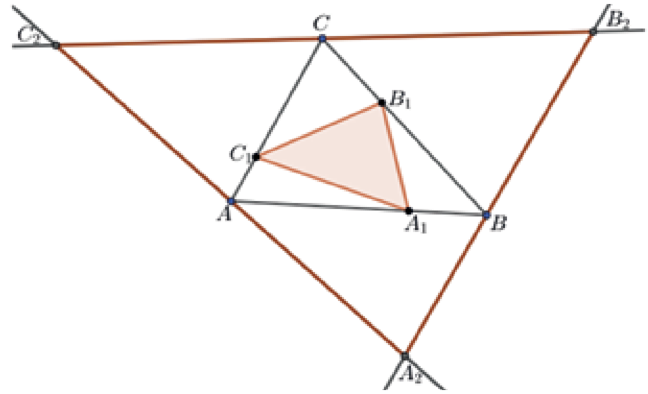
1 Trikotnik

Trikotnik je geometrijski lik s tremi oglišči in tremi stranicami. Trikotnik, ki je na določen način pričrtan poljubnemu/izhodiščnemu/danemu trikotniku, bomo imenovali pričrtan trikotnik. Posebna primera pričrtanih trikotnikov sta včrtan in očrtan trikotnik. Najprej poglejmo, kako definiramo včrtani in očrtani trikotnik ter včrtano, očrtano in pričrtano krožnica.

1.1 Včrtani in očrtani trikotnik

Včrtani trikotnik $A_1B_1C_1$ je trikotnik, katerega posamezno oglišče leži na natanko eni izmed stranic trikotnika ABC ali nosilki stranice trikotnika (Slika 1).

Očrtani trikotnik $A_2B_2C_2$ je trikotnik, katerega stranice potekajo skozi oglišča A, B in C trikotnika ABC (Slika 1).



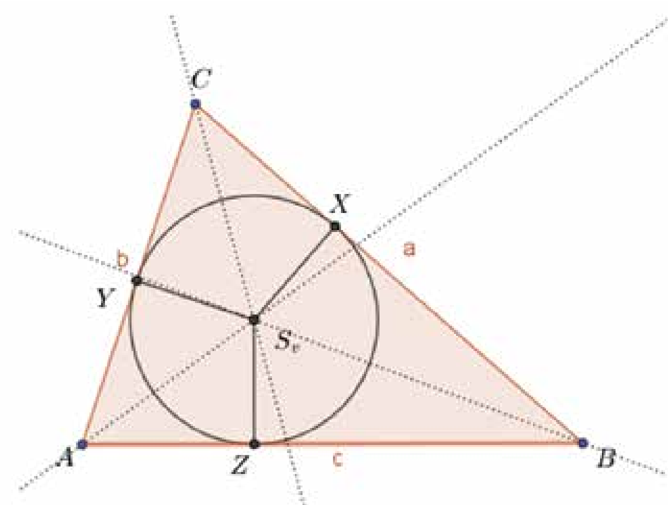
Slika 1: Včrtani in očrtani trikotnik.

1.2 Včrtana krožnica

Včrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica s središčem v točki S_v, kjer se sekajo simetrale notranjih kotov trikotnika ABC (Slika 2).

Stranice trikotnika ABC so tangente na včrtano krožnico. Središče trikotniku včrtane krožnice je enako oddaljeno od vseh treh stranic danega trikotnika, in sicer za polmer včrtane krožnice.

Dotikališča včrtane krožnice trikotnika ABC s stranicami a, b, in c in označimo z X, Y in Z.



Slika 2: Včrtana krožnica.

Velja:

$|AZ| = |AY| = s - a$,

$|BZ| = |BX| = s - b$,

$|CX| = |CY| = s - c$,

Pri čemer je $S = \frac{a+b+c}{2}$.

Dokažimo te enakosti. Najprej bomo pokazali, da sta trikotnika AZS_v in AS_vY skladna. Stranica AS_v je skupna stranica obema trikotnikoma, stranici S_vZ in S_vY pa sta skladni, saj sta obe polmer včrtane krožnice trikotnika ABC. Prav tako sta skladna kota ZAS_v in S_vAY, saj stranica S_vA leži na simetrali kota ZAY, ki ta kot razpolavlja. Vemo tudi, da sta kota S_vZA in AYS_v prava kota. Ker imata trikotnika AZS_v in AYS_v skladne vse kote in dve stranici, sta skladna. Torej imata stranici AZ in AY enako dolžino. Enako razmišljanje uporabimo pri ostalih dveh enakostih.

Izrazimo obseg trikotnika ABC.

$o = a + b + c = |BX| + |CX| + |CY| + |AY| + |AZ| + |BZ| = 2|AZ| + $
$+ 2|BX| + 2|CX|$.

$|AZ| + |BX| + |CX| = \frac{o}{2} = s.$

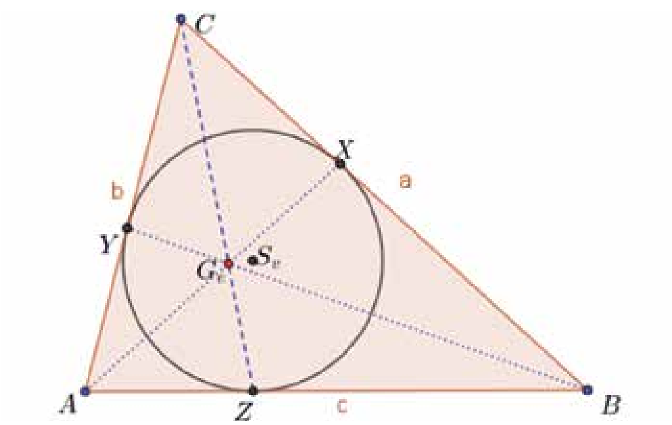
Torej velja:

$|AZ| = s - (|BX| + |CX|) = s - a.$

Na podoben način dokažemo tudi ostali dve enakosti.

S pomočjo včrtane krožnice trikotnika ABC je definirana tudi Gergonnova točka (Ge) (Slika 3).

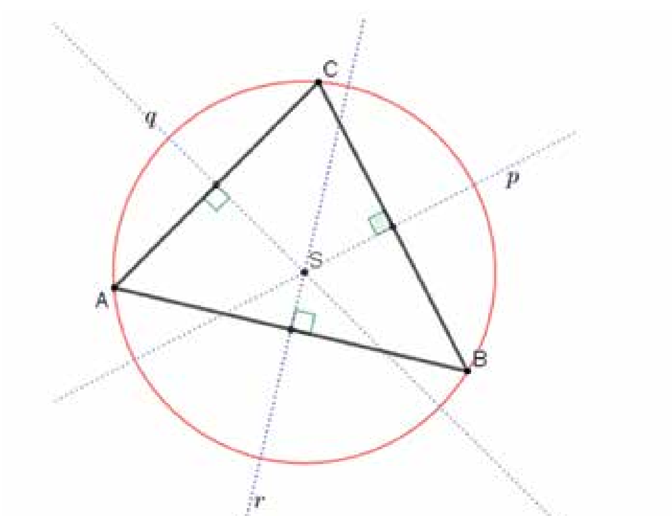
Daljice AX, BY in CZ in se sekajo v skupni točki Ge.



Slika 3: Gergonnova točka.

1.3 Očrtana krožnica

Očrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica s središčem v točki S_0, ki ga dobimo v presečišču simetral stranic a, b in c in (Slika 4). Stranice a, b in c trikotnika ABC so tetive očrtanega trikotnika.



Slika 4: Očrtana krožnica.

Središče trikotniku S_0 očrtane krožnice je enako oddaljeno od vseh treh oglišč danega trikotnika za polmer r_0 očrtane krožnice.

Polmer krožnice r_0 je razdalja med središčem S_0 in poljubnim ogliščem trikotnika.

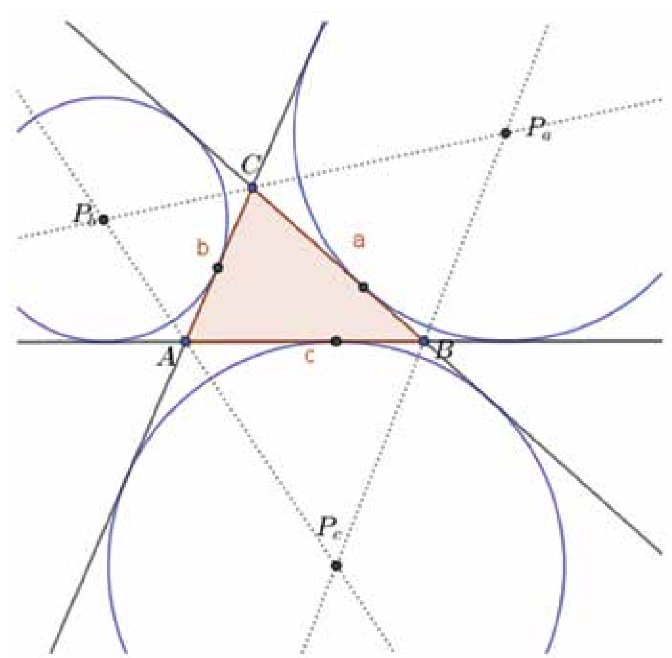
Velja:

$r_0 = |S_0A| = |S_0B| = |S_0C|$.

1.4 Pričrtana krožnica

Pričrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica, ki leži izven trikotnika in se dotika ene stranice trikotnika ter nosilk preostalih dveh stranic (Slika 5). Pričrtane krožnice so tri krožnice s središčem izven trikotnika. Nosilke stranic trikotnika ABC so tangente na te krožnice.

Središča pričrtanih krožnic P_a, P_b in P_c so presečišča simetral zunanjih kotov trikotnika ABC in ležijo na simetrali notranjega kota.



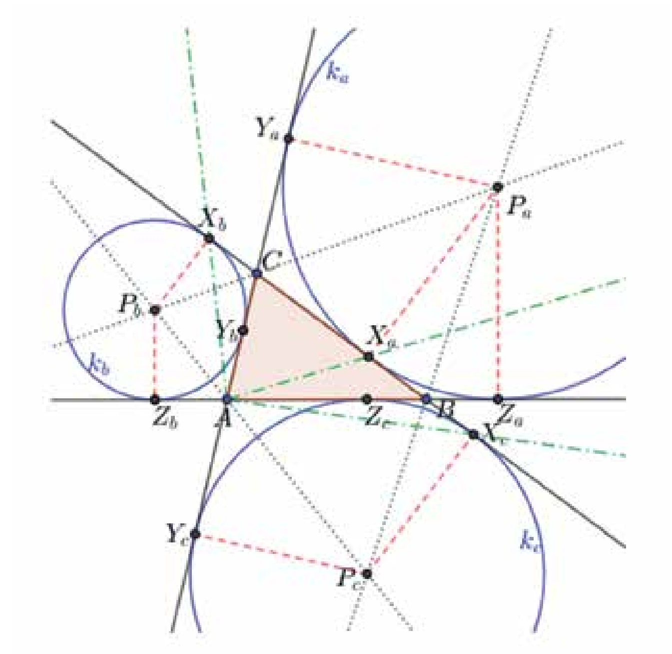
Slika 5: Trikotniku pričrtane krožnice.

