R
col

Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani
Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo
VTO Matematika in mehanika

Matjaž Omladič

SPEKTRALNI INVARIANTNI PODPROSTORI OMEJENIH OPERATORJEV

Doktorska disertacija

Ljubljana, 1980

Zahvaljujem se mentorju tega dela, prof. dr. I. Vidavu, za izbor zanimive teme in za vso pomoč. Zahvaljujem se tudi prof. dr. A. Suhadolcu in prof. dr. J. Globevniku za njuno vzpodbudo.

Vsebina

Povzetek

AMS Subj. Class. (1980) 47B40,46G10,28C15

V tem delu vpeljemo neko posplošitev pojma spektralnega operatorja na Banachovem prostoru. Medtem ko se za spektralne operatorje zahteva, da imajo enakomerno omejeno spektralno razčlenitev enote, dopuščamo v naši posplošitvi možnost, da razčlenitev enote ni enakomerno omejena, ali pa so posamezni projektorji iz te razčlenitve celo neomejeni. Pod določenimi pogoji lahko po takih projektorjih integriramo v nekih novih prostorih, ki so glede na prvotni prostor "notranji" in (ali) "zunanji".

UVOD

0.0. Splošna usmeritev

Operator na Banachovem prostoru je linearna preslikava tega prostora vase. V tem delu obravnavamo predvsem povsod definirane omejene operatorje. O operatorjih v splošnem kaj malo vemo. Še najbolj so seveda raziskani operatorji na prostorih s končno dimenzijo. Take operatorje lahko predstavimo z matrikami; če bazo prostora pri tem primerno izberemo, lahko vselej dosežemo, da ima matrika Jordanovo obliko: v njej ležijo po diagonali lastne vrednosti, edini neničelni elementi pa so morebitne enice na prvi naddiagonali. Tak operator lahko torej enolično razcepimo na vsoto diagonalnega in nilpotentnega operatorja, ki med seboj komutirata.

Dokaz teh trditev sloni bistveno na dejstvu, da ima vsak operator na prostoru s končno dimenzijo netrivialen lastni vektor. V prostorih večjih dimenzij pa temu ni več tako. Določeno naddiagonalno predstavitev splošnega operatorja pa bi lahko dobili, če bi imelo pozitiven odgovor naslednje vprašanje: Ali ima vsak operator na prostoru dimenzije več kot 1, pravi, netrivialen invarianten podprostor. To vprašanje je znano pod imenom "problem invariantnih podprostorov". Za zaprte, neomejene operatorje je odgovor v splošnem negativen. Za omejene operatorje na prostorih končnih dimenzij in na neseparabilnih prostorih je pozitiven; o tem, kaj se v splošnem dogaja na separabilnih prostorih, vemo le malo, celo najlepši separabilni prostor l_2 je za zdaj uganka. Vsi izreki o eksistenci invariantnih podprostorov se za zdaj omejujejo na ozki področji v bližini kompaktnih in spektralnih operatorjev. Tako je znano, da ima vsak kompakten operator pravi, netrivialen, celo hiperinvarianten podprostor (Lomonosov) in je zanj možno najti, v splošnem ne enolično, naddiagonalno predstavitev (Ringrose).

0.0.1. Spektralni operatorji. Med najbolj zanimivimi rezultati s področja spektralnosti operatorjev je gotovo Dunfordova [10] definicija spektralnih operatorjev. Vsi spektralni operatorji imajo, podobno kot matrike, enoličen razcep na vsoto skalarnega dela (posplošitev pojma diagonalne matrike) in kvazinilpotentnega dela; oba sumanda v tem razcepu sta omejena operatorja, ki med sebDoj komutirata, pa tudi operacijski račun na takih operatorjih gre podobno, kot na matrikah. Vsak spektralen operator, ki ima v spektru več kot eno točko, ima seveda tudi pravi, netrivialen, celo hiperinvarianten podprostor. Tem pogojem namreč zadoščajo kar njegovi spektralni podprostori.

Ob prehajanju na splošnejše operatorje se torej najprej odpira vprašanje, kako definirati pojem spektralnega podprostora. Colojoara in Foias [7] imenujeta prostor Y maksimalno spektralen, če je invarianten za operator T in za poljuben nadaljnji invariantni podprostor Z tega operatorja iz $\sigma(T|_Z) \subseteq \sigma(T|_Y)$ sledi $Z \subseteq Y$. Več avtorjev se ukvarja z analitično invariatnimi podprostori (glej npr. [20]), to so taki podprostori Y, invariantni za T, za katere zadošča (v naši terminologiji) operator T^Y pogoju (D1). Drugi avtorji se ukvarjajo z γ-prostori, to so taki prostori Y, ki so invariantni za vsak $f(T)$, brž ko je f racionalna funkcija, z vsemi poli v $\rho(T)$. Herrero [17] imenuje slednje prostore analitično invariantne in se ukvarja z vprašanji, kako se prenaša spekter operatorja pri zunanjih in notranjih skrčitvah operatorjev na take podprostore. V [12] lahko najdemo lep pregled teh in sorodnih definicij ter odnosov med njimi.

Bishop [6] predlaga več definicij spektralnih podprostorov.

Za kompaktno množico a v kompleksni ravnini definira $M_T(a)$ kot zaprtje vseh tistih $x \in X$ (X refleksiven Banachov prostor), za katere obstaja taka analitična funkcija $\hat{x} : Ca \to X$, da je $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in Ca$. Ta definicija je zelo blizu naši definiciji prostorov $D_T(a)$. Nadalje definira avtor prostor $N_T(a)$ kot družino vseh tistih $x \in X$, za katere obstaja za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ taka analitična funkcija $\hat{x} : Ca \to X$, da je

$$\|(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) - x\| \leq \varepsilon \, , \quad \lambda \in Ca \, .$$

V [34] lahko najdemo še dve sorodni definiciji.

Za našo definicijo prostorov D_T in D^T smo posplošili Dunfordov pojem ([10]) lokalnega spektra elementa, ki se je doslej dal definirati le za operatorje, ki zadoščajo pogoju (D1), to je pogoju enoličnega analitičnega nadaljevanja, na splošne operatorje. Grayeva [16] definicija lokalnega spektra se glasi: $\rho_T(x)$ je družina vseh tistih kompleksnih števil λ_0, za katere obstaja neka okolica a in analitična funkcija $\hat{x} : a \to X$ z lastnostjo $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in a$; lokalni spekter $\sigma_T(x)$ je komplement množice $\rho_T(x)$. Vrednost te definicije bistveno zmanjšuje napaka v dokazu "izreka" [16]2.3 (Za vsak $x \in X$ je $\sigma_T(x)$ kompakten in je prazen natanko tedaj, kadar je $x = 0$). Protiprimer: Za operator obratnega premika na prostoru l_2 (glej 4.1.2), uporabimo na vektorju $x = (1,0,0,\ldots)$ konstrukcijo iz primera 4.1.4, pa dobimo $\sigma_T(x) = \emptyset$. Drugih poskusov v tej smeri nismo zasledili. Na operatorjih, ki zadoščajo pogoju (D1), se naš pojem lokalnega spektra ujema z Dunfordovim, naša definicija spektralnih podprostorov D_T pa se ujema z Dunfordovo definicijo prostorov X_T (primerjaj tudi [7]). Definicija prostorov D^T je videti nova.

0.0.2. Dekomponibilnosti. Več tipov dekomponibilnosti predlaga Bishop [6] . Med drugim pravi, da operator T na refleksivnem Banachovem prostoru dopušča dualno teorijo tipa 4, če: (1) velja za poljubni kompaktni množici a in b s praznim presekom, da je $M_T(a)^{\perp} \geqslant N_{T^*}(b)$, $N_T(a)^{\perp} \geqslant M_{T^*}(b)$; (2) za poljubni odprti množici a in b, katerih unija je ves $\mathbb{C}$ pa velja $M_T(\bar{a})^{\perp} \leqslant N_{T^*}(\bar{b})$, $N_T(\bar{a})^{\perp} \leqslant M_{T^*}(\bar{b})$. V izreku [6]2 dokaže avtor, da tej teoriji zadošča vsak operator. Nekatere ideje iz dokaza tega izreka smo uporabili v dokazu našega izreka 3.1.8(b).

Colojoara in Foias [7] pravita, da je operator T dekomponibilen, če za vsako končno odprto pokritje A množice $\sigma(T)$ obstajajo maksimalni spektralni podprostori X_a, $a \in A$, za katere (1) $\sigma(T|_{X_a}) \subseteq a$, $a \in A$, (2) $X = \vee X_a$. Ta definicija je doživela celo vrsto variacij s spreminjanjem zahteve maksimalne spektralnosti podprostorov in s spreminjanjem pogojev (1) oziroma (2) (glej npr. [20], [1] in pregled [12]). Nekatere od teh variacij so se izkazale za ekvivalentne s prvotno definicijo (kot npr. Apostolova [2], glej [15] in Erdelyijeva [11], glej [29]).

0.0.3. Operatorji z realnim spektrom. Posebno zanimanje velja v spektralni literaturi operatorjem, katerih spekter leži na neki Jordanski krivulji (najpogosteje realna os ali enotna krožnica) in zadoščajo še temu ali onemu dodatnemu pogoju (bodisi ne prehudo naraščanje resolvente v bližini spektra, ali pa ne prehudo naraščanje polinomov). Bartle [3] obravnava na refleksivnih Banachovih prostorih operatorje z realnim spektrom, za katere obstaja taka konstanta K, da je

$$\mathrm{dist}(\lambda,\mathbb{R})\,\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq K,\ \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\notin\mathbb{R}\ .$$

Tej predpostavki zadošča, denimo, vsak operator, ki je hermitski v smislu Vidava. Bartle dokaže, da obstaja za vsak $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tak $\delta\in\mathbb{R}^+$, da je za vsako delitev D: $t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_k$ intervala $[a,b]\supseteq\sigma(T)$, za katero je $\sup|t_j - t_{j-1}|\leq\delta$, obstaja tak linearen podprostor X_D, gost v X, da so na vsakem $x\in X_D$ definirani spektralni projektorji P_j, prirejeni intervalom $[t_{j-1},t_j)$, j=1,2,...,k in velja

$$x = \sum_{j=1}^{k} P_j x\ ,\quad \| Tx - \sum_{j=1}^{k} t_j P_j x\| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{k}\|P_j x\|\ .$$

Ideja je že zelo blizu integriranja po ne nujno omejenih projektorjih. Znano je (primerjaj npr. [6]), da vsak hermitski operator ni nujno spektralen. Zanimivo se nam zdi vprašanje, ali ni morda vsak hermitski operator na refleskivnem Banachovem prostoru dvostransko navidezno spektralen v našem smislu.

Večina Bartlovih orožij v [3] je bilo znanih že prej. Tako je, denimo Leaf [21], študiral na soroden način operatorje na refleksivnih prostorih, ki zadoščajo pogoju $\|T^n\| = o(|n|)$. Pod tem pogojem leži spekter operatorja v enotni krožnici. Pogoj je, v bistvu nekoliko šibkejši od Bartlovega (glej propozicijo [7]5.1.6) in taki so tudi rezultati. Pogoje pa lahko še bolj omilimo. Ljubič in Macajev [23] študirata operatorje z realnim spektrom, za katere je končen

$$\int_0^{\varepsilon} \log\log M(t)\,dt$$

pri dovolj majhnem $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$; pri tem je

$$M(t) = \sup_{\mathrm{dist}(\lambda,\mathbb{R})\geq t} \|(\lambda - T)^{-1}\|\ .$$

Glavni rezultati (v naših oznakah): Obstaja $F \in \mathrm{pfm}\, I$ (I družina intervalov na $\mathbb{R}$), za katero (1) $T \in \mathrm{Inv}\, F$ (2) $\sigma(T|_{F(a)}) \subseteq \bar{a}$, $a \in I$, (3) Prostori $F(a)$ so maksimalno spektralni za zaprte a, (4) Za poljubno končno družino A odprtih intervalov, ki pokrije zaprt interval b, je $F(b) \subseteq \vee F(\bar{a})$ (Kratek premislek pokaže od tod, da je T dekomponibilen v smislu [7]), (5) F je na zaprtih intervalih zunanje odlikovana. Vse te rezultate dobita avtorja za neki razred zaprtih operatorjev, ki vsebuje zgoraj definirani razred omejenih operatorjev. Njun rezultat daje enega od boljših eksistenčnih dosežkov v reševanju problema invariantnih podprostorov. Metode se bistveno razlikujejo od metod v [21] in [3]; avtorja uporabljata teorijo polgrup [18]. Kasneje so drugi avtorji rezultat posplošili na splošnejše oblike Jordanskih krivulj.

0.0.4. <u>Dobro omejeni operatorji</u> v smislu Smarta, so operatorji z realnim spektrom, ki leži v nekem intervalu $[a,b]$, za katere obstaja taka konstanta ${}_{b}K$, da je za vsak polinom p : $\|p(T)\| \leq K\left(|p(b)| + \mathop{V}_a^b(p)\right)$ (primerjaj [27]). V refleksivnem prostoru obstajajo za take operatorje spektralni projektorji $P(t)$, $t \in [a,b]$, za katere obstaja integral

$$T = \int_a^b t\, dP(t)$$

v krepkem Riemann-Stieltjesovem smislu. Spektralno projektorsko funkcijo lahko za take operatorje definiramo na intervalih, je omejena, vendar ne nujno enakomerno; to jih v bistvu loči od skalarnih operatorjev. Sine [30] najde precej zapletene pogoje za to, da lahko nekemu operatorju T z realnim spektrom poišče spektralno mero $P(t)$, $t \in [a,b]$ v zgornjem smislu, za katero obstaja

$S = \int t\, dP(t)$, je dobro omejen in je zanj $N = T - S$ kvazinilpotenten. Turner [32] še nekoliko posploši ta rezultat in pokaže, da za N in S v splošnem ni nujno, da komutirata.

0.0.5. Kvazipodobnost. Naj bosta X in Y Hilbertova prostora. Operatorja $T \in L(X)$ in $S \in L(Y)$ sta kvazipodobna v smislu [24], če obstajata taka $U \in L(X,Y)$, $V \in L(Y,X)$, oba s trivialnim jedrom in gosto zalogo vrednosti, za katera $UT = SU$ in $TV = VS$. Zanimivo je, da sta mreži hiperinvariantnih podprostorov dveh kvazipodobnih operatorjev izomorfni (propozicija [24]II.5.1). Avtorja vpeljeta v istem delu tudi zanimivo klasifikacijo kontrakcij na Hilbertovem prostoru, to so operatorji, katerih norma ne presega 1. Vpeljeta namreč razrede C_{oo}, C_{o1}, C_{1o} in C_{11} ter dokažeta, da za vsako kontrakcijo obstaja končna triangulacija (naddiagonalna predstavitev), katere diagonalni elementi ležijo v po enem od teh razredov (izrek [24]II.4.1). Vsak operator iz razreda C_{11} pa je kvazipodoben unitarnemu operatorju (propozicija [24]II.3.5(iii); glej tudi propozicijo [24]II.5.3, katere dokaz smo skoraj dobesedno uporabili v dokazu našega izreka 3.3.6; poleg tega glej nadaljnji študij teh operatorjev v razdelku [24]VII.6). Ti rezultati predstavljajo enega od boljših eksistenčnih dosežkov v reševanju problema invariantnih podprostorov.

Cela vrsta avtorjev se je ukvarjala s kvazipodobnostjo. Med novejšimi rezultati naj omenimo [35] (potreben in zadosten pogoj za to, da je povsem neunitarna šibka kontrakcija kvazipodobna normalnemu operatorju), [36] (karakterizacija hiperinvariantnih podprostorov povsem neunitarnih C_{11} kontrakcij s pomočjo teorije iz [24]) in [13] (vsaka števna direktna vsota spektralnih operatorjev je kvazipodobna spektralnemu operatorju).

Enostransko kvazipodobnost pa lahko študiramo še drugače. Vpeljemo namreč lahko pojem <u>operatorskega ranga</u>, to je vsak Im U za $U \in L(X)$, kjer je X Hilbertov prostor (primerjaj [26]). V zvezi s tem lahko študiramo različne probleme, kot npr.: kaj lahko povemo o mreži operatorskih rangov, invariantnih za dan operator (algebro operatorjev); kaj lahko povemo o operatorjih, ki ohranjajo invariatno dano mrežo operatorskih rangov, ipd. Navedimo, da obstaja določena zveza med operatorskimi rangi in našim pojmom navideznih predstavitev. Naj bo namreč $U \in L(X,Y)$, kjer sta X in Y Banachova prostora, pa tak, da ima trivialno jedro in gosto zalogo vrednosti (primerjaj definicijo kvazipodobnosti). Tedaj postane za vsak operator $T \in L(Y)$, ki ohranja invarianten "operatorski rang" Im U, operator $T_1 = U^{-1} T U$ po izreku o zaprtem grafu omejen na X. Preostane nam torej samo še izbrati algebro operatorjev, za katere bomo zahtevali, da ohranjajo invarianten operatorski rang Im U. Naši izreki kažejo na to, da je naravno izbrati algebro vseh tistih operatorjev, ki komutirajo z danim operatorjem. Ta izbor potrjujejo nekateri primeri, ki sicer ne zadoščajo pogojem naših glavnih izrekov iz razdelka 3.4 (glej trditev 4.1.1 in primer iz razdelka 4.2, pa tudi izrek 3.1.8).

0.0.6. <u>Posplošena razčlenitev enote</u>. Poleg rezultatov iz [24] nas je v naši definiciji navideznih predstavitev hrabril tudi Ljancèjev članek [22]. Avtor študira, spet na Hilbertovem prostoru, operatorje, v splošnem neomejene, a zaprte, ki imajo neko posplošeno spektralno razčlenitev enote, definirano s celo vrsto pogojev; glavna značilnost te projektorske razčlenitve je v tem, da je sicer omejena, vendar ne enakomerno (je pa, za razliko od spektralne mere, dobljene pri dobro omejenih operatorjih, definirana na zelo obsežni družini Borelovih množic). Avtor konstruira s pomočjo te mere neki novi Hilbertov prostor (ki v našem smislu ni niti zunanji, niti notranji, čeprav je v konkretnih primerih lahko celo oboje hkrati), v katerem postane operator normalen, torej skalaren. Novi Hilbertov prostor je v nekem tehničnem smislu enolično določen.

0.0.7. Operacijski račun. Na tem mestu opišimo še Kantorovitzev rezultat [19], ki bi ga sicer lahko uvrstili tudi v 0.0.3. Avtor študira v refleksivnem Banachovem prostoru operatorje z lastnostmi (1) $\| \exp(itT) \| = o(|t|^k)$, $t \in \mathbb{R}$, (2) spekter operatorja T, ki je zaradi (1) realen, ima linearno Lebesgovo mero 0. Avtor dokaže, da je vsak tak operator (z našimi besedami) notranje navidezno spektralen, za njegov radikal N pa velja $N^{k+1} = 0$. Avtor uspe najti notranjo spektralno predstavitev, ki ima podobno lastnost maksimalnosti, kakor naše (izrek 3.4.1(b)). Preprosta posplošitev njegovih rezultatov bi nam lahko dala še to, da je vsak tak operator tudi zunanje navidezno spektralen. To bi nam, v posebnem, povedalo, da je vsak hermitski operator, katerega spekter ima linearno Lebesgovo mero 0, dvostransko navidezno spektralen. Zanimivo je, da se Kantorovitzeve metode bistveno razlikujejo od naših. Glavno orodje njegovega razmišljanja je namreč dejstvo, da dopuščajo operatorji, ki zadoščajo pogoju (1), operacijski račun tipa C^m za vsak $m \geq k+2$ (primerjaj izrek [7]5.4.5). Zato menimo, da bi bilo koristno raziskati, ali obstajajo kakšne globlje povezave med našo navidezno spektralnostjo in posplošeno spektralnostjo v smislu [7], ki sloni na operacijskem računu, ne omogoča pa v splošnem kanoničnega razcepa operatorja na skalarni in kvazinilpotentni del.

0.0.8. Kratek opis naših rezultatov. Ko smo snovali to delo, smo želeli najti posplošitev Dunfordovega pojma spektralnega operatorja, ki bi še zmerom omogočala integriranje po projektorjih in "kanonični" razcep. Pri tem smo pod vplivom [22], [19], [3] in [21] odvrgli zahtevo po omejenosti projektorjev. Prvi problem, na katerega smo naleteli, je bilo dejstvo, da imamo na začetku razmišljanja vselej definirane prostore in ne projektorje, prirejene danim podmnožicam spektra, pa naj že vzamemo za definicijo spektralnega podprostora to ali ono. Zato smo se odločili za študij "prostorskih funkcij množic", to so funkcije, ki prirejajo množicam podprostore. Takšen abstraktni pristop bi nam lahko omogočil tudi celovitejšo obravnavo različnih tipov dekomponibilnosti, vendar se v to nismo spuščali. Takšen pristop tudi ni povsem nov (primerjaj [2], [11]). Drugi problem tiči v tem, da nam vse naravne definicije spektralnih podprostorov definirajo spektralno funkcijo le na zaprtih ali pa na odprtih množicah, nekatere še na manjših družinah (denimo, intervali na realni osi). Zato smo se odločili za splošno definicijo takih funkcij, katerih definicijsko območje je lahko poljubna družina podmnožic dane množice.

Pri iskanju "pravih" razširitev takih funkcij na obsežnejše družine (algebre, σ algebre) smo si pomagali z idejami iz razširjanja pozitivnih mer (glej npr. [4]), ki smo jih neposredno prenesli v mrežo prostorskih (ne projektorskih) funkcij. Presaditev je bila videti uspešna, saj so denimo tudi projektorske funkcije - mere na Bairovih množicah postale v novem smislu regularne, podobno, kot to velja za pozitivne mere (izrek 2.2.3). Isti pristop nam je omogočil nov dokaz znane resnice, da ima v refleksivnem Banachovem prostoru .

vsaka projektorska mera na algebri enolično razširitev do projektorske mere na σ algebri.

Če opustimo pogoj omejenosti projektorjev, pa se lahko primeri, da postanejo projektorji omejeni v nekih novih Banachovih prostorih, ki so, glede na prvotni prostor notranji ali zunanji. Pod določenimi pogoji obstajata med temi prostori dva natančna prostora (razdelek 2.4), v katerih ostanejo omejeni vsi tisti operatorji, ki so ohranjali prvotno prostorsko funkcijo invariantno (izrek 2.3.3).

Če torej natančna prostora priredimo spektralnima funkcijama D_T in D^T, ki sta avtomatično hiperinvariantni za T, bodo v teh prostorih omejeni vsi operatorji, ki komutirajo s T. Pod dodatnimi pogoji, pa bo T v novih prostorih spektralen (razdelek 3.4). Ta rezultat in [24] nas pripeljeta do definicije navideznih predstavitev in navidezno spektralnih operatorjev. Naš pristop nam omogoči razmeroma hiter dokaz nekaterih znanih rezultatov (izrek 3.2.5). Navidezno dvostransko spektralni operator ima v prvotnem prostoru razcep na skalarni del in radikal. Ta dva operatorja sta gosto definirana, se dasta zapreti, vendar nista nujno omejena. Poleg tega komutirata med seboj in z vsakim omejenim operatorjem, ki komutira s T. Tudi operacijski račun gre podobno, kot pri spektralnih operatorjih.

0.0.9. Nadaljnja literatura. Nadaljnji podrobnejši opis literature s področja spektralnih operatorjev lahko najdemo v [10] (beležke k XV. in XVI. poglavju) in v [25] (predvsem razdelek 5).

0.1. Dogovor o označevanju

0.1.1. Splošne oznake

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	naravna števila, naravna števila z ničlo
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	cela števila, racionalna števila
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+_0$	realna števila, pozitivna realna števila, nenegativna realna števila
$\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$	kompleksna števila, kompleksna števila z dodano neskončno točko
ω	neskončna točka v $\overline{\mathbb{C}}$
$+\infty$, $-\infty$	neskončni točki, dodani $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ali $\mathbb{R}$
E	dana množica (npr. merljiv prostor, topološki prostor)
PE	potenčna množica množice E (družina vseh podmnožic)
λ, μ, γ ...	elementi množice E
a, b, c ...	elementi množice PE
A, B, C ...	elementi množice PPE
Ca, $a \cup b$, $a \cap b$	komplement, unija, presek v mreži PE
A'	je družina vseh Ca, ko a preteče A Primer: Če je A topologija na E, je A' družina vseh zaprtih množic na E.

0.1.2. Banachov prostor

X, Y, U ...	Banachovi prostori, zaprti linearni podprostori (na kratko: podprostori)Banachovih prostorov; obravnavamo samo prostore nad $\mathbb{C}$

$x, y, u \ldots$	elementi danega Banachovega prostora
$\lVert x \rVert$	norma elementa $x \in X$
$L, M \ldots$	linearni podprostori Banachovega prostora
X^*	dual prostora X
$\langle x \mid u \rangle$	vrednost funkcionala $u \in X^*$ pri $x \in X$
$s, w, w^*(=*)$	oznake za krepko (to je normno), šibko in šibko $*$ topologijo na danem Banachovem prostoru (slednjo lahko definiramo seveda le na dualu)
$\overline{G}=\overset{s}{\overline{G}}, \overset{w}{\overline{G}}, \overset{*}{\overline{G}}$	zaprtje množice $G \subseteq X$ v različnih topologijah
$\vee G, \nabla G, \overset{*}{\nabla} G$	linearna ogrinjača množice $G \subseteq X$ in njeno zaprtje v ustreznih topologijah (za linearno množico se krepko in šibko zaprtje ujemata)
$G_1 \vee G_2, G_1 \nabla G_2, G_1 \overset{*}{\nabla} G_2$ $\bigvee_{\alpha \in J} G_\alpha, \nabla_{\alpha \in J} G_\alpha, \overset{*}{\nabla}_{\alpha \in J} G_\alpha$	linearne ogrinjače in njihova zaprtja
$S(X), S^*(X^*)$	mreža vseh zaprtih ($*$ zaprtih) podprostorov prostora X (X^*); v tej mreži je "presek" običajen presek, "unija" pa operacija ∇ (oziroma $\overset{*}{\nabla}$)
$\leqslant$	relacija urejenosti v mreži S(X) (oziroma $S^*(X^*)$) s pomenom "je podprostor"

0.1.3. Operatorji

T, S, R ...	operatorji; operator na X je v splošnem linearna preslikava iz nekega linearnega prostora $L \subseteq X$ v X; če ni posebej poudarjeno, da gre za splošen operator, razumemo L=X in T omejen
Def T	linearni podprostor, na katerem je definiran splošni operator T; če je Def T (*) gost v prostoru, je T (*) gosto definiran; če za poljubno (posplošeno) zaporedje $x_\alpha \in$ Def T, za katero sta x_α in Tx_α (*) konvergentni, velja $(*)\lim_\alpha x_\alpha \in$ Def T in $T\,(*)\lim_\alpha x_\alpha = (*)\lim_\alpha Tx_\alpha$, potem pravimo, da je T (*) zaprt Pripomba: Večinoma bomo te pojme uporabljali predvsem na projektorjih
Im T	slika operatorja T, to je množica vektorjev Tx, ko x preteče Def T
Ker T	jedro operatorja T, to je množica vektorjev x iz Def T, za katere je Tx=0
P, Q	projektorji; projektor je splošen operator, za katerega $\mathrm{Im}\,P \subseteq \mathrm{Def}\,P$ in na Def P velja $P^2 = P$
L(X)	Banachova algebra omejenih operatorjev na X

$A_T(X)$	komutant operatorja $T \in L(X)$, to je (zaprta) algebra vseh tistih operatorjev $S \in L(X)$, za katere je $ST = TS$
T^*	adjungirani operator k splošnemu operatorju T na X; Def T^* je družina tistih $y \in X^*$, za katere preslikava $x \mapsto \langle Tx \mid y \rangle$ enolično določa neki $z \in X^*$, v tem primeru pišemo $z = T^*y$; če je T gosto definiran, je T^* zaprt; $T \mapsto T^*$ je izometrija L(X) v $L(X^*)$
$\sigma(T)$, $\rho(T)$	spekter in resolventna množica omejenega operatorja T
$\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$	točkasti, residualni, zvezni spekter

0.2. Anihilatorji in faktorski prostori

0.2.1. Definicija: Za poljubno množico $G \subseteq X$ definiramo zgornji anihilator te množice

$$G^{\perp} = \{ y \in X^*;\ \langle x | y \rangle = 0 \ \text{ za vsak } \ x \in G \};$$

za množico $H \subseteq X^*$ pa definiramo spodnji anihilator

$$H_{\perp} = \{ x \in X;\ \langle x | y \rangle = 0 \ \text{ za vsak } \ y \in H \}.$$

0.2.2. Trditev:

(a) Vselej je $G^{\perp} \in S^*(X^*)$ in $H_{\perp} \in S(X)$.

(b) Za $G_1 \subseteq G_2 \subseteq X$ je $G_2^{\perp} \leqslant G_1^{\perp}$.

(c) Za $H_1 \subseteq H_2 \subseteq X^*$ je $H_{2\perp} \leqslant H_{1\perp}$.

Trditev je splošno znana, dokaz pa preprost (glej npr.[31]).

0.2.3. Trditev (anihilatorska lema) :

(a) Za $G \subseteq X$ je $(G^{\perp})_{\perp} = G$ natanko tedaj, kadar je $G \in S(X)$.

(b) Za $H \subseteq X^*$ je $(H_{\perp})^{\perp} = H$ natanko tedaj, kadar je $H \in S^*(X^*)$.

(c) Za $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J} \subseteq S(X)$ je

$$\Big(\bigcap_{\alpha \in J} U_{\alpha} \Big)^{\perp} = \overset{*}{\underset{\alpha \in J}{\nabla}} U_{\alpha}^{\perp}$$

(d) Za $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J} \subseteq S^*(X^*)$ je

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha\Big)_\perp = \bigvee_{\alpha\in J} U_{\alpha\perp}$$

Dokaz: Točka (a) je Hahn-Banachov izrek, točka (b) soroden "obratni" izrek, tudi Banachov (glej npr.[18]).

(c) Hitro se prepričamo, da je

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha^\perp \subseteq \Big(\bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha\Big)^\perp$$

in ker stoji na desni * zaprt podprostor, je

$$V = \overset{*}{\bigvee_{\alpha\in J}} U_\alpha^\perp \subseteq \Big(\bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha\Big)^\perp .$$

Naj bo $x\in V_\perp$ in $\alpha\in J$; tedaj je zaradi $U_\alpha^\perp \leqslant V$ po točki (c) prejšnje trditve $x \in (U_\alpha{}^\perp)_\perp$, ta prostor pa je po točki (a) te trditve enak U_α. Zato je

$$V_\perp \leqslant \bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha \ ;$$

po točkah (b) te in prejšnje trditve pa dobimo od tod

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in J} U_\alpha\Big)^\perp \leqslant (V_\perp)^\perp = V .$$

(d) Dokaz je povsem analogen.

0.2.4. Definicija: Za $U \in S(X)$ definiramo faktorski prostor X/U kot družino ekvivalenčnih razredov $[x]$ po relaciji x "ekvivalentno" y, če $x-y \in U$. Množico X/U naredimo na dobro znan način za vektorski prostor, ki postane Banachov v normi

$$\|[x]\| = \inf_{u \in U} \|x + u\| .$$

0.2.5. Trditev (faktorska lema)

(a) Za $U \in S(X)$ je U^* izometrično izomorfen $X^*/U^\perp$.

(b) Za $U \in S^*(X^*)$ je $(X/U_\perp)^*$ izometrično izomorfen prostoru U.

(c) Na $U \in S(X)$ se ujemata njegova šibka topologija in relativna šibka topologija prostora X.

(d) Na $U \in S^*(X^*)$ se ujemata njegova $*$ topologija (kot duala prostora $X/U_\perp$) in relativna $*$ topologija prostora X^* (kot duala prostora X).

Dokaz je preprost, trditev pa bolj ali manj znana. Spomnimo se, da nam izometrični izomorfizem pod (a) posreduje preslikava $u \mapsto [\hat{u}]$, kjer je $\hat{u}$ neka Hahn-Banachova razširitev funkcionala u na ves X. Izometrični izomorfizem pod (b) pa nam posreduje preslikava $u \mapsto v$, definirana z $\langle x|v\rangle = \langle [x]|u\rangle$.