Označimo z (Slika 6):

X_a, Y_a in Z_a dotikališča pričrtane krožnice k_a z nosilkami stranic trikotnika ABC,

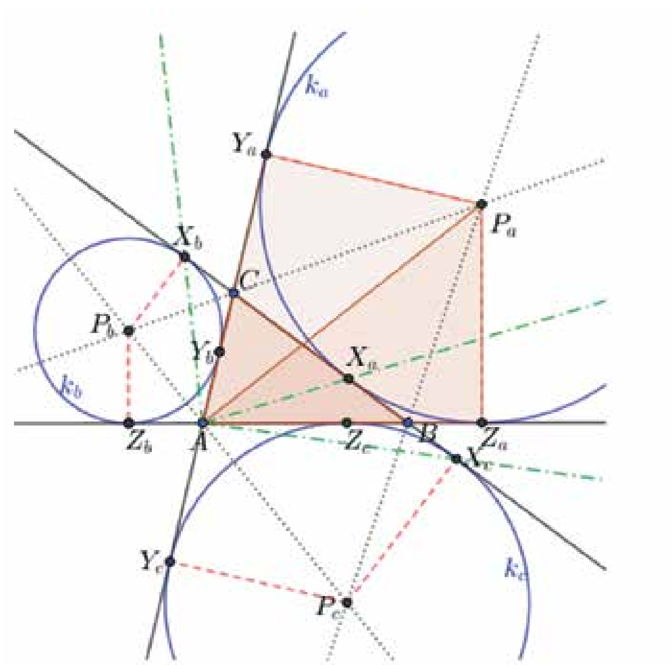
X_b, Y_b in Z_b dotikališča pričrtane krožnice k_b z nosilkami stranic trikotnika ABC,

X_c, Y_c in Z_c dotikališča pričrtane krožnice k_c z nosilkami stranic trikotnika ABC.



Slika 6: Dotikališča pričrtanih krožnic z nosilkami stranic trikotnika.

Pokažimo, da velja $|AY_a| = |AZ_a| = \frac{o}{2} = s$.



Slika 7: Skladna trikotnika iz središča pričrtanih krožnic.

Najprej se bomo prepričali, da sta trikotnika AZ_aP_a in AP_aY_a skladna. Velja, da imata skupno stranico AP_a. Stranici P_aZ_a in P_aY_a sta skladni, saj sta polmer pričrtane krožnice k_a trikotnika ABC (slika 7). Stranica AP_a leži na simetrali kota Z_aAY_a, zato ta kot razpolovi. To pa pomeni, da sta kota Z_aAP_a in P_aAY_a skladna. Vemo tudi, da sta kota P_aZ_aA in AY_aP_a prava kota, ker imata trikotnika skladne vse kote in dve stranici, sta skladna. Iz tega sledi $|AY_a| = |AZ_a|$.

Izrazimo:

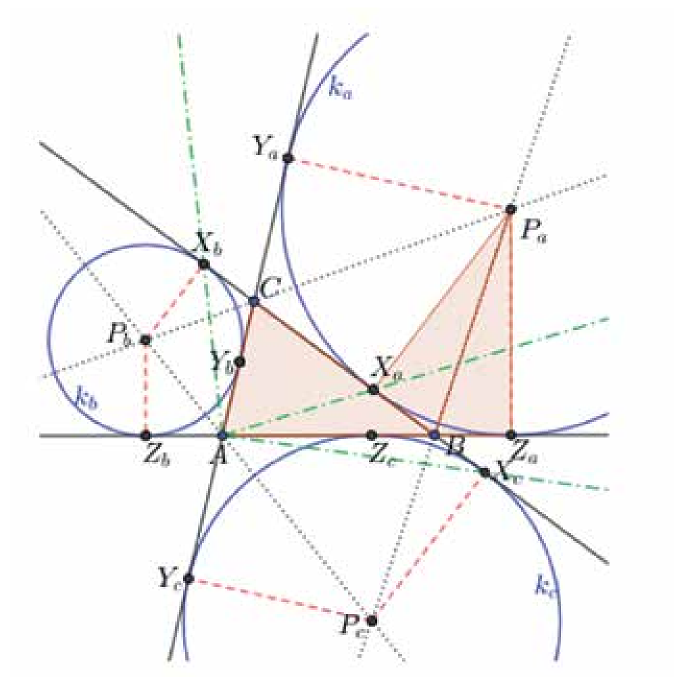
$|AY_a| + |AZ_a| = |AB| + |BZ_a| + |AC| + |CY_a| =$
$= c + b + |BX_a| + |CX_a| = a + b + c = o$

Ker velja $|AY_a| = |AZ_a|$, sledi

$|AY_a| = |AZ_a| = \frac{o}{2} = s.$

Tudi enakosti $|BX_b| = |BZ_b|$, $|CX_c| = |CY_c|$ dokažemo na enak način.

Prav tako sta skladna trikotnika BZ_aP_a in BX_aP_a in velja $|BX_a| = |BZ_a|$.



Slika 8: Skladna trikotnika z oglišči v središču pričrtane, oglišču trikotnika in dotikališču krožnice s stranico oz. nosilko stranice.

Izrazimo $|BZ_a|$ na drug način.

$|BZ_a| = |AZ_a| - |AB| = s - c.$

Torej

$|BX_a| = |BZ_a| = s - c.$

Na podoben način dokažemo enakosti:

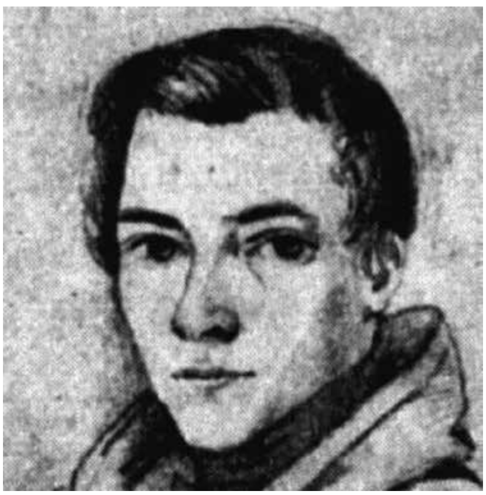
$|BX_a| = |BZ_a| = s - c$, $|CX_a| = |CY_a| = s - b$, $|CX_b| = |CY_b| = s - a$,

$|AY_b| = |AZ_b| = s - c$, $|AY_c| = |AZ_c| = s - b$, $|BX_c| = |BZ_c| = s - a.$

2 Feuerbachov trikotnik

2.1 Karl Wilhelm Feuerbach

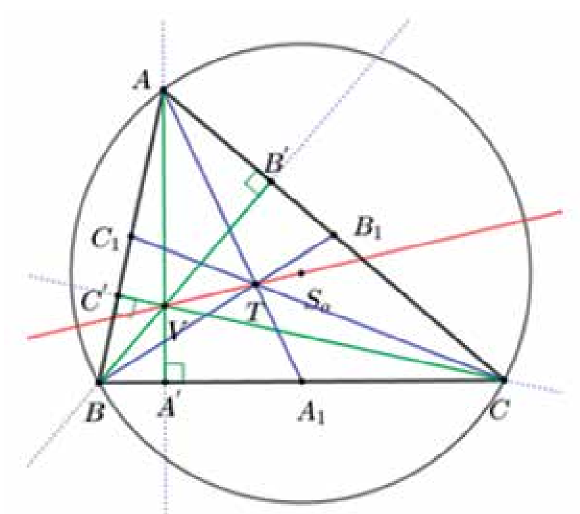
Karl Wilhelm Feuerbach se je rodil 30. maja 1800 v Svetem rimskem cesarstvu in umrl 12. marca 1834 v Nemčiji. Bil je nemški matematik, ki pa se je v celoti posvečal geometriji. Njegov oče, Paul Johann Anselm Ritter Feuerbach, je bil odličen pravnik, njegov brat, Ludwig Feuerbach, pa izvrsten filozof. Doktoriral je pri 22 letih in se takoj zaposlil na Erlangen gimnaziji kot profesor matematike. Leta 1822 je napisal knjigo, ki je govorila o krožnici devetih točk. Po njej je zaslovel kot dober matematik.



Slika 9: Karl Wilhelm Feuerbach.

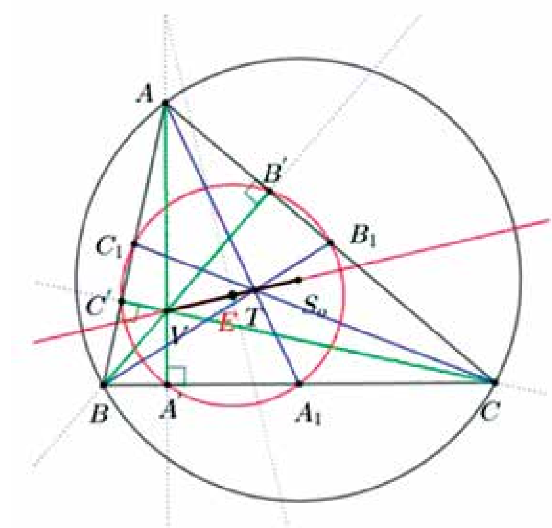
2.2 Eulerjeva premica in Eulerjeva krožnica

Središče očrtane krožnice S_o, težišče T in višinska točka Vležijo na skupni premici, velja pa tudi: $|S_oT| : |TV| = 1 : 2$ (Slika 10). To je pomembna lastnost, ki se nanaša na tri značilne točke trikotnika.



Slika 10: Eulerjeva premica in krožnica.

Premico, na kateri ležijo tri značilne točke, imenujemo Eulerjeva premica. Središče Eulerjeve krožnice danega trikotnika leži na tej premici in je hkrati središče daljice, ki jo določata višinska točka in središče očrtane krožnice tega trikotnika (Slika 11).

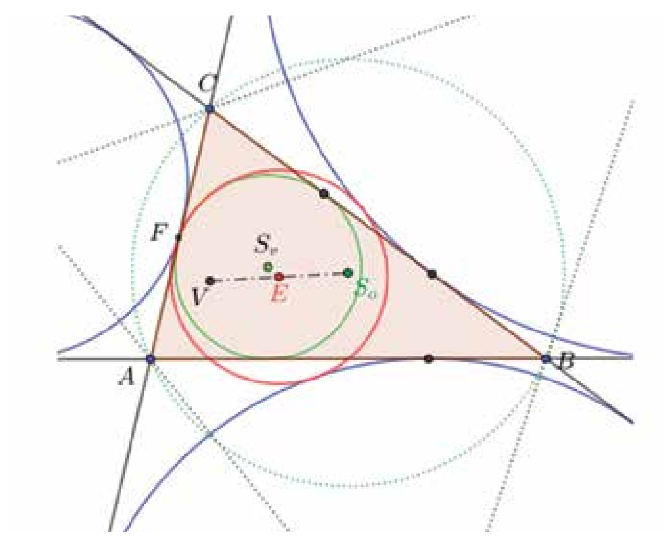


Slika 11: Eulerjeva premica in trikotnik z očrtano krožnico.

Eulerjeva krožnica se dotika trikotniku ABC včrtane krožnice od znotraj, vseh treh pričrtanih krožnic pa od zunaj.

2.3 Feuerbachova točka in trikotnik

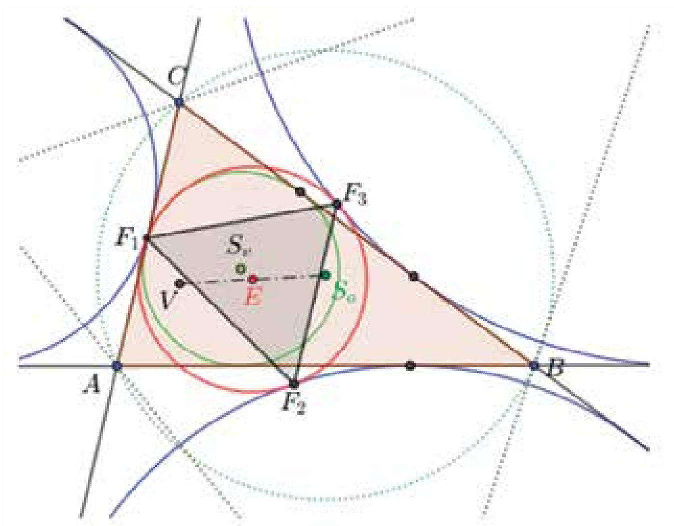
Točka, kjer se včrtana krožnica trikotnika ABC in Eulerjeva krožnica tega trikotnika dotikata, se imenuje Feurbachova točka[1] F trikotnika ABC (Slika 12).



Slika 12: Feurbachova točka.

Trikotnik, ki je določen s tremi točkami, ki so dotikališča Eulerjeve krožnice in vseh treh pričrtanih krožnic, je Feurbachov trikotnik $F_1F_2F_3$.

1 F na sliki 12 je enako F_1 na sliki 13

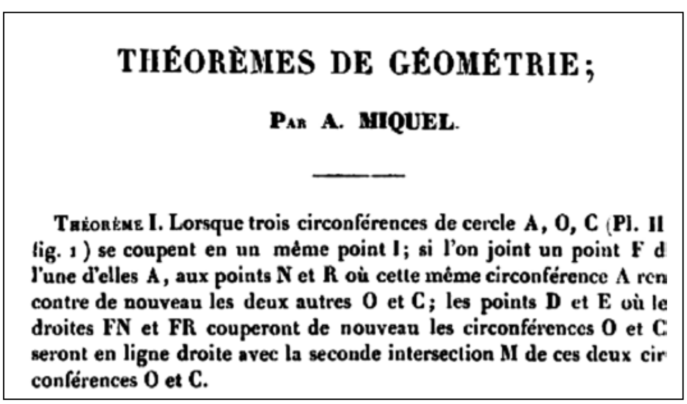


Slika 13: Feurbachov trikotnik.

3 Miquelov trikotnik

3.1 Auguste Miquel

Auguste Miquel se je rodil leta 1816 v Franciji. Po poklicu je bil znanstvenik, najraje pa se je ukvarjal z znanstvenima vedama matematiko in geometrijo. Svoje ugotovitve na teh dveh področjih je objavljal v mnogih francoskih matematičnih revijah. Po njem so poimenovani Miquelova točka, Miquelove krožnice in Miquelov trikotnik. Umrl je leta 1851.



THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR A. MIQUEL.

THÉORÈME I. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C (Pl. II fig. 1) se coupent en un même point I; si l'on joint un point F d l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où le droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.

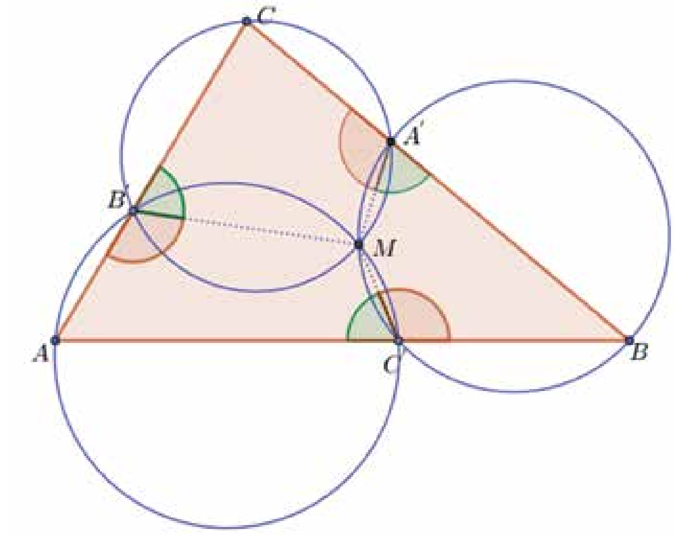
Slika 14: Izsek iz knjige Theoremes De Geometrie.

3.2 Miquelov trikotnik

Naj bo ABC poljuben trikotnik ter A', B' in C' od oglišč različne točke na premicah BC, CA in AB. Krožnice $k_{AC'B'}$, $k_{BA'C'}$ in $k_{CA'B'}$ se sekajo v isti točki. Skupno presečišče teh treh krožnic imenujemo Miquelova točka trikotnika ABC ter izbranih točk A', B' in C' (Slika 15).

Preden dokažemo obstoj Miquelove točke M, poglejmo, kdaj so točke A, B, C, D konciklične (ležijo na isti krožnici).

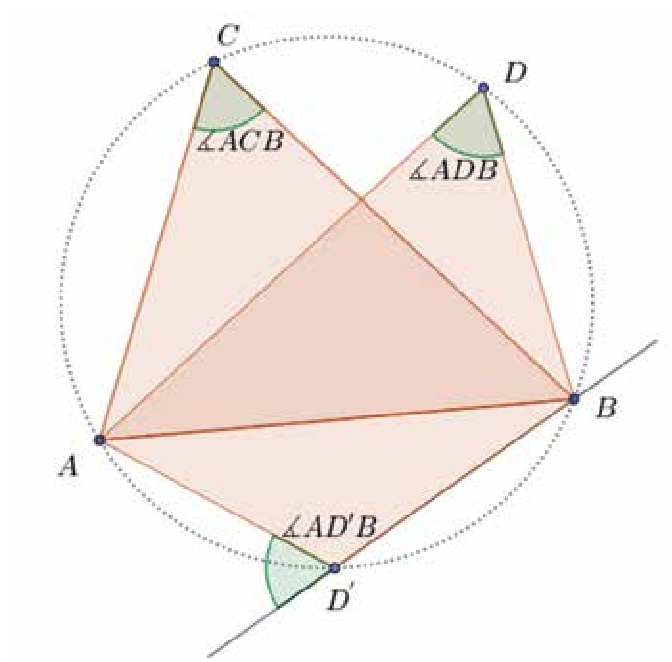
Glede na točko D ločimo dva primera.



Slika 15: Miquelova točka.

Če ležita točki C in D na istem bregu premice AB (Slika 16) in so točke A, B, C in D konciklične, potem velja:

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB.$$



Slika 16: Konciklične točke.

V drugem primeru pa naj ležita točki C in D' na različnih bregovih premice AB. Potem so točke A, B, C in D' konciklične natanko tedaj, ko je:

$$\measuredangle ACB + \measuredangle AD'B = 180°.$$

Zdaj pa se vrnimo k Miquelovi točki.

Označimo presečišče krožnic $k_{AC'B'}$ in $k_{BA'C'}$ z M. Pokažimo, da so točke C, A', B', M konciklične. Ker so točke A, B', C' in M konciklične, velja:

$$\measuredangle MC'A = \measuredangle MB'A.$$

Ker so točke A, B' in C kolinearne, velja:

$$\measuredangle MB'A + \measuredangle MB'C = 180^\circ.$$

Podobno velja:

$$\measuredangle MC'B = \measuredangle MA'B.$$

Ker so točke A, C', *in* B kolinearne, velja:

$$\measuredangle MC'A + \measuredangle MC'B = 180^\circ.$$

Ker so točke B, A' in C kolinearne, velja:

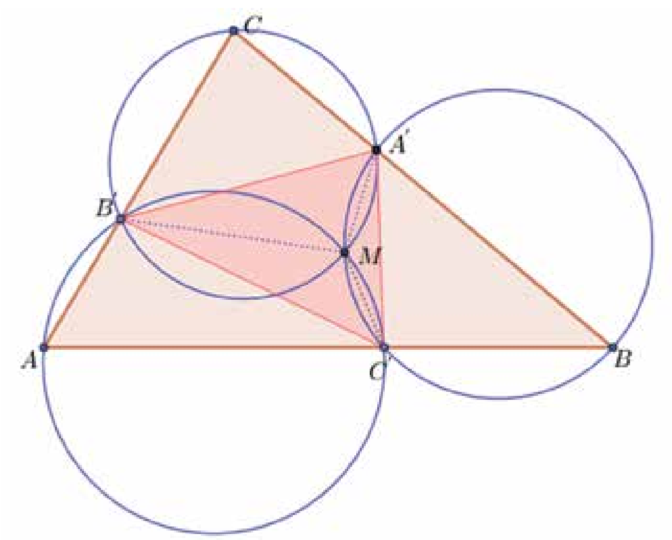
$$\measuredangle MA'B + \measuredangle MA'C = 180^\circ.$$

Sedaj upoštevamo zgornje enakosti in dobimo

$$\measuredangle MB'C = 180^\circ - \measuredangle MB'A = 180^\circ - \measuredangle MC'A =$$
$$180^\circ - (180^\circ - \measuredangle MC'B) = \measuredangle MC'B = 180^\circ - \measuredangle MA'C.$$

Torej $\measuredangle MB'C + \measuredangle MA'C = 180^\circ$.

Iz slike 17 vidimo, da točki C in M ležita na nasprotnih bregovih premice $A'B'$ torej tudi točka M leži na krožnici $k_{CA'B'}$.



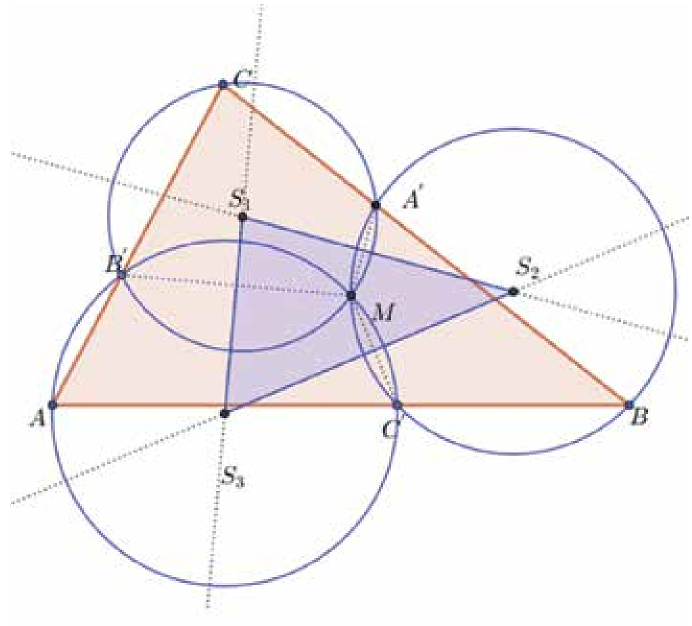
Slika 17: Miquelov trikotnik.