0.3. Invariantnost, skrčitve in projektorji

0.3.1. Definicija: Množica $G \subseteq X$ je invariantna za operator $T \in L(X)$, če za vsak $x \in G$ velja $Tx \in G$ in je hiperinvariantna za T, če za vsak $x \in G$ in za vsak $S \in A_T(X)$ velja $Sx \in G$. (Linearen) podprostor L je (hiper)invarianten (linearen) podprostor, če je (hiper)invariantna množica.

0.3.2. Trditev:

(a) $U \in S(X)$ je invarianten za T natanko tedaj, kadar je $U^{\perp}$ invarianten za T^*.

(b) Če je družina $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \subseteq S(X)$ invariantna za T, sta tudi prostora

$$\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \quad \text{in} \quad \bigvee_{\alpha \in J} U_\alpha$$

invariantna za T.

Dokaz je preprosta posledica definicij. Pri drugem prostoru pod (b) uporabimo bistveno, da je T zvezen. Pripomnimo naj še, da velja točka (b) tudi za hiperinvariantnost (uporabi to točko na vseh operatorjih iz $A_T(X)$!).

0.3.3. Definicija: Za poljubna $T \in L(X)$ in $U \in S(X)$, invarianten za T, definiramo notranjo skrčitev $T|_U$ operatorja T na podprostor U, kot operator na U, s predpisom

$$T|_U \, x = Tx \, , \quad x \in U \, .$$

Seveda je $T|_U \in L(U)$ in $\| T|_U \| \leq \|T\|$. Zunanjo skrčitev $T|^U$ operatorja T glede na podprostor U, pa definiramo kot operator na X/U s predpisom

$$T|^U [x] = [Tx] \, , \quad [x] \in X/U \, .$$

Spet je $T|^U \in L(X/U)$ in $\| T|^U \| \leq \|T\|$.

Navedimo še dve trditvi, katerih dokaz je preprost in sta splošno znani.

0.3.4. Trditev (dodatek k faktorski lema):

(a) $(T|_U)^*$ je izometrično podoben $T^*|^{U^\perp}$.

(b) $(T|^U)^*$ je izometrično podoben $T^*|_{U^\perp}$.

0.3.5. Trditev:

(a) Če sta si operatorja $T \in L(X)$ in $S \in L(Y)$ podobna, imata isti (točkasti, residualni, zvezni) spekter.

(b) Če je $U \in S(X)$ hiperinvarianten za $T \in L(X)$, je $\sigma(T|_U) \subseteq \sigma(T)$ in $\sigma(T|^U) \subseteq \sigma(T)$.

Dodajmo še preprost razmislek o projektorjih.

0.3.6. Trditev:

(a) Splošen projektor P na X je gosto definiran natanko tedaj, kadar je $\mathrm{Im}\,P \triangledown \mathrm{Ker}\,P = X$.

(b) Splošen projektor P se da zapreti natanko tedaj, kadar je za $U = \overline{\mathrm{Im}\,P}$ in $V = \overline{\mathrm{Ker}\,P}$ izpolnjen pogoj $U \cap V = \{0\}$. V tem primeru je njegova najmanjša zaprta razširitev P definirana z $\mathrm{Def}\ P = U \vee V$ in za $u + v \in U \vee V$ je $P(u+v) = u$.

(c) Splošen projektor P je zaprt natanko tedaj, kadar sta Im P in Ker P oba elementa S(X).

(d) Če je splošen projektor P na X gosto definiran, je P^* $*$ zaprt in pri tem velja

$$\mathrm{Im}\,P^* = (\mathrm{Ker}\,P)^{\perp} \quad \text{in} \quad \mathrm{Ker}\,P^* = (\mathrm{Im}\,P)^{\perp}.$$

(e) Če je P zaprt, gosto definiran(splošen) projektor, je P^* $*$ zaprt in $*$ gosto definiran.

PRVO POGLAVJE

PROSTORSKE FUNKCIJE MNOŽIC

1.0. Usmeritev

V prvem poglavju vpeljemo pojma projektorskih (razdelek 1.1) in prostorskih funkcij (razdelek 1.2) ter definiramo zvezo med obema vrstama funkcij (razdelek 1.5). V razdelkih 1.3 in 1.4 vpeljemo nekatere "algebraične" lastnosti prostorskih funkcij, ki jih kasneje potrebujemo. Vsa razmišljanja so preprosta. V razdelku 1.3 vpeljemo tudi pojem notranje oz. zunanje regularnega generatorja, ki je poskus aksiomatične definicije kompaktnih oz. odprtih Bairovih množic (primerjaj [4]).

1.1. Projektorske funkcije

Dogovorimo se, da bo v prvih dveh poglavjih X poljuben netrivialen Banachov prostor, E pa poljubna neprazna množica.

1.1.1. Definicija: Naj bo $A \in PPE$ in P preslikava, ki vsakemu elementu $a \in A$ priredi splošen projektor P(a) na X. Vsaki taki preslikavi pravimo projektorska funkcija (množic). Družini A pravimo v tem primeru definicijsko območje te funkcije, linearnemu prostoru

$$\mathrm{Defm}\ P = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Def}\ P(a)$$

pa maksimalni definicijski prostor te funkcije. Vsak linearen prostor $\mathrm{Def}\ P \subseteq \mathrm{Defm}\ P$ je (možni) definicijski prostor.

Seveda je maksimalni definicijski prostor maksimalen glede na relacijo $\subseteq$ izmed vseh možnih definicijskih prostorov.

1.1.2. Definicija: Projektorska funkcija P je končno aditivna na nekem definicijskem prostoru Def P, če je njeno definicijsko območje A algebra in velja:

(KA1) za poljubne $x \in \mathrm{Def}\, P$, $a, b \in A$, je $P(b)\, x \in \mathrm{Def}\, P$ in

$$P(a \cap b)\, x = P(a)\, P(b)\, x\ ;$$

(KA2) za poljubne $x \in \mathrm{Def}\, P$, $a, b \in A$, je

$$P(a \cup b)\, x = P(a)\, x + P(b)\, x - P(a \cap b)\, x\ ;$$

(KA3) za poljuben $x \in \mathrm{Def}\, P$ je

$$P(E)\, x = x \quad \text{in} \quad P(\emptyset)\, x = 0\ .$$

V tem primeru pravimo prostoru Def P <u>(možni) prostor končne aditivnosti</u> funkcije P.

Izdelajmo si še "delovno" definicijo končne aditivnosti. Spomnimo se, da je družina $D \subseteq A$ delitev množice E (glede na A), če je kvečjemu števna in so njeni elementi paroma disjunktne množice, katerih unija je ves E.

1.1.3. <u>Trditev</u>: Projektorska funkcija P, definirana na algebri A, je končno aditivna na nekem definicijskem prostoru Def P natanko tedaj, kadar velja

(KAa) vsi projektorji $P(a)$, $a \in A$, ohranjajo Def P invarianten in na Def P med seboj komutirajo ;

(KAb) za vsako končno delitev $D \subseteq A$ in za $x \in \mathrm{Def}\, P$ je

$$x = \sum_{d \in D} P(d)\, x .$$

Dokaz: Najprej denimo, da je P končno aditivna. Tedaj po (KA1) velja tudi (KAa), pogoj (KAb) pa dokazujemo z indukcijo na moč delitev. Če ima delitev D moč 1, mora biti $D = \{E\}$ in po prvem delu pogoja (KA3) velja (KAb). Denimo, da smo (KAb) dokazali že za vse delitve moči $n \in \mathbb{N}$ in vzemimo poljubno delitev D moči $n+1$; izberimo $a, b \in D$ in definiramo

$$D_1 = \{ d \in A \,;\, \text{bodisi } d \in D, d \neq a, d \neq b, \text{ bodisi } d = a \dot{\cup} b \} .$$

Tedaj je $D_1 \subseteq A$ delitev moči n in po indukcijski predpostavki velja za $x \in \mathrm{Def}\, P$

$$x = \sum_{d \in D_1} P(d)\, x .$$

Pogoj (KAb) bo torej veljal, brž ko dokažemo

$$P(a \cup b)\, x = P(a)\, x + P(b)\, x ,$$

to pa velja po (KA2) in drugem delu (KA3) zaradi $a \cap b = \emptyset$.

Zdaj pa denimo, da veljata (KAa) in (KAb) ter izberimo poljuben $x \in \mathrm{Def}\, P$. Uporabimo pogoj (KAb) na delitvah

$\{E\}$ in $\{E,\emptyset\}$, pa dobimo

$$x = P(E)\,x = P(E)\,x + P(\emptyset)\,x\,,$$

kar nam da (KA3). Nato izberimo poljubna $a,b \in A$ in uporabimo (KAb) na delitvah $\{a\cap b, a-b, b-a, Ca\cap Cb\}$, $\{a, b-a, Ca\cap Cb\}$, $\{b, a-b, Ca\cap Cb\}$ in $\{a\cup b, Ca\cap Cb\}$. Seštejemo prvo in zadnjo od dobljenih štirih enačb in od vsote odštejemo srednji dve, pa dobimo (KA2). Dokažimo zdaj, da velja

(1) če je $a,b \in A$ in $a\cap b = \emptyset$, je $P(a)\,P(b)\,x = 0$.

Po pogoju (KAb) je $P(Cb)P(b)\,x = 0$ in po (KA2) je

$$0 = [P(a)\,P(b) + P(Ca\cap Cb)\,P(b)]x\,.$$

Ker po (KAa) projektorji med seboj komutirajo, velja tudi

$$0 = [P(a)\,P(b) + P(Ca\cap Cb)\,P(a)]x\,,$$

zato je $(P(b)-P(a))x \in \operatorname{Ker} P(Ca\cap Cb)$; po drugi strani pa je tudi $(P(b)+P(a))x \in \operatorname{Ker} P(Ca\cap Cb)$, zato $P(b)\,x \in \operatorname{Ker} P(Ca\cap Cb)$ in (1) velja.

Izberimo poljubna $a,b \in A$ in upoštevajmo (KA2) in (1), pa dobimo

$$P(a)\,P(b)\,x = (P(a\cap b)+P(a-b))(P(a\cap b)+P(b-a))x = P(a\cap b)\,x$$

in tudi (KA1) velja.

1.1.4. Definicija: Projektorska funkcija P je $\left\{\begin{matrix}\text{šibko}\\ \text{krepko}\end{matrix}\right\}$ števno aditivna na nekem definicijskem prostoru Def P, če je njeno definicijsko območje A algebra in velja:

(σA1) izpolnjena sta pogoja (KA1) in (KA2);

(σA2) za poljuben $x \in \mathrm{Def}\,P$ je $P(\emptyset)\,x = 0$;

(σA3) za poljuben $x \in \mathrm{Def}\,P$ in poljubno naraščajoče zaporedje $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, z unijo E, konvergira zaporedje $P(a_k)\,x$ $\left\{\begin{matrix}\text{šibko}\\ \text{krepko}\end{matrix}\right\}$ proti x .

V tem primeru pravimo prostoru Def P (možni) prostor $\left\{\begin{matrix}\text{šibke}\\ \text{krepke}\end{matrix}\right\}$ števne aditivnosti funkcije P.

1.1.5. Trditev: Projektorska funkcija P, definirana na neki algebri A, je $\left\{\begin{matrix}\text{šibko}\\ \text{krepko}\end{matrix}\right\}$ števno aditivna na nekem Def P natanko tedaj, kadar velja

(a) izpolnjen je pogoj (σA1),

(b) za poljuben $x \in \mathrm{Def}\,P$ je $P(E)\,x = x$ in

(c) za poljuben $x \in \mathrm{Def}\,P$ in poljubno padajoče zaporedje $b_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, s praznim presekom, konvergira zaporedje $P(a_k)\,x$ $\left\{\begin{matrix}\text{šibko}\\ \text{krepko}\end{matrix}\right\}$ proti 0 .

Dokaz: Naj velja (σA1) do (σA3) in izberimo poljuben $x \in \mathrm{Def}\, P$. Zaporedje $E, E, E, \ldots$ je naraščajoče z unijo E, zato velja točka (b). Pa vzemimo poljubno padajoče zaporedje $b_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, s praznim presekom. Tedaj je $a_k = Cb_k$, $k \in \mathbb{N}$, naraščajoče zaporedje z unijo E, poleg tega pa je

$$x = P(a_k)\, x + P(b_k)\, x \, .$$

Ker $P(a_k)\, x$ konvergira proti x, konvergira $P(b_k)\, x$ proti 0 in tudi točka (c) velja. Dokaz nazaj je analogen.

1.1.6. Posledica: Če je P na nekem $\mathrm{Def}\, P$ $\begin{Bmatrix} \text{šibko} \\ \text{krepko} \end{Bmatrix}$ števno aditivna, je na tem $\mathrm{Def}\, P$ tudi končno aditivna.

1.1.7. Trditev: Projektorska funkcija P, definirana na neki algebri A, je $\begin{Bmatrix} \text{šibko} \\ \text{krepko} \end{Bmatrix}$ števno aditivna na nekem definicijskem prostoru $\mathrm{Def}\, P$ natanko tedaj, kadar velja

(σAa) izpolnjen je pogoj (KAa) ;

(σAb) za vsak $x \in \mathrm{Def}\, P$ $\begin{Bmatrix} \text{in vsak } y \in X^* \end{Bmatrix}$ velja za $\begin{Bmatrix} \text{skalarno} \\ \text{vektorsko} \end{Bmatrix}$ funkcijo $\begin{Bmatrix} m_{x,y}(a) = \langle P(a)x \,|\, y \rangle \\ m_x(a) = P(a)\, x \end{Bmatrix}$, $a \in A$, da je $\begin{Bmatrix} m_{x,y}(E) = \langle x | y \rangle \\ m_x(E) = x \end{Bmatrix}$.

(σ Ac) za vsak $x \in \mathrm{Def}\ P$ $\left\{ \begin{matrix} \text{in za vsak } y \in X^* \\ \end{matrix} \right\}$ je funk-

cija $\left\{ \begin{matrix} m_{x,y} & \text{skalarna} \\ m_x & \text{vektorska} \end{matrix} \right\}$ mera na A.

<u>Dokaz</u>: Naj bo P šibko (oz. krepko) števno aditivna na Def P; tedaj seveda veljata pogoja (σ Aa) in (σ Ab), dokazati pa moramo, da velja tudi (σ Ac). Pa vzemimo poljubno množico $a \in A$ in poljubno njeno delitev $D \subseteq A$ ter preštejmo elemente te delitve $D = \{d_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$. Za $k \in \mathbb{N}$ pišemo $a_k = (\bigcup_{j=1}^{k} d_j) \cup \cup Ca$. Tedaj je za $x \in \mathrm{Def}\ P$

$$P(a_k)\ x = \sum_{j=1}^{k} P(d_j)\ x + P(Ca)\ x\ .$$

Ker je zaporedje $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, naraščajoče z unijo E, konvergira $P(a_k)\ x$ šibko (oz. krepko) proti x, torej je vrsta

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(d_j)\ x$$

šibko (oz. krepko) konvergentna z vsoto $P(a)\ x$. Dokaz nazaj je analogen.

1.1.8. <u>Trditev</u>: Naj bo projektorska funkcija P definirana na neki algebri A; tedaj velja:

(a) Če je P na nekem Def P krepko števno aditivna, je na istem Def P tudi šibko števno aditivna.

(b) Če je A σ algebra in P na nekem Def P šibko števno aditivna, je na istem Def P tudi krepko števno aditivna.

(c) Če je A σ algebra in P na nekem Def P šibko števno aditivna, velja za vsak $x \in \mathrm{Def}\ P$

$$\sup_{a \in A} \| P(a)x \| < +\infty$$

<u>Dokaz</u>: (a) Jasno; (b) Pettisov izrek (glej [8]); (c) vsaka vektorska mera na σ algebri je omejena (glej [8]).

Naj bo zdaj P poljubna projektorska funkcija, definirana na neki algebri A. Naj bo L družina vseh tistih $x \in \mathrm{Defm}\ P$, za katere velja, da je za poljuben končen nabor $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$: $P(a_1)x \in \mathrm{Defm}\ P$, $P(a_2)P(a_1)x \in \mathrm{Defm}\ P$, ..., $P(a_n)\ldots P(a_1)x \in \mathrm{Defm}\ P$. Tedaj je L linearen podprostor v Defm P, torej definicijski prostor funkcije P. Poleg tega ohranjajo vsi projektorji P(a), $a \in A$, prostor L invarianten in če je Def P poljuben definicijski prostor, ki ga ohranjajo vsi projektorji P(a), $a \in A$, invariantnega, mora biti $\mathrm{Def}\ P \subseteq L$. Torej je L maksimalni izmed prostorov s to lastnostjo.
Naj bo zdaj M družina tistih $x \in L$, za katere velja, da je za poljubna $a, b \in A$, $P(a)\,P(b)\,x = P(b)\,P(a)\,x$.

Tedaj je M spet definicijski prostor funkcije P in na tem prostoru zadošča funkcija P pogoju (KAa); poleg tega pa M vsebuje vsak Def P s to lastnostjo. Definirajmo

$$\mathrm{Deff}\ P = \{x \in M\ ;\ \text{za } x \text{ velja (KAb)}\},$$

$$\mathrm{Defw}\ P = \{x \in \mathrm{Deff}\ P\ ;\ \text{za } x \text{ velja šibki } (\sigma A3)\},$$

$$\mathrm{Defs}\ P = \{x \in \mathrm{Deff}\ P\ ;\ \text{za } x \text{ velja krepki } (\sigma A3)\}.$$

Tedaj je Deff P maksimalni izmed vseh prostorov končne aditivnosti, Defw P maksimalni izmed vseh prostorov šibke števne aditivnosti in Defs P maksimalni izmed vseh prostorov krepke števne aditivnosti funkcije P. Ta postopek je seveda možen na poljubni projektorski funkciji, vendar v splošnem ne vemo, ali so dobljeni prostori netrivialni. Smiselna je

1.1.9. Definicija: Prostor Deff P (oz. Defw P, oz. Defs P) imenujemo maksimalni prostor končne (oz. šibke števne, oz. krepke števne) aditivnosti funkcije P.

Po trditvi 1.1.8. je seveda Deff P $\supseteq$ Defw P $\supseteq$ Defs P in velja v drugi oceni enačaj, če je A σ-algebra.

1.1.10. Definicija: Projektorska funkcija P je prostorska razširitev funkcije Q (in Q prostorska skrčitev funkcije P), če sta obe definirani na istem območju A, slikata v splošne projektorje na istem prostoru X ter velja za vsak $a \in A$, Def $P(a) \supseteq$ Def $Q(a)$ in za $x \in \mathrm{Def}Q(a)$: $Q(a)\,x = P(a)\,x$. Projektorska funkcija P je območna razširitev funkcije Q (in Q območna skrčitev funkcije P), če obe slikata v splošne projektorje na istem Banachovem prostoru, leži definicijsko območje A funkcije Q pod definicijskim območjem funkcije P ter velja za poljuben $a \in A$, $P(a) = Q(a)$.

1.1.11. Definicija: Projektorska funkcija P z definicijskim območjem A je zaprta v točki $a \in A$, če je $P(a)$ zaprt; je zaprta (na A), če je zaprta v vsaki točki $a \in A$; se da zapreti (na A), če ima zaprto prostorsko razširitev; je omejena v točki $a \in A$, če je $P(a)$ omejen (ne nujno gosto definiran); je omejena (na A), če je omejena v vsaki točki $a \in A$; je enakomerno omejena (na A), če je omejena in

$$\sup_{a \in A} \|P(a)\| < +\infty \;;$$

če je A algebra, P enakomerno omejena in Defs P = X, potem pravimo, da je P projektorska mera.

Če je A σ algebra, je v zadnji definiciji pogoj enakomerne omejenosti odveč.

1.1.12. Pripomba: Poleg krepke in šibke števne aditivnosti bi lahko vpeljali še druge pojme števne aditivnosti. Naj bo npr. $\Gamma \subseteq X^*$ neka $*$ gosta podmnožica in denimo, da za funkcijo P veljata pogoja (σA1) in (σA2), v pogoju (σA3) pa namesto šibke konvergence zaporedja $P(a_k)x$ zahtevajmo konvergenco zaporedja $\langle P(a_k)x \mid y \rangle$ proti $\langle x|y \rangle$ za vsak $x \in \mathrm{Def}\, P$ in $y \in \Gamma$. V tej definiciji lahko očitno predpostavimo brez škode za splošnost, da je Γ linearen podprostor prostora X^*. Zanimivo bi bilo to definicijo uporabiti v primeru, ko je X dual nekega Banachovega prostora Y in vzamemo za Γ naravno sliko prostora Y v prostoru $Y^{**} = X^*$. V tem primeru bi dobili definicijo "šibke $*$ števne aditivnosti". V refleksivnih prostorih se seveda ta definicija ujema z definicijo šibke števne aditivnosti.

1.2. Prostorske funkcije

1.2.1. Definicija: Naj bo $A \in PPE$ in $F : A \longrightarrow S(X)$, tedaj pravimo, da je F prostorska funkcija množic. Družino A imenujemo v tem primeru definicijsko območje funkcije F. Množico vseh funkcij z definicijskim območjem A in z vrednostmi v S(X) označimo s pfm(A,X); če je X nedvoumno določen, ga v oznaki izpustimo. Z $*\mathrm{pfm}(A,X^*)$ pa označimo družino vseh funkcij $F : A \longrightarrow S^*(X^*)$.

Vsak element $*\mathrm{pfm}(A,X^*)$ leži seveda tudi v $\mathrm{pfm}(A,X^*)$, obratno pa v nerefleksivnih prostorih v splošnem ne drži.

1.2.2. Definicija: Za $F \in \mathrm{pfm}(A,X)$ definiramo $F^{\perp} \in *\mathrm{pfm}(A',X^*)$ s predpisom

$$F^{\perp}(a) = F(Ca)^{\perp} , \quad a \in A' ,$$

za $F \in *\mathrm{pfm}(A,X^*)$ pa $F_{\perp} \in \mathrm{pfm}(A',X)$ s predpisom

$$F_{\perp}(a) = F(Ca)_{\perp} , \quad a \in A' .$$

Po anihilatorski lema velja za $F \in \mathrm{pfm}\, A$, $(F^{\perp})_{\perp} = F$, za $F \in *\mathrm{pfm}\, A$ pa $(F_{\perp})^{\perp} = F$. Torej je preslikava $\alpha : \mathrm{pfm}(A,X) \longrightarrow \mathrm{pfm}(A',X^*)$, definirana z $\alpha : F \mapsto F^{\perp}$ povratno enolična.

1.2.3. <u>Definicija</u>: Za funkciji $F,G \in \mathrm{pfm}\, A$ pišemo $F \leq G$, če za vsak $a \in A$ velja $F(a) \leq G(a)$.

Za funkciji $F \in \mathrm{pfm}\, A$ in $G \in \mathrm{pfm}\, B$ pravimo, da je G <u>razširitev</u> funkcije F (in F <u>skrčitev</u> funkcije G), če je $A \subseteq B$ in za vsak $a \in A$ velja $F(a) = G(a)$.

Funkcija $F \in \mathrm{pfm}\, A$ je <u>monotona</u>, če za poljubna $a,b \in A$, $a \subseteq b$ velja $F(a) \leq F(b)$.

Funkcija $F \in \mathrm{pfm}\, A$ je <u>invariantna</u> za operator $T \in L(X)$, če je za vsak $a \in A$, $F(a)$ invarianten za T. Družino vseh operatorjev, za katere je F invariantna, označimo z $\mathrm{Inv}\, F$.

Družina $\mathrm{Inv}\, F$ je seveda vselej zaprta podalgebra algebre $L(X)$, ki vsebuje vsaj identični operator.

Za poljubni funkciji F in G je $F \leq G$ natanko tedaj, kadar je $G^{\perp} \leq F^{\perp}$. Funkcija G je razširitev funkcije F natanko tedaj, kadar je $G^{\perp}$ razširitev funkcije $F^{\perp}$. Funkcija F je monotona natanko tedaj, kadar je funkcija $F^{\perp}$ monotona.

Družina $\mathrm{pfm}\, A$ je z relacijo $\leq$ delno urejena. Za poljubno njeno poddružino $\{F_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ definirajmo

(1) $\left(\sup_{\alpha \in J} F_{\alpha} \right)(a) = \bigvee_{\alpha \in J} F(a)$, $a \in A$;

$$(2) \qquad (\inf_{\alpha \in J} F_\alpha)(a) = \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha(a) \,, \quad a \in A \,.$$

Za tako definirani operaciji sup in inf je pfm A polna mreža. Preslikava α : pfm A $\longrightarrow$ *pfm A' je antiizomorfizem med obema mrežama. V slednji mreži je operacija inf spet dana s formulo (2), v definiciji (1) operacije sup pa moramo namesto ∇ vzeti $\overset{*}{\nabla}$.

Hitro se lahko prepričamo, da sta sup in inf poljubne družine monotonih funkcij spet monotoni funkciji. Monotone funkcije tvorijo torej polno podmrežo mreže pfm A, preslikava α pa je spet antiizomorfizem med obema podmrežama monotonih funkcij.

Denimo, da je neka družina funkcij invariantna za dan operator T; tedaj sta tudi sup in inf te družine invariantni funkciji za ta operator. Torej tvori družina vseh funkcij, invariantnih za dan operator (ali dano množico operatorjev) spet polno podmrežo.

1.2.4. <u>Definicija</u>: Naj bo $F \in$ pfm A in $B_A = \{b \in PE\,;$ obstaja $a \in A,\ a \subseteq b\}$. Definiramo <u>notranjo razširitev</u> funkcije F, $F_e \in$ pfm B_A s predpisom

$$F_e(b) = \nabla_{\substack{a \subseteq b \\ a \in A}} F(a) \,, \quad b \in B_A \,;$$

na $B^A = \{ b \in PE \; ; \text{ obstaja } a \in A, \; b \subseteq a \}$ pa definiramo <u>zunanjo razširitev</u> funkcije F, $F^e \in \text{pfm } B^A$ s predpisom

$$F^e(b) = \bigcap_{\substack{b \subseteq a \\ a \in A}} F(a) \;, \quad b \in B^A \;.$$

Notranja razširitev postane definirana na vsem PE natanko tedaj, kadar je $\emptyset \in A$, zunanja pa natanko tedaj, kadar je $E \in A$. Niti notranja niti zunanja razširitev v splošnem nista nujno razširitvi.

Kako bi lahko smiselno prenesli obe "razširitvi" v $S^*(X^*)$? Nakažimo za notranji primer: Naj bo $F \in {}^*\text{pfm}(A, X^*)$, seveda je $(B_A)' = (B')^A$ in definiramo lahko

$$F_{*e} = ((F_{\perp})^e)^{\perp} \;,$$

to pa se ujema tudi z definicijo

$$F_{*e}(b) = \overset{*}{\nabla}_{\substack{a \subseteq b \\ a \in A}} F(a) \;, \quad b \in B_A \;.$$

Naslednja trditev je preprosta posledica definicij.

1.2.5. <u>Trditev</u>:

(a) Notranja razširitev je preslikava iz pfm A v pfm B_A, ki ohranja urejenost in preslika sup v sup.

(b) Zunanja razširitev je preslikava iz pfm A v pfm B^A, ki ohranja urejenost in preslika inf v inf.

(c) Slike zunanje in notranje razširitve so vselej monotone funkcije.

(d) Če je funkcija F monotona, sta funkciji F_e in F^e njeni razširitvi.

(e) Za poljubno funkcijo F je $\mathrm{Inv}\, F \subseteq \mathrm{Inv}\, F_e$ in $\mathrm{Inv}\, F \subseteq \mathrm{Inv}\, F^e$.

1.2.6. <u>Trditev</u>: Naj bosta $A,B \in PPE$, $A \subseteq B$ taki, da je $\left\{\begin{matrix} B^A \supseteq B \\ B_A \supseteq B \end{matrix}\right\}$, funkciji $F \in \mathrm{pfm}\, A$ in $G \in \mathrm{pfm}\, B$ pa taki, da je G monotona in $\left\{\begin{matrix} F \geqslant G \\ F \leqslant G \end{matrix}\right\}$ na A. Tedaj je $\left\{\begin{matrix} F^e \geqslant G \\ F_e \leqslant G \end{matrix}\right\}$ na B .

Zgornja trditev nam pove: Zunanja razširitev je največja monotona razširitev monotone funkcije, notranja raširitev pa najmanjša.

Dogovorimo se še, da bomo v prihodnjih dveh razdelkih dokazovali pri trditvah s po dvema verzijama: "notranjo" in "zunanjo", le po eno od teh inačic; druga bo namreč vselej sledila po principu dualnosti. Ta dogovor upoštevajmo že v dokazu trditve 1.2.6.

Dokaz: Vzemimo poljuben $b \in B$ in preverimo

$$F^e(b) = \bigcap \{F(a) \; ; \; a \in A, \; a \geq b\} \supseteq$$

$$\supseteq \bigcap \{G(a) \; ; \; a \in A, \; a \geq b\} \supseteq \; G(b) \; .$$

1.3. Odlikovanost

1.3.1. <u>Definicija</u>: Naj bosta $A, B \in PPE$, $A \subseteq B$ in $F \in \text{pfm } B$. Če za poljubne $b, a_1, a_2 \in A$, za katere je $a_1 \cup a_2 \supseteq b$, velja

$$F(a_1) \nabla F(a_2) \supseteq F(b) ,$$

pravimo, da je F <u>notranje odlikovana</u> glede na A ; če pa za poljubne $b, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katere je $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \supseteq b$, velja

$$\mathop{\nabla}_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) \supseteq F(b) ,$$

pravimo, da je F <u>notranje σ odlikovana</u> glede na A. Če za poljubne $b, a_1, a_2 \in A$, za katere je $a_1 \cap a_2 \subseteq b$, velja

$$F(a_1) \cap F(a_2) \subseteq F(b) ,$$

pravimo, da je F <u>zunanje odlikovana</u> glede na A ; če pa za poljubne $b, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katere je $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \subseteq b$, velja

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) \subseteq F(b) ,$$

pravimo, da je F <u>zunanje σ odlikovana</u> glede na A. V vseh teh primerih pravimo, da je družina A <u>območje</u> (ustrezne) <u>odlikovanosti</u> funkcije F.

1.3.2. <u>Trditev</u>: Naj bo $F \in \mathrm{pfm}\, B$ in $A \subseteq B$, tedaj je

(a) Če je F zunanje ali notranje odlikovana glede na A, je na A monotona.

(b) Če je F $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ σ odlikovana glede na A, je glede na A tudi $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ odlikovana.

(c) Če je F $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ odlikovana glede na A in je množica A zaprta za končne $\left\{\begin{matrix}\text{preseke}\\ \text{unije}\end{matrix}\right\}$, je F tudi σ odlikovana glede na A natanko tedaj, kadar za poljubne $b \in A$ in $\left\{\begin{matrix}\text{padajoče}\\ \text{naraščajoče}\end{matrix}\right\}$ zaporedje $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katero je $\left\{\begin{matrix}\bigcap a_k \subseteq b\\ \bigcup a_k \supseteq b\end{matrix}\right\}$, velja $\left\{\begin{matrix}\bigcap F(a_k) \subseteq F(b)\\ \nabla F(a_k) \supseteq F(b)\end{matrix}\right\}$.

(d) Če je F kakorkoli odlikovana glede na A, je enako odlikovana tudi glede na poljuben $C \subseteq A$.

Odlikovanost je torej šibkejša zahteva od σ odlikovanosti. O tem, da je ta zahteva v splošnem strogo šibkejša, nas prepriča tale preprost primer: Naj bo $E = \mathbb{N}$, $A = B = P\mathbb{N}$, $F(a) = X$, če a vsebuje vsa števila od nekega $n \in \mathbb{N}$ naprej in $F(a) = \{0\}$ sicer; F je zunanje odlikovana, ni pa zunanje σ odlikovana glede na A.

Dokaz: (a) Vzamemo $a,b \in A$, $a \subseteq b$ in pišemo $a_1=a, a_2=a$.