Če je ABC poljuben trikotnik ter A', B' in C' od oglišč različne točke na premicah BC, CA in AB, potem je trikotnik $A'B'C'$ Miquelov trikotnik (Slika 17). Krožnice $k_{AC'B'}$, $k_{BA'C'}$ *in* $k_{CA'B'}$ pa so Miquelove krožnice.

Središča Miquelovih krožnic določajo trikotnik $S_3S_2S_1$, ki je podoben trikotniku ABC (Slika 18).

Točka S_1 je središče krožnice skozi točke B', A' in C, točka S_2 je središče krožnice skozi točke A', C' in B ter točka S_3 središče krožnice skozi točke C', B' in A Krožnice imajo skupne tetive MA', MB' in MC'. Točka N_1 naj bo presečišče daljice S_1S_3 in krožnice s središčem v točki S_3, točka N_2 pa naj bo presečišče daljice S_2S_3 in krožnice s središčem v točki S_3. Premica S_1S_3 je simetrala skupne tetive MB' (Slika 19), zato velja:

$$\measuredangle B'S_1N_1 = \measuredangle N_1S_1M.$$



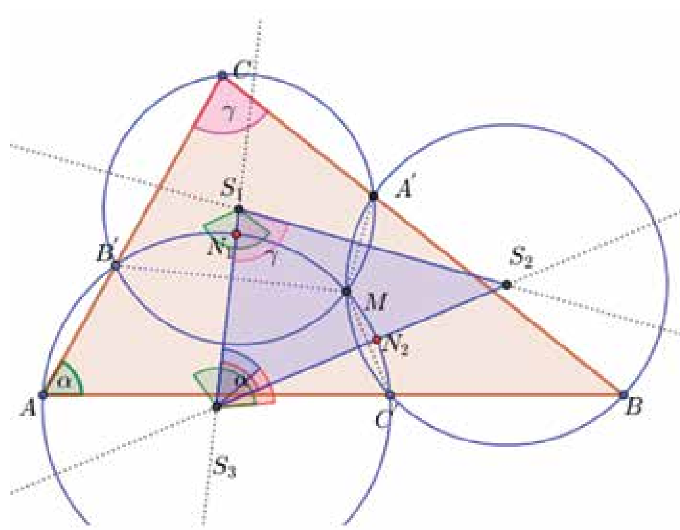
Slika 18: Središča Miquelovih krožnic.

Podobno je premica S_2S_3 simetrala skupne tetive MC', zato velja:

$$\measuredangle MS_3N_2 = \measuredangle N_2S_3C'.$$

Sledi:

$$\measuredangle N_1S_3N_2 = \measuredangle N_1S_3M + \measuredangle MS_3N_2 = \frac{1}{2}\measuredangle B'S_3C'.$$



Slika 19: Dokaz podobnosti trikotnikov s pomočjo kotov.

Ker je kot $\measuredangle B'AC' = \frac{1}{2}\measuredangle B'S_3C'$, zato je:

$$\measuredangle N_1S_3N_2 = \measuredangle B'AC' = \measuredangle ABC.$$

Podobno lahko dokažemo, da je kot
$\measuredangle S_3S_1S_2 = \measuredangle B'AA' = \measuredangle ACB$ in zato je trikotnik $S_3S_2S_1$ podoben trikotniku ABC.

Zaključek

V najini raziskovalni nalogi sva preučevali lastnosti trikotniku pričrtanih trikotnikov. Raziskovali sva posebne primere pričrtanih trikotnikov, njihove lastnosti, ploščine, razmerja med koti … Nekatere lastnosti sva tudi dokazovali. Vse slike sva risali s pomočjo programa Geogebra. Pri delu sva spoznali veliko novih geometrijskih pojmov, kot so na primer tetivni štirikotnik, Eulerjeva krožnica in premica, krožnica devetih točk, prvi in tretji skladnostni izrek, središčni ter obodni kot itd. Ne le da sva se pri pisanju raziskovalne naloge seznanili s tako veliko pojmi, temveč sva se seznanili tudi z matematiki, za katere do sedaj nisva vedeli. Najbrž bo marsikoga presenetilo dejstvo, da se Napoleonovi trikotniki, ki sva jih v nalogi obravnavali, imenujejo po francoskem vojaškem in političnem vodji, generalu in cesarju Napoleonu Bonaparteju. Nato sva odkrili še dva trikotnika – Brocardovega in Miquelovega. Oba trikotnika sta imenovana po matematikih francoskega rodu: Henriju Brocardu in Augusteu Miquelu.

Največji izziv so bili viri in literatura. Izjemno težko je bilo iskanje, izbiranje in branje besedil v povezavi z najino temo. Zahtevno je bilo, ker je večina virov in literature o pričrtanih trikotnikih v angleščini, nekaj v francoščini, nemščini in hrvaščini in ker so bila besedila za najino starost in matematično predznanje prezahtevna. Pri risanju vseh slik nama je bila v veliko pomoč najina mentorica pa tudi posnetki (video navodila), ob katerih sva se učili delati s programom za dinamično geometrijo Geogebra.

Ugotovili sva, da je trikotnik zelo zanimiv lik in da zagotovo tudi ni med najbolj enostavnimi v geometriji. Meniva, da nam osnovnošolska matematika omogoča možnosti raziskovanja trikotnikov na zahtevnejši stopnji, saj sva vse dokazovali z znanjem, ki sva ga pridobili v osnovni šoli. Čeprav se v šolah ne seznanjamo podrobno s to vsebino, ni prezahtevna za osnovnošolce. Je pa vsekakor zelo zanimiva tema, ki bi lahko še marsikoga pritegnila k raziskovanju, tako kot je naju.

Iskreno se zahvaljujeva za pomoč in nasvete najini mentorici in učiteljici Vesni Harej. Čeprav se nama je na začetku zdela vsebina najinega raziskovalnega področja zahtevna, sva raziskovalno nalogo uspešno napisali ter sva na najin izdelek ponosni.

Viri in literatura

Velić, H. (2010). Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, diplomsko delo, Trokutu pridruženi trokuti. http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/ (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Razpet, M. (2015). Matematično izrazje grškega izvora. Univerza v Ljubljani. http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Slovarcek.pdf (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Lokar: Zapiski geogebra, https://wiki.lokar.fmf.uni-lj.si/geogebrawiki/index.php/Glavna_stran (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Mitrovič, M. (2013). Skozi Evklidsko geometrijo, Sevnica.

Znani matematiki in njihova dela: Leonard Euler. http://www.matematiki.si/leonhard-euler/ (Dostopno dne 3. 3. 2019)

N. Altshiller-Court: College Geometry, 2nd ed., Mineola, NY: Dover, 2007 str. 96.

http://www.isinj.com/mt-usamo/An%20Introduction%20to%20the%20Modern%2

Geometry%20of%20the%20Triangle%20and%20the%20Circle%20-%20Altshiller

Court%20N.%20College%20Geometry%20(Dover%202007).pdf

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

Michael de Villiers: From nested Miquel triangles to Miquel distances, http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/miquel.pdf. (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Feuerbach Triangle, http://mathworld.wolfram.com/FeuerbachTriangle.html

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

August Miquel: https://de.wikipedia.org/wiki/Auguste_Miquel in http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Miquel.pdf

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

Numericana's Biographies: http://www.numericana.com/fame/bio.htm (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Karl Wilhelm Feurebach: https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Feuerbach

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisited, The Mathematical Association of America,1967. http://www.aproged.pt/biblioteca/geometryrevisited_coxetergreitzer.pdf (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Nikomahov izrek

dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku na preprost način dokažemo *Nikomahov izrek*. Osnovna ideja dokaza izvira iz Nikomahovega dela *Uvod v aritmetiko.*

Ključne besede: sodo število, liho število, trikotniško število, kvadrat, kub, vsota, ploščina, prostornina

Nicomachus's Theorem

Abstract

In the article, we prove Nicomachus's Theorem in a simple way. The basic idea of the proof originates from Nicomachus's work Introduction to Arithmetic.

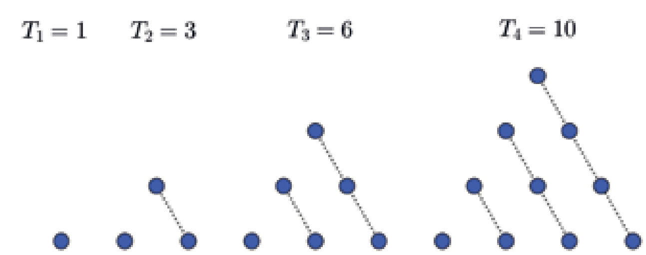
Keywords: even number, odd number, triangular number, square, cube, sum, area, volume

Uvod

Dokazali bomo Nikomahov izrek, ki trdi, da je vsota kubov prvih n zaporednih naravnih števil enaka kvadratu n-tega trikotniškega števila. Izrek se imenuje po antičnem matematiku, filozofu in glasbenem teoretiku Nikomahu iz Gerase. O njem vemo zelo malo. Rodil se je okoli leta 60 našega štetja v Gerasi, kjer je sedaj jordansko mesto Džeraš, umrl pa okoli leta 120. Ne vemo niti, kje je deloval. Morda v Aleksandriji. Matematikom je najbolj znan po delu *Uvod v aritmetiko*, kjer je Nikomahov izrek tudi dokazan. Znani sta še njegovi deli *Priročnik o harmoniji* in *Teologija aritmetike*. Veliko zaslug, da se je Nikomahovo znanje preneslo v Evropo, ima poznoantični učenjak Boetij, ki je živel na koncu 5. in v začetku 6. stoletja.

Nikomahova aritmetika je za današnje pojme teorija števil. Nikomah je bil med prvimi, ki so števila obravnavali neodvisno od geometrije. Zelo rad se je ukvarjal s števili, podobno kot nekaj stoletij pred njim pitagorejci. V *Uvodu v aritmetiko* zasledimo med drugim tudi trikotniška, kvadratna, kubična in druga figurativna števila. Pri nastanku pričujočega prispevka so izdatno pomagali viri [1, 2, 3].

Pitagorejci so že poznali *trikotniška števila*. To so naravna števila, ki povedo, koliko točk v ravnini je razporejenih v natančno določen trikoten vzorec. Začnemo z eno točko. Prvo trikotniško število je $T_1 = 1$. Točki dodamo dve točki. Drugo trikotniško število je $T_2 = 3$. Trem točkam dodamo še tri. Tretje trikotniško število je $T_3 = 6$ (slika 1). Tako lahko nadaljujemo v nedogled. V splošnem T_n točkam dodamo $n + 1$ novih, da dobimo T_{n+1} točk.



Slika 1: Prva trikotniška števila.

Trikotniška števila lahko izračunamo rekurzivno po formuli

$$T_{n+1} = T_n + n + 1,$$

pri čemer je $n \geq 1$ in $T_1 = 1$. Rekurzivno računanje pa je zamudno, a na srečo obstaja preprosta formula za n-to trikotniško število. Takoj spoznamo, da je n-to trikotniško število enako vsoti prvih n naravnih števil, tako da veljata enakosti

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$$

in

$$T_n = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1.$$

Če obe seštejemo in združimo istoležne člene, dobimo

$$2T_n = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1)$$

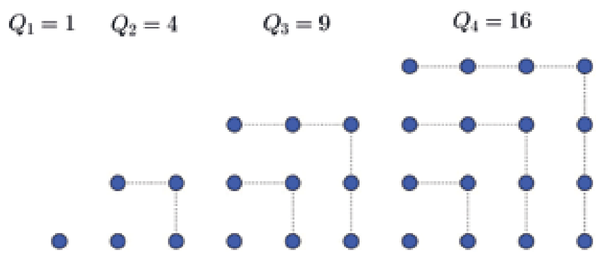
in nazadnje

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Veljavnost dobljene trditve lahko preverimo še z metodo matematične indukcije. Deljenje na desni strani v (1) se izide, ker je vedno eno od zaporednih števil n in $n + 1$ sodo. Število

$$R_n = n(n + 1) = 2T_n \tag{2}$$

so starogrški matematiki imenovali *podolžno število*, ker R_n točk lahko razporedimo v podolžen, pravokoten vzorec.



Slika 2: Prva kvadratna števila.

S kvadratnimi vzorci vpeljemo *kvadratna števila* Q_n. Spet začnemo z eno točko. Prvo kvadratno število je $Q_1 = 1$. Točki dodamo tri točke. Drugo kvadratno število je $Q_2 = 4$. Štirim točkam dodamo novih pet. Tretje kvadratno število je $Q_3 = 9$ (slika 2). Tako lahko nadaljujemo v nedogled. V splošnem Q_n točkam dodamo $2n + 1$ novih, da dobimo Q_{n+1} točk.

Tudi kvadratna števila lahko računamo rekurzivno, in sicer po formuli

$$Q_{n+1} = Q_n + 2n + 1,$$

pri čemer je $n \geq 1$ in $Q_1 = 1$.

Očitno velja enakost

$$Q_n = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \tag{3}$$

ki pove, da je vsota prvih n lihih števil enaka n-temu kvadratnemu številu.

Lahko pa (3) izpeljemo popolnoma formalno:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \ldots + (2 \cdot n - 1) =$$
$$= 2(1 + 2 + \ldots + n) - n = 2T_n - n = R_n - n = n(n + 1) - n = n^2.$$

Veljavnost dobljenega rezultata spet lahko preverimo z metodo matematične indukcije.

Glavni rezultat

Sedaj smo pripravljeni, da dokažemo Nikomahov izrek, ki pravi:

Vsota kubov prvih n naravnih števil je enaka kvadratu n-tega trikotniškega števila:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^2. \tag{4}$$

Dokaz bomo naredili tako kot Nikomah, le s sodobnimi oznakami in enakostmi, ki smo jih utemeljili v Uvodu.

Razporedimo naravna števila v trikotno razpredelnico (5).

$$\begin{array}{llll}
1 = T_1 & & & \\
2 & 3 = T_2 & & \\
4 & 5 & 6 = T_3 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Takoj opazimo, da so na hipotenuzi tega trikotnika sama trikotniška števila $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ Za $n > 1$ je zadnji element v $(n - 1)$-ti vrstici T_{n-1}, zadnji v n vrstici pa T_n. Števil v n-ti vrstici je n, in sicer so to

$$T_{n-1} + 1,\ T_{n-1} + 2,\ \ldots,\ T_{n-1} + n = T_n. \tag{6}$$

Sedaj pa števila v razpredelnici (5) preslikajmo s funkcijo $F : k \to 2k - 1$ v liha števila, ki jih razporedimo v novo trikotno razpredelnico v istem vrstnem redu:

$$\begin{array}{llll}
1 = 2T_1 - 1 & & & \\
3 & 5 = 2T_2 - 1 & & \\
7 & 9 & 11 = 2T_3 - 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{7}$$

Funkcija F povratno enolično vsakemu naravnemu številu k priredi k-to liho število, to je $2k - 1$. Pri tem funkcija F preslika n-to vrstico razpredelnice (5), to je vrstico (6), v n-to vrstico razpredelnice (7), to se pravi v

$$2T_{n-1} + 1,\ 2T_{n-1} + 3,\ \ldots,\ 2T_{n-1} + (2n - 1). \tag{8}$$

Upoštevajmo enakosti (3) in (2) v obliki $2T_{n-1} = R_{n-1} = n(n - 1)$, pa dobimo vsoto števil v (8)

$$s_n = 2nT_{n-1} + (1 + 3 + \ldots + (2n - 1)) = n^2(n - 1) + n^2 = n^3.$$

V razpredelnici (7) je vsota števil v prvi vrstici enaka $s_1 = 1^3$, v drugi $s_2 = 2^3$, v tretji $s_3 = 3^3$, … v n-ti pa $s_n = n^3$. Vsota števil v prvih n vrsticah razpredelnice (7) je potemtakem enaka

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Po drugi strani pa dobimo enak rezultat, če seštejemo vsa števila v razpredelnici (7) do vključno n-te vrstice z uporabo enakosti (3), v kateri namesto n vzamemo T_n:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2T_n - 1) = T_n^2.$$

Torej velja

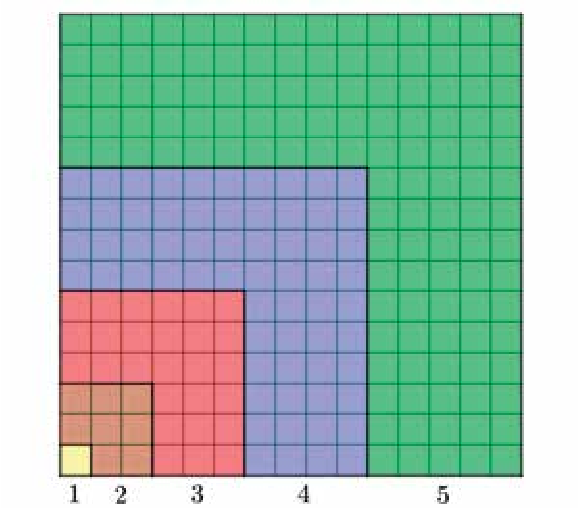
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

kar je bilo treba dokazati.

Enakost (4) ima tudi svojo geometrijsko ponazoritev. Na ravnino položimo T_n^2 enotskih kvadratov (kvadratov s stranico 1) in z njimi oblikujmo kvadrat s stranico T_n. Na sliki (3) vidimo te kvadrate za primer $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Enotski kvadrat levo spodaj posebej označimo, preostali del velikega kvadrata pa razdelimo na kotnike širin 2, 3, 4 in 5 ter jih različno obarvamo.

Kotnik širine 2 ima ploščino $T_2^2 - T_1^2 = 9 - 1 = 8 = 2^3$,
kotnik širine 3 ima ploščino $T_3^2 - T_2^2 = 36 - 9 = 27 = 3^3$,
kotnik širine 4 ima ploščino $T_4^2 - T_3^2 = 100 - 36 = 64 = 4^3$,
kotnik širine 5 ima ploščino $T_5^2 - T_4^2 = 225 - 100 = 125 = 5^3$,
v splošnem ima kotnik širine n ploščino

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = \frac{1}{4}(n^2(n+1)^2 - n^2(n-1)^2) = n^3. \tag{9}$$



Slika 3: Razdelitev kvadrata na enotski kvadrat in kotnike.

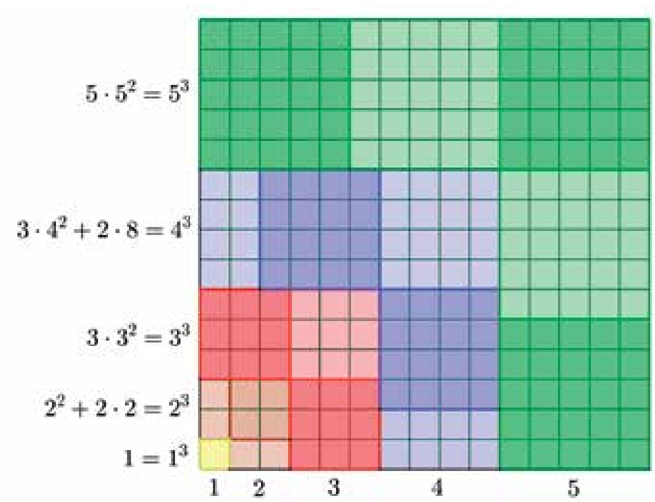
Nato izračunamo ploščino velikega kvadrata na dva načina: kot kvadrat njegove stranice in kot vsoto ploščin enotskega kvadrata levo spodaj in vseh kotnikov. Dobimo

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225,$$

v splošnem pa seveda

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$

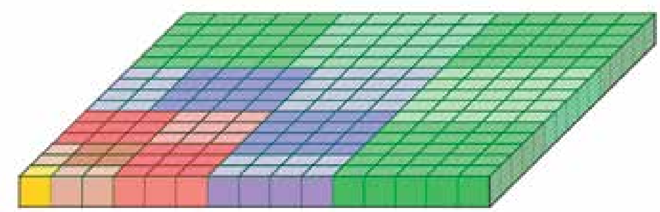
kar je samo drug zapis za (4).



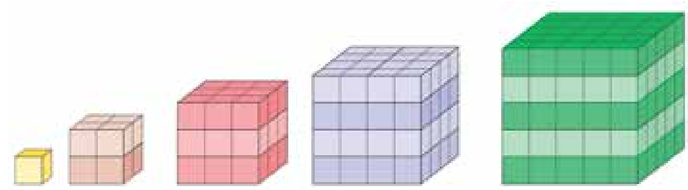
Slika 4: Ponazoritev Nikomahovega izreka.

Kotnike širine n (slika 4) s ploščino n^3 lahko za lihe n razdelimo na n kvadratov s stranico n, za sode n pa na $n - 1$ kvadratov s stranico n in dva pravokotnika s stranicama n in $n/2$. Na sliki so ločeni z dvema niansama ustrezne barve. V prvem primeru je skupna ploščina kvadratov v kotniku enaka $n \cdot n^2 = n^3$, v drugem primeru pa je skupna ploščina kvadratov in pravokotnikov v kotniku enaka $(n - 1)n^2 + 2 \cdot n \cdot n/2 = n^3$, kar je obakrat pravilno.

Če na kvadrate postavimo enotske kocke (kocke z robom 1), dobimo plast kock, ploščat kvader, ki ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico 15 (v splošnem pa T_n) in višino 1 (slika 5). Očitno lahko potem iz kock na posameznih kotnikih sestavimo kocke z robovi 2, 3, 4 in 5. Ostane še enotska kocka (slika 6). V splošnem dobimo n kock z robovi 1, 2, …, n in skupno prostornino $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^2$.



Slika 5: Plast kock.