(b) Vzamemo $b, a_1, a_2 \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq b$ in tvorimo zaporedje $a_1, a_2, a_2, a_2, \ldots$.

(c) V eno smer jasno. Nazaj: Izberemo poljubne $b, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katere $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} a_k \subseteq b$. Tvorimo novo zaporedje $b_k = \bigcap_{j=1}^{k} a_j$, $k \in \mathbb{N}$; tedaj $b_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$ in

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(a_k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{k} F(a_j) \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(b_k) \subseteq F(b) .$$

(d) Jasno.

1.3.3. Trditev: Naj bo $F \in \mathrm{pfm}\, B$ in $A \subseteq B$, tedaj je

(a) Če je F $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ odlikovana glede na A, velja za poljubna $a,b \in A$, za katera $\left\{\begin{matrix} a\cap b \in A\\ a\cup b \in A\end{matrix}\right\}$, da je

$$(1) \qquad \left\{\begin{matrix} F(a) \cap F(b) & = & F(a\cap b)\\ F(a) \nabla F(b) & = & F(a\cup b)\end{matrix}\right\} .$$

(b) Če je A zaprta za končne $\left\{\begin{matrix}\text{preseke}\\ \text{unije}\end{matrix}\right\}$ in za poljubna $a,b \in A$ velja (1), je funkcija F $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ odlikovana glede na A.

(c) Če je F $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ σ odlikovana glede na A, velja za poljubne $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katere

$$\left\{\begin{matrix} \bigcap a_k \in A \\ \bigcup a_k \in A \end{matrix}\right\}, \text{ da je}$$

(2) $$\left\{\begin{matrix} \bigcap F(a_k) = F(\bigcap a_k) \\ \nabla F(a_k) = F(\bigcup a_k) \end{matrix}\right\}.$$

(d) Če je A zaprta za kvečjemu števne $\left\{\begin{matrix} \text{preseke} \\ \text{unije} \end{matrix}\right\}$ in

za poljubne $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, velja (2), je funkcija

$F \left\{\begin{matrix} \text{zunanje} \\ \text{notranje} \end{matrix}\right\}$ σ odlikovana glede na A.

<u>Dokaz</u>: (a) Po 1.3.2(a) je F monotona in zato

$$F(a) \cap F(b) \subseteq F(a \cap b) \subseteq F(a) \cap F(b) .$$

(b) Naj velja (1); tedaj iz $a,b \in A$, $a \subseteq b$, sledi $F(a) \cap F(b) = F(a)$ in F je monotona. Zato velja za $b, a_1, a_2 \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq b$, da je

$$F(a_1) \cap F(a_2) = F(a_1 \cap a_2) \subseteq F(b) .$$

(c) Po 1.3.2(b) in (a) je F monotona in zato

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) \subseteq F(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k) \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) .$$

(d) Tako, kot v točki (b) se prepričamo, da je F monotona in nato izberemo poljubne $b, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, za katere $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \subseteq b$, ter ocenimo

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) = F\Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k\Big) \subseteq F(b) .$$

1.3.4. Definicija: Množica $A \in \mathrm{PPE}$ je notranje regularni generator, če

(R1) $\emptyset, E \in A$

(R2) A je zaprta za končne unije

(R3) A je zaprta za kvečjemu števne preseke

(R4) vsak element iz A' je kvečjemu števna unija elementov iz A .

Množica A je zunanje regularni generator, če je A' notranje regularni generator. V tem primeru pravimo, da je par (A', A) par regularnih generatorjev.

Množici A in A' generirata seveda vselej isto algebro in zato tudi isto σ algebro. Če je E kompakten, Hausdorffov topološki prostor in zadošča drugemu aksiomu števnosti, je njegova topologija zagotovo zunanje regularni generator in generira ravno σ algebro vseh Borelovih množic na E.

1.3.5. Trditev: Naj bo A $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ regularni generator in B algebra, generirana z A. Tedaj je vsak element iz B kvečjemu števni presek elementov iz $\left\{\begin{matrix}A\\ A'\end{matrix}\right\}$ in hkrati kvečjemu števna unija elementov iz $\left\{\begin{matrix}A'\\ A\end{matrix}\right\}$.

V zgoraj opisanem primeru nam trditev 1.3.5 pove, da je vsak element iz B hkrati F_σ in G_δ.

Dokaz: Naj bo C družina tistih $a \in PE$, ki so hkrati kvečjemu števne unije elementov iz A' in kvečjemu števni preseki elementov iz A. Hitro se prepričamo, da je C algebra množic in da je $A \subseteq C$.

1.3.6. Trditev: Če je A $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ regularni generator, B algebra, generirana z A in $F \in \text{pfm}\, A$ $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ σ odlikovana glede na A, je $\left\{\begin{matrix}F^e\ \text{zunanje}\\ F_e\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ σ odlikovana glede na B.

Dokaz: Naj bo F zunanje σ odlikovana glede na A in $c, b_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$, taki, da je $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} b_k \subseteq c$. Nadalje naj bo $d \in A$, $d \supseteq c$ poljuben in zaporedja $a_k^j \in A$, $j,k \in \mathbb{N}$, taka, da je $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} a_k^j = b_k$ (obstajajo po prejšnji trditvi). Tedaj je

$$
(3) \quad \begin{aligned}
\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^e(b_k) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^e\Big(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} a_k^j\Big) \subseteq \bigcap_{k,j \in \mathbb{N}} F^e(a_k^j) \\
&= \bigcap_{k,j \in \mathbb{N}} F(a_k^j) \subseteq F(d) ;
\end{aligned}
$$

pri prvi oceni smo uporabili monotonost zunanje razširitve; naslednji enačaj so nam dale trditve 1.3.2(a) in (b) ter 1.2.5(d); zadnjo oceno pa nam je dala definicija σ odlikovanosti.

Izraz na skrajni levi ocene (3) je neodvisen od izbire množice $d \supseteq c$, zato lahko na skrajni desni strani ocene vzamemo presek po vseh $d \supseteq c$, $d \in A$ in dobimo po definiciji zunanje razširitve

$$
\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^e(b_k) \subseteq F^e(c) ,
$$

kar je bilo treba dokazati.

1.4. Odlikovanja

1.4.1. <u>Definicija</u>: Naj bo $A \in PPE$, $F \in \mathrm{pfm}\, A$, $B_{2A} = \{b \in PE;$ obstajata $a_1, a_2 \in A,\ a_1 \cup a_2 \supseteq b\}$ in $B_{\sigma A} = \{b \in PE;$ obstajajo $a_k \in A, k \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \supseteq b\}$.
Definiramo <u>notranje odlikovanje</u> funkcije F, $F_A \in \mathrm{pfm}\, B_{2A}$ s predpisom

$$F_A(b) = \bigcap \{F(a_1) \nabla F(a_2); a_1, a_2 \in A,\ a_1 \cup a_2 \supseteq b\},\quad b \in B_{2A};$$

in <u>notranje σ odlikovanje</u> funkcije F, $F_{\sigma A} \in \mathrm{pfm}\, B_{\sigma A}$ s predpisom

$$F_{\sigma A}(b) = \bigcap \{\nabla_{k \in \mathbb{N}} F(a_k);\ a_k \in A, k \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \supseteq b\},\quad b \in B_{\sigma A}.$$

Nadalje pišemo $B^{2A} = \{b \in PE;$ obstajata $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq b\}$ in $B^{\sigma A} = \{b \in PE;$ obstajajo $a_k \in A, k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \subseteq b\}$ ter definiramo <u>zunanje odlikovanje</u> funkcije F, $F^A \in \mathrm{pfm}\, B^{2A}$ s predpisom

$$F^A(b) = \nabla \{F(a_1) \cap F(a_2);\ a_1, a_2 \in A,\ a_1 \cap a_2 \subseteq b\},\quad b \in B^{2A};$$

in <u>zunanje σ odlikovanje</u> funkcije F, $F^{\sigma A} \in \mathrm{pfm}\, B^{\sigma A}$ s predpisom

$$F^{\sigma A}(b) = \nabla \{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k);\ a_k \in A, k \in \mathbb{N},\ \bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \subseteq b\},\quad b \in B^{\sigma A}.$$

Družini A pravimo <u>območje</u> (ustreznega) <u>odlikovanja</u>.

Če je $F \in \text{pfm } B$, $B \supseteq A$, pravimo odlikovanjem skrčitve funkcije F na A, odlikovanja funkcije F glede na A in jih spet označujemo z F_A, $F_{\sigma A}$, F^A in $F^{\sigma A}$.

Seveda v splošnem odlikovanja neke funkcije glede na A še niso (ustrezno) odlikovana glede na A. Trivialen protiprimer lahko zasnujemo že na množici E z vsaj dvema elementoma in prostoru X, ki je vsaj dvodimenzionalen.

1.4.2. <u>Trditev</u>: Naj bo $F \in \text{pfm } B$ in $A \subseteq B$, tedaj je

(a) Vsako odlikovanje funkcije F glede na A je monotona funkcija.

(b) Vselej je $\left\{\begin{matrix} F \leq F^A \\ F \geq F_A \end{matrix}\right\}$ na A in $\left\{\begin{matrix} F^A \leq F^{\sigma A} \text{ na } B^{2A} \\ F_A \geq F_{\sigma A} \text{ na } B_{2A} \end{matrix}\right\}$.

(c) Funkcija F je $\left\{\begin{matrix} \text{zunanje} \\ \text{notranje} \end{matrix}\right\}$ (σ) odlikovana glede na A natanko tedaj, kadar je njeno $\left\{\begin{matrix} \text{zunanje} \\ \text{notranje} \end{matrix}\right\}$ (σ) odlikovanje razširitev skrčitve funkcije F na A.

(d) Če je $C \supseteq A$, $G \in \text{pfm } C$ in $F \leq G$ na A, je $F^{(\sigma)A} \leq G^{(\sigma)A}$ na $B^{2A}(B^{\sigma A})$ in $F_{(\sigma)A} \leq G_{(\sigma)A}$ na $B_{2A}(B_{\sigma A})$.

(e) Če je $C \subseteq A$, je $\left\{\begin{matrix} F^{(\sigma)C} \leq F^{(\sigma)A} & \text{na } B^{2C}(B^{\sigma C}) \\ F_{(\sigma)C} \geq F_{(\sigma)A} & \text{na } B_{2C}(B_{\sigma C}) \end{matrix}\right.$.

(f) Če je $C \supseteq A$, $G \in \mathrm{pfm}\ C$ $\begin{Bmatrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{Bmatrix}$ (σ) odlikovana glede na A in $\begin{Bmatrix} G \geqslant F \\ G \leqslant F \end{Bmatrix}$ na A, je $\begin{Bmatrix} G \geqslant F^{(\sigma)A} \\ G \leqslant F_{(\sigma)A} \end{Bmatrix}$ na A.

(g) Vselej je $\mathrm{Inv}\ F \subseteq \mathrm{Inv}\ F_{(\sigma)A}$ in $\mathrm{Inv}\ F \subseteq \mathrm{Inv}\ F^{(\sigma)A}$.

Dokaz je preprost in ga le skicirajmo: (a) ∇ po večji družini je večji. (b) Pri $b \in A$ vzamemo $a_1=a_2=b$; pri $b \in B^{2A}$ in $a_1,a_2 \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq b$, vzamemo zaporedje $a_1,a_2,a_2,a_2,\dots$. (c) Če je $F^A=F$, je za $a_1,a_2,b \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq b$, $F(a_1) \cap F(a_2) \subseteq F^A(b)=F(b)$. Če pa je F zunanje odlikovana, je $F^A \leqslant F$ na A in enačaj dobimo po točki (b). Dokaz za σ odlikovanost je analogen. (d),(e) Jasno. (f) Uporabimo (d) in (c). (g) Uporabimo trditev 0.3.2(b).

1.4.3. Trditev: Naj bo $F \in \mathrm{pfm}\ A$, tedaj obstaja funkcija $\begin{Bmatrix} F^o \\ F_o \end{Bmatrix} \in \mathrm{pfm}\ A$, za katero velja

(a) $\begin{Bmatrix} F^o \\ F_o \end{Bmatrix}$ je $\begin{Bmatrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{Bmatrix}$ (σ) odlikovana glede na A.

(b) Na A velja $\begin{Bmatrix} F^o \geqslant F \\ F_o \leqslant F \end{Bmatrix}$.

(c) Če $G \in \mathrm{pfm}\ A$ zadošča (a) in (b), je $\begin{Bmatrix} F^o \leqslant G \\ F_o \geqslant G \end{Bmatrix}$.

(d) S pogoji (a),(b) in (c) je $\begin{Bmatrix} F^o \\ F_o \end{Bmatrix}$ enolično določena.

(e) $\mathrm{Inv}\ F \subseteq \mathrm{Inv} \begin{Bmatrix} F^o \\ F_o \end{Bmatrix}$.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $\mathcal{F}$ družina vseh funkcij $G \in \mathrm{pfm}\, A$, za katere velja (a) in (b); družina $\mathcal{F}$ ni prazna, saj vsebuje funkcijo $G(a) = X$, $a \in A$. Definiramo $F_o = \inf_{G \in \mathcal{F}} G$.

Preverimo v primeru "brez $\mathfrak{S}$", da je funkcija F_o zunanje odlikovana! Izberimo take $a_1, a_2, b \in A$, da je $a_1 \cap a_2 \subseteq b$, tedaj je

$$F_o(a_1) \cap F_o(a_2) = [\bigcap_{G_1 \in \mathcal{F}} G_1(a_1)] \cap [\bigcap_{G_2 \in \mathcal{F}} G_2(a_2)] =$$

$$= \bigcap_{G_1, G_2 \in \mathcal{F}} [G_1(a_1) \cap G_2(a_2)] \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{G \in \mathcal{F}} [G(a_1) \cap G(a_2)] \subseteq \bigcap_{G \in \mathcal{F}} G(b) = F_o(b) .$$

V primeru "s $\mathfrak{S}$" preverimo na soroden način, da je F_o zunanje $\mathfrak{S}$ odlikovana in (a) velja. Ker je za vsak $G \in \mathcal{F}$, $G \geqslant F$, je tudi $F_o \geqslant F$ in (b) velja. Če za neki $G \in \mathrm{pfm}\, A$ velja (a) in (b), je $G \in \mathcal{F}$, zato $G \geqslant F_o$, torej velja tudi (c). Če pa za neki $G \in \mathrm{pfm}\, A$ velja hkrati (a), (b) in (c), je po prejšnjem najprej $G \geqslant F_o$; ker pa za F_o velja (a) in (b), je tudi $G \leqslant F_o$, zato $G = F_o$ in (d) velja.

Dokažimo točko (e)! V ta namen izberimo poljuben $T \in \mathrm{Inv}\, F$ in označimo z $\mathcal{F}$ družino vseh tistih $G \in \mathrm{pfm}\, A$, za katere je $T \in \mathrm{Inv}\, G$ in $F \leqslant G \leqslant F_o$.

Družina $\mathcal{F}$ gotovo ni prazna, saj vsebuje funkcijo F. Pišimo $G_o = \sup_{G \in \mathcal{F}} G$, tedaj je seveda $T \in \operatorname{Inv} G_o$, pa tudi $F \leq G_o \leq F_o$, zato je $G_o \in \mathcal{F}$. Naj bo H_o skrčitev funkcije $G_o^{(\sigma)A}$ na A, tedaj je po trditvi 1.4.2(b), (d) in (f), $F \leq F^{(\sigma)A} \leq H_o \leq F_o$ na A, po 1.4.2(g) pa $T \in \operatorname{Inv} H_o$, torej je $H_o \in \mathcal{F}$ in zato $H_o \leq G_o$. Po drugi strani pa dobimo po 1.4.2(b) $G_o \leq H_o$, od tod $G_o = H_o$ in po 1.4.2(c) je G_o zunanje (σ) odlikovana. Zaradi $F \leq G_o$ je po prejšnjem $F_o \leq G_o$; ker pa je hkrati $G_o \leq F_o$, je $G_o = F_o$ in $T \in \operatorname{Inv} F_o$.

1.4.4. Definicija: Funkcijo $F_o \in \operatorname{pfm} A$, ki zadošča pogojem (a),(b) in (c) trditve 1.4.3, imenujemo natančno $\left\{\begin{array}{l}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{array}\right\}$ (σ) odlikovanje funkcije $F \in \operatorname{pfm} A$ in jo označimo z $\left\{\begin{array}{l}F^{m(\sigma)A}\\ F_{m(\sigma)A}\end{array}\right\}$. V nadaljnjem bomo privzeli, da so funkcije F_{mA}, $F_{m\sigma A}$, F^{mA}, $F^{m\sigma A}$ definirane (po vrsti) na B_{2A}, $B_{\sigma A}$, B^{2A} oziroma $B^{\sigma A}$. Za natančna odlikovanja bomo jemali ustrezna odlikovanja teh funkcij, ki so po trditvi 1.4.2(e) prav njihove razširitve.

1.4.5. Trditev: Naj bo A $\left\{\begin{array}{l}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{array}\right\}$ regularni generator, B algebra, generirana z A in $F \in$ pfm A monotona; tedaj je

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} (F^e)^{\sigma B} = F^{\sigma A} \\ (F_e)_{\sigma B} = F_{\sigma A} \end{array} \right\} \text{ na B.}$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} (F^e)^{m\sigma B} = F^{m\sigma A} \\ (F_e)_{m\sigma B} = F_{m\sigma A} \end{array} \right\} \text{ na B.}$$

<u>Dokaz</u>: (a) Ker je $A \subseteq B \subseteq B^{\sigma A}$, je po 1.4.2(e) $F^{\sigma A} \leq (F^e)^{\sigma B}$. Pa izberimo zdaj take $b, a_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$, da je $\bigcap_{k \in N} a_k \subseteq b$ in (trditev 1.3.5) taka zaporedja $c_k{}^j$, $k,j \in \mathbb{N}$, da je $a_k = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} c_k{}^j$, $k \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^e(a_k) \subseteq \bigcap_{k,j \in \mathbb{N}} F^e(c_k{}^j) = \bigcap_{k,j \in \mathbb{N}} F(c_k{}^j) \subseteq F^{\,A}(b)$$

in zato $(F^e)^{\sigma' B} \subseteq F^{\sigma A}$.

(b) Dokažimo najprej, da se $F^{m\sigma A}$ in $(F^e)^{m\sigma B}$ na B ujemata z zunanjima razširitvama svojih skrčitev na A. Označimo z G skrčitev funkcije $F^{m\sigma A}$ na A in izberimo $b \in B$, $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \subseteq b$ (trditev 1.3.5). Tedaj

$$G^e(b) = \bigcap_{\substack{a \supseteq b \\ a \in A}} G(a) \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G(a_k) \subseteq F^{m\sigma A}(b)$$

in $G^e \leq F^{m\sigma A}$ na B. Ker pa je $F^{m\sigma A}$ monotona in se na A ujema z G, je po trditvi 1.2.6 $G^e \geqslant F^{m\sigma A}$ na B. Isti razmislek velja tudi za funkcijo $(F^e)^{m\sigma B}$ in točka (b) bo veljala na vsem B, brž ko jo dokažemo na A.

Seveda je $F^{m\sigma A} \geqslant F$ na A, zato po 1.4.2(d) $F^{m\sigma A} \geqslant F^{\sigma A}$ na B in po točki (a) $F^{\sigma A} = (F^e)^{\sigma B}$ na B. Ker je po trditvi 1.3.6 funkcija $F^{m\sigma A}$ zunanje σ odlikovana glede na B, je

$$F^{m\sigma A} \geqslant ((F^e)^{\sigma B})^{m\sigma B} = (F^e)^{m\sigma B}$$

celo na B. Po drugi strani pa je $(F^e)^{m\sigma B} \geqslant F^e = F$ na A in $(F^e)^{m\sigma B}$ je zunanje σ odlikovana glede na A, zato je $(F^e)^{m\sigma B} \geqslant F^{m\sigma A}$ na A in trditev velja.

1.4.6. <u>Pripomba</u>: V zadnjih dveh razdelkih smo povsem zanemarili "* primer". Preslikava α iz pfm(A,X) v *pfm (A',X*) je antiizomorfizem med obema mrežama. Na mreži *pfm (A',X*) lahko analogno s pojmi odlikovanosti in odlikovanj vpeljemo pojme * odlikovanosti in * odlikovanj. Pri tem preslika α notranje odlikovane funkcije v zunanje * odlikovane, notranje odlikovanje neke funkcije v zunanje * odlikovanje α slike te funkcije, itd. V refleksivnem prostoru se seveda vsi pojmi z zvezdico ujemajo z ustreznimi pojmi brez zvezdice.

1.5. Povezava med prostorskimi in projektorskimi funkcijami

1.5.1. Definicija: Naj bo $A \in PPE$, $F \in \mathrm{pfm}\, A$ in pišimo

$$D(A,F) = \{ a \in A;\ Ca \in A \text{ in } F(a) \cap F(Ca) = \{0\} \}.$$

Če $D(A,F) \neq \emptyset$, definiramo za $a \in D(A,F)$ splošen projektor $P_F(a)$ s predpisom: $\mathrm{Def}\, P_F(a) = F(a) \vee F(Ca)$ in za $x = u+v \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$, $u \in F(a)$, $v \in F(Ca)$ je

$$P_F(a)\, x = u \ .$$

Za dobljeno projektorsko funkcijo P_F, definirano na območju $D(A,F)$, pravimo, da je prirejena prostorski funkciji F.

Če pa je P projektorska funkcija z območjem definiranosti A, pišemo za $a \in A$

$$F_P(a) = \overline{\mathrm{Im}\, P(a)} \ .$$

Za dobljeno funkcijo $F_P \in \mathrm{pfm}\, A$ pravimo, da je prirejena projektorski funkciji P.

1.5.2. Trditev: Za vsako funkcijo $F \in \mathrm{pfm}\, A$ je

(a) P_F vselej zaprta projektorska funkcija na $D(A,F)$;

(b) za poljubna $a \in D(A,F)$, $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$ velja $Ca \in D(A,F)$, $x \in \mathrm{Def}\, P_F(Ca)$ in

$$P_F(a)\, x + P_F(Ca)\, x = x \ ;$$

(c) F_{P_F} je skrčitev funkcije F na D(A,F) .

Dokaz: (a) Glej trditev 0.3.6(c); (b) in (c) je preprosto preverjanje.

1.5.3. Trditev: Za vsako projektorsko funkcijo P je:

(a) Če je P zaprta in za poljubna $a \in A \cap A'$, $x \in$ Def P(a) velja $x \in$ Def P(Ca) in

$$P(a)\,x + P(Ca)\,x = x,$$

je $D(A,F_P) = A \cap A'$ in P_{F_P} je območna skrčitev funkcije P na $A \cap A'$.

(b) Če v točki (a) namesto zaprtosti predpostavimo, da se P da zapreti, je P_{F_P} najmanjša zaprta prostorska razširitev območne skrčitve funkcije P na $A \cap A'$.

Dokaz: (a) Po predpostavki dobimo, da je za $a \in A \cap A'$ Im P(Ca) = Ker P(a) in ker je P zaprta, $F_P(a) \cap F_P(Ca) = \{0\}$ in od tod $P_{F_P}(a) = P(a)$. (b) Preprost razmislek.

1.5.4. Trditev:

(a) Naj bo $F \in$ pfm A skrčitev funkcije $G \in$ pfm B in

$A \subseteq B$. Tedaj je $D(A,F) \subseteq D(B,G)$ in P_F je območna skrčitev projektorske funkcije P_G.

(b) Naj bo $F,G \in \mathrm{pfm}\, A$ in $F \leq G$. Tedaj je $D(A,F) \supseteq D(A,G)$ in P_G je prostorska razširitev območne skrčitve funkcije P_F na $D(A,G)$.

(c) Če je $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona, velja za poljubne $a,b \in D(A,F)$, $a \leq b$, in $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$, da je $P_F(a)\, x \in \mathrm{Def}\, P_F(b)$ in $P_F(b)\, P_F(a)\, x = P_F(a)\, x$.

(d) Če je $F \in \mathrm{pfm}\, A$ in $T \in \mathrm{Inv}\, F$, potem P_F komutira s T; točneje, za poljubna $a \in D(A,F)$, $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$, je $Tx \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$ in $P_F(a)\, T\, x = T\, P_F(a)\, x$.

Dokaz: (a) Naj bo $a \in D(A,F)$; tedaj je $a, Ca \in A$ in $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$, zato $a, Ca \in B$ in $G(a) = F(a)$, $G(Ca) = F(Ca)$, ter končno $a \in D(B,G)$, $P_F(a) = P_G(a)$.

(b) Naj bo $a \in D(A,G)$, tedaj je $a, Ca \in A$ in $G(a) \cap G(Ca) = \{0\}$, zaradi $F \leq G$ pa tudi $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$, zato $a \in D(A,F)$; za $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$ pa velja $x \in \mathrm{Def}\, P_G(a)$ in $P_G(a)\, x = P_F(a)\, x$.

(c) Za $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$ je $P_F(a)\, x \in F(a) \subseteq F(b) \subseteq \mathrm{Def}\, P_F(b)$ in $P_F(b)\, P_F(a)\, x = P_F(a)\, x$.

(d) Naj bo $a \in D(A,F)$ in $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$; tedaj je $x = u+v$, $u \in F(a)$, $v \in F(Ca)$. Za $T \in \mathrm{Inv}\, F$ je $Tu \in F(a)$, $Tv \in F(Ca)$, $Tx = Tu + Tv \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$ in $P_F(a)\, T\, x = Tu = T\, P_F(a)\, x$.

1.5.5. <u>Trditev</u>:

(a) Če je projektorska funkcija P območna skrčitev projektorske funkcije Q, je F_P skrčitev funkcije F_Q.

(b) Če je projektorska funkcija P prostorska skrčitev projektorske funkcije Q, je $F_P \leq F_Q$.

(c) Če je projektorska funkcija P, definirana na območju A, taka, da za poljubne $a,b \in A$, $a \subseteq b$, $x \in \mathrm{Def}\, P(a)$, velja $x \in \mathrm{Def}\, P(b)$ in $P(b)\, P(a)\, x = P(a)\, x$, je F_P monotona.

(d) Če $T \in L(X)$ komutira s projektorsko funkcijo P, je $T \in \mathrm{Inv}\, F_P$.

<u>Dokaz</u>: (a) in (b): Preprosto preverjanje. (c) Za $x \in \mathrm{Im}\, P(a)$ velja $x \in \mathrm{Im}\, P(b)$ in zato $F(a) \leq F(b)$.
(d) Za a iz definicijskega območja funkcije P in $x \in \mathrm{Im}\, P(a)$, je $T\, x = T\, P(a)\, x = P(a)\, T\, x \in \mathrm{Im}\, P(a)$ in zaradi zveznosti ohranja T prostor $F_P(a)$ invarianten.

1.5.6. <u>Trditev</u>: Naj bo $F \in \mathrm{pfm}\ A$; tedaj velja:

(a) Če je $a \in D(A,F) \cap D(A',F^{\perp})$, je $P_F(a)$ gosto definiran in zaprt, $P_{F^{\perp}}(a)$ * gosto definiran in * zaprt ter velja

$$P_F(a)^* = P_{F^{\perp}}(a) \text{ .}$$

(b) Če je $\emptyset \in A$ in F monotona, obstaja P_F na vsem A natanko tedaj, kadar je $A' \subseteq A$ in $F^A(\emptyset) = \{0\}$.

(c) Če je $E \in A$ in F monotona, obstaja $P_{F^{\perp}}$ na vsem A natanko tedaj, kadar je $A' \subseteq A$ in $F_A(E) = X$.

(d) Če projektorski funkciji P_F in $P_{F^{\perp}}$ obe obstajata na vsem A, je P_F po točkah gosto definirana in zaprta, $P_{F^{\perp}}$ po točkah * gosto definirana in * zaprta in velja

$$P_F^{*} = P_{F^{\perp}} \text{ .}$$

<u>Dokaz</u>: (a) Glej trditev 0.3.6(d) in definicijo funkcije $F^{\perp}$. (b) Za $a \in A$ je $Ca \in A$, $a \cap Ca = \emptyset$, zato $F(a) \cap F(Ca) \subseteq F^A(\emptyset) = \{0\}$ in $a \in D(A,F)$. Nazaj: Če je $a \in A'$, je $Ca \in D(A,F)$ in zato $a \in A$, torej $A' \subseteq A$.

Za poljubna $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \cap a_2 \subseteq \emptyset$ pa velja $Ca_1 \supseteq a_2$. in zaradi monotonosti funkcije F

$$\{0\} = F(a_1) \cap F(Ca_1) \supseteq F(a_1) \cap F(a_2) \text{ ,}$$

torej je $F^A(\emptyset) = \{0\}$.

(c) Naj bo $A' \subseteq A$ in $F_A(E) = X$; tedaj za $a \in A$ velja $F(a) \nabla F(Ca) \supseteq F_A(E)$ in po anihilatorskem lema $F^{\perp}(a) \cap F^{\perp}(Ca) = \{0\}$, torej je $a \in D(A', F^{\perp})$. Denimo zdaj, obratno, da je $D(A', F^{\perp}) = A$. Tedaj je spet $A' \subseteq A$ in za $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \cup a_2 \supseteq E$ velja $Ca_1 \cap Ca_2 \subseteq \emptyset$. Ker je F monotona, je $F^{\perp}$ monotona in zato velja $F^{\perp}(Ca_1) \cap F^{\perp}(Ca_2) = \{0\}$, torej po anihilatorskem lema $F(a_1) \nabla F(a_2) = X$ in zato $F_A(E) = X$.

(d) Po predpostavki je $D(A,F) \cap D(A', F^{\perp}) = A$ in lahko uporabimo točko (a) na vsem A.

1.5.7. <u>Trditev</u>: Naj bo A algebra; tedaj velja:

(a) Če je P projektorska funkcija z definicijskim območjem A in je $\mathrm{Deff}\ P = \mathrm{Def}\ P(a)$ za vsak $a \in A$, je F_P notranje odlikovana glede na A in $F_P(E) = \overline{\mathrm{Deff}\ P}$.

(b) Če je $F \in \mathrm{pfm}\ A$ zunanje odlikovana glede na A in je $F(\emptyset) = \{0\}$, obstaja P_F na vsem A in je $\mathrm{Defm}\ P_F = \mathrm{Deff}\ P_F$.

Dokaz: (a) Notranjo odlikovanost preverjamo po trditvi 1.3.3(b). Izberimo $a, b \in A$, $x \in \mathrm{Defm}\, P$; tedaj

$$P(a \cup b)\, x = P(a)\, x + P(b)\, x - P(a)\, P(b)\, x ,$$

zato

$$\mathrm{Im}\, P(a \cup b) = \mathrm{Im}\, P(a) \vee \mathrm{Im}\, P(b)$$

in končno

$$F(a \cup b) = F(a) \nabla F(b) \quad .$$

(b)Naj bo $x \in \mathrm{Defm}\, P_F$, $a, b \in A$ in $d_1 = a \cap b$, $d_2 = a \cap Cb$, $d_3 = Ca \cap b$, $d_4 = Ca \cap Cb$. Nadalje pišimo

$$x = u_1 + u_{234} , \quad u_1 \in F(d_1), \quad u_{234} \in F(Cd_1) ,$$

$$x = u_{12} + u_{34} , \quad u_{12} \in F(a), \quad u_{34} \in F(Ca) ,$$

$$x = u_{123} + u_4 , \quad u_{123} \in F(Cd_4), \quad u_4 \in F(d_4) .$$

Zaradi zunanje odlikovanosti funkcije F je

$$u_2 = u_{12} - u_1 = u_{234} - u_{34} \in F(a) \cap F(Cd_1) \subseteq F(d_2)$$

in

$$u_3 = u_{34} - u_4 = u_{123} - u_{12} \in F(Ca) \cap F(Cd_4) \subseteq F(d_3) ,$$

torej je $x = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, $u_k \in F(d_k)$, $k=1,2,3,4$. Seveda je $P_F(b)\, x = u_1 + u_3 \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$; $a \in A$ je bil poljuben, torej $P_F(b)\, x \in \mathrm{Defm}\, P_F$. Pa spet fiksirajmo $a \in A$, tedaj je $P_F(a)\, P_F(b)\, x = u_1 = P_F(a \cap b)\, x$ in (KA1) velja. Nato je $P_F(a \cup b)\, x = u_1 + u_2 + u_3 =$

$= (u_1 + u_3) + (u_1 + u_2) - u_1 = P_F(a)\, x + P_F(b)\, x -$
$- P_F(a \cap b)\, x$ in (KA2) velja; v posebnem primeru $a = b = E$ pa dobimo še (KA3).