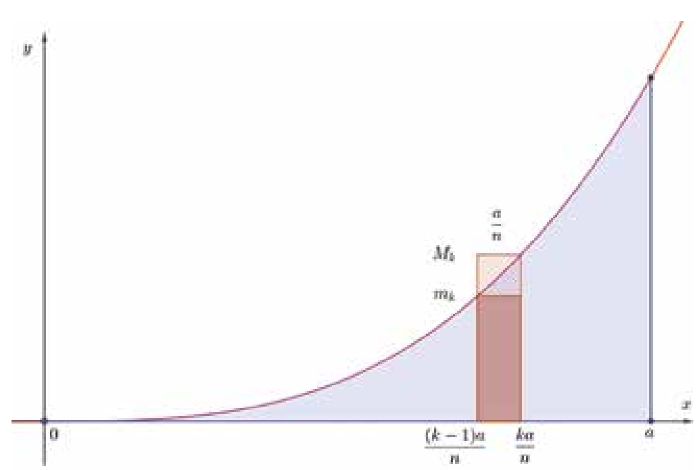


Slika 6: Kocke z robovi 1, 2, 3, 4 in 5, dobljene iz plasti.

Primer uporabe

Pred odkritjem integrala so matematiki računali ploščine likov, ki niso omejeni z daljicami in krožnimi loki, s tako imenovano *metodo izčrpavanja*. To metodo so uporabljali praktično za vsak tak lik posebej. Podobno je delal že Arhimed v 3. stoletju pred našim štetjem.

1. Oglejmo si metodo izčrpavanja na primeru izračuna ploščine lika, ki je v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu O_{xy} omejen s kubično parabolo $p^2y = x^3$, abscisno osjo in premico $x = a$, kjer sta p in a pozitivni števili. Interval $[0, a]$ s krajiščema 0 in a na abscisni osi razdelimo na n enakih delov.



Slika 7: Ploščina lika pod kubično parabolo.

Delitvene točke s krajiščema vred so:

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n} = a.$$

Delitvene točke razdelijo interval na podintervale

$$I_k = \left[\frac{(k-1)a}{n}, \frac{ka}{n}\right],$$

kjer je $k = 1, 2, \ldots, n$. Vsak podinterval ima dolžino a/n. Najmanjša vrednost ordinate na krivulji $p^2y = x^3$ nad I_k je $m_k = (k-1)^3a^3/(p^2n^3)$, največja pa $M_k = k^3a^3/(p^2n^3)$. Največja ploščina pravokotnika nad I_k, ki ne štrli čez krivuljo $p^2y = x^3$, je

$$p_k = m_k \cdot \frac{a}{n} = \frac{(k-1)^3a^4}{p^2n^4},$$

najmanjša ploščina pravokotnika nad I_k, ki ravno še štrli čez krivuljo, pa je

$$P_k = M_k \cdot \frac{a}{n} = \frac{k^3a^4}{p^2n^4}.$$

Na sliki 7 je narisan samo en tak pravokotnik.

Vsoti

$$\underline{\sigma}_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \quad \text{in} \quad \overline{\sigma}_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n,$$

sta spodnji oziroma zgornji približek ploščine $S(a)$ lika pod krivuljo. Pri tem za vsako naravno število n velja relacija $\underline{\sigma}_n < S(a) < \overline{\sigma}_n$. Z uporabo enakosti (4) dobimo:

$$\underline{\sigma}_n = \frac{a^4}{p^2n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3) = \frac{a^4}{p^2n^4}T_{n-1}^2 = \frac{a^4(n-1)^2}{4p^2n^2} =$$
$$= \frac{a^4}{4p^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4p^2} - \frac{a^4}{4p^2}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

in

$$\overline{\sigma}_n = \frac{a^4}{p^2n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = \frac{a^4}{p^2n^4}T_n^2 = \frac{a^4(n+1)^2}{4p^2n^2} =$$
$$= \frac{a^4}{4p^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4p^2} + \frac{a^4}{4p^2}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Za razliko obeh približkov dobimo

$$\overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n = \frac{a^4}{4p^2n^2}((n+1)^2 - (n-1)^2) = \frac{a^4}{p^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ko število n narašča prek vseh meja in s tem tudi število delitvenih točk intervala $[0, a]$, postaneta ulomka $1/n$ in $1/n^2$ poljubno majhna. To pomeni, da se $\underline{\sigma}_n$ in $\overline{\sigma}_n$ od števila $S(a) = a^4/(4p^2)$ razlikujeta tako malo, kot želimo, če je le n dovolj velik. Prav tako postane razlika $\overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n$ poljubno majhna. S sistemom pravokotnikov nad intervali I_k tako izčrpujemo lik pod krivuljo, ko n raste prek vseh meja. Potemtakem je ploščina $S(a)$ lika pod krivuljo $p^2y = x^3$ nad intervalom $[0, a]$ enaka

$$S(a) = \frac{a^4}{4p^2}.$$

Ploščina $S(a, b)$ pod isto krivuljo nad intervalom $[a, b]$, kjer je $0 < a < b$, pa je očitno

$$S(a,b) = S(b) - S(a) = \frac{1}{4p^2}(b^4 - a^4).$$

2. Poiščimo formulo za vsoto kubov prvih n lihih števil.

Ideja njene izpeljave je v tem, da od vsote kubov prvih $2n$ naravnih števil odštejemo vsoto kubov prvih n sodih števil.

Zapišimo:

$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 =$

$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n)^3) - (2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3) =$

$= T_{2n}^{\ 2} - (2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot n^3) =$

$= T_{2n}^{\ 2} - 8T_n^2.$

Pri tem smo dvakrat upoštevali enakost (4): prvič za vsoto kubov prvih $2n$ naravnih števil in nato še za vsoto kubov prvih n naravnih števil. Iz

$$T_{2n}^2 - 8T_n^2 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$
$$= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2-1)$$

imamo nazadnje formulo, ki smo jo iskali:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Njeno veljavnost lahko potrdimo z metodo matematične indukcije.

3. Vsota kubov prvih n naravnih števil, zapisana v desetiškem številskem sistemu, ima na mestu enic lahko samo števke 0, 1, 4, 5, 6, 9 nikoli pa 2, 3, 7, 8. Utemelji trditev.

Res! Ker je vsota kubov prvih n naravnih števil enaka kvadratu trikotniškega števila T_n, je treba pogledati samo enice kvadratov števil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Te so pa res lahko le 0, 1, 4, 5, 6, 9.

4. Izračunaj vsoto $S(m, n) = m^3 + (m+1)^3 + \ldots + (m+n)^3$, kjer sta m in n naravni števili.

Očitno je

$S(m, n) = (1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 + \ldots + (m+n)^3) -$

$- (1 + 2^3 + \ldots + (m-1)^3) =$

$= T_{m+n}^{\ 2} - \mathrm{T}_{m-1}^{\ 2}.$

Po krajšem računu dobimo:

$$S(m,n) = \frac{1}{4}(n+1)(2m+n)(2m^2+2mn+n^2+n).$$

5. Za katero naravno število n je $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 666(1 + 2 + \ldots + n)$?

Dano zahtevo lahko prepišemo v obliki enačbe $T_n^2 = 666T_n$. Ker je $T_n \neq 0$, lahko enačbo s T_n krajšamo in dobimo $T_n = 666$ oziroma kvadratno enačbo $n^2 + n - 1332 = 0$, ki ima pozitivno rešitev $n = 36$.

6. Domača naloga. Brez geometrijske interpretacije, samo z uporabo relacije (9) v obliki $n^3 = T_n^2 - T_{n-1}^2$, izpeljite formulo (4).

Zaključek

Nikomahov izrek smo uspeli dokazati z razmeroma preprostimi matematičnimi pripomočki. Postopek je edinstven, pri vsoti potenc namreč po navadi uporabljamo drugačne prijeme. Spoznali pa smo, kako so tudi antični matematiki obvladali svojo stroko. Za konec smo naredili tudi nekaj težjih in lažjih nalog, ki se navezujejo na Nikomahov izrek, ki je lep primer, kako se lahko učimo ob spoznavanju zgodovine matematike.

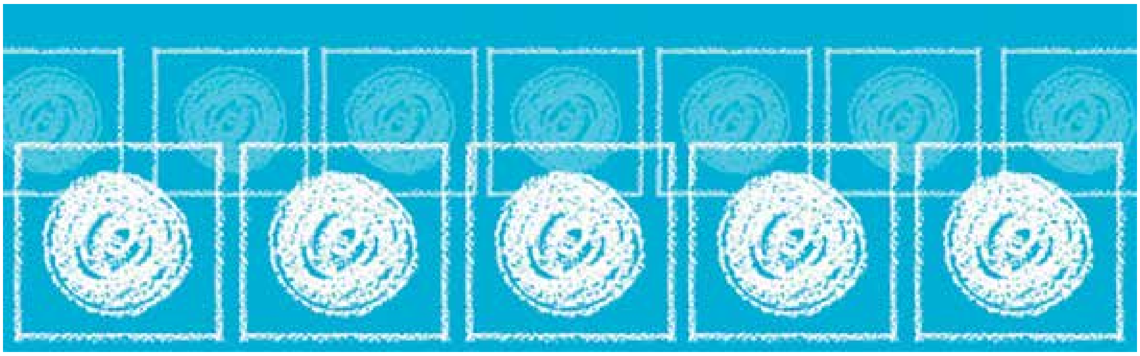
Literatura

[1] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.

[2] Pavlič, G. (2019). *Na vrtiljaku števil*. Ljubljana: Mladinska knjiga.

[3] Struik, D. J. (1986). *Kratka zgodovina matematike*. Ljubljana: DMFA Slovenije.

Poučevanje in učenje matematike na daljavo



Skupne vsebine

Do gradiv, ki so namenjena podpori strokovnim delavcem VIZ (v vrtcih, osnovnih šolah, gimnazijah, v programih srednjega strokovnega, poklicnega, nižjega poklicnega in poklicno-tehniškega izobraževanja) pri izobraževanju na daljavo, dostopamo s spletne strani: https://www.zrss.si/ucilna-zidana/izobrazevanje-na-daljavo (*pot do gradiv: www.zrss.si → Izobraževanje na daljavo*).

- V naboru krajših posnetkov kot podpori učiteljem pri izobraževanju na daljavo si lahko ogledate (*pot do gradiv: www.zrss.si → Izobraževanje na daljavo → Posnetki kot podpora učiteljem izobraževanju na daljavo*):
  - Model komunikacije za učinkovito sodelovanje z učenci, starši in med učitelji
  - Priporočila za pripravo učinkovitih navodil za učence
  - Komunikacija in sodelovanje na daljavo
  - Podpora učencem pri načrtovanju učenja
  - Povratne informacije za izboljšanje učenja in znanja učencev
  - Kako podpirati učence s posebnimi potrebami pri izobraževanju na daljavo
  - Eksperimentalno delo tudi v izobraževanju na daljavo
- dostop do skupnosti in gradiv za izobraževanje na daljavo po predmetih in področjih: https://www.zrss.si/ucilna-zidana/predmeti-in-podrocja/predmeti-in-podrocja (pot do gradiv: www.zrss.si -> Izobraževanje na daljavo -> Predmeti in področja),
- druge pomembne informacije za ravnateljice in ravnatelje, učiteljice in učitelje.

Podpora poučevanju matematike na daljavo

V času izvajanja izobraževanja na daljavo smo svetovalke predmetne skupine za matematiko na Zavodu RS za šolstvo oblikovale in objavile štiri izvedbene modele pouka matematike na daljavo za sklope (pot do gradiv: www.zrss.si -> Izobraževanje na daljavo -> Predmeti in področja -> Matematika):

- **Valj**: https://podpora.sio.si/valj-na-daljavo/

Ena od aktivnosti

Predlagam ti, da razrežeš nekaj tulcev od WC papirja (plašč valja) ali poljubno embalažo v obliki valja tako, da jih razgrneš v ravnino. Ali obstaja več načinov rezanja? Si morda rezal cik-cak ali ukrivljeno? Ali si izrezal tako, da je nastal pravokotnik, paralelogram? V katerem primeru je najlažje izračunati ploščino?

- **Kvadratna funkcija:** https://podpora.sio.si/kvadratna-funkcija-na-daljavo/
- **Racionalne funkcije:** https://podpora.sio.si/racionalne-funkcije-na-daljavo/

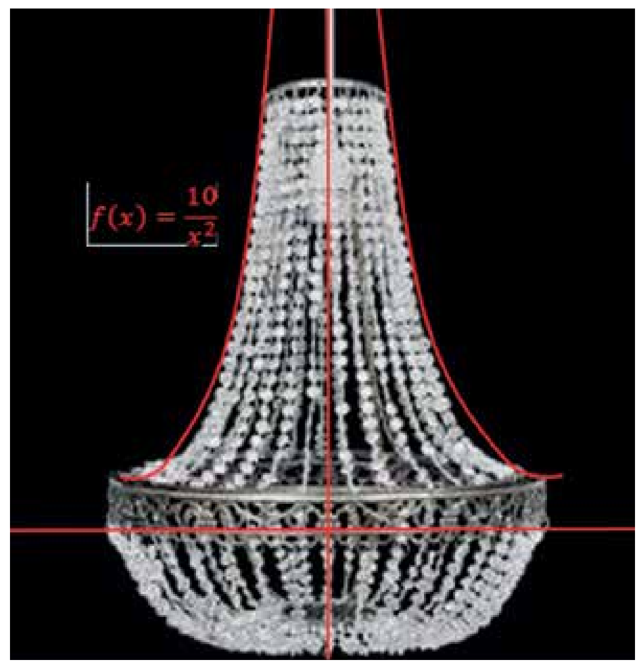
Preverim svoje znanje

Reši kviz v aplikaciji Kahoot/Googlovem vprašalniku

Udeležil se boš videokonferenčnega srečanja, ki ga bo organiziral učitelj. Pogledali boste povzetek obravnavane vsebine in vaše napake pri reševanju kviza. Pripravi si vprašanja za učitelja o stvareh, ki jih ne razumeš.

Uspešen sem, ker:

- poznam definicijo racionalne funkcije in jo prepoznam
- poznam pogoj, pri katerem ima racionalna funkcija vrednost 0
- poznam pogoj, pri katerem racionalna funkcija ni definirana
- znam oblikovati zapis definicijskega območja racionalne funkcije
- znam določiti ničle in pole ter njihove stopnje z razstavljanjem polinomov iz predpisa dane racionalne funkcije



- **Statistika:** https://podpora.sio.si/statistika-na-daljavo/

Aktivnost

Potrebuješ trši papir (na primer velikosti A4), lij, 100 g soli ali kristalnega sladkorja.

Papir prepogni, polovico papirja položi na mizo, drugo polovico podpri pod kotom kot je prikazano na fotografiji.

Nato nad desnim zgornjim robom nastavi lij in vanj vsuj sol ali sladkor. Fotografiraj stanje, ko vsa sol izteče iz lija. Opazuj nastali rob soli ob poševnem delu lista in ga na fotografiji poudari.

Modele lahko prilagodite stopnji izobraževanja, na kateri poučujete, tudi vrnitev v šolske klopi ni ovira za njihovo uporabo. Prav poimenovanje *model* izraža njegovo bistvo: prenesete ga lahko na katerikoli sklop v učnem načrtu oz. katalogu znanja in po vzorčnem modelu oblikujete takega, ki ustreza vam, vašim učencem in okoliščinam, v katerih poteka pouk.

Modeli so pripravljeni za celotne sklope, v njih so opisi dejavnosti od uvodnega preverjanja predznanja učencev do usvajanja vsebin, utrjevanja in preverjanja ter uporabe znanja.

V modelih uporabljamo prosto dostopne i-učbenike, opisane so aktivnosti učitelja in učenca, oblikovna navodila za učenca, na voljo so naloge za preverjanje znanja tako ob začetku usvajanja novih vsebin kakor tudi skozi celoten sklop.

Učenci lahko v oblikovanih vprašalnikih ves čas spremljajo svoj napredek na poti usvajanja znanja, kar lahko spremlja tudi učitelj. Učitelj učencem podaja povratne informacije o dokazih učenja, ki jih oddajajo v dogovorjena odložišča. Z učenci organizira videosrečanja, jih vodi, da izvedejo preiskovalne aktivnosti, pripravijo in predstavijo empirične preiskave. Učenci se samovrednotijo, povratne informacije podajajo tudi sošolcem in načrtujejo aktivnosti za izboljšanje znanja. Učenci v zanimivostih poiščejo odgovore na vprašanja, ki jih poraja njihova radovednost.

V spletnih učilnicah za matematiko je objavljeno gradivo:

- **1. videokonferenčnega srečanja** učiteljev matematike v osnovni šoli, dne 16. 4. 2020: valj na daljavo, povratna informacija, film o povratni informaciji, popravni znaki v pdf, vprašanja v podporo načrtovanju
- **2. videokonferenčnega srečanja** učiteljev matematike v osnovni šoli, dne 23. 4. 2020: predstavitev videokonferenčnih orodij
- **1. videokonferenčnega srečanja** učiteljev matematike v srednjih šolah, dne 17. 4. 2020: povratna informacija, kvadratna funkcija na daljavo
- **2. videokonferenčnega srečanja** učiteljev matematike v srednjih šolah, dne 8. 5. 2020: predstavitev videokonferenčnih orodij, racionalna funkcija na daljavo, valj na daljavo

Objave v forumih spletnih učilnic za matematiko

V spletnih učilnicah za matematiko ste učitelji prispevali veliko objav. Povzemamo ključne poudarke iz spletnih učilnic za matematiko:

- v osnovni šoli: https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=64
- v gimnazijah: https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=65
- v srednjih strokovnih in poklicnih programih: https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=5950

Gradiva

Spomnili smo vas, da prosto dostopna gradiva in videoposnetke kritično pregledate, preden jih pošiljate učencem. Na nekaterih so strokovne napake in uporaba neustrezne matematične terminologije. S takimi posnetki učencu pri spoznavanju novih pojmov škodimo. Na napake učence opozorite.

Sporočili ste, da so različne založbe dale v brezplačno uporabo njihova gradiva.

V različnih temah razprave ste omenili uporabo:

- i-učbenikov: http://www.iucbeniki.si/,
- gradiv E-um: http://www.e-um.si/ ali https://ucilnice.arnes.si/course/index.php?categoryid=4773
- gradiv Jazon, ki so nastala v sklopu izobraževanja na daljavo v gimnaziji: http://matematika-jazon.splet.arnes.si/
- povezav https://astra.si/, www.razlagamo.si .
- aplikacije Hitro in zanesljivo računanje http://sl.lefo.net/
- spletnega reševanja preteklih nalog tekmovanja Kenguru: https://www.dmfa.si/Tekmovan…/Kenguru/SpletnoTekmovanje.aspx

Posnetki in gradiva v podporo izobraževanju na daljavo

V spletni učilnici za matematiko v osnovni šoli so v poglavju *Posnetki v podporo izobraževanju na daljavo* 4 odložišča (za 6., 7., 8. in 9. razred) v obliki slovarja, kjer so zbrani **filmi oz. posnetki**, ki ste jih objavili učitelji.

V poglavju *Gradiva in primeri za izobraževanje na daljavo* najdete 4 odložišča (za 6., 7., 8. in 9. razred) v obliki slovarja, ki so namenjena deljenju **kvizov**. Vaš kviz se bo po abecedi razvrstil po začetni črki naslova (Pojem). Objavljeno je tudi navodilo za uvoz in izvoz kvizov v spletni učilnicah. V pomoč pri izdelavi kvizov v spletni učilnici (Moodle) vam je lahko IKT urica: https://vox.arnes.si/p99k1ywykl9/

Vabljeni, da še naprej dopolnjujete zbirke kvizov in videoposnetkov.

Predlagali ste **spletne strani v angleščini**:
https://www.khanacademy.org/
https://www.schooleducationgateway.eu/en/pub/teacher_academy/teaching_materials.htm
http://videolectures.net/
https://ocw.mit.edu/index.htm
http://math4u.vsb.cz/
https://teacher.desmos.com/

Spletne učilnice

Pri delu s spletnimi učilnicami (Moodle) vam je lahko v pomoč Uporabniški vodič Moodle: https://sio.si/vodici/moodle/.

O komunikaciji z IKT (tudi na daljavo) izveste več ob ogledu posnetka IKT urice: https://vox.arnes.si/p4s9ttk7et7/

Snemanje videov in uporaba bele table

Včasih je za učence najbolje, če jim pripravimo posnetek svoje razlage. V forumu ste z drugimi učitelji izpostavili:

- kako **snemate v shareX** in javno objavite posnetek: https://www.youtube.com/watch?v=b85igG4BRiY
- **kako uporabite belo tablo na računalniku:** https://youtu.be/BkIbY219re0

- da je na Windows računalnikih uporabna tudi **Whiteboard** https://www.microsoft.com/en-us/p/microsoft-whiteboard/9mspc6mp8fm4 ali na katerikoli napravi preko spleta https://whiteboard.microsoft.com/. Omenili ste, da se vam vse table sinhronizirajo in imate lahko tudi arhiv gradiv, če imate Microsoftov račun.
- da ob je uporabi Windows 7 mogoča brezplačna opcija https://openboard.ch/download.en.html
- uporabo **Smart Nootbook** programa za i-tablo. S SMART zapisovalnikom ste posneli načrtovanje. Povezava do navodil: http://iucitelj.si/ . Omenili ste, da ima orodje tudi tablo z geometrijskim orodjem ter da se zvok enostavno posname preko prenosnika.
- da je dobro orodje za snemanje **Explain Everything**, ki je bilo zaradi takratnih razmer brezplačno, če ste se obrnili nanje.
- da lahko v **PowerPoint**-u snemate svoj govor in hkrati pišete na zaslon (tudi z miško, če nimate zaslona na dotik).