1.5.8. <u>Trditev</u>: Naj bo A σ algebra; tedaj velja:

(a) Če je P projektorska funkcija z definicijskim območjem A in je $\mathrm{Defw}\, P = \mathrm{Def}\, P(a)$ za vsak $a \in A$, je F_P notranje σ odlikovana glede na A in $F_P(E) = \overline{\mathrm{Defw}\, P}$.

(b) Če je X refleksiven, $F \in \mathrm{pfm}\, A$ zunanje σ odlikovana glede na A in $F(\emptyset) = \{0\}$, obstaja P_F na vsem A in je

$$\mathrm{Defw}\, P_F = \mathrm{Defs}\, P_F = \{ x \in \mathrm{Defm}\, P_F;\ \sup_{a \in A} \| P_F(a)\, x \| < +\infty \}.$$

<u>Dokaz</u>: (a) Notranjo σ odlikovanost preverjamo po trditvi 1.3.3(d). Izberimo $a_k \in A, k \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathrm{Defw}\, P$; tedaj je za naraščajoče zaporedje $b_k = \bigcup_{j=1}^{k} a_j$, $k \in \mathbb{N}$,

$$P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k)\, x = \operatorname*{w-lim}_{k \to \infty} P(b_k)\, x ,$$

zato

$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, P(a_k) \subseteq \mathrm{Im}\, P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k) \subseteq \bigtriangledown_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, P(a_k)$$

in končno

$$F(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k) = \bigtriangledown_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) .$$

(b) Naj bo $M = \{x \in \mathrm{Defm}\, P_F;\ \sup_{a\in A} \|P_F(a)\, x\| < +\infty\}$, tedaj je M linearen prostor pod Defm P_F, ki ga vsi projektorji $P_F(a)$, $a \in A$, ohranjajo invariantnega, torej je M po trditvi 1.5.7(b) možni prostor končne aditivnosti funkcije P_F. Po trditvi 1.1.8(b) in (c) je Defs P_F = Defw $P_F \subseteq M$. Za obratno inkluzijo nam je treba na M preveriti le še točko (c) trditve 1.1.5. V ta namen izberimo poljubno padajoče zaporedje $b_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, s praznim presekom ter poljubna $x \in M$ in $y \in X^*$. Tedaj je

$$(1) \qquad |\langle P(a_k)x \mid y\rangle| \leq \sup_{a\in A} \|P(a)\, x\| \ \mathrm{dist}(y, F(a_k)^{\perp}) \ .$$

Ker je F zunanje σ odlikovana in $F(\emptyset) = \{0\}$, je $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(a_k) = \{0\}$, po anihilatorskem lema $\overset{*}{\nabla}_{k\in\dot{\mathbb{N}}} F(a_k)^{\perp} = X^*$ in ker je X refleksiven, lahko zvezdico nad znakom ∇ izpustimo. Zato konvergira $\mathrm{dist}(y, F(a_k)^{\perp})$ proti 0 in po oceni (1) tudi $\langle P(a_k)x \mid y\rangle$ konvergira proti 0.

DRUGO POGLAVJE

OMEJENE FUNKCIJE

2.0. Usmeritev

V razdelku 2.1 najdemo potrebne in zadostne pogoje za to, da je projektorska funkcija, prirejena dani prostorski funkciji, mera v običajnem pomenu. Poleg tega na novo dokažemo, da ima v refleksivnem prostoru vsaka projektorska mera na algebri enolično razširitev do mere na σ algebri. V razdelku 2.2 vpeljemo pojem regularnosti in dokažemo, da je vsaka Bairova projektorska mera regularna. Možnost integracije po neomejenih projektorjih vpeljemo v razdelku 2.3 s pojmom notranjih in zunanjih mej. S tem v zvezi dobimo: Na natančni meji (če obstaja), je vsak operator, ki ohranja invariantno prvotno funkcijo, omejen; zadostne pogoje za obstoj natančne notranje in natančne zunanje meje; preprost zadosten pogoj za obstoj (hkrati) natančnih in popolnih, notranje in zunanje meje.

Naravno se je vprašati, ali bi lahko po projektorjih integrirali še kako drugače: (1) možnost drugih "vrst" integrala (npr. Riemann-Stieltjesov namesto Lebesgovega) (2) možnost drugačnih topologij (npr. Fréchetska namesto Banachove) (3) večji izbor prostorskih funkcij (npr. linearni prostori, ki jih lahko v normi, krepkejši od prvotne, "napravimo" Banachove, namesto zaprtih podprostorov).

Zanimiv bi bil morda tudi študij algebre zaprtih operatorjev, definiranih z

$$\int f(\lambda)\, dP_F(\lambda) ,$$

kjer je F prostorska funkcija z natančnima in popolnima notranjo in zunanjo mejo, f pa teče po primernih merljivih funkcijah $f : E \to \mathbb{C}$.

2.1. Omejenost

2.1.1. <u>Definicija</u>: Naj bo $A \in PPE$, $F \in \text{pfm}\, A$ in $a \in A$; tedaj pišemo

$$M(a,F) = \sup\left\{ \|x\|;\ x \in F(a); b \in A, b \subseteq Ca; y \in F(b) : \|x+y\| \leq 1 \right\}$$

$$M(A,F) = \sup_{a \in A} M(a,F) .$$

Če je $M(a,F) < +\infty$, je F <u>omejena v točki</u> a; če je F omejena v vsaki točki $a \in A$, je <u>po točkah omejena</u> na A; če pa je $M(A,F) < +\infty$, je F <u>omejena</u> na A.

Zgornja definicija omejenosti je tipično notranja, kot bomo spre videli iz naslednjih lastnosti. Analogne definicije zunanje omejenosti ne bomo nujno potrebovali in jo zato opustimo.

2.1.2. <u>Trditev</u>:

(a) Če je $F,G \in \text{pfm}\, A$, $G \leq F$ in F (po točkah) omejena na A, je G (po točkah) omejena na A ter velja

$$M(a,G) \leq M(a,F), a \in A, \qquad M(A,G) \leq M(A,F) .$$

(b) Če je $B \subseteq A$, $F \in \text{pfm}\, A$, $G \in \text{pfm}\, B$ skrčitev funkcije F in F (po točkah) omejena na A, je G (po točkah) omejena na B ter velja

$$M(a,G) \leq M(a,F), a \in B, \qquad M(B,G) \leq M(A,F) .$$

(c) Če je A zaprta za končne unije, $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona in omejena, je F_e omejena in velja

$$M(B_A, F_e) = M(A, F) .$$

Dokaz: Preprosto je preveriti točki (a) in (b), dokažimo točko (c): Izberimo poljubne take $a, b \in B_A$, $a \subseteq Cb$, $x \in F_e(a)$, $y \in F_e(b)$, da je $\|x+y\| \leq 1$ in naj bo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tedaj obstajata po definiciji notranje razširitve taka $u \in \bigvee\{F(c);\ c \in A,\ c \subseteq a\}$ in $v \in \bigvee\{F(d);\ d \in A,\ d \subseteq b\}$, da je $\|u - x\| \leq \varepsilon$ in $\|v - y\| \leq \varepsilon$. Ker je A zaprta za končne unije in F monotona, obstajata taka $c, d \in A$, $c \subseteq a$, $d \subseteq b$, da je $u \in F(c)$ in $v \in F(d)$. Zaradi $a \subseteq Cb$, je tudi $c \subseteq Cd$, poleg tega

$$\|u+v\| \leq \|x+y\| + \|x-u\| + \|y-v\| \leq 1+2\varepsilon ,$$

zato

$$\|u\| \leq (1+2\varepsilon)\, M(A,F)$$

in

$$\|x\| \leq \varepsilon + (1+2\varepsilon)\, M(A,F) .$$

Od tod dobimo $M(B_A, F_e) \leq M(A,F)$, neenačaj v obratno smer pa po točki (b).

2.1.3. Trditev: Naj bo A algebra in $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona; tedaj velja:

(a) F je po točkah omejena in $F_A(E) = X$ natanko tedaj, kadar je $D(A,F) = A$ in $\mathrm{Defm}\, P_F = X$. V tem primeru je P_F po točkah omejena in velja

$$\| P_F(a) \| = M(a,F),\ a \in A .$$

(b) F je po točkah omejena in $F_{AA}(E) = X$ natanko tedaj, kadar je $D(A,F) = A$ in $\mathrm{Deff}\, P_F = X$. V tem primeru je F zunanje in notranje odlikovana.

Dokaz: (a) Naj bo F po točkah omejena, $F_A(E) = X$ in izberimo poljuben $a \in A$. Denimo, da obstaja $x \in F(a) \cap F(Ca)$, $\|x\| = 1$; tedaj je za $k \in \mathbb{N}$, $x_k = k\,x$, $y_k = -\,k\,x$: $\| x_k + y_k \| = 0 \leq 1$ in $k = \| x_k \|$, zato je $M(a,F) = +\infty$ v nasprotju s predpostavko. Torej je $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$ in $a \in D(A,F)$. Zaradi $F_A(E) = X$ je $P_F(a)$ gosto definiran. Toda za $x \in \mathrm{Def}\, P_F(a)$, $\|x\| \leq 1$, je $P_F(a)\,x \in F(a)$, $x - P_F(a)\,x \in F(Ca)$ in zato $\|P_F(a)\,x\| \leq M(A,F)$, torej je

$$(1) \qquad \| P_F(a) \| \leq M(A,F)$$

in $P_F(a)$ je omejen. Ker je zaprt, je povsod definiran.

Če pa je $D(A,F) = A$ in $\mathrm{Defm}\, P_F = X$, je za vsak $a \in A$ $P_F(a)$ omejen po izreku o zaprtem grafu. Za $b \in A$, $b \subseteq Ca$, $x \in F(a)$, $y \in F(b)$, za katere $\|x + y\| \leq 1$, je zaradi monotonosti funkcije F : $P_F(a)\,(x + y) = x$ in $\|x\| \leq \|P_F(a)\|$, kar nam da

$$(2) \qquad M(a,F) \leq \|P_F(a)\| \ .$$

Zato je F po točkah omejena. Ker je $\mathrm{Defm}\, P_F = X$, je $\mathrm{Def}\, P_F(a) = X$, $a \in A$, zato $F(a) \nabla F(Ca) = X$ in končno $F_A(E) = X$. Oceni (1) in (2) pa nam dasta skupaj $\|P_F(a)\| = M(a,F)$.

(b) Naj bo F po točkah omejena in $F_{AA}(E) = X$. Po točki (a) je $D(A,F) = D(A,F_A) = A$ in $\mathrm{Defm}\, P_F = \mathrm{Defm}\, P_{F_A} = X$. Ker je $F_A \leq F$, je P_{F_A} prostorska skrčitev funkcije P_F, zato sta enaki, od tod $F = F_A$ in F je notranje odlikovana. Dokažimo, da je tudi zunanje odlikovana. Pa naj bodo $a,b \in A$, $x \in F(a) \cap F(b)$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ poljubni. Zaradi notranje odlikovanosti funkcije F obstajata taka $u \in F(a-b)$, $v \in F(a \cap b)$, da je $\|x-(u+v)\| \leq \varepsilon$ in zaradi $x-v \in F(b)$, $u \in F(Cb)$: $\|x-v\| \leq M(b,F)\varepsilon$. Od tod dobimo $x \in F(a \cap b)$ in funkcija F je zunanje odlikovana. Po trditvi 1.5.7(b) je torej $\mathrm{Deff}\, P_F = \mathrm{Defm}\, P_F = X$.

Še nazaj: Če je $\mathrm{Deff}\, P_F = X$, je po trditvi 1.5.7(a) funkcija F notranje odlikovana in zato $X = F(E) = F_A(E) = F_{AA}(E)$; po točki (a) pa je F po točkah omejena.

V naslednjem izreku naj bo A neka algebra množic. Funkcijo $F \in \mathrm{pfm}\, A$ bomo imenovali <u>mera</u>, kadar bo $D(A,F) = A$ in P_F projektorska mera na A. Zaradi lažjega zapisa izreka vpeljimo še dva pogoja na funkcijo $F \in \mathrm{pfm}\, A$:

(O1) F je monotona in omejena, $F_{\sigma A}(E) = X$, $F^A(\emptyset) = \{0\}$.

(O2) F je monotona in omejena, $F^{\sigma A}(\emptyset) = \{0\}$, $F_A(E) = X$.

V pogoju (O1) je po trditvi 2.1.3(a) delni pogoj $F^A(\emptyset) = \{0\}$ posledica ostalih.

2.1.4. <u>Izrek</u>:

(a) Pogoj (O1) velja natanko tedaj, kadar je F mera.

(b) Če velja (O1), je F notranje σ odlikovana.

(c) Če velja (O1), je F zunanje σ odlikovana.

(d) Če velja (O1), velja (O2).

(e) Če je X refleksiven in velja (O2), velja tudi (O1).

Pripomnimo naj, da točka (e) v splošnih Banachovih prostorih ne drži. Oglejmo si namreč prostor $X = l^\infty(\mathbb{N})$ vseh omejenih enostranskih zaporedij, $E = \mathbb{N}$, $A = P\mathbb{N}$, $F(a) = \{(x_k) \in l^\infty(\mathbb{N});\ k \notin a \Rightarrow x_k = 0\}$, $a \in A$. Dobljena funkcija je zunanje σ odlikovana in notranje odlikovana, zato je $F_A(E) = F(E) = X$ in $F^{\sigma A}(\emptyset) = F(\emptyset) = 0$, toda $F_{\sigma A}(E) = c_0(\mathbb{N}) \neq l^\infty(\mathbb{N})$.

Dokaz: Denimo, da velja (O1). Najprej se prepričajmo, da je F notranje σ odlikovana. V ta namen izberimo take $b, a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} a_k \supseteq b$. Tedaj je zaradi $F_{\sigma A}(E) = X$

$$F(Cb) \triangledown \left[\mathop{\triangledown}_{k\in\mathbb{N}} F(a_k \cap b) \right] = X .$$

Zaradi monotonosti funkcije F leži izraz v oglatem oklepaju v $F(b)$, po trditvi 2.1.3(a) je projektor $P_F(b)$ omejen in izraz v oglatem oklepaju je enak $F(b)$. Ker pa je F monotona, je $\triangledown_{k\in\mathbb{N}} F(a_k) \supseteq F(b)$. Funkcija F je torej notranje σ odlikovana in točka (b) velja. Ker je F notranje σ odlikovana, je tudi notranje odlikovana in po 2.1.3(b) je Deff $P_F = X$. Točko (a) bomo torej dokazali v eno smer, ko spreVidimo, da je Defs $P_F = X$; za to pa bo dovolj preveriti, da velja pogoj (σA3) definicije 1.1.4 na vsem X. Izberimo torej poljubne $x \in X$, naraščajoče zaporedje $a_k \in A, k \in \mathbb{N}$, z unijo E in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tedaj obstaja tak $u \in \bigvee_{k\in\mathbb{N}} F(a_k)$, da je

$$\| x - u \| \leq \varepsilon / (M(A,F) + 1) .$$

Za dovolj velike $k \in \mathbb{N}$ je $u \in F(a_k)$, zato

$$\| P_F(a_k)\, x - u \| \leq \varepsilon\, M(A,F)/(M(A,F) + 1)$$

in iz obeh ocen: $\| x - P_F(a_k)\, x \| \leq \varepsilon$. Torej je funkcija F mera na A.

Pod pogojem (01) je torej F mera na A in je zunanje odlikovana po trditvi 2.1.3(b), zunanjo σ odlikovanost pa nam je po trditvi 1.3.2(c) treba preveriti le še na padajočih zaporedjih. Pa naj bo zaporedje $a_k \in A, k \in \mathbb{N}$, padajoče s presekom pod $b \in A$ in $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F(a_k)$. Tedaj je za vsak $k \in \mathbb{N}$: $P_F(Cb)\, x = P_F(Cb \cap a_k)\, x$, toda zaporedje $Cb \cap a_k$, $k \in \mathbb{N}$, je padajoče s praznim presekom, zato

$$P_F(Cb)\, x = \lim_{k \to \infty} P_F(b \cup Ca_k)\, P_F(Cb)\, x = 0$$

in $x \in F(b)$. Zato velja točka (c) in zaradi $F^{\sigma A}(\emptyset) = F(\emptyset) = \{0\}$ še točka (d).

Dokažimo zdaj točko (a) v obratno smer! Ker je F mera, je po trditvi 1.5.8(a) notranje σ odlikovana, zato je monotona, pa tudi omejena in $F_{\sigma A}(E) = F(E) = X$.

Še točka (e): Ker za $F \in pfm(A,X)$ velja (02), velja za $F^{\perp} \in pfm\,(A,X^*)$ pogoj (01); po točki (d) velja za $F^{\perp}$ tudi (02) in za $(F^{\perp})^{\perp} \in pfm(A,X^{**})$ velja (01). V smislu naravnega izomorfizma pa lahko funkcijo $(F^{\perp})^{\perp}$ enačimo s funkcijo F.

2.1.5. <u>Trditev</u>: Naj bo A algebra, B σ algebra, generirana z A, $F \in pfm\, B$ notranje σ odlikovana glede na B, $F(E) = X$, skrčitev F na A pa naj bo omejena. Tedaj je F omejena na vsem B (z isto mejo) in je mera na B.

Dokaz: Označimo z G skrčitev funkcije F na A in naj bo C družina vseh tistih $b \in B$, za katere je $M(b,F) \leq M(A,G)$. V točkah iz C so torej projektorji P_F omejeni in zaradi $F(E) = X$ ter notranje σ odlikovanosti funkcije F definirani povsod na X. Dokazati moramo, da je $C = B$; ker je $A \subseteq C$, bo za to dovolj, če dokažemo, da je C monoton razred (glej [4]). Vzemimo torej poljubno naraščajoče zaporedje $b_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, tedaj je $b = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} b_k \in B$. Nadalje izberimo $x \in F(b)$, $y \in F(Cb)$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ter poiščimo taka $k \in N$, $u \in F(b_k)$, da je $\|u - x\| \leq \varepsilon/(M(A,G)+1)$. Tedaj je $\|x - P_F(b_k)x\| \leq \varepsilon$ in

$$\|x\| \leq \varepsilon + \|P_F(b_k)x\| \leq \varepsilon + M(A,G)\,\|P_F(b_k)x + y\| \leq$$
$$\leq \varepsilon\,(1 + M(A,G)) + M(A,G)\,\|x + y\| .$$

Od tod dobimo $\|x\| \leq M(A,G)\,\|x+y\|$ in $b \in C$. Zdaj pa naj bo zaporedje $b_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, padajoče in pišimo $b = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} b_k \in B$. Spet izberimo $x \in F(b)$, $y \in F(Cb)$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ter poiščimo taka $k \in \mathbb{N}$, $u \in F(Cb_k)$, da je $\|u - y\| \leq \varepsilon/(M(A,G)+2)$. Ker je $b_k \in C$, je $\|P_F(Cb_k)\| \leq M(A,G) + 1$, zato

$$\|u - P_F(Cb_k)\,y\| \leq \varepsilon\,(M(A,G)+1)/(M(A,G)+2)$$

in od tod: $\|y - P_F(Cb_k)\,y\| \leq \varepsilon$. Ocenimo:

$$\|x\| \leq M(A,G) \; \| x + P_F(Cb_k)\, y \| \leq$$
$$\leq M(A,G)\varepsilon + M(A,G)\, \|x+y\| .$$

To nam pove, da je res $b \in C$, torej je C monoton razred in $C = B$. Funkcija F je torej omejena z isto mejo kot G in je mera po izreku 2.1.4(a) .

2.1.6. Izrek: Naj bo X refleksiven, A algebra, B σ algebra, generirana z A ter $F \in$ pfm A monotona, omejena in $F_{\sigma A}(E) = X$. Tedaj obstaja natanko ena razširitev funkcije F do mere na B.

2.1.7. Posledica: V refleksivnem Banachovem prostoru ima vsaka projektorska mera na algebri enolično razširitev do projektorske mere na σ algebri, ki jo ta algebra generira.

Posledica 2.1.7 ni nova; pripomnimo pa naj, da v dokazu ne uporabljamo Hahnovega izreka o razširitvi skalarne mere.

Dokaz: Naj bo G skrčitev funkcije $F^{\sigma A}$ na B, tedaj je po izreku 2.1.4 in trditvi 1.4.2(c) G razširitev funkcije F. Dokažimo, da je G zunanje σ odlikovana glede na B. V ta namen izberimo poljubne $b, b_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$, za katere $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} b_k \subseteq b$ in $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G(b_k)$. Nadalje izberimo take $\varepsilon, \varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$, da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \leq \frac{\varepsilon}{M(A,F)(1+M(A,F))} .$$

Tedaj obstaja za vsak $k \in \mathbb{N}$ tako zaporedje $a_k^j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, da je $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} a_k^j \subseteq b_k$ in za neki $x_k \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G(a_k^j)$ velja $\| x - x_k \| \leq \varepsilon_k$. Ker je A algebra in G = F na A zunanje odlikovana, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da so zaporedja a_k^j (po j) monotono padajoča. Za poljubna $k, j \in \mathbb{N}$ je tedaj

$$\| x - P_F(a_k^j)\, x \| \leq (M(A,F)+1)\, \varepsilon_k ;$$

Če označimo $a_o^j = E$, dobimo od tod

$$\| x - P_F(\bigcap_{k=1}^{n} a_k^j)\, x \| \leq \sum_{i=1}^{n} \| P_F(\bigcap_{k=o}^{i-1} a_k^j)\, x -$$

$$- P_F(\bigcap_{k=o}^{i} a_k^j)\, x \| \leq M(A,F)(M(A,F)+1) \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leq \varepsilon .$$

Pri fiksnem $n \in \mathbb{N}$ je zaporedje $P_F(\bigcap_{k=1}^{n} a_k^j)\, x$, $j \in \mathbb{N}$, omejeno in ima šibko konvergentno podzaporedje z limito

$$y_n \in \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{j\in N} F(a_k^j) ,$$

za katero je $\| x - y_n \| \leq \varepsilon$. Zaporedje y_n je tedaj tudi omejeno in ima šibko konvergetno podzaporedje z limito

$$y \in \bigcap_{k,j \in \mathbb{N}} F(a_k{}^j) ,$$

za katero $\|x-y\| < \varepsilon$. Ker je $\bigcap_{k,j\in\mathbb{N}} a_k{}^j \subseteq b$, je po definiciji zunanjega σ odlikovanja $y \in G(b)$ in ker je bilo število ε poljubno, tudi $x \in G(b)$. Ker je funkcija G zunanje, je funkcija $G^{\perp}$ notranje σ odlikovana glede na B; njena skrčitev na A je enaka funkciji $F^{\perp}$ in je zato omejena. Po trditvi 2.1.5 je torej $G^{\perp}$ mera in tudi funkcija G je mera.

Še enoličnost: Naj bo H poljubna nadaljnja razširitev funkcije F do mere na B. Tedaj je H zunanje σ odlikovana glede na B in po definiciji funkcije G je $G \leq H$ na vsem B ; ker pa je projektorska funkcija P_G prostorsko povsod definirana, mora biti $G = H$ na vsem B.

2.1.8. <u>Primer</u>: V splošnih Banachovih prostorih pa izrek 2.1.6 ne drži. Naj bo namreč $X = l^{\infty}(\mathbb{N})$, $E = \bar{\mathbb{N}}$, $A \in PPE$ pa naj bo družina tistih $a \in P\mathbb{N}$, za katere je bodisi a končna in $\omega \in Ca$, bodisi je Ca končna in $\omega \in a$. Tedaj je A algebra množic in za funkcijo

$$F(a) = \{ (x_k) \in l^{\infty}(\mathbb{N});\ k \in Ca \Rightarrow x_k = 0 \}$$

velja, da je mera na A. Algebra A pa generira σ algebro B = PPE. Naj bo G poljubna monotona razširitev funkcije

F na ves B. Tedaj je

$$G(\{\omega\}) \leq F^e(\{\omega\}) = \{0\}$$

in za $a_k = \{1,2,\dots,k\}$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$G_{\sigma B}(E) \leq G(\{\omega\}) \nabla (\nabla_{k \in \mathbb{N}} G(a_k)) =$$

$$= \nabla_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) = c_o(\mathbb{N}) \neq X .$$

Zato funkcija F nima razširitve do mere na B.

2.2. Regularnost

2.2.1. Definicija: Naj bodo $A_1, A_2, B \in$ PPE, $A_1, A_2 \subseteq B \subseteq B_{A_1}, B^{A_2}$ in $F \in \mathrm{pfm}\, B$. Tedaj pravimo, da je F notranje regularna glede na A_1, če se na B ujema z notranjo razširitvijo svoje skrčitve na A_1; F je zunanje regularna glede na A_2, če se na B ujema z zunanjo razširitvijo svoje skrčitve na A_2; F je regularna glede na par (A_1, A_2), če je notranje regularna glede na A_1 in zunanje regularna glede na A_2.

Poskušajmo najprej utemeljiti to definicijo. Naj bo E lokalno kompakten topološki prostor, B σ kolobar vseh Borelovih (oz. Baireovih) množic na E, A_1 družina vseh kompaktnih Borelovih (oz. Baireovih) množic in A_2 družina vseh odprtih Borelovih (oz. Bairovih) množic. Tedaj za mero $v : B \to \mathbb{R}_0^+$ pravimo, da je notranje regularna, če

$$(1) \qquad v(b) = \sup\{v(a)\ ;\ a \in A_1,\ a \subseteq b\},\quad b \in B\ ,$$

in zunanje regularna, če

$$(2) \qquad v(b) = \inf\{v(a)\ ;\ a \in A_2,\ a \supseteq b\},\quad b \in B\ .$$

Za definicijo obeh pojmov seveda prav nič ne potrebujemo tako zelo konkretnega ozadja množic E,B, A_1 in A_2. Poleg tega lahko obe definiciji smiselno uporabimo na vsaki funkciji iz B v neko polno mrežo. Z definicijama 1.2.4 in 2.2.1 smo tako prenesli oba pojma regularnosti na funkcije, katerih vrednosti ležijo v mreži S(X). Oglejmo si konkreten primer, pri katerem se pojavi globlja zveza med obema definicijama regularnosti.

Vzemimo namreč, da je B vsaj algebra množic, A_1 zaprta vsaj za končne unije, A_2 vsaj za končne preseke ter $F \in$ pfm B omejena, monotona in $F_{BB}(E) = X$. Tedaj poraja po trditvi 2.1.3 funkcija F na vsem B in vsem X končno aditivno projektorsko funkcijo, ki jo označimo s P. Tej funkciji priredimo tako, kot v trditvi 1.1.7, skalarno funkcijo $m_{x,y}$ za $x \in X$ in $y \in X^*$. Funkcija $m_{x,y}$ je končno aditivna in omejena na algebri B, zato je njen totalni razmah (varianca) $v_{x,y}$ pozitivna, končno aditivna in omejena funkcija. Dokažimo:

2.2.2. <u>Trditev</u>:

(a) Funkcija F je notranje regularna glede na A_1 natanko tedaj, kadar je za vsak $x \in X$ in $y \in X^*$ $m_{x,y}$ notranje regularna glede na A_1.

(b) Če je za vsak $x \in X$ in $y \in X^*$ $m_{x,y}$ zunanje regularna glede na A_2, je F zunanje regularna glede na A_2. V refleksivnem prostoru velja tudi sklep nazaj.

Dokaz: (a) Naj bo F notranje regularna in izberimo $x \in X$, $y \in X^*$, $b \in B$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tedaj obstaja tak $a \in A_1$, $a \subseteq b$, da je za vsak $c \in B$, $c \subseteq b-a$: $\| P(c)\, x \| \leq \varepsilon$ in zato

$$v_{x,y}(b) \leq 4\varepsilon + v_{x,y}(a) \leq 4\varepsilon + \sup\{v_{x,y}(a); a \subseteq b, a \in A_1\},$$

kar dokazuje, da je $v_{x,y}$ notranje regularna.

Obratno: Za poljuben $b \in B$ je družina $D_b = \{a \in A_1; a \subseteq b\}$ usmerjena množica in za $x \in F(b)$ konvergira po predpostavki posplošeno zaporedje

$$x_a = P(b-a)\, x = x - P(a)\, x \ , \ a \in D_b \ ,$$

šibko proti 0. Zato je

$$x \in \overset{w}{\underset{a \in D_b}{\nabla}} F(a) = \underset{a \in D_b}{\nabla} F(a)$$

in funkcija F je notranje regularna.

(b) Zaradi končne aditivnosti in omejenosti funkcije $v_{x,y}$ sledi iz njene zunanje regularnosti glede na A_2 njena notranja regularnost glede na A_2', zato je po predpostavki in točki (a) F notranje regularna glede na A_2' . Pri poljubnih $b \in B$ in

$$x \in \bigcap \{F(a);\ a \in A_2,\ a \supseteq b\}$$

je tedaj za vsak $a \in A_2$, $a \supseteq b$: $P(Ca)\, x = 0$, zato $P(Cb)\, x = 0$ in $x \in F(b)$.

Obratno: Naj bo X refleksiven. Če je F zunanje regularna glede na A_2, je $F^{\perp}$ notranje regularna glede na A_2' ; zato je po točki (a) pri poljubnih $x \in X$, $y \in X^*$ $v_{x,y}$ notranje regularna glede na A_2' , torej mora biti zunanje regularna glede na A_2.

Naslednji izrek je posplošitev (na prostorske funkcije) znanega izreka o pozitivnih Baireovih merah (glej [4]).

2.2.3. <u>Izrek</u>: Naj bo (A,A') par regularnih generatorjev, ki generirata σ algebro B in $F \in \text{pfm } B$ mera. Tedaj je F regularna glede na par (A,A').

<u>Dokaz</u>: Naj bo $C \subseteq B$ družina vseh tistih točk, na katerih se funkcija F ujema z notranjo razširitvijo svoje skrčitve na A. Dokažimo najprej, da je C monoton razred. V ta namen izberimo naraščajoče zaporedje $a_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, in pišimo $b = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \in B$. Tedaj je zaradi notranje σ odlikovanosti funkcije F (izrek 2.1.4)

$$F(b) = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} F(a_k) = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigvee \left\{ F(a);\ a \in A,\ a \subseteq a_k \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigvee \left\{ F(a);\ a \in A,\ a \subseteq b \right\} \subseteq F(b)$$

in $b \in C$. Nato pa izberimo še padajoče zaporedje $a_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$ in pišimo $b = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} a_k \in B$. Vzemimo poljuben $x \in F(b)$ in take $\varepsilon, \varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, da je $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k \leq \varepsilon / M(B,F)$. Ker so $a_k \in C$, $x \in F(a_k)$ in je A zaprta za končne unije (pogoj (R2)), obstajajo taki $b_k \in A$, $b_k \subseteq a_k$, da je $\| x - P_F(b_k)\, x \| \leq \varepsilon_k$. Označimo $b_o = E$ in dobimo od tod:

$$\text{(1)} \quad \| x - P_F(\bigcap_{j=1}^{k} b_j)\, x \| \leq \sum_{i=1}^{k} \| P_F(\bigcap_{j=o}^{i-1} b_j)\, x - P_F(\bigcap_{j=o}^{i} b_j)\, x \| \leq M(B,F) \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \leq \varepsilon .$$

Po pogoju (R3) je $c = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} b_j \in A$, zaradi $b_k \subseteq a_k$ je $c \subseteq b$, ker pa je P_F mera, je

$$P_F(c)\, x = \lim_{k \to +\infty} P(\bigcap_{j=1}^{k} b_j)\, x$$

in po oceni (1) $\| x - P(c)\, x \| \leq \varepsilon$. Od tod dobimo $x \in F_e(b)$ in $b \in C$.

Označimo z B_o algebro, generirano z A. Ker je C monoton razred, bo F notranje regularna, brž ko dokažemo, da je $B_o \subseteq C$. Naj bo G notranja razširitev skrčitve funkcije F na A. Po trditvi 1.2.6 je $G \leq F$ in zato omejena, po trditvi 1.3.6 pa je G notranje σ odlikovana glede na B_o. Zato je za $b \in B_o$, $G(b) \vee G(Cb) \geq G(E) = F(E) = X$ in projektor $P_G(b)$ je gosto definiran. Ker je omejen, je povsod definiran, $P_F(b)$ je njegova razširitev, torej je $F(b) = G(b)$.

Funkcija F je torej notranje regularna glede na A. Dokaz njene zunanje regularnosti glede na A' pa je zdaj enostaven! Naj bo $b \in B$ in

$$x \in \bigcap \{F(a)\ ;\ a \in A',\ a \supseteq b\},$$

tedaj je za $a \in A$, $a \subseteq Cb$, $P(a)\,x = 0$, zato $P(Cb)\,x = 0$ in $x \in F(b)$.

Zgornji izrek nam pove prvič: da je vsaka mera na "regularno" generirani σ algebri enolično določena s svojimi vrednostmi na notranje ali zunanje regularnem generatorju; in drugič: pove nam pot, po kateri pridemo do vrednosti te mere na vsej σ algebri iz vrednosti na ustreznem generatorju. Navedimo še razmeroma preprost potreben in zadosten pogoj za obstoj razširitve do mere v refleksivnem prostoru. Izrek je soroden nekemu Dunfordovemu izreku (glej [10]).

2.2.4. Izrek: Naj bo X refleksiven, A notranje regularni generator in $F \in$ pfm A. Tedaj ima F razširitev do mere na σ algebri B, generirani z A, natanko tedaj, kadar je F monotona, omejena in $E_{\sigma A}(E) = X$.

Dokaz: V eno smer jasno: Če ima F razširitev do mere na vsem B, je seveda monotona, omejena in notranje σ odlikovana glede na A. Tudi nazaj ni več težko: Ker je $F_{\sigma A}(E) = X$, je po trditvi 1.4.5 $(F_e)_{\sigma B_o}(E) = X$ in po izreku 2.1.4 je F_e mera na B_o. Po izreku 2.1.6 pa ima skrčitev funkcije F_e na B_o razširitev do mere na vsem B in izrek velja.

2.3. Notranje in zunanje meje

Naj bodo $A, B \in PPE$, $A \subseteq B$, B vsaj algebra množic in $F \in \mathrm{pfm}\, A$. V $M_{A:B}(F)$ vzemimo vse trojke $m_\alpha = (X_\alpha, V_\alpha, F_\alpha)$, za katere velja

(M1) X_α je Banachov prostor (lahko tudi trivialen).

(M2) $V_\alpha : X_\alpha \to X$ je omejen, linearen operator s trivialnim jedrom.

(M3) $F_\alpha \in \mathrm{pfm}\,(B, X_\alpha)$ je mera na B.

(M4) Na A velja $F_\alpha \leq V_\alpha^{-1} F$.

Med temi trojkami vpeljemo binarno relacijo $m_\alpha \prec m_\beta$, če obstaja tak operator $V_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta$, da je $V_\beta\, V_{\alpha\beta} = V_\alpha$ in $(X_\alpha, V_{\alpha\beta}, F_\alpha) \in M_{B:B}(F_\beta)$. Ta relacija je refleksivna in tranzitivna. Vpeljimo še ekvivalenčno relacijo $m_\alpha \sim m_\beta$, če $m_\alpha \prec m_\beta$ in hkrati $m_\beta \prec m_\alpha$. Vse ekvivalenčne razrede trojk po relaciji $\sim$ vzamemo v $\widetilde{M}_{A:B}(F)$ in jih označujemo z $\widetilde{m}_\alpha$. Na družini $\widetilde{M}_{A:B}(F)$ nam relacija $\prec$ naravno inducira relacijo, ki to družino delno ureja in jo spet označujemo z $\prec$. Elemente $\widetilde{m}_\alpha$ te družine lahko v nekem smislu gledamo kot ne nujno zaprte linearne podprostore prostora X (to so $\mathrm{Im}\, V_\alpha$), ki jih lahko v neki novi normi, krepkejši od prvotne "napravimo" Banachove in na katerih obstaja prostorska mera (v novi normi), ki minorira prvotno prostorsko funkcijo. Ekvivalenčna relacija nam pove, da ne razlikujemo med ekvivalentnimi normami in podobnimi merami.

Vpeljimo še analogne zunanje pojme. V $M^{A:B}(F)$ vzemimo vse trojke $m^{\alpha} = (X^{\alpha}, V^{\alpha}, F^{\alpha})$, za katere veljata pogoja (M1) in (M3) ter popravljena pogoja

(M2') $V^{\alpha} : X \to X^{\alpha}$ je omejen, linearen operator z gosto zalogo vrednosti.

(M4') Na A velja $F \leq {V^{\alpha}}^{-1} F^{\alpha}$.

Spet bomo pisali $m^{\alpha} \prec m^{\beta}$, če obstaja tak operator $V^{\alpha\beta} : X^{\alpha} \to X^{\beta}$, da je $V^{\alpha\beta} V^{\alpha} = V^{\beta}$ in da je $(X^{\beta}, V^{\alpha\beta}, F^{\beta}) \in M^{B:B}(F^{\alpha})$; ter $m^{\alpha} \sim m^{\beta}$, če je hkrati $m^{\alpha} \prec m^{\beta}$ in $m^{\beta} \prec m^{\alpha}$. Ekvivalenčne razrede teh trojk označujemo z $\tilde{m}^{\alpha}$ in jih vzamemo v družino $\tilde{M}^{A:B}(F)$; to družino delno ureja relacija, naravno porojena iz relacije $\prec$, ki jo označujemo enako. Kakšen je pomen teh trojk na prvotnem prostoru? Poljubna trojka m^{α} nam na prostoru X da neko zvezno seminormo

$$p_{\alpha}(x) = \| V^{\alpha} x \|, \quad x \in X .$$

Prostor X^{α} lahko iz seminorme p_{α} do izometrije natančno rekonstruiramo takole: Linearnemu podprostoru $U_{\alpha} = \{ x \in X;\ p_{\alpha}(x) = 0 \}$, priredimo faktorski prostor X/U_{α}, ga opremimo z normo $\| [x] \|_{\alpha} = p_{\alpha}(x)$ in v tej normi napolnimo do Banachovega prostora. Trojke m^{α} lahko torej v nekem smislu gledamo kot tiste prostore, skonstruirane iz zveznih seminorm, na katerih obstajajo prostorske mere (v novi normi), ki majorirajo prvotno prostorsko funkcijo. Ekvivalenčna relacija nam pove, da ne razlikujemo med ekvivalentnimi seminormami in podobnimi merami.

2.3.1. Definicija: Elemente družine $\widetilde{M}_{A:B}(F)$ imenujemo notranje meje; notranja meja $\widetilde{m}_\alpha$ je natančna, če za vsak $\widetilde{m}_\beta \in M_{A:B}(F)$ velja $\widetilde{m}_\beta \prec \widetilde{m}_\alpha$ in je popolna, če ima V_α gosto zalogo vrednosti. Elemente družine $\widetilde{M}^{A:B}(F)$ imenujemo zunanje meje; zunanja meja $\widetilde{m}^\alpha$ je natančna, če za vsak $\widetilde{m}^\beta \in \widetilde{M}^{A:B}(F)$ velja $\widetilde{m}^\alpha \prec \widetilde{m}^\beta$ in je popolna, če ima V^α trivialno jedro.

V ilustracijo zgornjih definicij si oglejmo najpreprostejši primer, ko je $A = B$ neka algebra množic s končno mnogo elementi. V tem primeru je seveda A celo σ algebra. Da se izognemo trivialnostim, predpostavimo, da ima A vsaj štiri elemente. Vsaka končna algebra je generirana z neko delitvijo D množice E; pri tem v delitev D ne vzamemo prazne množice.

Naj bo $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona in denimo najprej, da je $F^A(\emptyset) = \{0\}$. Na prostoru

$$X_\alpha = \bigoplus_{d \in D} F(d)$$

vpeljemo normo

$$\| \bigoplus_{d\in D} x_d \| = \sum_{d\in D} \|x_d\| \ ;$$

z V_α pa označimo naravno vložitev prostora X_α v prostor X. Nadalje definiramo

$$(1) \quad F_\alpha(a) = \left\{ \bigoplus_{d\in D} x_d \ ; \ d \cap a = \emptyset \Rightarrow x_d = 0 \right\}, \ a \in A \ .$$

Preprosto je preveriti, da trojka m_α določa neko notranjo mejo v $M_{A:A}(F)$. Pa naj bo m_β poljuben reprezentant neke nadaljnje notranje meje. Tedaj za $x \in X_\beta$ velja

$$(2) \quad V_\beta x = \sum_{d\in D} V_\beta P_{F_\beta}(d) x \in \bigvee_{d\in D} F(d) = \operatorname{Im} V_\alpha$$

in $\operatorname{Im} V_\beta \subseteq \operatorname{Im} V_\alpha$, zato je operator $V_{\beta\alpha} = V_\alpha^{-1}.V_\beta$ definiran povsod na X_β; ker je zaprt, je po izreku o zaprtem grafu omejen. Ker velja $V_\alpha V_{\beta\alpha} = V_\beta$ in je za $a \in A$, $x \in F_\beta(a)$ po (1) in (2) $V_\beta x \in V_\alpha F_\alpha(a)$, je meja m_α natančna. Če pa velja še $F_{\sigma A}(E) = X$, je $\bigvee_{d\in D} F(d) = X$ in m_α je popolna notranja meja.

Privzemimo zdaj, da je F monotona in $F_A(E) = X$ ter vpeljimo na prostoru

$$X^\alpha = \bigoplus_{d\in D} (X/F(Cd))$$

normo

$$\| \bigoplus_{d\in D} [x_d]_d \| = \sum_{d\in D} \| [x_d]_d \|_d \ ,$$

v kateri postane X^α Banachov prostor. Nadalje definiramo $V^\alpha : X \to X^\alpha$ s predpisom $V^\alpha : x \mapsto \oplus_{d\in D} [x]_d$ in

$$F^\alpha(a) = \left\{ \bigoplus_{d\in D} [x_d]_d ;\ d \cap a = \emptyset \Rightarrow x_d \in F(Cd) \right\},\ a \in A .$$

Le z malo več truda preverimo tudi tokrat, da je m^α reprezentant neke zunanje meje v $M^{A:A}(F)$. Naj bo m^β poljuben nadaljnji reprezentant neke meje. Tedaj za $x \in \operatorname{Ker} V^\alpha$ velja, da leži v $\bigcap_{d\in D} F(Cd)$ in zato $V^\beta x \in \bigcap_{d\in D} F^\beta(Cd) = \{0\}$, torej $V^\beta x = 0$ in splošni operator $V^{\alpha\beta} = V^\beta V^{\alpha\,-1}$ je dobro definiran na $\operatorname{Im} V^\alpha$. Vzemimo zdaj poljuben

$$y = \bigoplus_{d\in D} [x]_d \in \operatorname{Im} V^\alpha .$$

Tedaj je $V^{\alpha\beta} y = V^\beta x$ in

$$\| V^{\alpha\beta} y \| = \Big\| \sum_{d\in D} P_{F^\beta}(d)\, V^\beta x \Big\| \leq \sum_{d\in D} M(A,F^\beta)\, \operatorname{dist}_\beta(V^\beta x, F^\beta(Cd))$$

$$\leq M(A,F^\beta) \sum_{d\in D} \operatorname{dist}_\beta(V^\beta x, V^\beta F(Cd)) \leq$$

$$\leq M(A,F^\beta)\, \| V^\beta \| \sum_{d\in D} \operatorname{dist}(x, F(Cd)) = M(A,F^\beta)\, \|V^\beta\|\, \|y\| ,$$

kar dokazuje, da je $V^{\alpha\beta}$ omejen operator in ima enolično razširitev do omejenega operatorja, definiranega na vsem X^α; to razširitev označimo spet z $V^{\alpha\beta}$. Seveda velja pri tem $V^{\alpha\beta} V^\alpha = V^\beta$, preprosta verifikacija pa nam da še $F^\alpha \leq V^{\alpha\beta^{-1}} F^\beta$ na vsem A. Zato je meja m^α natančna. Če pa velja še $F^{\sigma A}(\emptyset) = \{0\}$, je m^α tudi popolna meja. Strnimo te izsledke v

2.3.2. <u>Trditev</u>: Naj bo A končna algebra in $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona; tedaj velja:

(a) Če je $F^A(\emptyset) = \{0\}$, obstaja v $M_{A:A}(F)$ natančna meja; če velja še $F_{\sigma A}(E) = X$, je ta meja popolna.

(b) Če je $F_A(E) = X$, obstaja v $M^{A:A}(F)$ natančna meja; če velja še $F^{\sigma A}(\emptyset) = \{0\}$, je ta meja popolna.

Problem obstoja natančnih mej prepustimo naslednjemu razdelku, tu pa dokažimo tri izreke, ki jih bomo potrebovali v tretjem poglavju. Med mejami nas bodo zanimale predvsem tiste, ki ohranjajo invariantne operatorje prvotne funkcije. Definirajmo natančneje: Naj bo $\left\{ \begin{array}{c} \tilde{m}^\alpha \in \tilde{M}^{A:B}(F) \\ \tilde{m}_\alpha \in \tilde{M}_{A:B}(F) \end{array} \right\}$ in $T \in \mathrm{Inv}\, F$ poljuben. Pogoj

(I1) $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Ker}\, V^\alpha \\ \mathrm{Im}\, V_\alpha \end{array} \right\}$ je invarianten za T;

je seveda neodvisen od izbire reprezentanta v ekvivalenčnem razredu. Če je izpolnjen, lahko v notranjem primeru na X_α definiramo operator $T_\alpha = V_\alpha^{-1}\, T\, V_\alpha$, v zunanjem pa na $\mathrm{Im}\, V^\alpha$ operator $T^\alpha = V^\alpha\, T\, V^{\alpha\, -1}$. Operator T_α je vselej zaprt in po izreku o zaprtem grafu omejen, v zunanjem primeru pa moramo predpostaviti

$$\text{(I2)}\quad \left\{ T^{\alpha} \text{ je omejen} \right\}.$$

Pod to predpostavko lahko T^{α} enolično razširimo do omejenega linearnega operatorja na vsem X^{α}, ki ga spet označimo s T^{α}. Predpostavimo še

$$\text{(I3)}\quad \left\{ \begin{array}{l} T^{\alpha} \in \mathrm{Inv}\, F^{\alpha} \\ T_{\alpha} \in \mathrm{Inv}\, F_{\alpha} \end{array} \right\}.$$

Preslikava $\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{\alpha} : \mathrm{Inv}\, F \to \mathrm{Inv}\, F^{\alpha},\quad T \mapsto T^{\alpha} \\ \varphi_{\alpha} : \mathrm{Inv}\, F \to \mathrm{Inv}\, F_{\alpha},\quad T \mapsto T_{\alpha} \end{array} \right\}$ je pod zgornjimi predpostavkami vselej algebraični homomorfizem med obema Banachovima algebrama. Poleg tega je zaprta in zato omejena. Če je meja še popolna, je ta preslikava zvezna vložitev.

2.3.3. Izrek: Vsaka natančna meja, če le obstaja, zadošča pogojem (Ik), k=1,2,3 .

Dokaz: (Notranji primer) Naj bo m_{α} reprezentant natančne notranje meje v $\tilde{M}_{A:B}(F)$ in $T \in \mathrm{Inv}\, F$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je T brez jedra; sicer bi namreč namesto operatorja T vzeli operator $\lambda - T$, $\lambda \in \rho(T)$. Za trojko $m_{\beta} = (X_{\alpha}, T\, V_{\alpha}, F_{\alpha})$ so izpolnjeni pogoji (M1), (M2) in (M3), poleg tega pa velja na A

$$F_\beta = F_\alpha \leq V_\alpha^{-1} F = (T V_\alpha)^{-1} T F \leq V_\beta^{-1} F$$

in trojka m_β je reprezentant neke notranje meje. Ker je meja $\tilde{m}_\alpha$ natančna, je $m_\beta \prec m_\alpha$ in zato $T \operatorname{Im} V_\alpha = \operatorname{Im} V_\beta \subseteq \operatorname{Im} V_\alpha$, kar dokazuje (I1).
Na B pa velja

$$F_\alpha = F_\beta \leq (V_{\beta\alpha})^{-1} F_\alpha = T_\alpha^{-1} F_\alpha$$

in tudi (I3) velja.

(Zunanji primer) Spet vzamemo reprezentant natančne meje m^α, $T \in \operatorname{Inv} F$, predpostavimo brez škode za splošnost, da ima T gosto zalogo vrednosti in pišemo $m^\beta = (X^\alpha, V^\alpha T, F^\alpha)$. Tedaj so za m^β izpolnjeni pogoji (M1), (M2') in (M3), poleg tega pa velja na A:

$$F \leq T^{-1} F \leq T^{-1} V^{\alpha-1} F^\alpha = V^{\beta-1} F^\alpha = V^{\beta-1} F^\beta$$

in tudi pogoj (M4') je izpolnjen. Ker je meja $\tilde{m}^\alpha$ natančna, je $m^\alpha \prec m^\beta$, zato $\operatorname{Ker} V^\alpha \leq \operatorname{Ker} V^\beta = T^{-1} \operatorname{Ker} V^\alpha$ in (I1) velja. Na $\operatorname{Im} V^\alpha$ je $V^{\alpha\beta} = V^\beta V^{\alpha-1} = T^\alpha$ in (I2) velja. Ker pa velja na B

$$F^\alpha \leq V^{\alpha\beta -1} F^\beta = T^{\alpha-1} F^\alpha ,$$

je izpolnjen tudi pogoj (I3) in izrek velja.

Zaradi enostavnejše formulacije naslednjega izreka vpeljimo nekaj oznak. Naj bo $A \in PPE$ zaprta za končne preseke, $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona in izberimo $a \in A$. Definiramo $F|_a \in \mathrm{pfm}\,(A, F(a))$ s predpisom

$$F|_a(b) = F(a \cap b), \quad b \in A .$$

Če je $T \in \mathrm{Inv}\, F$, je seveda $T|_{F(a)} \in \mathrm{Inv}\, F|_a$, obratno pa v splošnem ne drži. Koristno je, da natančne meje pod določenimi pogoji ohranjajo tudi invariantne operatorje funkcije $F|_a$, pa čeprav slednji nimajo ustrezne omejene razširitve na ves X. Denimo, da obstaja natančna meja $\tilde{m}_\alpha \in \tilde{M}_{A:B}(F)$ in vpeljimo

$$X_\beta = F_\alpha(a),$$

$$V_\beta : X_\beta \longrightarrow F(a), \quad x \longmapsto V_\alpha x ,$$

$$F_\beta = F_\alpha|_a .$$

Po kratkem premisleku je $m_\beta \in M_{A:B}(F|_a)$. Dokažimo

2.3.4. <u>Izrek</u>: Če je $Ca \in A$, $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$, potem je meja $\tilde{m}_\beta$ natančna.

<u>Dokaz</u>: Pa vzemimo poljubno nadaljnjo trojko $m_\gamma \in M_{A:B}(F|_a)$ in definirajmo

$$X_\delta = X_\gamma \oplus F_\alpha(Ca), \quad \|u \oplus v\| = \|u\| + \|v\| ,$$

$$V_\delta : X_\delta \longrightarrow X, \quad u \oplus v \longmapsto V_\gamma u + V_\alpha v$$

$$F_\delta(b) = \{ u\oplus v \in X_\delta ;\ u \in F_\gamma(b) \text{ in } v \in F_\alpha(b \cap Ca) \} , \ b \in B .$$

Tedaj je X_δ Banachov prostor, z V_δ zvezno vložen v X; iz $V_\gamma u \in F(a)$, $V_\alpha v \in F(Ca)$ in $V_\gamma u + V_\alpha v = 0$ namreč zaradi $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$ sledi $u = v = 0$. Poleg tega je F_δ mera na B in za poljubne $b \in A$, $u\oplus v \in F_\delta(b)$ velja $V_\delta (u\oplus v) = V_\gamma u + V_\alpha v \in F(b)$; torej je $m_\delta \in M_{A:B}(F)$. Toda meja $\tilde{m}_\alpha$ je natančna ! Za $u \in X_\gamma$ je tedaj $V_\gamma u = V_\delta (u \oplus 0) \in \operatorname{Im} V_\alpha$ in najdemo lahko taka $x \in F_\alpha(a)$, $y \in F_\alpha(Ca)$, da je $V_\gamma u = V_\alpha (x + y)$; zaradi $F(a) \cap F(Ca) = \{0\}$ pa je tedaj $V_\alpha y = 0$ in $V_\gamma u \in \operatorname{Im} V_\beta$. Operator $V_{\gamma\beta} = V_\beta^{-1} V_\gamma : X_\gamma \longrightarrow X_\beta$ je po izreku o zaprtem grafu omejen. Poleg tega za $b \in B$ in $u \in F_\gamma(b)$ velja $u\oplus 0 \in F_\delta(b)$ in zato $V_{\delta\alpha}(u\oplus 0) \in F_\alpha(b)$; po prejšnjem pa je $V_{\delta\alpha}(u \oplus 0) \in F_\alpha(a)$ in zato

$$V_{\gamma\beta}\, u = V_{\delta\alpha} (u\oplus 0) \in F_\alpha(a \cap b) = F_\beta(b) ,$$

torej izrek velja.

Dokažimo še analogen zunanji izrek! Tokrat naj bo A zaprta za končne unije, $F \in \operatorname{pfm} A$ monotona ter definirajmo za $a \in A$ funkcijo $F|^a \in \operatorname{pfm}(A, X/F(a))$ s predpisom

$$F|^a(b) = F(a \cup b)/F(a) , \ b \in A .$$

Zaradi monotonosti funkcije F zapiranje v prostoru $X/F(a)$ v zgornji definiciji ni potrebno. Tudi tu velja za $T \in \operatorname{Inv} F$, da je $T|^{F(a)} \in \operatorname{Inv} F|^{a}$.

Denimo, da obstaja natančna meja $\tilde{m}^{\alpha} \in \tilde{M}^{A:B}(F)$ in vpeljimo

$$X^{\beta} = X^{\alpha}/F^{\alpha}(a) ,$$

$$V^{\beta} : X/F(a) \longrightarrow X^{\beta} , \quad [x] \mapsto [V^{\alpha}x] ,$$

$$F^{\beta} = F^{\alpha}|^{a} .$$

Spet je preprosto verificirati, da je $m^{\beta} \in M^{A:B}(F|^{a})$. Dokažimo

2.3.5. <u>Izrek</u>: Če je $Ca \in A$ in $F(a) \nabla F(Ca) = X$, potem je meja $\tilde{m}^{\beta}$ natančna.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $m^{\gamma} \in M^{A:B}(F|^{a})$ poljuben in definirajmo

$$X^{\delta} = X^{\gamma} \oplus F^{\alpha}(a) , \quad \|u \oplus v\| = \|u\| + \|v\| ,$$

$$V^{\delta} : X \longrightarrow X^{\delta} , \quad x \mapsto V^{\gamma}[x] \oplus P_{F^{\alpha}(a)} V^{\alpha} x ,$$

$$F^{\delta}(b) = \{ u \oplus v \in X^{\delta} ; \ u \in F^{\gamma}(b) \text{ in } v \in F^{\alpha}(b \wedge a) \} , \ b \in B .$$

Dokažimo, da ima V^{δ} gosto zalogo vrednosti! Za poljuben $u \oplus v \in X^{\delta}$ lahko u poljubno natančno aproksimiramo z elementi oblike $V^{\gamma}[x]$, $x \in X$; zaradi $F(a) \nabla F(Ca) = X$ pa lahko brez škode za splošnost predpostavimo: $x \in F(Ca)$.

Element v pa lahko poljubno natančno aproksimiramo z elementi oblike $V^{\alpha}y$, $y \in X$; ker je $F(a) \nabla F(Ca) = X$ in je projektor $P_{F^{\alpha}}(a)$ omejen, lahko brez škode za splošnost predpostavimo: $y \in F(a)$. Element $u \oplus v$ torej lahko aproksimiramo z elementi oblike $V_{\gamma}(x+y)$, $x \in F(Ca)$, $y \in F(a)$. Ostale pogoje za to, da je $m^{\delta} \in M^{A:B}(F)$ pa je enostavno preveriti. Toda meja $\tilde{m}^{\alpha}$ je natančna v $M^{A:B}(F)$! Če je $x \in X$ tak, da je $[x] \in \operatorname{Ker} V^{\beta}$, je $V^{\alpha} x \in F^{\alpha}(a)$, zato $V^{\delta} x \in F^{\delta}(a)$ in končno $V^{\gamma}[x] = 0$. Zato lahko na $\operatorname{Im} V^{\beta}$ definiramo splošen operator $V^{\beta\gamma} = V^{\gamma} V^{\beta-1}$ z vrednostmi v X^{γ}. Dokažimo, da je $V^{\beta\gamma}$ omejen! V ta namen vzemimo poljuben $[u] \in \operatorname{Im} V^{\beta}$, $u \in \operatorname{Im} V^{\alpha}$ in ocenimo

$$\|V^{\beta\gamma}[u]\| \leq \|V^{\delta\alpha} u\| \leq \|V^{\delta\alpha}\| \|u\| .$$

Če na desni strani te ocene vzamemo infimum po vseh reprezentantih razreda $[u]$, dobimo od tod $\|V^{\beta\gamma}\| \leq \|V^{\delta\alpha}\|$ in operator $V^{\beta\gamma}$ je omejen. Za $b \in B$ in $[u] \in F^{\beta}(b)$, $u \in X^{\alpha}$, pa je

$$V^{\delta\alpha} u = V^{\beta\gamma}[u] \oplus P_{F^{\alpha}}(a) \qquad u \in F^{\delta}(a \cup b)$$

in $V^{\beta\gamma}[u] \in F^{\gamma}(a \cup b) = F^{\gamma}(b)$; zato je $\tilde{m}^{\beta}$ natančna zunanja meja in izrek velja.

2.4. Obstoj natančnih mej

2.4.1. Izrek: Naj bo A algebra, B σ algebra, generirana z A, $F \in$ pfm A in $F^A(\emptyset) = \{0\}$. Tedaj obstaja v $\tilde{M}_{A:B}(F)$ natančna meja.

Dokaz: Na prvem koraku dokaza bomo definirali pravo normo. Zaradi $F^A(\emptyset) = \{0\}$, je $D(A,F) = A$ in funkciji F lahko na vsem območju A priredimo projektorsko funkcijo P. Tej funkciji poiščemo prostor Deff P v smislu definicije 1.1.9 in vpeljemo vektorski prostor

$$X_\alpha = \{x \in \text{Deff } P;\ \sup_{a \in A} \|P(a)\, x\| < +\infty\},$$

ki ga naravno vložimo v prostor X, vložitev pa označimo z V_α. Prostor X_α opremimo z normo

(1) $$\|x\| = \sup_{a \in A} \|P(a)\, V_\alpha\, x\|, \quad x \in X_\alpha .$$

Dokažimo, da je v tej normi Banachov. Pa naj bo $x_k \in X_\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, poljubno Cauchyjevo zaporedje v normi (1). Tedaj je za vsak $a \in A$, $P(a)\, V_\alpha\, x_k \in F(a)$ Cauchyjevo zaporedje v prvotnem prostoru, ki ima limito $x_a \in F(a)$. Za vsako končno delitev $D \subseteq A$ množice E je

$$P(E)\, V_\alpha\, x_k = V_\alpha\, x_k = \sum_{d \in D} P(d)\, V_\alpha\, x_k$$

in zato

$$x_E = \sum_{d \in D} x_d ;$$

za poljubna $a, b \in A$ pa je

$$P(a \cap b)\, V_\alpha\, x_k = P(a)\, P(b)\, V_\alpha\, x_k = P(b)\, P(a)\, V_\alpha\, x_k$$

in zaradi zaprtosti projektorske funkcije P

$$x_{a \cap b} = P(a)\, x_b = P(b)\, x_a \ .$$

Po trditvi 1.1.3 je tedaj $x_E \in \mathrm{Deff}\ P$ in ker za $a \in A$ velja

$$\| P(a)\, x_E \| = \| x_a \| \leq \lim_{k \to \infty} \| x_k \| < +\infty,$$

je $x_E \in \mathrm{Im}\ V_\alpha$. Ker za poljuben $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je za poljubna $k, j \geq N$, $k, j \in \mathbb{N}$: $\| x_k - x_j \| \leq \varepsilon$, je za vsak $a \in A$:

$$\| P(a)\, V_\alpha (x_k - x_j) \| \leq \varepsilon \ ,$$

zato

$$\| P(a)\, V_\alpha\, x_k - x_a \| \leq \varepsilon$$

in končno

$$\| x_k - V_\alpha^{-1}\, x_E \| = \sup_{a \in A} \| P(a)\, V_\alpha\, x_k - x_a \| \leq \varepsilon \ ;$$

torej konvergira zaporedje x_k v normi (1) proti $V_\alpha^{-1} x_E$ in prostor X_α je Banachov. Vložitev V_α pa je zvezna:

$$\| V_\alpha\, x \| = \| P(E)\, V_\alpha\, x \| \leq \sup_{a \in A} \| P(a)\, V_\alpha\, x \| = \| x \| \ , x \in X_\alpha \ .$$

Če pišemo še

$$F_\alpha(a) = \{ x \in X \; ; \; P(a)\, V_\alpha\, x = V_\alpha\, x \}, \; a \in A,$$

velja $F_\alpha \leq V_\alpha^{-1} F$ na A. Poleg tega je za $x \in X$ in $a \in A$: $P(a)\, V_\alpha\, x \in \mathrm{Deff}\, P$ in

$$(2) \quad \begin{aligned} \sup_{b \in A} \| P(b)\, P(a)\, V_\alpha\, x \| &= \sup_{b \in A} \| P(b \cap a)\, V_\alpha\, x \| \leq \\ &\leq \sup_{b \in A} \| P(b)\, V_\alpha\, x \| = \|x\| \end{aligned}$$

in zato $P(a)\, V_\alpha\, x \in \mathrm{Im}\, V_\alpha$; torej je $u = V_\alpha^{-1} P(a)\, V_\alpha\, x$ element $F_\alpha(a)$, po istem razmisleku $v = V_\alpha^{-1} P(Ca)\, V_\alpha\, x$ element $F_\alpha(Ca)$ in velja $x = u + v$. Ta zapis v končno vsoto je seveda enoličen in po (2) velja

$$\| P_F(a)\, x \| = \|u\| \leq \|x\|,$$

kar dokazuje točko (a) v naslednjem prvem koraku dokaza:

Korak I:

(a) X_α je Banachov prostor, $V_\alpha : X_\alpha \to X$ zvezna vložitev, F_α omejena na A in $F_\alpha \leq V_\alpha^{-1} F$ na A.

(b) Za poljuben $m_\gamma \in M_{A:B}(F)$ obstaja $V_{\gamma\alpha} : X_\gamma \to X_\alpha$, da je $V_\alpha V_{\gamma\alpha} = V_\gamma$ in $(X_\gamma, V_{\gamma\alpha}, F_\gamma) \in M_{A:B}(F_\alpha)$.

Še točka (b): Za poljuben $x \in X_\gamma$ mora biti seveda $V_\gamma\, x$ v Deff P in

$$\sup_{a \in A} \| P(a)\, V_\gamma\, x \| = \sup_{a \in A} \| V_\gamma\, P_{F_\gamma}(a)\, x \| \leq$$

$$\leq \|V_\gamma\|_{M(B,F_\gamma)} \|x\| < +\infty .$$

Zato je $V_\gamma x \in \mathrm{Im}\, V_\alpha$, operator $V_{\gamma\alpha} = V_\alpha^{-1} V_\gamma$ pa je linearen, omejen in ima trivialno jedro. Ker za poljubne $a \in A$, $x \in F_\gamma(a)$ velja $V_\gamma x \in F(a) \cap \mathrm{Im}\, V_\alpha$ in je zato $V_{\gamma\alpha} x \in F_\alpha(a)$, torej velja korak I.