Uporaba videokonferenc

- **Arnes Vox:** Delili ste videoposnetek o tem, kako poučevati s pomočjo videokonferenčnega sistema Vox https://youtu.be/UFuA_RtZhck
- **Arnes VID:** http://www.arnes.si/pomoc-uporabnikom/spletne-konference-arnes-vid
- **Classroom Google:** https://classroom.google.com
- **Microsoft Teams**: https://teams.microsoft.com

Opisali ste kombinirano uporabo MS Teams in tablice: pisali ste na tablico kot na tablo in učenci so spremljali vaše zapise in govorjenje. Sporočili ste, da za pisanje na tablico najbolje deluje Notes, uporabljali ste tudi Powerpointu in Geogebro.

- https://meet.google.com (potrebujemo Google račun)
- **Skype**
- https://zoom.us/ (do 40 minut na enkrat; brezplačno; previdnost pri uporabi ni odveč)

Predstavitev različnih videokonferenčnih orodij je bila na 2. videokonferenčnem srečanju učiteljev matematike v osnovnih šolah. Gradivo je objavljeno v spletni učilnici.

Pregledovanje delovnih listov

Za pregled/popravljanje/podajanje povratnih informacij za preverjanja, delovne liste, ki jih učenci rešujejo na daljavo, ste predlagali:

Delovne liste učenci kopirajo ali prepišejo, rešijo ter pošljejo, kot eno datoteko v pdf formatu. Predlagali ste poenoteno poimenovanje, npr. 6A_TEST_IME_PRIIMEK.pdf, ker je potem lažje popravljati. Datoteke pošiljajo v Google Drive in od tam jih popravljate z Acrobat Readerjem. Povezava do predstavitve tega postopka: https://www.youtube.com/watch?v=OPzcyarONME

Glede **preverjanja znanja** ste zapisali

- **Google Forms – Googlovi vprašalniki** (brezplačni, enostavni za urejanje; časovna omejitev: ko obrazec zapreš, ni več na voljo; izmenjevali ste si predloge, kako oblikovati vprašanja, vrste vprašanj; za identifikacijo ste zahtevali ime in priimek, razred ter e-mail. Elektronska pošta je pomembna, ker vidite, da gre dejansko za to osebo in še povratno informacijo pošljete na ta naslov.)
- **Moodle – Kviz** (časovno omejen, dostopali le ob določeni uri (npr. med 10.00 in 10.45), v realnem času spremljate, kdo ga rešuje, koliko časa ga rešuje in s pomočjo priloženih orodij z nekaj kliki dobite vse potrebne podatke (čas reševanja, število doseženih točk, pravilne in napačne odgovore, omenili ste, da je treba odgovore ponovno ročno pregledati.)
- **Na koncu kviza jih vedno povprašamo** tudi o tem, če so imeli s čim težave, katere težave ter koliko časa so porabili za konkretno dejavnost.
- **ThatQuiz:** https://www.thatquiz.org/sl https://www.thatquiz.org/sl/teacher.htm (naloga povezovanja, naloga kratkih odgovorov (1 možni odgovor), naloga kratkih odgovorov (izbereš pravilnimi odgovor med štirimi možnostmi), poljubna naloga v obliki diapozitiva ali izbereš prednastavljene številne možnosti)
- **Nearpod** (preverjanje »v živo«, vključimo tudi anketna vprašanja. Tako sem dobila informacije o pripomočkih, počutju, načinu izvajanja nalog na spletu ...
- **Socrative quiz** https://socrative.com (enostaven za uporabo, prosto dostopen, ima 3 možnosti odgovorov (več izbir, T/F, short answer), ogromno materiala je že objavljenega na spletu, lahko marsikaj samo prevedete: quizshop https://quizshop.co/
- **Goformative**, ki mi omogoča individualno povratno informacijo učencem (zvočno, pisno, video), če želim v realnem času ali z zamikom, kot si vsak od učencev izbere.
- **Kahoot:** https://kahoot.com/schools-u/

Pri delu ste uporabljali tudi:

- Padlet
- OneNote
- Geogebra in apleti, ki pripomorejo k razumevanju matematičnih vsebin. Na povezavi: https://www.geogebra.org/ boste našli veliko gradiv. Iščete tako, da vpišete ključno besedo (npr. osnovna šola, 8. razred, piramida ...) ali pa si pomagate z zavihkom VIRI.

Izmenjevali ste izkušnje o vidikih formativnega spremljanja, kako ga udejanjate pri pouku na daljavo. O izkušnjah pouka na daljavo v povezavi s formativnim spremljanjem so govorili učitelji matematike, vključeni v razvojno nalogo Formativno spremljanje. Kaj so povedali, si lahko preberete na povezavi: https://www.zrss.si/objava/formativno-spremljanje-pri-izobrazevanju-na-daljavo

Učitelji matematike v medijih

V raznih medijih so svoje izkušnje delili tudi učitelji matematike. Iz teh objav lahko pridobite tudi kakšno idejo za poučevanje.

- V četrtek, 2. aprila, je bil na TV Dnevnik oz. v Slovenski kroniki Slovenska kronika, na času: 8.47 https://4d.rtvslo.si/arhiv/slovenska-kronika/174683159 učitelj matematike na Gimnaziji Tolmin, Erik Vrčon, kjer prikaže, kako poučuje matematiko na daljavo. Prispevek je bil dan prej objavljen tudi na Primorski kroniki.

- V soboto, 11. 4. 2020, je bila v časopisu Dnevnik objavljena novica, kjer je bila omenjena učiteljica matematike na OŠ Dornberk, Ana Canzutti. https://www.dnevnik.si/1042926925
- V sredo, 15. 4. 2020, je učitelj matematike Nermin Bajramović imel v Izodromu https://4d.rtvslo.si/arhiv/izodrom/174686096 (na času 12.24) predstavitev O geometriji in kotih.

Vemo in se zavedamo, da ste tudi ostali učitelji uspešni pri svojem delu, da imate bogate izkušnje iz poučevanja na daljavo. Predstavljeni so le glasniki vas vseh.

Zbrale: Jerneja Bone, Lidija Pulko, Mateja Sirnik

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Priročnik za učitelje

mag. Mojca Suban, mag. Melita Gorše Pihler, Jerneja Bone, Karmen Debenjak, Loreta Hebar, Špela Jenko, Tatjana Kerin, Mojca Novoselec, Mateja Peršolja, mag. Sonja Rajh, Amela Sambolić Beganović, mag. Mateja Sirnik, Karmen Škafar, Jana Šturm, Andreja Verbinc

V priročniku so opisana različna preizkušena ORODJA V PODPORO UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE skupaj z naborom učnih ur, v katerih orodja zaživijo v vsej svoji funkcionalni vrednosti.

V ospredje je postavljen učenec in njegova vloga pri oblikovanju lastne učne poti.

152 strani, A4 format, 11,90 €

Nabor učnih ur

7. razred
Številski izrazi z ulomki
Vrste trikotnikov
Deltoid in načrtovanje deltoida

8. razred
Obseg kroga
Ploščina kroga
Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov
Diagonale večkotnika I
Diagonale večkotnika II

6. razred
Merske enote

1. letnik
Linearna funkcija I (gimnazija)
Linearna funkcija II (program srednjega strokovnega izobraževanja)

9. razred
Podobni trikotniki

Naročila:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Nesočasno učenje
Učitelj učencem ustvari učno okolje, v katerem lahko učenci delajo v svojem tempu in imajo dovolj časa za učenje.

Sočasno učenje
Učitelji in učenci se srečujejo na daljavo v realnem času v videokonferenčnih sobah ali spletnih klepetalnicah.

Usmeritve učiteljem za izobraževanje na daljavo

Manj je več
Učenci bodo za učenje doma zaradi različnih dejavnikov verjetno porabili več časa kot v šoli, zato bodite stvarni in sebi in učencem določite prioritete (prednostne naloge).

Eksplicitna navodila
Podajte natančna navodila in opredelite časovni okvir za dokončanje nalog in drugih učnih opravil.

Natančno opredelite pričakovanja
Natančno opredelite, kaj naloga zahteva, in določite vsebino, obliko, dolžino itd. pričakovanega odziva oz. izdelka (na primer: pripravite dve minutni zvočni posnetek in pri tem upoštevajte navodila v spodnjih točkah).

Bodite empatični
Določite razumne obremenitve, omogočite učencem, da uravnotežijo delo s povezavo in brez nje in da sodelujejo z drugimi učenci.

Stalna in dosledna komunikacija
Vsa navodila in naloge oz. učna opravila posredujte preko dogovorjenega spletnega okolja.

Bodite dosegljivi v »uradnih urah«
V dogovorjenih »uradnih urah« bodite na voljo za podporo, vprašanja ali pojasnila preko dogovorjenega spletnega okolja in komunikacijskih kanalov. Kar ni nujno, lahko počaka do »uradnih ur«.

Spodbujajte odzive učencev
Omogočite učencem, da sporočajo o svojih obremenitvah, čustvih, željah, individualnih učnih potrebah in učnem tempu.

Spodbujajte utrjevanje in razširjanje znanja
Izberite večpredstavnostna gradiva, ki jih vi in učenci primerno obvladate ter podpirajo pomnjenje. Z digitalnimi orodji ustvarite interaktivne učne enote.

Opredelite cilje učnih enot
Izberite večpredstavnostna gradiva, ki spodbujajo pridobivanje in utrjevanja znanja. Z digitalnimi orodji ustvarite interaktivne učne enote. Uporabljajte orodja, ki jih vi in učenci ustrezno obvladate.

Nerealna pričakovanja
Za vsak dan pripravite »šolsko učenje« in »domače naloge« in zahtevate, da jih učenci izpolnijo v kratkem časovnem obdobju.

Nejasnost in ohlapnost
Podajanje dolgih, nejasnih pisnih navodil, ki jim je težko slediti, dodeljevanje preveč ohlapno opredeljenih nalog in drugih učnih opravil.

Preveč odprte in nedoločene naloge
Dodeljevanje preveč odprtih, premalo opredeljenih nalog in drugih učnih opravil (na primer: pripravi posnetek o Luni, napiši sestavek na temo onesnaženja …).

Prekomerna delovna naravnanost
Določite »šolsko delo«, ki mu sledi še »domače«, ne da bi imeli v mislih učenčevo dobro počutje.

Razpršena komunikacija
Nedosledna uporaba različnih platform in orodij (npr. e-sporočila, ki jim sledijo spletna učilnica, e-Asistent …).

Stalna pripravljenost
Na vsako elektronsko sporočilo odgovorite takoj in si ne dovolite nobenega premora.

Enak pristop za vse učence
Pri izobraževanju na daljavo učenci ne morejo izražati svojih izkušenj in učnih potreb in/ali nimajo možnosti vplivanja na učenje, naloge, učni tempo, zaradi česar so lahko preobremenjeni in vznemirjeni.

Preizkušnje novih in nepreizkušenih orodij
Preizkušanje novih in nepoznanih orodij lahko poveča verjetnost težav pri uporabi tehnologije, tako učencem kot učitelju.

Naključne aktivnosti
Učence zaposlite z razpršenimi spletnimi dejavnostmi in ne razmišljate o ciljih, učnih dosežkih in vrednotenju znanja.

Prevod in priredba Zavod RS za šolstvo, marec 2020

Mathematics in school

1 2020 Volume 26

CONTENTS

ISSN 1318-010X