Na drugem koraku razširimo funkcijo $F_\alpha \in \mathrm{pfm}\,(A, X_\alpha)$ do funkcije, definirane na vsem B. Označimo z F_β skrčitev funkcije $(F_\alpha)_{\sigma A}$ na B, pišemo $X_\beta = F_\alpha(E)$ in $V_\beta = V_\alpha|_{X_\beta}$. Ker je $F_\beta \leq F_\alpha$ na A, velja po trditvi 2.1.2(a) točka (a) v

Korak II:

(a) X_β je Banachov, $V_\beta : X_\beta \to X$ zvezna vložitev, skrčitev F_β na A omejena in $F_\beta \leq V_\beta^{-1} F$ na A.

(b) Za poljuben $m_\gamma \in M_{A:B}(F)$ obstaja $V_{\gamma\beta} : X_\gamma \to X_\beta$, da je $V_\beta V_{\gamma\beta} = V_\gamma$ in $(X_\gamma, V_{\gamma\beta}, F_\gamma) \in M_{B:B}(F_\beta)$.

Po točki (b) koraka I je $F_\gamma \leq V_{\gamma\alpha}^{-1} F_\alpha$. Izberimo $b \in B$ in $x \in F_\gamma(b)$, zaporedje $a_k \in A, k \in \mathbb{N}$, pa naj bo tako, da je $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \supseteq b$. Tedaj je $x \in \nabla_{k \in \mathbb{N}} F_\gamma(a_k)$, zato $V_{\gamma\alpha} x \in \nabla_{k \in \mathbb{N}} F_\alpha(a_k)$ in od tod $V_{\gamma\alpha} x \in (F_\alpha)_{\sigma A}(b)$. To dokazuje, da je $\mathrm{Im}\, V_{\gamma\alpha} \subseteq F_\beta(E) = X_\beta$, zato $V_{\gamma\beta} = V_{\gamma\alpha}$ in $F_\gamma \leq V_{\gamma\beta}^{-1} F_\beta$ na vsem B.

Na tretjem koraku rešimo problem do kraja! Naj bo F_γ skrčitev funkcije $(F_\beta)_{m\sigma B}$ na B, $X_\gamma = F_\gamma(E)$ in $V_\gamma = V_\beta\big|_{X_\gamma}$. Funkcija F_γ je seveda notranje σ odlikovana glede na B, njena skrčitev na A pa je omejena. Zato je F_γ po trditvi 2.1.5 mera na B in velja točka (a) v

Korak III:

(a) $m_\gamma \in M_{A:B}(F)$ in

(b) meja $\tilde{m}_\gamma$ je natančna.

Dokažimo še točko (b): Pa naj bo $m_\delta \in M_{A:B}(F)$ in definirajmo $G \in \mathrm{pfm}\,(B,X_\beta)$ s predpisom $G(b) = \overline{V_{\delta\beta} F_\delta(b)}^{\,\beta}$. Tedaj je G notranje σ odlikovana glede na B in po točki (b) koraka II je $G \leqslant F_\beta$ na B. Ker je $(F_\beta)_{m\sigma B}$ natančno notranje σ odlikovanje funkcije F_β, je $G \leqq F_\gamma$ na B, zato po vrsti: $\mathrm{Im}\, V_{\delta\beta} \subseteq X_\gamma$, $V_{\delta\gamma} = V_{\delta\beta}$ in $F_\delta \leqq V_{\delta\gamma}^{-1} F_\gamma$ na vsem B. Tako smo izrek dokazali.

Kot preprosto posledico tega izreka navedimo zadosten pogoj za obstoj natančne meje pri razširjanju iz notranje regularnega generatorja. Naj bo torej A notranje regularni generator, ki generira σ algebro B. Nadalje naj bo B_o neka algebra, $A \subseteq B_o \subseteq B$ in $F \in \mathrm{pfm}\,A$ monotona. Denimo, da je $m_\alpha \in M_{B:B}(F_e)$; tedaj je seveda $m_\alpha \in M_{B_o:B}(F_e)$ in zaradi monotonosti funkcije F tudi $m_\alpha \in M_{A:B}(F)$. Če pa je, obratno, $m_\alpha \in M_{A:B}(F)$, je funkcija F_α notranje regularna. Zato je tudi funkcija $G \in \mathrm{pfm}\,(B,X)$, definirana z $G(b) = \overline{V_\alpha F_\alpha(b)}$, $b \in B$, notranje regularna. Ker pa je $G \leq F$ na A, je $G \leq F_e$ na B in $m_\alpha \in M_{B:B}(F_e)$. Zato velja

2.4.2. Posledica: Če pri neki algebri B_o, $A \subseteq B_o \subseteq B$, velja $F_e^{B_o}(\emptyset) = \{0\}$, potem obstaja natančna meja v $M_{A:B}(F)$.

2.4.3. Izrek: Naj bo A algebra, B σ algebra, generirana z A in $F \in \mathrm{pfm}\,A$ taka, da ima popolno notranjo mejo v $\tilde{M}_{A:B}(F)$. Tedaj obstaja natančna zunanja meja v $\tilde{M}^{A:B}(F)$.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{F}$ družina vseh seminorm p na X, za katere

(A) $p(x) \leq \|x\|$, $x \in X$,

(B) $p(x) \leq p(x+y)$, $a \in A$, $x \in F(a)$, $y \in F(Ca)$.

Družina $\mathcal{F}$ gotovo ni prazna, saj vsebuje vsaj trivialno seminormo. Za $x \in X$ definiramo

$$p_\alpha(x) = \sup_{p \in \mathcal{F}} p(x) ,$$

tedaj je tudi $p_\alpha \in \mathcal{F}$. Naj bo $U_\alpha = \{x \in X;\ p_\alpha(x) = 0\}$. Vektorski prostor X/U_α opremimo z normo $\|[x]\| = p_\alpha(x)$

in ga v tej normi napolnimo do Banachovega prostora X^α. Kompozitum faktorske preslikave $X \to X/U_\alpha$ in naravne vložitve v X^α označimo z V^α; ta preslikava je linearna, ima gosto zalogo vrednosti in velja $\|V^\alpha\| \leq 1$.

Izberimo reprezentant $m_\beta \in M_{A:B}(F)$ neke popolne meje in definirajmo

$$F^\alpha(b) = \overline{V^\alpha V_\beta F_\beta(b)}^\alpha , \quad b \in B .$$

Ker je funkcija $V^\alpha V_\beta$ zvezna in je F_β notranje σ odlikovana, je tudi F^α notranje σ odlikovana glede na B. Dokažimo, da velja na A: $F \leq V^{\alpha-1} F^\alpha$. Pa izberimo $a \in A$, $x \in F(a)$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; tedaj obstaja (meja $\tilde{m}_\beta$ je popolna!) tak $y \in X_\beta$, da je $\|x - V_\beta y\| \leq \varepsilon$. Toda $y = u + v$, $u \in F_\beta(a)$, $v \in F_\beta(Ca)$, zato $V_\beta y = V_\beta u + V_\beta v$, $V_\beta u \in F(a)$, $V_\beta v \in F(Ca)$ in po pogojih (B) in (A) velja

$$p_\alpha(x - V_\beta u) \leq p_\alpha(x - V_\beta y) \leq \|x - V_\beta y\| \leq \varepsilon \quad ;$$

zato je $\| V_\alpha x - V^\alpha V_\beta u \| \leq \varepsilon$ in od tod $V^\alpha x \in F^\alpha(a)$. Po definiciji prostora $F^\alpha(a)$ pa velja še več: $F^\alpha(a) = \overline{V^\alpha F(a)}^\alpha$, kar bomo kasneje še potrebovali.

Če dokažemo, da je F^α omejena na A, bo F^α mera na B po trditvi 2.1.5. Ker je F^α monotona, bo dovolj, če za poljubne $a \in A$, $x \in F^\alpha(a)$, $y \in F^\alpha(Ca)$ pokažemo

(3) $$\|x\| \leq \|x+y\|.$$

Toda (3) velja po (B) za vse $x = V_\alpha u$, $y = V_\alpha v$, $u \in F(a)$, $v \in F(Ca)$; zato je po prejšnjem (3) vselej veljavno in $m^\alpha \in M^{A:B}(F)$.

Da bi dokazali natančnost meje $\tilde{m}^\alpha$, izberimo poljubno trojko $m^\gamma \in M^{A:B}(F)$. Če je m^γ trivialna, mora biti $m^\gamma \succ m^\alpha$. V nasprotnem pa je $\|V^\gamma\| \neq 0$ in $M = M(B,F^\gamma) \neq 0$. Za $x \in X$ pišemo

$$p_\gamma(x) = \frac{1}{M\ \|V^\gamma\|} \sup_{a \in B} \| P_{F^\gamma}(a)\ V^\gamma x \| ;$$

tedaj je p_γ seminorma na X, $p_\gamma(x) \leq \|x\|$ in za poljubne $a \in A$, $x \in F(a)$, $y \in F(Ca)$ je $p_\gamma(x) \leq p_\gamma(x+y)$. Torej je $p_\gamma \in \mathcal{F}$ in po definiciji seminorme p_α velja $p_\gamma(x) \leq p_\alpha(x)$ za vsak $x \in X$. Za $x \in \operatorname{Ker} V^\alpha$ je torej po vrsti $p_\alpha(x) = 0$, $p_\gamma(x) = 0$, $x \in \operatorname{Ker} V^\gamma$; zato lahko na $\operatorname{Im} V^\alpha$ definiramo splošen operator $V^{\alpha\gamma} = V^\gamma V^{\alpha -1}$. Ker je za $x \in \operatorname{Im} V^\alpha$, $x = V^\alpha y$, $y \in X$

$$\| V^{\alpha\gamma} x \| \leq \sup_{a \in B} \| P_{F^\gamma}(a)\ V^\gamma y \| = M\ \|V^\gamma\|\ p_\gamma(y) \leq$$
$$\leq M\ \|V^\gamma\|\ p_\alpha(y) = M\ \|V^\gamma\|\ \|x\| ,$$

je operator $V^{\alpha\gamma}$ omejen in ima enolično razširitev do omejenega operatorja, definiranega na vsem X^α, ki ga spet označimo z $V^{\alpha\gamma}$. Po prejšnjem je za $a \in A$ $F^\alpha(a) = \overline{V^\alpha F(a)}^\alpha$; ker je $V^\gamma F(a) \subseteq F^\gamma(a)$ in je $V^{\alpha\gamma}$ zvezen, velja

(4) $$F^{\alpha} \leq V^{\alpha\gamma^{-1}} F^{\gamma}$$

na A. Dokažimo, da velja (4) na vsem B! Pa naj bo C družina vseh $b \in B$, pri katerih velja (4). Če je $b_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, monotono naraščajoče zaporedje z unijo $b \in B$ in $x \in F^{\alpha}(b) = \nabla_{k \in \mathbb{N}} F^{\alpha}(b_k)$, je zaradi zveznosti $V^{\alpha\gamma}$: $V^{\alpha\gamma}x \in \nabla_{k \in \mathbb{N}} F^{\gamma}(b_k) = F^{\gamma}(b)$ in $b \in C$. Če pa je zaporedje $b_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, monotono padajoče s presekom $b \in B$ in $x \in F^{\alpha}(b) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^{\alpha}(b_k)$, je nujno $V^{\alpha\gamma} x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^{\gamma}(b_k) = F^{\gamma}(b)$ in tudi $b \in C$. Zato je $C = B$, točka (4) velja na vsem B in $(X^{\gamma}, V^{\alpha\gamma}, F^{\gamma}) \in M^{B:B}(F^{\alpha})$; torej je meja $\tilde{m}^{\alpha}$ natančna in izrek velja.

Vzemimo zdaj neki zunanje regularni generator A, ki generira σ algebro B, B_o pa naj bo neka algebra, $A \subseteq B_o \subseteq B$. Nadalje naj bo $F \in \mathrm{pfm}\, A$ monotona in $m^{\alpha} \in M^{B:B}(F^e)$. Tedaj je gotovo $m^{\alpha} \in M^{B_o:B}(F^e)$, zaradi monotonosti funkcije F pa tudi $m^{\alpha} \in M^{A:B}(F^e)$. Če pa je $m^{\alpha} \in M^{A:B}(F)$, je funkcija F^{α} po izreku 2.2.3 zunanje regularna. Ker je zato funkcija $G \in \mathrm{pfm}\,(B,X)$, definirana z $G = V^{\alpha^{-1}} F^{\alpha}$ tudi zunanje regularna glede na A in ker je $F \leq G$ na A, je $F^e \leq G$ na B in $m^{\alpha} \in M^{B:B}(F)$. Izrek 2.4.3 nam tedaj pove:

2.4.4. <u>Posledica</u>: Če pri neki algebri B_o, $A \subseteq B_o \subseteq B$, obstaja popolna meja v $M_{B_o:B}(F^e)$, obstaja natančna meja v $M^{A:B}(F)$.

Oglejmo si še preprost zadosten pogoj za obstoj natančnih in popolnih notranjih in zunanjih mej hkrati. Ta pogoj bomo lahko koristno uporabili pri raziskavi nekaterih primerov v četrtem poglavju.

2.4.5. <u>Posledica</u>: Naj bo A algebra, B σ algebra, generirana z A, $F \in \mathrm{pfm}\, A$ in $\{P_\alpha\}_{\alpha \in J} \subseteq \mathrm{Inv}\, F$ družina projektorjev z lastnostmi

(i) $\bigvee_{\alpha \in J} \mathrm{Im}\, P_\alpha = X$,

(ii) $\bigcap_{\alpha \in J} \mathrm{Ker}\, P_\alpha = \{0\}$,

(iii) za vsak $\alpha \in J$ ima $P_\alpha F \in \mathrm{pfm}\,(A, \mathrm{Im}\, P_\alpha)$ razširitev do mere na B.

Tedaj ima F natančni in popolni meji v $\tilde{M}_{A:B}(F)$ in v $\tilde{M}^{A:B}(F)$.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $a \in A$ in $x \in F(a) \cap F(Ca)$. Tedaj je po (iii) za vsak $\alpha \in J$: $P_\alpha x = 0$ in po (ii) $x = 0$. Zato je $F^A(\emptyset) = \{0\}$ in po izreku 2.4.1 ima F natančno notranjo mejo $\tilde{m}_0 \in \tilde{M}_{A:B}(F)$. Za vsak $\alpha \in J$ označimo $X_\alpha = \mathrm{Im}\, P_\alpha$, V_α je naravna vložitev X_α v X in F_α je razširitev funkcije $P_\alpha F$ do mere na B. Tedaj je $m_\alpha \in M_{A:B}(F)$, zato $\bigvee_{\alpha \in J} \mathrm{Im}\, V_\alpha \subseteq \mathrm{Im}\, V_0$ in po (i) je meja $\tilde{m}_0$ popolna. Po izreku 2.4.3 obstaja zato natančna zunanja meja $\tilde{m}^0 \in \tilde{M}^{A:B}(F)$. Za vsak $\alpha \in J$ označimo zdaj $X^\alpha = \mathrm{Im}\, P_\alpha$, $V^\alpha = P_\alpha$ in F^α je razširitev funkcije $P_\alpha F$ do mere na B.

Tedaj je $m^{\alpha} \in M^{A:B}(F)$, zato $\bigcap_{\alpha \in J} \operatorname{Ker} V_{\alpha} \supseteq \operatorname{Ker} V^{o}$, po (ii) je tudi meja $\tilde{m}^{o}$ popolna in trditev velja.

Oglejmo si zdaj primer, ko ima funkcija $F \in \operatorname{pfm} A$, A algebra, hkrati natančni in popolni meji $\tilde{m}_o \in \widetilde{M}_{A:B}(F)$ in $\tilde{m}^o \in \widetilde{M}^{A:B}(F)$, kjer je B σ algebra, generirana z A. V smislu izreka 2.3.3 lahko tedaj poljubnemu operatorju $T \in \operatorname{Inv} F$ priredimo operatorja $T_o \in L(X_o)$ in $T^o \in L(X^o)$, med njima pa velja zveza

$$V^o V_o T_o = T^o V^o V_o . \tag{5}$$

Tudi med projektorskima funkcijama, prirejenima funkcijama F_o in F^o velja zveza (5), prav tako med rezultatoma poljubnega integriranja po obeh funkcijah, če le oba obstajata. Kaj lahko povemo o teh operatorjih na prvotnem prostoru ?

Naj bo $T_o \in L(X_o)$ poljuben in definirajmo $\hat{T}_o$ kot splošen operator na X, s predpisom

$$\operatorname{Def} \hat{T}_o = \operatorname{Im} V_o , \quad \hat{T}_o = V_o T_o V_o^{-1} .$$

Poljubnemu operatorju $T^o \in L(X^o)$ pa priredimo splošen operator $\hat{T}^o$ na X s predpisom

$$\operatorname{Def} \hat{T}^o = \{ x \in X ;\ T^o V^o x \in \operatorname{Im} V^o \} , \quad \hat{T}^o = V^{o\,-1} T^o V^o .$$

2.4.6. <u>Trditev</u>: Operator $\hat{T}_o$ je vselej gosto definiran, operator $\hat{T}^o$ vselej zaprt. Če med T_o in T^o velja zveza (5), je $\hat{T}^o$ razširitev operatorja $\hat{T}_o$. V tem primeru so ekvivalentni pogoji: (i) $\hat{T}_o$ je omejen, (ii) $\hat{T}^o$ je omejen, (iii) Def $\hat{T}^o = X$, (iv) Im V^o je invarianten za T^o.

Projektorski funkciji P_{F_o} lahko v smislu zgornje definicije priredimo projektorsko funkcijo $\hat{P}_o$ na prvotnem prostoru, za katero je Defs $\hat{P}_o$ = Defm $\hat{P}_o$ = Im V_o. Ta funkcija je torej krepko števno aditivna na vsem gostem prostoru Im V_o in na vsej σ algebri B. Se pa ta funkcija da zapreti, saj ima zaprto prostorsko razširitev $\hat{P}^o$, prirejeno funkciji $P_F o$. Območna skrčitev funkcije $\hat{P}_o$ na A prostorsko minorira prvotno funkcijo P_F, območna skrčitev funkcije $\hat{P}^o$ na A pa jo majorira. Zato lahko funkciji $\hat{P}_o$ in $\hat{P}^o$ v nekem smislu gledamo kot razširitvi projektorske funkcije P_F na σ algebro B. V našem, nekoliko tehničnem smislu sta ti dve razširitvi tudi enolično določeni.

TRETJE POGLAVJE

NAVIDEZNO SPEKTRALNI OPERATORJI

3.0. Usmeritev

V prvem razdelku tega poglavja vpeljemo dva pojma, ki sta videti nova. Najprej definiramo pojem navideznih predstavitev operatorja in študiramo, kako se obnaša spekter operatorja pri prehodu na navidezne predstavitve. Nato posplošimo še pojem lokalnega spektra elementa in definiramo spektralni funkciji D_T in D^T. V izreku 3.1.8 najdemo neko povezavo med lokalnimi spektri in notranjimi navideznimi predstavitvami. V drugem razdelku naštejemo nekoliko posplošene Dunfordove zadostne pogoje za spektralnost operatorja in dokažemo na novo Dunfordov izrek (3.2.5). V tretjem razdelku izpeljemo nekaj osnovnih lastnosti navidezno spektralnih operatorjev in najdemo dva zadostna pogoja za dvostransko navidezno spektralnost v Hilbertovem prostoru (izrek 3.3.5 na osnovi ideje iz 22 in izrek 3.3.6 na osnovi rezultata iz 24). V četrtem razdelku najdemo s pomočjo teorije iz prvih dveh delov zadostne pogoje Dunfordovega tipa za notranjo, zunanjo in dvostransko navidezno spektralnost.

3.1. Navidezne predstavitve

V vsem tretjem poglavju naj bo X netrivialen Banachov prostor in $T \in L(X)$. Nadalje naj bo E razširjena kompleksna ravnina, ki je v običajni topologiji kompakten metričen prostor, zadošča pa tudi drugemu aksiomu števnosti. Družina K vseh kompaktnih (to je zaprtih) množic na E je notranje regularni generator, družina K' (to je ravno topologija) pa zunanje regularni generator. Najmanjšo algebro, generirano s K označimo z A, ustrezno σ algebro pa z B. Seveda je B ravno σ algebra vseh Borelovih, oziroma v tem primeru vseh Baireovih, množic.

Za par $m_\alpha = (X_\alpha, V_\alpha)$ bomo predpostavili

(NP1) X_α je Banachov prostor

(NP2) $V_\alpha : X_\alpha \to X$ je omejen linearen operator s trivialnim jedrom in gosto zalogo vrednosti.

(NP3) Za vsak $S \in A_T(X)$ je $\operatorname{Im} V_\alpha$ invarianten za S.

Pod pogoji (NP1) do (NP3) lahko za vsak $S \in A_T(X)$ definiramo splošen operator S_α na X_α s predpisom $S_\alpha = V_\alpha^{-1} S V_\alpha$, ki je definiran povsod na X_α. Hitro se prepričamo, da je zaprt, torej omejen. Preslikava $\varphi_\alpha : A_T(X) \to L(X_\alpha)$, $\varphi_\alpha : S \mapsto S_\alpha$, je definirana povsod na Banachovi algebri $A_T(X)$ in je algebraični homomorfizem.

Lahko je preveriti, da je preslikava ψ_α zaprta in zato omejena. Ker je brez jedra in vse njene slika komutirajo s $\psi_\alpha(T) = T_\alpha$, je ψ_α zvezna vložitev algebre $A_T(X)$ v algebro $A_{T_\alpha}(X_\alpha)$.

Za par $m^\alpha = (X^\alpha, V^\alpha)$ pa bomo predpostavili, da zanj velja pogoj (NP1) in popravljena pogoja:

(NP2') $V^\alpha : X \longrightarrow X^\alpha$ je omejen linearen operator s trivialnim jedrom in gosto zalogo vrednosti.

(NP3') Za vsak $S \in A_T(X)$ je splošen operator S^α na X^α, definiran z $\operatorname{Def} S^\alpha = \operatorname{Im} V^\alpha$, $S^\alpha = V^\alpha S V^{\alpha-1}$, omejen.

Pod zgornjimi pogoji ima S^α enolično razširitev do omejenega operatorja na vsem X^α, ki ga spet označimo z S^α. Preslikava $\varphi^\alpha : A_T(X) \longrightarrow L(X^\alpha)$, $\varphi^\alpha : S \mapsto S^\alpha$ je po sorodnem premisleku, kot zgoraj, zvezna vložitev Banachove algebre $A_T(X)$ v Banachovo algebro $A_{T^\alpha}(X^\alpha)$.

3.1.1. <u>Definicija</u>: Pare m_α imenujemo <u>notranje</u>, pare m^α pa <u>zunanje navidezne predstavitve</u> operatorja T.

3.1.2. Trditev:

(a) Če je $\lambda \in \sigma_p(T)$, je za vsak m^{α} $\lambda \in \sigma_p(T^{\alpha})$.

(b) Če je $\lambda \in \sigma_r(T)$, je za vsak m_{α} $\lambda \in \sigma_r(T_{\alpha})$.

(c) Za vsak m_{α} je $\sigma(T_{\alpha}) \subseteq \sigma(T)$.

(d) Za vsak m^{α} je $\sigma(T^{\alpha}) \subseteq \sigma(T)$.

Dokaz: (a) Naj bo $x \in X$, $x \neq 0$ in $(\lambda - T)x = 0$; tedaj $V^{\alpha} x \neq 0$ in $(\lambda - T^{\alpha}) V^{\alpha} x = V^{\alpha}(\lambda - T)x = 0$. (b) Naj bo $y \in X^*$, $y \neq 0$ in $\langle (\lambda - T)x \mid y \rangle = 0$ za vsak $x \in X$; tedaj je $V_{\alpha}'^{*} y \neq 0$ in za vsak $u \in X_{\alpha}$ je

$$\langle (\lambda - T_{\alpha}) u \mid V_{\alpha}^{*} y \rangle = \langle V_{\alpha}(\lambda - T_{\alpha}) u \mid y \rangle =$$
$$= \langle (\lambda - T) V_{\alpha} u \mid y \rangle = 0 .$$

(c) Za $\lambda \in \rho(T)$ je $R_T(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} \in A_T(X)$ in zato $\varphi_{\alpha}(R_T(\lambda)) \in L(X_{\alpha})$. (d) Analogno.

Označimo s Σ_T družino vseh tistih $a \in K$, za katere velja, da za vsak $b \in K'$, $b \supseteq a$ obstaja tak m_{α} , da je $\sigma(T_{\alpha}) \subseteq b$. Analogno označimo s Σ^T družino vseh tistih $a \in K$, za katere velja, da za vsak $b \in K'$, $b \supseteq a$, obstaja tak m^{α} , da je $\sigma(T^{\alpha}) \subseteq b$.

3.1.3. Trditev:

(a) Če je $a \in \Sigma_T$ (oziroma Σ^T), je $a \cap \sigma(T)$ tudi v Σ_T (oziroma Σ^T).

(b) Če je $a \subseteq \wp(T)$, $a \in K$, potem $a \notin \Sigma_T$ in $a \notin \Sigma^T$.

(c) Če je $a \in \Sigma_T$ (oziroma Σ^T), potem $a \neq \emptyset$.

(d) V Σ_T in v Σ^T obstajajo minimalni elementi glede na inkluzijo.

(e) Vsak minimalni element v Σ_T (oziroma v Σ^T) je neprazna kompaktna podmnožica $\sigma(T)$, ki vsebuje $\sigma_r(T)$ (oziroma $\sigma_p(T)$).

Dokaz: (a) Naj bo $b \in K'$, $b \supseteq a \cap \sigma(T)$ poljuben. Tedaj je $c = b \cup \wp(T) \in K'$ in $c \supseteq a$, zato obstaja po predpostavki tak m_α, da je $\sigma(T_\alpha) \subseteq c$ in po trditvi 3.1.2(c) je $\sigma(T_\alpha) \subseteq \sigma(T)$; od tod pa $\sigma(T_\alpha) \subseteq b$. Dokaz zunanje inačice gre po istem kopitu.

(b) Če je $a \subseteq \wp(T)$, obstaja tak m_α, da je $\sigma(T_\alpha) \subseteq \wp(T)$, zato po 3.1.2(c) $\sigma(T_\alpha) = \emptyset$, zato je X_α in končno X trivialen. Zunanji premislek je analogen. (c) Prazna množica je kompaktna podmnožica $\wp(T)$.

(d) Če je $\mathcal{V}$ poljubna veriga v Σ_T, je $a_0 = \bigcap_{a \in \mathcal{V}} a \in K$ in za poljuben $b \in K'$, $b \supseteq a_0$ obstaja zaradi kompaktnosti tak $a \in \mathcal{V}$, da je $a \subseteq b$, torej je $a_0 \in \Sigma_T$. Končno ugotovitev dobimo po Zornovem lema. Zunanji dokaz poteka dobesedno enako. Točka (e) pa je strnitev dosedanjih ugotovitev.

Za poljuben $x \in X$ vzamemo v $\Sigma_T(x)$ vse tiste $a \in K$, za katere velja, da za poljuben $b \in K'$, $b \supseteq a$, obstajata

(LS1) $c \in K'$, $a \subseteq Cc \subseteq b$,

(LS2) analitična funkcija $\hat{x} : c \to X$, za katero

$$(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x\,,\quad \lambda \in c.$$

3.1.4. Trditev:

(a) $\emptyset \in \Sigma_T(x)$ natanko tedaj, kadar je $x = 0$.

(b) Če je $a_1 \in \Sigma_T(x_1)$, $a_2 \in \Sigma_T(x_2)$ in $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, je $a_1 \cup a_2 \in \Sigma_T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

(c) Če je $a \in \Sigma_T(x)$, je $a \cap \sigma(T) \in \Sigma_T(x)$.

(d) V vsakem $\Sigma_T(x)$ obstajajo minimalni elementi glede na inkluzijo.

(e) Vsak minimalni element v $\Sigma_T(x)$ je kompaktna podmnožica $\sigma(T)$ in je prazna natanko tedaj, kadar je $x = 0$. Če sta a_1 oziroma a_2 minimalna elementa v $\Sigma_T(x_1)$ oziroma $\Sigma_T(x_2)$, obstaja za poljubna $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tak minimalni element a v $\Sigma_T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, da je $a \subseteq a_1 \cup a_2$.

3.1.5. Definicija: Minimalne elemente v $\Sigma_T(x)$ imenujemo lokalne spektre vektorja $x \in X$.

Dokaz: (a) Pogoja (LSi), i=1,2, uporabimo na $a = \emptyset$, $b = \rho(T)$ in upoštevamo Liouvillov izrek. (b) Naj bo $b \supseteq a_1 \cup a_2$, $b \in K'$; tedaj obstajata c_1 in c_2, $a_1 \subseteq Cc_1 \subseteq b$ in $a_2 \subseteq Cc_2 \subseteq b$ ter analitični funkciji $\hat{x}_1 : c_1 \to X$, $\hat{x}_2 : c_2 \to X$, za kateri

$$(\lambda - T)\,\hat{x}_i\,(\lambda) = x_i\,,\ \lambda \in c_i,\quad i = 1,2\,.$$

Na $c_3 = c_1 \cap c_2$ definiramo analitično funkcijo $\hat{x}_3 = \alpha_1 \hat{x}_1 + \alpha_2 \hat{x}_2$; tedaj je $a_1 \cup a_2 \subseteq Cc_3 \subseteq b$ in

$$(\lambda - T)\,\hat{x}_3\,(\lambda) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\,,\ \lambda \in c_3\,.$$

(c) Naj bo $b \supseteq a \cap \sigma(T)$, $b \in K'$, in $b_1 = b \cup \rho(T)$. Tedaj je $b_1 \supseteq a$ in obstajata $c_1 \in K'$, $a \subseteq Cc_1 \subseteq b$, in $\hat{x} : c_1 \to X$, analitična, z lastnostjo $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in c_1$. Funkcijo $\hat{x}$ (enolično) razširimo s pomočjo funkcije $(\lambda - T)^{-1} x$ na ves $c = c_1 \cup \rho(T)$.

(d) je preprosta uporaba Zornovega lema, (e) pa strnitev prejšnjih rezultatov.

Prepričajmo se, da je naša definicija lokalnih spektrov posplošitev tega pojma, ki je bil doslej v literaturi definiran le za operatorje z lastnostjo enoličnega analitičnega nadaljevanja (single valued extension property). To lastnost bomo definirali kot lastnost množic (primerjaj [7]).

Za odprto, povezano množico a bomo rekli, da zadošča pogoju

(NAN) če obstaja $\hat{x} : a \longrightarrow X$, netrivialna, analitična, za katero

$$(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = 0, \lambda \in a.$$

Tudi za prazno množico priznamo, da zadošča temu pogoju. Za kompaktno množico a pa bomo rekli, da zadošča pogoju

(EAN) če za vsako neprazno povezano komponento c množice Ca obstaja tak $b \in K$, $b \subseteq c$, ki ne leži v nobeni množici (NAN).

Za operator T bomo rekli, da zadošča pogoju

(D1) če je $\emptyset$ edini (NAN);

ali ekvivalentno: vsak $a \in K$ je (EAN).

3.1.6. <u>Trditev</u>:

(a) Če $a \in \mathcal{K}$ zadošča pogoju (EAN), je $a \in \Sigma_T(x)$ natanko tedaj, kadar obstaja analitična funkcija $\hat{x} : Ca \longrightarrow X$, za katero $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in Ca$. V tem primeru je s temi pogoji $\hat{x}$ enolično določena.

(b) Če operator T zadošča pogoju (D1) ima vsak $x \in X$ en sam lokalni spekter.

Dokaz: (a) Če taka analitična funkcija obstaja, je seveda $a \in \Sigma_T(x)$. Pa denimo, obratno, da je $a \in \Sigma_T(x)$, izberimo povezano komponento c množice Ca in naraščajoče zaporedje $b_k \in K$ z unijo c. Po pogoju (EAN) lahko brez škode za splošnost privzamemo, da noben b_k ne leži v nobenem (NAN). Ker pa je $a \in \Sigma_T(x)$, obstajajo $c_k \supseteq b_k$, $a \subseteq Cc_k$ in $\hat{x}_k : c_k \to X$, za katere

$$(\lambda - T)\, x_k(\lambda) = x \ , \lambda \in c_k \ .$$

Za $\lambda \in c$ obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $\lambda \in c_k$ in lahko definiramo $\hat{x}(\lambda) = \hat{x}_k(\lambda)$. Če smo množice c_k izbirali povezane (in to lahko vselej storimo), je dobljena definicija neodvisna od izbire k, torej je funkcija $\hat{x} : c \to X$ analitična na vsem $\mathbb{C}$. Ker tudi c ni tipa (NAN), je s temi lastnostmi na vsem c enolično določena.

(b) Če T zadošča pogoju (D1), je seveda vsaka kompaktna množica tipa (EAN). Presek vseh elementov družine $\Sigma_T(x)$ je tedaj iskani lokalni spekter elementa $x \in X$.

Priredimo zdaj poljubni kompaktni množici $a \in K$ družino

$$d_T(a) = \{ x \in X ; \ a \in \Sigma_T(x) \},$$

ali ekvivalentno: $d_T(a)$ je družina vseh tistih $x \in X$, ki imajo vsaj en lokalni spekter pod a. Nadalje vpeljimo

$$D_T(a) = \overline{d_T(a)}$$

in

$$D^T(Ca) = d_{T^*}(a)_\perp .$$

Družina $d_T(a)$ je linearna po trditvi 3.1.4(b), zato je $D_T(a) \in S(X)$, pa tudi $D^T(Ca) \in S(X)$. Poleg tega za $a,b \in K$, $a \subseteq b$, velja $d_T(a) \subseteq d_T(b)$ in zato $D_T(a) \leqslant D_T(b)$, pa tudi $D^T(Cb) \geqslant D^T(Ca)$. Torej sta funkciji $D_T \in$ pfm (K,X) in $D^T \in$ pfm (K',X) obe monotoni. Funkcijo D_T razširimo notranje, funkcijo D^T pa zunanje na ves PE, obe razširitvi pa brez strahu za zamenjavo spet označimo z D_T in D^T.

3.1.7. <u>Trditev</u>:

(a) $D_T \leqslant D^T$ na vsem PE.

(b) $A_T(X) \subseteq \text{Inv } D_T$ in $A_T(X) \subseteq \text{Inv } D^T$.

<u>Dokaz</u>: (a) Vzemimo najprej $a \in K$, $b \in K'$, $a \subseteq b$, $x \in d_T(a)$ in $y \in d_{T^*}(Cb)$. Po definiciji lokalnega spektra lahko tedaj najdemo take $c \in K'$, $a \subseteq Cc \subseteq b$ in

$\hat{x} : c \to X$, analitično, da je

(1) $$(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x,\ \lambda \in c;$$

nato pa še take $d \in K'$, $Cb \subseteq Cd \subseteq c$ in $\hat{y} : d \to X^*$, analitično, da je

(2) $$(\lambda - T^*)\,\hat{y}(\lambda) = y,\ \lambda \in d.$$

Na c definiramo skalarno analitično funkcijo $\varphi(\lambda) = \langle \hat{x}(\lambda) | y \rangle$, na d pa $\psi(\lambda) = \langle x | \hat{y}(\lambda) \rangle$. Po (1) in (2) je za $\lambda \in c \cap d$:

$$\varphi(\lambda) = \langle \hat{x}(\lambda) | (\lambda - T^*)\,\hat{y}(\lambda) \rangle =$$

$$= \langle (\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) | \hat{y}(\lambda) \rangle = \psi(\lambda),$$

zato je funkcija

$$\vartheta(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda), & \lambda \in c \\ \psi(\lambda), & \lambda \in d \end{cases}$$

analitična na vsej ravnini in zaradi $\vartheta(\omega) = 0$ identično enaka nič. Pri razvoju v Laurentovo vrsto funkcije ϑ okoli točke ω pa je prvi koeficient enak $\langle x | y \rangle$, zato je $\langle x | y \rangle = 0$, torej je $d_T(a) \subseteq D^T(b)$ in od tod $D_T(a) \leq D^T(b)$. Za poljuben $c \in PE$ pa je

$$D_T(c) = \nabla \{ D_T(a);\ a \subseteq c,\ a \in K \} \leq$$

$$\leq \cap \{ D^T(b);\ b \supseteq c,\ b \in K' \} = D^T(c).$$

(b) Naj bo $x \in d_T(a)$, $a \in K$, in $b \supseteq a$, $b \in K'$ poljubna. Tedaj obstajata taka $c \in K'$, $a \subseteq Cc \subseteq b$ in $\hat{x} : c \to X$, analitična, da je $(\lambda - T)\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in c$. Zato je za poljuben $S \in A_T(X)$ funkcija $S\hat{x}$ analitična in velja $(\lambda - T) S \hat{x}(\lambda) = S x$, $\lambda \in c$; torej je $Sx \in d_T(a)$ in $A_T(X) \subseteq \mathrm{Inv}\, D_T$. Naj bo zdaj $x \in D^T(a)$, $a \in K'$ in $y \in d_{T^*}(Ca)$. Tedaj je za $S \in A_T(X)$ po prejšnjem $S^* y$ $d_{T^*}(Ca)$ in $0 = \langle x \mid S^* y \rangle = \langle S x \mid y \rangle$. Torej je $S x \in D^T(a)$ in $A_T(X) \subseteq \mathrm{Inv}\, D^T$.

Oglejmo si zdaj neko zvezo med spektri notranjih predstavitev in "notranjo" funkcijo D_T, definirano z lokalnimi spektri. Zaradi pomanjkanja prostora opustimo analogna zunanja razmišljanja.

3.1.8. <u>Izrek</u>: Za $a \in K$ velja:

(a) Če je pri nekem m_α : $\sigma(T_\alpha) \subseteq a$, je $D_T(a) = X$.

(b) Če je a tipa (EAN) in $D_T(a) = X$, je $a \in \Sigma_T$.

<u>Dokaz</u>: (a) Če je $\sigma(T_\alpha) \subseteq a$, je za vsak $x \in \mathrm{Im}\, V_\alpha$ funkcija $\hat{x}(\lambda) = V_\alpha R_T(\lambda) V_\alpha^{-1} x$ analitična za $\lambda \in Ca$ in $(\lambda - T)\hat{x}(\lambda) = x$; zato je $\mathrm{Im}\, V_\alpha \subseteq d_T(a)$.

(b) Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $a \subseteq \sigma(T)$. V nasprotnem bi namreč namesto a vzeli množico

$a_1 = a \cap \sigma(T)$. Dokažimo, da tudi a_1 zadošča pogoju (EAN) ! Pa naj bo c neka neprazna povezana komponenta množice Ca_1. Če je $c \cap \varrho(T) = \emptyset$, je $c \subseteq Ca$, torej je c povezana komponenta množice Ca. Če pa je $c \cap \varrho(T) \neq \emptyset$, vsebuje $c \cap \varrho(T)$ (torej tudi c) neko kompaktno množico, ki ne leži v nobenem (NAN).

Naj bo zdaj $b \in K'$, $b \supseteq a$ poljubna; zaradi enostavnosti predpostavimo, da je b omejena, sicer bi jo ustrezno zmanjšali. Množica $d = Cb$ je kompaktna in leži le v končno mnogo povezanih komponentah $c_1, c_2, \ldots, c_n$ množice Ca. Označimo $d_k = c_k \cap d$; tedaj so d_k paroma disjunktne kompaktne množice z unijo d, ki ležijo vsaka v svoji komponenti c_k. Brez škode za splošnost predpostavimo, da so d_k povezane in ne ležijo v nobenem (NAN); v nasprotnem bi namreč množice d_k še povečali in s tem množico b še zmanjšali. Vsako od množic d_k pokrijemo s končno mnogo odprtih diskov, katerih zaprtja ležijo še zmerom v c_k; unijo teh diskov označimo z e_k. Tedaj je

$$d_k \subseteq e_k \subseteq \bar{e}_k \subseteq c_k \ , \quad k=1,2,\ldots,n,$$

množice e_k pa so odprte, povezane in niso tipa (NAN). Naj bo $e = \bigcup_{k=1}^{n} e_k$ in X_α vektorski prostor vseh funkcij $\hat{x} : \bar{e} \to X$, ki so analitične na e, zvezne na $\overline{e}$ in za katere je

(3) $$V_\alpha \hat{x} = (\lambda - T)\hat{x}(\lambda) \in X$$

neodvisen od izbire $\lambda \in \overline{e}$. Prostor X_α opremimo z normo

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\lambda \in \overline{e}} \|\hat{x}(\lambda)\| ,$$

v kateri postane Banachov, preslikava $V_\alpha : X_\alpha \to X$, definirana s (3) pa omejen, linearen operator. Ker množice e_k niso tipa (NAN), je operator V_α injektiven. Za $x \in d_T(a)$ obstaja po trditvi 3.1.6(a) funkcija $\hat{x} : Ca \to X$, analitična, za katero $(\lambda - T)\hat{x}(\lambda) = x, \lambda \in Ca$. Zato je skrčitev $\hat{x}|_{\overline{e}}$. element prostora X_α in

$$V_\alpha(\hat{x}|_{\overline{e}}) = x ;$$

od tod dobimo $d_T(a) \subseteq \mathrm{Im}\, V_\alpha$ in po predpostavki izreka ima V_α gosto zalogo vrednosti. Za $S \in A_T(X)$ in $x \in X$, je seveda

$$S(\lambda - T)\hat{x}(\lambda) = (\lambda - T)S\hat{x}(\lambda) , \lambda \in \overline{e} ,$$

zato je $S\, \mathrm{Im}\, V_\alpha \subseteq \mathrm{Im}\, V_\alpha$ in $m_\alpha = (X_\alpha, V_\alpha)$ je notranja navidezna predstavitev operatorja T.

Vzemimo zdaj poljubne $\hat{x} \in X_\alpha$, $\mu \in e$ in $\lambda \in \overline{e}$ ter definirajmo (za zdaj splošni) operator R_μ na X_α s predpisom

$$(R_\mu \hat{x})(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\hat{x}(\lambda) - \hat{x}(\mu)}{\lambda - \mu}, & \lambda \neq \mu \\ -\ x'(\mu), & \lambda = \mu \end{cases}.$$

Tedaj je $R_\mu \hat{x} \in X_\alpha$ in po preprostem računu

$$(\mu - T_\alpha) R_\mu = R_\mu (\mu - T_\alpha) = I_{X_\alpha},$$

zato je $\mu \in \rho(T_\alpha)$ in $\sigma(T_\alpha) \subseteq Ce \subseteq b$, kar je bilo treba dokazati.

3.2. Dunfordovi pogoji

Naštejmo zdaj vse štiri Dunfordove pogoje! Za operator T bomo rekli, da zadošča pogojem:

(D1) če je prazna množica edini (NAN);

(D2) če je D_T omejena na K;

(D3) če je $d_T = D_T$ na K;

(D4) če je $(D_T)_{\sigma B}(E) = X$.

Pripomnimo naj, da je N. Dunford (primerjaj 10) definiral ostale tri pogoje le za tiste operatorje, ki že zadoščajo pogoju (D1). V naši definiciji je vsak pogoj zase neodvisno definiran. Oglejmo si nekaj preprostih posledic posameznih pogojev.

3.2.1. <u>Trditev</u>:

(a) Če velja (D2), velja (D1).

(b) Če velja (D2), je D_T omejena na vsem B.

(c) Če velja (D2), (D3) in je $(D_T)_B(E) = X$, potem je

(i) D_T zunanje odlikovana glede na B,

(ii) D_T je mera in tudi (D4) velja,

(iii) $D_T = D^T$ na vsem B.

<u>Dokaz</u>: (a) Naj bo $a \in K'$ neprazna, povezana, tipa (NAN) in $\hat{x} : a \to X$ netrivialna analitična funkcija z lastno-

stjo $(\lambda - T)\hat{x}(\lambda) = 0$, $\lambda \in a$. Izberimo $\lambda_o \in a$, $\hat{x}(\lambda_o) \neq 0$ in zaporedje $\lambda_k \in a$, $\hat{x}(\lambda_k) \neq 0$, $\lambda_k \neq \lambda_o$, $\lambda_k \to \lambda_o$; $k \in \mathbb{N}$. Za $k \in \mathbb{N}_o$ je $\hat{y}_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-1} \hat{x}(\lambda_k)$, $\lambda \in C\{\lambda_k\}$ analitična in $(\lambda - T)\hat{y}_k(\lambda) = \hat{x}(\lambda_k)$, zato je $\hat{x}(\lambda_k) \in D_T(\{\lambda_k\})$ in po (D2)

$$\|\hat{x}(\lambda_o)\| \leq M(K,D_T)\,\|\hat{x}(\lambda_o) - \hat{x}(\lambda_k)\|, \; k \in \mathbb{N};$$

ker pa je $\hat{x}$ zvezna, je $\hat{x}(\lambda_k) \to \hat{x}(\lambda_o)$ in zato po zgornji oceni $\hat{x}(\lambda_o) = 0$, v nasprotju s predpostavko.

(b) Glej trditev 2.1.2(c).

(c,i) Naj bo $a,b \in K$ in $x \in D_T(a) \cap D_T(b)$. Tedaj je po trditvi 3.1.6 lokalni spekter vektorja x enolično določen; ker leži v a in v b, leži v $a \cap b$ in zato $x \in D_T(a \cap b)$. To dokazuje, da je $D_T(a) \cap D_T(b) = D_T(a \cap b)$. Naj bo zdaj $a,b \in B$ in $x \in D_T(a) \cap D_T(b)$. Tedaj je

$$x \in \nabla \{ D_T(c) \, ; \; c \subseteq a, \; c \in K \}$$

in zaradi $(D_T)_B(E) = X$ ter pogoja (D2) obstaja za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $c \in K$, $c \subseteq a$, da je $\|x - P_{D_T}(c)x\| \leq \varepsilon$. Ker je $P_{D_T}(c) \in A_T(X)$, je $y = P_{D_T}(c)x$ v $D_T(b)$ in obstaja po istem razmisleku tak $d \subseteq b$,

$d \in K$, da je $\| y - P_{D_T}(d) y \| \leq \varepsilon$ in zato

$$\| x - P_{D_T}(d) P_{D_T}(c) x \| \leq 2\varepsilon .$$

Toda $P_{D_T}(d) P_{D_T}(c) x \in D_T(c) \cap D_T(d) = D_T(c \cap d) \leq$
$\leq D_T(a \cap b)$ in $x \in D_T(a \cap b)$.

(c,ii) Po točki (c,i) in trditvi 1.5.7(b) smo v pogojih trditve 2.2.2. Za vsak $x \in X$, $y \in X^*$ je tedaj $v_{x,y}$ (kar v običajnem pomenu) regularna, končno aditivna Borelova funkcija na kompaktnem topološkem prostoru, zato je po izreku Alexandroffa (primerjaj [8]) skalarna mera. Trditev 1.1.8(b) nam tedaj pove, da je D_T mera in tudi (D4) mora seveda veljati.

(c,iii) Po izreku 2.2.3 je D_T tudi zunanje regularna; dovolj bo torej, če dokažemo $D^T \leq D_T$ na K', oziroma $(D_T)^{\perp} \subseteq d_{T^*}$ na K. Toda po trditvah 3.2.3(a) in 0.2.5 je za $a \in K$: $a \supseteq \sigma(T|_{D_T(a)}) = \sigma(T|^{D_T(Ca)}) =$
$= \sigma(T^* |_{(D_T(Ca))^{\perp}})$.

Formulirajmo zdaj nekaj pogojev, sorodnih pogoju (D4), ki so pod določenimi dodatnimi pogoji z njim ekvivalentni. Pišimo:

(Da) D_T je mera na B;

(Db) D_T je notranje $\mathfrak{S}$ odlikovana na B;

(Dc) $(D_T)_B(E) = X$;

(Dd) $(D_T)_{\sigma K}(E) = X$.

3.2.2. Trditev:

(a) (Da) $\Rightarrow$ (Db) $\Rightarrow$ (D4) $\Rightarrow$ (Dc) in (D4) $\Rightarrow$ (Dd).

(b) Pod pogojem (D2) je (D4) $\Rightarrow$ (Da).

(c) Pod pogojem (D2) in (D3) je (Dc) $\Rightarrow$ (Da).

(d) Če je X refleksiven in velja (D2), je (Dd) $\Rightarrow$ (Da).

Dokaz: (a) Jasno; (b) izrek 2.1.4, (c) trditev 3.2.1(c,ii), (d) izrek 2.2.4.

V četrtem razdelku tega poglavja bomo potrebovali še nekatere zunanje pogoje k Dunfordovim, ki so tipično notranji. Zasnujemo jih kot "notranje *" pogoje na dualu. Rekli bomo, da operator T zadošča pogojem

(D1') če je prazna množica edini (NAN) operatorja T^*;

(D3') če je $(D^T)^{\perp} = d_{T^*}$ na K.

3.2.3. Trditev: Naj za T velja $\left\{\begin{matrix} \text{(D1') in (D3')} \\ \text{(D1) in (D3)} \end{matrix}\right\}$, tedaj

(a) Za vsak $a \in K$ je $\left\{\begin{matrix} \sigma(T|^{D^T(Ca)}) \\ \sigma(T|_{D_T(a)}) \end{matrix}\right\}$ pod a.

(b) T ima natanko en minimalni element v $\left\{\begin{matrix} \Sigma^T \\ \Sigma_T \end{matrix}\right\}$ in ta je enak $\sigma(T)$.

(c) Za poljuben $U \in S(X)$, invarianten za T, veljata za operator $\left\{\begin{matrix} T|^U & \text{pogoja (D1') in (D3')} \\ T|_U & \text{pogoja (D1) in (D3)} \end{matrix}\right\}$.

(d) Za vsak $a \in K$ je $\left\{\begin{matrix} D(T|^{D^T(Ca)}) = D^T|^{Ca} \\ D(T|_{D_T(a)}) = D_T|_a \end{matrix}\right.$.

Za definicijo funkcij $F|^{Ca}$ in $F|_a$ glej razdelek 2.3 strani 9 do 11.

Dokaz: (a) (Notranji) Naj bo $a \in K$ in $x \in D_T(a)$; po (D3) je $x \in d_T(a)$ in po (D1) ter trditvi 3.1.6 obstaja analitična funkcija $\hat{x} : Ca \to X$ z lastnostjo $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in Ca$. Za $\mu \in Ca$ pišemo

$$\hat{y}_\mu(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\hat{x}(\lambda) - x(\mu)}{\lambda - \mu}, & \lambda \neq \mu \\ -\hat{x}'(\mu), & \lambda = \mu \end{cases}, \quad \lambda \in Ca.$$

Tedaj je $\hat{y}_\mu : Ca \to X$ analitična in $(\lambda - T)\,\hat{y}_\mu(\lambda) = \hat{x}(\mu)$, zato je $\hat{x}(\mu) \in D_T(a)$ in operator R_μ:

$D_T(a) \longrightarrow D_T(a)$, definiran z $R_\mu : x \longmapsto \hat{x}(\mu)$ je linearen in

$$(\mu - T)|_{D_T(a)} R_\mu = R_\mu (\mu - T)|_{D_T(a)} = I_{D_T(a)},$$

torej $\mu \notin \sigma(T|_{D_T(a)})$ in $\sigma(T|_{D_T(a)}) \subseteq a$.

(Zunanji) Po trditvi 0.2.5 je za $a \in K$ $\sigma(T|^{D^T(Ca)}) =$ $= \sigma(T^*|_{D^T(Ca)^\perp})$, po pogoju (D3') pa je $D^T(Ca)^\perp =$ $= d_{T^*}(a)$. Naprej pa razmišljamo enako, kot v notranjem primeru.

(b) (Notranji) Naj bo m_α poljubna notranja predstavitev in $a = \sigma(T_\alpha)$; po trditvi 3.1.3 je $a \subseteq \sigma(T)$. Poleg tega pa je po izreku 3.1.8(a) $D_T(a) = X$ in po (a) $\sigma(T) \subseteq a$.

(Zunanji) Naj bo m^α poljubna zunanja predstavitev in $a = \sigma(T^\alpha)$; po trditvi 3.1.3 je $a \subseteq \sigma(T)$. Poleg tega je $\operatorname{Im} V^{\alpha *} \subseteq d_{T^*}(a)$ in po (D3') $D^T(Ca) = \{0\}$. Od tod dobimo po (a): $\sigma(T) \subseteq a$.

(c) (Notranji) Operator $T|_U$ seveda zadošča pogoju (D1). Naj bo $a \in K$ in definirajmo na $D_T(a)$ za $\mu \in Ca$ operator R_μ tako, kot v točki (a). Množica $d_{T|_U}(a)$ je linearen podprostor prostora $D_T(a)$, pogled na definicijo operatorja R_μ pa nam pove, da ohranja ta prostor invarianten; ker je $R_{\sigma\mu}$ omejen, ohranja invarianten tudi prostor $\overline{d_{T|_U}(a)}$; od tod pa dobimo, da je $d_{T|_U}(a)$ zaprt.

(Zunanji) Ker je po trditvi 0.2.5 $(T|^U)^*$ podoben operatorju $T^*|_{U^\perp}$, zadošča $T|^U$ pogoju (D1'). V zgornjem notranjem razmisleku zamenjajmo zdaj $D_T(a)$, $d_{T|_U}(a)$ in $R_{\sigma\mu}$ z $D_{T^*}(a)$, $d_{T^*|_{U^\perp}}(a)$ in ustreznim $R_{\sigma\mu}^*$ ter upoštevajmo, da je $R_{\sigma\mu}^*$ $*$ zvezen, pa dobimo še pogoj (D3').

(d) (Notranji) Za $a,b \in K$ je

$$D_{T|_{D_T(a)}}(b) = D_T(a) \cap D_T(b) = D_T(a \cap b)$$

in zato za $a \in K$, $b \in PE$:

$$\begin{aligned} D_{T|_a}(b) &= D_T(a \cap b) = \nabla \{D_T(c) \; ; \; c \subseteq a \cap b\} = \\ &= \nabla \{D_T(a \cap c) \; ; \; c \subseteq b\} = \\ &= \nabla \{D_{T|_{D_T(a)}}(c) \; ; \; c \subseteq b\} = D_{T|_{D_T(a)}}(b) \; . \end{aligned}$$

(Zunanji) Za $a,b \in K$ je

$$D_{T^*|_{D_{T^*}(a)}}(b) = D_{T^*}(a \cap b)$$

in zato

$$D^T|^{D^T(Ca)}(Cb) = D^T(Ca \cup Cb) / D^T(Ca) \; ;$$

od tod dobimo pri $a \in K$, $b \in PE$:

$$D^T|^{Ca}(b) = D^T(Ca \cup b) / D^T(Ca) =$$

$$= \bigcap \left\{ D^T(c) \; ; \; c \supseteq Ca \cup b, \; c \in K' \right\} / D^T(Ca) =$$

$$= \bigcap \left\{ D^T(c) / D^T(Ca) \; ; \; c \supseteq Ca \cup b, \; c \in K' \right\} =$$

$$= \bigcap \left\{ D^T(Ca \cup c) / D^T(Ca) \; ; \; c \supseteq b, \; c \in K' \right\} =$$

$$= \bigcap \left\{ D^T|^{D^T(Ca)}(c) \; ; \; c \supseteq b, \; c \in K' \right\} =$$

$$= D^T|^{D^T(Ca)}(b) \; .$$

3.2.4. Definicija: Operator T je spektralen, če obstaja taka mera $F \in \text{pfm}\, B$, da je

(SP1) $F(a)$ invarianten za T, $a \in K$;

(SP2) $\sigma(T|_{F(a)}) \subseteq a$, $a \in K$.

3.2.5. Izrek (Dunford): Operator T je spektralen natanko tedaj, kadar zadošča pogojem (D2), (D3) in (D4).

Dokaz: Denimo, da je T spektralen, tedaj je po izreku 2.2.3 F regularna in zato $T \in \text{Inv}\, F$; zato je $P_F(a) \in$

$A_T(X)$, $a \in B$. Na K je $F \subseteq d_T$. Pa naj bo $a_o \in K$ in $a_k \in K$, $k \in \mathbb{N}$, naraščajoče zaporedje z unijo Ca_o. Za $x_o \in d_T(a_o)$ in $x_k = P_F(a_k)\, x_o$, $k \in \mathbb{N}$, obstajajo analitične funkcije $\hat{x}_k : Ca_k \to F(a_k)$ z lastnostjo $(\lambda - T)\, \hat{x}_k(\lambda) = x_k$, $\lambda \in Ca_k$, $k \in \mathbb{N}_o$. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ je funkcija

$$\hat{y}_k(\lambda) = \begin{cases} \hat{x}_k(\lambda) & , \lambda \in Ca_k \\ P_F(a_k)\hat{x}_o(\lambda) & , \lambda \in Ca_o \end{cases}$$

analitična na vsej ravnini in ima ničlo v točki ω. Zato je $x_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, in zaradi $x_k \to P_F(Ca_o)\, x_o$ je $x_o \in F(a_o)$. Zato je $F = d_T$ na K in veljajo pogoji (D2), (D3) in (D4). Za nazaj pa uporabimo (na primer) izrek 2.1.4, trditev 3.1.7 in 3.2.3(a) na funkciji $F = D_T$.

3.2.6. <u>Posledica</u>: Naj bo T spektralen in F poljubna mera, za katero velja (SP1) in (SP2). Tedaj je:

(a) $F = D_T = D^T$ na vsem B.

(b) Za poljubna $a \in B$, $S \in A_T(X)$ je $P_F(a) \in A_S(X)$.

(c) Za vsak $a \in B$ je $\sigma(T|_{F(a)}) \subseteq \bar{a}$.

(d) T zadošča (D1') in (D3'), T^* pa (D2).

(e) Če je X refleksiven, je T spektralen natanko tedaj, kot T^*.

Dokaz: (a) Glej dokaz izreka in trditev 3.2.1(c). (b) Uporabi trditev 3.1.7(b). (c) Po trditvi 3.2.3 je $D_{T|_{F(\bar{a})}}(a) = F(a)$ in je podprostor prostora $F(\bar{a})$, hiperinvarianten za $T|_{F(\bar{a})}$. (d) Uporabi trditev 3.2.1 in 3.2.3. (e) Uporabi točko (d).

Navedimo zdaj nekaj definicij in znanih izsledkov teorije spektralnih operatorjev. Mero F, definirano v 3.2.4, ki je po 3.2.6(a) s temi pogoji enolično določena, imenujemo spektralna razčlenitev enote operatorja T. Omejenemu operatorju

$$S = \int_E \lambda \, dP_F(\lambda)$$

(integral je krepko konvergenten), ki komutira z vsakim elementom iz $A_T(X)$, pravimo skalarni del, operatorju $N = T - S$, ki je vselej kvazinilpotenten, pa radikal operatorja T. Za skalarno analitično funkcijo f, definirano na neki okolici spektra $\sigma(T)$ velja

$$f(T) = \sum_{k=0} \frac{N^k}{k!} \int_E f^{(k)}(\lambda) \, dP(\lambda) ,$$

pri tem konvergirajo integrali krepko, vrsta pa v enakomerni normi.

3.3. Navidezno spektralni operatorji

3.3.1. <u>Definicija</u>: Operator T je <u>notranje</u> (<u>zunanje</u> ; <u>dvostransko</u>) <u>navidezno spektralen</u>, če ima notranjo (zunanjo; notranjo in zunanjo) navidezno predstavitev, v kateri je spektralen.

3.3.2. <u>Trditev</u>:

(a) Če je T $\left\{\begin{matrix}\text{zunanje}\\ \text{notranje}\end{matrix}\right\}$ navidezno spektralen, obstaja popolna meja v $\left\{\begin{matrix}\tilde{M}^{B:B}(D^T)\\ \tilde{M}_{B:B}(D_T)\end{matrix}\right\}$.

(b) Če ima T neko spektralno navidezno predstavitev $\left\{\begin{matrix}m^\alpha\\ m_\alpha\end{matrix}\right\}$ in je $\left\{\begin{matrix}m_\beta\\ m^\beta\end{matrix}\right\}$ poljubna njegova navidezna predstavitev, je $\left\{\begin{matrix}\sigma(T^\alpha)\subseteq\sigma(T_\beta)\\ \sigma(T_\alpha)\subseteq\sigma(T^\beta)\end{matrix}\right\}$.

(c) Vsak dvostransko navidezno spektralni operator ima enolično določena minimalna elementa v Σ_T in v Σ^T, ki sta med seboj enaka. Vsaka njegova spektralna predstavitev ima za spekter natanko to množico, vsaka druga pa neko kvečjemu večjo množico.

<u>Dokaz</u>: (a) (Notranji) Naj bo m_α notranja spektralna predstavitev operatorja T in F_α spektralna razčlenitev enote operatorja T . Tedaj zadošča trojka $(X_\alpha, V_\alpha, F_\alpha)$

pogojem (M1), (M2) in (M3) iz razdelka 2.3, pogoj (M4) pa lahko zaradi notranje regularnosti preverimo le na K. Toda za $a \in K$ in $x \in F_\alpha(a)$ je

$$\hat{x}(\lambda) = V_\alpha (\lambda - T_\alpha|_{F_\alpha(a)})^{-1} x, \quad \lambda \in Ca,$$

analitična in $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = V_\alpha x \in d_T(a)$.

(Zunanji) Naj bo m^α zunanja spektralna predstavitev operatorja T in F^α spektralna razčlenitev enote operatorja T^α. Tedaj zadošča trojka $(X^\alpha, V^\alpha, F^\alpha)$ pogojem (M1), (M2') in (M3), pogoj (M4') pa lahko zaradi zunanje regularnosti preverimo le na K'. Toda za $a \in K$ in $y \in F^{\alpha\perp}(a)$ je

$$\hat{y}(\lambda) = V^{\alpha *} (\lambda - T^{\alpha *}|_{F^{\alpha\perp}(a)})^{-1} y, \quad \lambda \in Ca,$$

analitična in $(\lambda - T^*)\,\hat{y}(\lambda) = V_\alpha^* y \in d_{T^*}(a)$.

(b) (Notranji) Naj bo $a = \sigma(T_\alpha)$, $b = \sigma(T^\beta)$ in denimo, da $D_{T_\alpha}(a \cap Cb) \neq \{0\}$. Tedaj obstaja $c \in K$, $c \subseteq a \cap Cb$ in $x \in X_\alpha$, $x \neq 0$, z lokalnim spektrom c. Funkcija

$$\hat{x}(\lambda) = V^\beta V_\alpha (\lambda - T_\alpha|_{E_\alpha(c)})^{-1} x, \quad \lambda \in Cc,$$

je analitična in $(\lambda - T^\beta)\,\hat{x}(\lambda) = V^\beta V_\alpha x \neq 0$, toda $c \subseteq \varrho(T^\beta)$. Protislovje dokazuje, da je $D_{T_\alpha}(a \cap Cb) = \{0\}$, zato $D_{T_\alpha}(a \cap b) = X_\alpha$ in $a \subseteq a \cap b$.

(Zunanji) Za $a = \sigma(T^{\alpha})$, $b = \sigma(T_{\beta})$ in $x \in X_{\beta}$ velja, da je

$$\hat{x}(\lambda) = V^{\alpha} V_{\beta} (\lambda - T_{\beta})^{-1} x, \ \lambda \in Cb,$$

analitična in $(\lambda - T^{\alpha}) \hat{x}(\lambda) = V^{\alpha} V_{\beta} x$. Zato je $D_{T^{\alpha}}(b) = X^{\alpha}$ in $a \subseteq b$.

(c) Naj bosta m_{α} in m^{β} spektralni predstavitvi operatorja T. Tedaj je po točki (b) $a = \sigma(T_{\alpha}) = \sigma(T^{\beta})$ in a leži v spektru poljubne nadaljnje, notranje ali zunanje navidezne predstavitve operatorja T.

Odslej naj bo T dvostransko navidezno spektralen operator. Enolično določeni minimalni element družin Σ_T in Σ^T označimo s $\sigma_v(T)$. Lahko bi se primerilo, da $\sigma_v(T) \neq \sigma(T)$, vendar:

3.3.3. Trditev: $\sigma(T) - \sigma_v(T) \subseteq \sigma_c(T)$.

Dokaz: Uporabi trditev 3.1.2.

Naj bosta zdaj m_o in m^o neki spektralni predstavitvi operatorja T. Označimo z F_o in F^o spektralni razčlenitvi enote operatorjev T_o in T^o, pa bi lahko dokazali, podobno, kot trditev 2.4.6, v tamkajšnjih oznakah:

3.3.4. Trditev:

(a) Splošni operator

$$\hat{S}_o = \int_E \lambda \, d\hat{P}_o(\lambda)$$

je gosto definiran (na Im V_o), se da zapreti in komutira z vsakim operatorjem iz $A_T(X)$. Integral je na Im V_o krepko konvergenten.

(b) Pišimo $\hat{N}_o = T - \hat{S}_o$ na Im V_o. Tedaj je za vsako skalarno funkcijo f, analitično na neki okolici $\sigma_V(T)$, splošni operator

$$\hat{f(T)}_o = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\hat{N}_o^{\,k}}{k!} \int_E f^{(k)}(\lambda) \, d\hat{P}_o(\lambda).$$

gosto definiran (na Im V_o), se da zapreti in komutira z vsakim operatorjem iz $A_T(X)$. Integrali in vrsta so na Im V_o krepko konvergentni.

(c) Če je v točki (b) funkcija f analitična celo na neki okolici $\sigma(T)$, je splošni operator $\hat{f(T)}_o$ omejen in se na Im V_o ujema z običajnim $f(T)$.

Dokaz gre povsem naravnost in ga opustimo.

Do konca razdelka se bomo posvetili dvem konkretnim razredom dvostransko navidezno spektralnih operatorjev skalarnega tipa v Hilbertovem prostoru. Oba primera sta nas opogumljala v naših razmišljanjih. Najprej si oglejmo nekoliko prilagojeno Ljancèjevo idejo (glej [22]):

3.3.5. Izrek: Naj bo X Hilbertov prostor, $T \in L(X)$ in

(i) $P_k \in L(X)$, $k \in \mathbb{N}$, neko zaporedje projektorjev, ki vsi ležijo v $A_S(X)$ za vsak $S \in A_T(X)$.

(ii) Za $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$, je $P_k P_j = 0$, poleg tega pa $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} P_k = X$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} P_k = \{0\}$.

(iii) Za vsak $k \in \mathbb{N}$ so $T_k = T|_{\operatorname{Im} P_k}$ spektralni, skalarnega tipa, meje njihovih razčlenitev enote pa s k ne naraščajo preko vseh meja.

Tedaj je T dvostransko navidezno spektralen skalarnega tipa.

Dokaz: (Vse zvezdice pri operatorjih pomenijo adjungiranje v smislu Hilbertovega prostora). Iz zaporedja P_k po potrebi izpustimo vse ničelne projektorje. Na Hilbertovem prostoru $X_k = \operatorname{Im} P_k$ lahko po (iii) in Mackey-Wermerjevem izreku (glej [10]) poiščemo skalarni produkt $(.,.)_k$, za katerega velja

(1) obstaja $M \in \mathbb{R}^+$: $\frac{1}{M} \|x\| \leq \|x\|_k \leq M \|x\|$, $x \in X_k$;

(2) T_k je v skalarnem produktu $(. , .)_k$ normalen.

Pri tem je konstanta M odvisna le od meje spektralne razčlenitve enote operatorja T_k, zato jo po (iii) lahko izberemo tako, da je neodvisna od $k \in \mathbb{N}$. Za $S \in A_{T_k}(X_k)$ tedaj velja

(3) $\|S\|_k \leq M^2 \|S\|$.

Skalarni produkt $(. , .)_k$ po potrebi pomnožimo še s primerno pozitivno konstanto, tako da velja

(4) $\|x\|_k \leq \dfrac{1}{k \|P_k\|} \|x\| , \quad x \in X_k$.

Pri tem ostane še zmerom v veljavi (2) in (3). Označimo z X^o prostor zaporedij $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in X_k$, za katera

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\|_k^2 < +\infty$$

in ga opremimo s skalarnim produktom

$$(x,y)^o = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x_k, y_k)_k , \quad x,y \in X^o,$$

v katerem postane Hilbertov prostor. Preslikavo V^o : $X \longrightarrow X^o$ definiramo s predpisom $V^o : x \mapsto (P_k x)_{k \in \mathbb{N}}$. Po (4) je ta preslikava zvezna, po (ii) pa ima trivialno jedro in gosto zalogo vrednosti. Za $S \in A_T(X)$ dobimo po (i) in (3), da je S^o omejen na Im V^o in m^o je zunanja navidezna predstavitev operatorja T.

Točka (2) pa nam pove, da je $T^o \in L(X^o)$ normalen, torej spektralen operator, skalarnega tipa.

Pod pogoji (i), (ii) in (iii) za operator T pa veljajo isti pogoji tudi za operator T^*; zato ima T^* zunanjo navidezno normalno predstavitev (Y^o,U^o) in to "Hilbertove sorte". Par $m_o = (Y^{o*},U^{o*})$ je tedaj notranja navidezna normalna predstavitev operatorja T.

Zdaj pa še ideja Sz.-Nagya in Foiaşa (glej[24]):

3.3.6. <u>Izrek</u>: Naj bo X Hilbertov prostor, $T \in L(X)$ in

(i) Obstaja tak $M \in \mathbb{R}^+$, da je $\|T^n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}_o$.

(ii) Če $\|T^n x\| \to 0$, $x \in X$, je $x = 0$.

(iii) Če $\|T^{*n} x\| \to 0$, $x \in X$, je $x = 0$.

Potem je T dvostransko navidezno spektralen skalarnega tipa.

<u>Dokaz</u>: (Vse zvezdice pri operatorjih pomenijo adjungiranje v smislu Hilbertovega prostora.) Označimo z LIM neko Banachovo limito; to je omejen linearen funkcional na prostoru $l^\infty(\mathbb{N}_o)$, ki da na vsakem konstantnem zaporedju za vrednost to konstanto, na nenegativnem zaporedju nenegativno vrednost in ne opazi premika zaporedja za eno mesto (za obstoj Banachovih limit glej npr. [8]).

Po (i) lahko definiramo

(5) $(x,y)^o = \mathrm{LIM}\,(T^n x, T^n y)$, $x,y \in X$.

Denimo, da je pri nekem $x \in X$: $(x,x)^o = 0$. Tedaj je $\liminf_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ in neko podzaporedje zaporedja $T^n x$ konvergira proti 0. Zato po (i) konvergira zaporedje $T^n x$ proti 0 in po (ii) $x = 0$. S (5) je torej na X definiran novi skalarni produkt, v katerem ta prostor napolnimo do Hilbertovega prostora X^o. Naravna vložitev $V^o : X \to X^o$ je zvezna in ima gosto zalogo vrednosti. Za $S \in A_T(X)$ pa je

$$\begin{aligned}\|S^o x\|^{o\,2} &= \mathrm{LIM}\,\|T^n S V^{o-1} x\|^2 \leq \\ &\leq \|S\|^2\,\mathrm{LIM}\,\|T^n V^{o-1} x\|^2 = \\ &= \|S\|^2\,\|x\|^{o\,2}, \quad x \in \mathrm{Im}\,V^o,\end{aligned}$$

torej je m^o zunanja navidezna predstavitev operatorja T. Toda

$$\begin{aligned}(T^o x, T^o y)^o &= \mathrm{LIM}\,(T^{n+1} V^{o-1} x, T^{n+1} V^{o-1} y) = \\ &= \mathrm{LIM}\,(T^n V^{o-1} x, T^n V^{o-1} y) = \\ &= (x,y)^o, \quad x,y \in \mathrm{Im}\,V^o,\end{aligned}$$

zato je T^o unitaren, torej spektralen. Pogoji na T in T^* pa so spet simetrični in na notranjo navidezno spektralnost lahko sklepamo podobno, kot v dokazu prejšnjega izreka.

3.4. Zadostni pogoji

Označimo z A algebro, ki jo generira K. Pogoj

(NS1) $(D_T)^A(\emptyset) = \{0\}$;

nam po posledici 2.4.2 zagotavlja, da obstaja natančna notranja meja $\tilde{m}_o$ v $\tilde{M}_{K:B}(D_T)$. Privzemimo še

(NS2) meja $\tilde{m}_o$ je popolna;

in izberimo poljuben reprezentant te meje $m_o = (X_o, V_o, F_o)$.

3.4.1. <u>Izrek</u>: Če velja (NS1), (NS2) in (D3), je :

(a) Par (X_o, V_o) notranja navidezna predstavitev operatorja T, v kateri je T_o spektralen z razčlenitvijo enote F_o.

(b) Če je par (X_α, V_α) poljubna nadaljnja spektralna navidezna predstavitev operatorja T, obstaja tak omejen, injektiven operator $V_{\alpha o} : X_\alpha \to X_o$, da je $V_o V_{\alpha o} = V_\alpha$.

(c) Za vsak $b \in B$ obstaja v $\Sigma_{T|D_T(b)}$ enolično določen minimalni element, je enak $\sigma(T|_{D_T(b)})$ in leži v $\bar{b}$.

<u>Dokaz</u>: Preverimo najprej, da operator T zadošča pogoju (D1). Pa denimo, nasprotno, da obstaja neprazna, povezana $a \in K'$ in netrivialna analitična funkcija $\hat{x} : a \to X$,

za katero $(\lambda - T)\,\hat{x}(\lambda) = 0$, $\lambda \in a$. Izberimo $\lambda_o \in a$, $\hat{x}(\lambda_o) \neq 0$ in zaporedje $\lambda_k \to \lambda_o$, $\lambda_k \in a$, $\lambda_k \neq \lambda_o$, $\hat{x}(\lambda_k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Tedaj je $\hat{x}(\lambda_k) \in D_T(C\{\lambda_o\})$, $k \in \mathbb{N}$, in zaradi zveznosti funkcije $\hat{x}$: $\hat{x}(\lambda_o) \in D_T(C\{\lambda_o\}) \cap D_T(\{\lambda_o\})$, v nasprotju s predpostavko (NS1).

Po izreku 2.3.3 je par (X_o, V_o) notranja navidezna predstavitev operatorja T in $T_o \in \mathrm{Inv}\, F_o$. Operator T_o bo spektralen po definiciji, brž ko dokažemo, da je za vsak $a \in K$: $\sigma(T_o|_{F_o(a)}) \subseteq a$. V ta namen bomo uporabili izrek 2.3.4. Meji $\tilde{m}_o$ in točki $a \in K$ priredimo tako, kot v tem izreku mejo $\tilde{m}_\beta \in \tilde{M}_{A:B}(D_T|_a)$. Pogoj (NS1) nam zagotavlja, da so pogoji izreka izpolnjeni in meja $\tilde{m}_\beta$ je natančna. Za vsak $\mu \in Ca$ je po trditvi 3.2.3(a)

$$R_\mu = (\mu - T|_{D_T(a)})^{-1}$$

omejen operator na $D_T(a)$ in komutira s $T|_{D_T(a)}$, zato ohranja invariantno funkcijo $D_T|_a$ in po izreku 2.3.3 je operator $V_o^{-1} R_\mu V_o$ omejen na $X_\beta = F_o(a)$ in je ravno obrat operatorja $(\mu - T_o|_{F_o(a)})$. Zato velja (a).

Naj bo zdaj (X_α, V_α) poljubna nadaljnja notranja navidezna predstavitev operatorja T, za katero je T_α spektralen in naj bo F_α spektralna razčlenitev enote operatorja T_α. Trojka m_α zadošča pogojem (M1), (M2) in (M3), pogoj (M4) pa preverimo natanko tako, kot v dokazu trditve 3.3.2(a). Ker je meja $\tilde{m}_o$ natančna, obstaja tak $V_{\alpha o} : X_\alpha \to X_o$, omejen in injektiven operator, da je $V_o V_{\alpha o} = V_\alpha$. Zato velja (b).

Še (c): Naj bo $b \in B$; po trditvi 3.2.3(d) je $D_T(b) = D_{T|D_T(\bar{b})}(b)$ in zato $\sigma(T|_{D_T(b)}) \subseteq \bar{b}$. Po 3.2.3(c) zadošča $T|_{D_T(b)}$ pogojema (D1) in (D3) in po 3.2.3(b) ima $\Sigma_{T|D_T(b)}$ enolično določen minimalni element, enak $\sigma(T|_{D_T(b)})$.

Navedimo še analogen zunanji izrek. Pogoj

(ZS1) Obstaja popolna notranja meja v $\tilde{M}_{A:B}(D^T)$;

nam po posledici 2.4.4 zagotavlja obstoj natančne zunanje meje $\tilde{m}^o$ v $\tilde{M}^{K':B}(D^T)$. Privzemimo še

(ZS2) meja $\tilde{m}^o$ je popolna;

in izberimo poljuben reprezentant te meje $m^o = (X^o, V^o, F^o)$.

3.4.2. Izrek: Če velja (ZS1), (ZS2) in (D3'), je :

(a) Par (X^o, V^o) zunanja navidezna predstavitev operatorja T, v kateri je T^o spektralen z razčlenitvijo enote F^o.

(b) Če je par (X^α, V^α) poljubna nadaljnja spektralna navidezna predstavitev operatorja T, obstaja tak omejen operator $V^{o\alpha} : X^o \to X^\alpha$, z gosto zalogo vrednosti, da je $V^{o\alpha} V^o = V^\alpha$.

(c) Za vsak $b \in B$ obstaja v $\Sigma^{T|D^T(\complement b)}$ enolično določen minimalni element, je enak $\sigma(T|^{D^T(\complement b)})$ in leži v $\mathfrak{b}$.

Dokaz: Preverimo najprej, da operator T zadošča pogoju (D1'). V nasprotnem bi namreč lahko našli neprazno, povezano množico $a \in K'$ in netrivialno analitično funkcijo $\hat{x} : a \to X^*$, za katero $(\lambda - T^*)\hat{x}(\lambda) = 0$, $\lambda \in a$. Nato bi izbrali $\lambda_o \in a$, $\hat{x}(\lambda_o) \neq 0$ in zaporedje $\lambda_k \to \lambda_o$, $\lambda_k \in a, \lambda_k \neq \lambda_o$, $\hat{x}(\lambda_k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, in od tod $\hat{x}(\lambda_o) \in D_{T^*}(C\{\lambda_o\}) \cap D_{T^*}(\{\lambda_o\})$, torej $D^T(\{\lambda_o\}) \triangledown D^T(C\{\lambda_o\}) \neq X$ v nasprotju s predpostavko (ZS1).

Po izreku 2.3.3 je par (X^o, V^o) zunanja navidezna predstavitev operatorja T in $T^o \in \operatorname{Inv} F^o$. Operator T^o bo spektralen po definiciji, brž ko dokažemo, da je za vsak $a \in K$: $\sigma(T^{o}|_{F^{o}(a)}) \subseteq a$. Ker pa je projektor $P_{F^{o}(a)}$ definiran povsod na X^{o} in omejen, je ta pogoj ekvivalenten s pogojem $\sigma(T^{o}|^{F^{o}(Ca)}) \subseteq a$. Za dokaz tega dejstva bomo uporabili izrek 2.3.5. Trojki m^{o} bomo priredili, tako kot v tem izreku, trojko m^{β}. Pogoj (ZS1) nam zagotavlja, da smo v pogojih izreka in meja $\tilde{m}^{\beta}$ je natančna. Za vsak $\mu \in Ca$ je po trditvi 3.2.3(a)

$$R_{\mu} = (\mu - T|^{D^{T}(Ca)})^{-1}$$

omejen operator na $X / D^{T}(Ca)$ in komutira s $T|^{D^{T}(Ca)}$, zato ohranja invariantno funkcijo $D^{T}|^{Ca}$. Po izreku 2.3.3 je operator $V^{o} R_{\mu} V^{o\,-1}$ omejen na $\operatorname{Im} V^{\beta}$, ki je gost v $X^{\beta} = X^{o} / F^{o}(Ca)$; njegova razširitev na ves X^{β} pa je ravno obrat operatorja

$$(\mu - T^{o}|^{F^{o}(Ca)}) .$$

Torej velja točka (a).

Naj bo zdaj (X^{α}, V^{α}) poljubna nadaljnja zunanja navidezna predstavitev operatorja T, za katero je T^{α} spektralen in naj bo F^{α} spektralna razčlenitev enote operatorja T^{α}. Tedaj zadošča trojka m^{α} pogojem (M1), (M2') in (M3), pogoj (M4') pa preverimo tako, kot v dokazu trditve 3.3.2(a). Ker je meja $\tilde{m}^{o}$ natančna, lahko najdemo tak omejen operator $V^{o\alpha} : X^o \to X^\alpha$, z gosto zalogo vrednosti, da je $V^{o\alpha} V^o = V^\alpha$. Zato velja (b).

Pa še (c): Naj bo $b \in B$; po trditvi 3.2.3(d) je

$$D^T(Cb) / D^T(C\overline{b}) = D^T|^{D^T(C\overline{b})}(Cb)$$

in zato $\sigma(T|^{D^T(Cb)}) \subseteq \overline{b}$. Po 3.2.3(c) zadošča $T|^{D^T(Cb)}$ pogojema (D1') in (D3') in po 3.2.3(b) ima $\Sigma^{T|^{D^T(Cb)}}$ enolično določen minimalni element, enak $\sigma(T|^{D^T(Cb)})$.

Strnimo zdaj oba rezultata! Definirajmo

(DS1) D_T ima popolno notranjo mejo v $\tilde{M}_{K:B}(D_T)$.

(DS2) D^T ima popolno zunanjo mejo v $\tilde{M}^{K':B}(D^T)$.

3.4.3. <u>Izrek</u>: Če za operator T velja (D3) in (D3'), je navidezno dvostransko spektralen natanko tedaj, kadar veljata pogoja (DS1) in (DS2). V tem primeru veljajo zanj vse ugotovitve izrekov 3.4.1 in 3.4.2.

<u>Dokaz</u>: Lažjo smer nam da trditev 3.3.2(a). Še obratno: Naj bo m^α reprezentant neke popolne zunanje meje, $a \in A$ in $x \in D_T(a) \cap D_T(Ca)$; tedaj $x \in D^T(a) \cap D^T(Ca)$, zato $V^\alpha x \in F^\alpha(a) \cap F^\alpha(Ca) = \{0\}$, torej velja pogoj (NS1). Pogoj (NS2) pa sedaj sledi iz pogoja (DS1).

Zdaj pa vzemimo reprezentant m_α neke popolne notranje meje v $\tilde{M}_{K:B}(D_T)$, tedaj je zaradi regularnosti $m_\alpha \in M_{B:B}(D_T)$, zaradi $D_T \leq D^T$ je $m_\alpha \in M_{B:B}(D^T) = M_{A:B}(D^T)$, zato velja pogoj (ZS1), po (DS2) pa velja tudi (ZS2).

ČETRTO POGLAVJE

PRIMERI

4.0. Usmeritev

V razdelku 4.1 navajamo nekaj primerov za ilustracijo pojmov iz razdelka 3.1. V razdelku 4.2 študiramo neki notranje navidezno spektralni operator, ki ni zunanje navidezno spektralen. V razdelku 4.3 študiramo primer unitarnega operatorja, ki ni spektralen, pa je dvostransko navidezno spektralen. V razdelku 4.4 najdemo bogat razred dvostransko navidezno spektralnih operatorjev, ki nam omogoči najti (1) dvostransko navidezno spektralen operator, katerega skalarni del in radikal nista omejena; (2) dvostransko navidezno spektralni operator, katerega skalarni del in radikal sta oba omejena in netrivialna, pa niti operator, niti njegov skalarni del nista spektralna.

4.1. Operator premika

4.1.1. <u>Trditev</u>: Naj bo $T \in L(X)$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

(a) Če je $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} (\lambda - T)^k = X$, obstaja notranja navidezna predstavitev m_α, za katero $\sigma(T_\alpha) = \{\lambda\}$.

(b) Če je $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\operatorname{Im} (\mu - T)^k} = \{0\}$, obstaja zunanja navidezna predstavitev m^α, za katero $\sigma(T^\alpha) = \{\mu\}$.

(c) Če velja hkrati (a) in (b), je T dvostransko navidezno spektralen in $\sigma_v(T) = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

<u>Dokaz</u>: (a) Naj bo X_α družina tistih $x \in X$, za katere je

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \, \| (\lambda - T)^k x \| < +\infty$$

in V_α naravna vložitev družine X_α v prostor X. Tedaj je X_α linearna množica, ki jo opremimo z normo

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{\infty} k! \, \| (\lambda - T)^k V_\alpha x \| , \quad x \in X_\alpha ;$$

v tej normi je X_α Banachov prostor in preslikava V_α je zvezna vložitev tega prostora v prvotni prostor. Ker vsebuje $\operatorname{Im} V_\alpha$ linearno množico $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} (\lambda - T)^k$, ima V_α gosto zalogo vrednosti. Poleg tega je za poljuben $S \in A_T(X)$ in $x \in \operatorname{Im} V_\alpha$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \, \| (\lambda - T)^k S x \| \leq \|S\| \, \| V_\alpha^{-1} x \| < +\infty$$

in par (X_α, V_α) je notranja navidezna predstavitev operatorja T. Ocenimo za $x \in X_\alpha$, $\|x\| \leq 1$:

$$\|(\lambda - T_\alpha)^j x\| = \sum_{k=o}^{\infty} k! \, \|(\lambda - T)^{k+j} V_\alpha x\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{j!} \sum_{k=o}^{\infty} (k+j)! \, \|(\lambda - T)^{k+j} V_\alpha x\| \leqslant \frac{1}{j!} .$$

Od tod dobimo najprej

$$\|(\lambda - T_\alpha)^j\| \leqslant \frac{1}{j!}$$

in nato

$$\limsup_{j \to \infty} \|(\lambda - T_\alpha)^j\|^{1/j} = 0 ,$$

torej je $\sigma(T_\alpha) = \{\lambda\}$.

(b) Označimo $U_k = \overline{\operatorname{Im} (\mu - T)^k}$ in vpeljimo

$$p_\alpha(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{dist}(x, U_k) , \quad x \in X ;$$

tedaj je p_α seminorma na X, zaradi $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = \{0\}$ norma in zaradi $p_\alpha(x) \leqslant e \|x\|$ zvezna. Označimo z X^α napolnitev prostora X do Banachovega prostora v normi p_α in z V^α naravno vložitev X v X^α. Tedaj je V^α zvezna, linearna, injektivna in ima gosto zalogo vrednosti. Poleg tega velja za poljuben $S \in A_T(X)$, da so prostori U_k invariantni za S in zato

$$p_\alpha(Sx) \leqslant \|S\| \, p_\alpha(x) , \quad x \in X ;$$

torej je $V^\alpha S V^{\alpha-1}$ omejen operator na $\operatorname{Im} V^\alpha$ in par (X^α, V^α) je zunanja navidezna predstavitev operatorja T.

Za $x \in \operatorname{Im} V^{\alpha}$, $\|x\| \leq 1$ pa velja

$$\|(\mu - T^{\alpha})^{j} x\| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{dist}((\mu - T)^{j} V^{\alpha-1} x, U_k) \leq$$

$$\leq \frac{1}{j!} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\|(\mu - T)^{j}\|}{(k-j)!} \operatorname{dist}(V^{\alpha-1} x, U_{k-j}) \leq$$

$$\leq \frac{\|(\mu - T)^{j}\|}{j!}$$

in od tod

$$\limsup_{j \to \infty} \|(\mu - T^{\alpha})^{j}\|^{1/j} = 0,$$

torej je $\sigma(T^{\alpha}) = \{\mu\}$.

(c) Vsak operator, ki ima samo eno točko v spektru, je spektralen. Uporabimo trditev 3.3.2(c).

4.1.2. <u>Primer</u>: Obstaja omejen operator T, ki ima po več različnih minimalnih elementov v Σ_T.

Vzemimo namreč operator obratnega premika (backward shift), definiran na prostoru $X = l^2(\mathbb{N})$ s predpisom

$$T : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots) .$$

Za ta operator vemo naslednje: Za vsak $\lambda \in \Delta$ (odprti enotni disk v kompleksni ravnini) je

$$\nabla_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} (\lambda - T)^{k} = X .$$

Zato je po trditvi 4.1.1(a) vsaka množica $\{\lambda\}$, $\lambda \in \Delta$ minimalni element v Σ_T. Za primer operatorja, ki ima po več različnih minimalnih elementov v Σ^T, pa vzamemo operator premika (naprej) T^*.

Vprašanje: Ali obstaja operator T, ki ima hkrati po več različnih minimalnih elementov v Σ_T in v Σ^T ?

Zanimivo je morda tole: Če je a minimalni element v Σ_T in b minimalni element v Σ^T, je $a \cap b \neq \emptyset$.

4.1.3. Primer: Obstaja notranje navidezno spektralen operator T, ki ni zunanje navidezno spektralen. Operatorje iz notranje predstavitve lahko na prvotnem prostoru sicer gosto definiramo, vendar se v splošnem ne dajo niti zapreti.

Naj bo T operator obratnega premika in $\lambda \in \Delta$, m_α pa naj bo notranja navidezna predstavitev operatorja T, za katero $\sigma(T_\alpha) = \{\lambda\}$. Ker T nima enolično določenega minimalnega elementa v Σ_T, seveda ne more biti dvostransko navidezno spektralen. Poleg tega je $\sigma_p(T) = \Delta$ in minimalni element v Σ^T je enolično določen in enak $\sigma(T)$. Za poljuben $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \lambda$ lahko na X_α definiramo operator $(\mu - T_\alpha)^{-1}$ in ga prenesemo v X takole: Def $R_\mu = \operatorname{Im} V_\alpha$,

$R_\mu = V_\alpha(\mu - T_\alpha)^{-1} V_\alpha^{-1}$. Tedaj je R_μ gosto definiran in ima lastnost $(\mu - T) R_\mu = R_\mu (\mu - T) = I$ na Im V_α. Vendar se R_μ ne da zapreti. Naj bo namreč $x \in X$, $x \neq 0$, $(\mu - T)\, x = 0$ in $x_k \in \mathrm{Im}\, V_\alpha$ zaporedje, ki konvergira proti x. Nadalje naj bo $y_k = (\mu - T)\, x_k \in \mathrm{Im}\, V_\alpha$. Tedaj je $y_k \in \mathrm{Def}\, R_\mu$, $y_k \to 0$ in $R_\mu y_k = x_k \to x \neq 0$.

4.1.4. Primer: Obstaja operator T in kompaktna množica a, ki nima lastnosti (EAN), za katero $D_T(a) = X$.

Naj bo T operator obratnega premika in $a = \partial\Delta$. Za $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ in $\lambda \in C\overline{\Delta}$ definiramo $\hat{x}(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} x$, za $\lambda \in \Delta$ pa

$$\hat{x}(\lambda) = -(0, x_1, x_2 + \lambda x_1, x_3 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_1, \dots)$$

Tedaj $\hat{x} : Ca \to X$ analitična in $(\lambda - T)\, \hat{x}(\lambda) = x$, $\lambda \in Ca$. Zato je $d_T(a) = X$. Pokažimo, da a nima lastnosti (EAN)! Za $\lambda \in \Delta$ definiramo

$$\hat{y}(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \;;$$

Funkcija $\hat{y} : \Delta \to X$ je analitična in $(\lambda - T)\, \hat{y}(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Delta$. Torej je Δ tipa (NAN) in a ni tipa (EAN).

Vprašanje: Ali je lahko kompaktna množica, ki nima lastnosti (EAN), element Σ_T? Konkretneje: Ali je lahko pri operatorju obratnega premika T enotna krožnica a element Σ_T ?

V razmišljanjih ob zadnjem vprašanju nam konstrukcija iz izreka 3.1.8 da notranjo predstavitev dvostranskega premika (operatorja nad $l^2(\mathbb{Z})$).

4.1.5. <u>Primer</u>: Pri nekem operatorju T obstaja vektor x, ki nima enolično določenega lokalnega spektra.

Primer le skicirajmo. Operator obratnega premika T si tokrat predstavimo v prostoru $X = H^2$; na analitični funkciji $f \in H^2$ deluje tako

$$(Tf)(\lambda) = \begin{cases} (f(\lambda) - f(0))/\lambda & , \lambda \neq 0 \\ f'(0) & , \lambda = 0 \end{cases}$$

Analitična funkcija f ima neko analitično razširitev na maksimalno povezano odprto množico c_f. Če je Cc_f brez notranjosti, lahko dokažemo, da je

$$a_f = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; 1/\lambda \in Cc_f \}$$

lokalni spekter vektorja $f \in H^2$. Izbrati nam je treba torej le tako funkcijo f, ki dopušča vsaj dve maksimalni razširitvi, prvo na množico c_f^1, drugo na množico c_f^2, tako da $c_f^1 \neq c_f^2$ in množici Cc_f^1 in

$\mathbb{C}c_f^{\,2}$ sta obe brez notranjosti. Tako funkcijo pa lahko dobimo tako: točki 2 in 3 v kompleksni ravnini povežemo s primerno potjo, na preostanku ravnine pa izberemo neko vejo funkcije

$$f(\lambda) = ((\lambda - 2)/(\lambda - 3))^{1/2} .$$

4.1.6. <u>Primer</u>: Obstaja dvostransko navidezno spektralni operator T, za katerega $\sigma_v(T) \neq \sigma(T)$.

Tokrat operator premika primerno utežimo. Definirajmo

$$w_n = \begin{cases} 0 , & n = k^2, \ k \in \mathbb{N} \\ 1 , & \text{sicer} \end{cases}$$

in operator T na $X = l^2(\mathbb{N})$ s predpisom

$$T : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (w_2 x_2 , w_3 x_3 , \ldots) .$$

Jasno je, da je za $j \in \mathbb{N}$: $\| T^j \| \leq 1$. Naj bo $x^j \in X$ vektor, ki ima na mestu $j^2 + 2j$ enico, povsod drugod pa ničle; tedaj ima $T^j x^j$ na mestu $j^2 + j$ enico, povsod drugod pa ničle in zato $\| T^j \| = 1$. To dokazuje, da je spektralni radij $r(T) = 1$ in ker je spekter uteženih operatorjev premika rotacijsko simetričen, velja $\sigma(T) = \bar{\Delta}$. Za poljuben vektor $x \in X$, ki ima le končno mnogo od 0 različnih komponent, obstaja tak $j \in \mathbb{N}$, da je $T^j x = 0$, torej je

$$\bigvee_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} T^j = X .$$

Po drugi strani pa za poljuben $y \in X^*$, ki ima le končno mnogo od 0 različnih komponent, obstaja tak $j \in \mathbb{N}$, da je $T^{*j} y = 0$, zato je

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\operatorname{Im} T^j} = \{0\}$$

in po trditvi 4.1.1 je $\{0\} = \sigma_v(T) \neq \sigma(T) = \overline{\Delta}$.

4.2. Per partes

Označimo z I interval $[0,1]$; na tem intervalu vzamemo običajno Lebesgovo mero in na običajen način tvorimo prostor $X = L^2(I)$. Za $x \in X$ definiramo

$$(Tx)(t) = t\, x(t) - \int_0^t x(s)\, ds\,, \quad t \in I\,.$$

Lahko se je prepričati, da je $T : X \to X$ omejen operator.

4.2.1. Trditev:

(a) Za $\lambda \in \mathbb{C} - I$ je

$$((\lambda - T)^{-1}x)(t) = \frac{1}{\lambda - t}\, x(t) - \int_0^t \frac{x(s)}{(\lambda - s)^2}\, ds\,, \quad t \in I,$$

omejen in povsod definiran.

(b) Za vsak $r \in I$, $r \neq 1$, velja za funkcijo:

$$e_r(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq r \\ 1\,, & t > r \end{cases}\,, \quad t \in I\,,$$

$T\, e_r = r\, e_r$ in to so (do multiplikacijske konstante) natanko vsi lastni vektorji operatorja T.

(c) Operator T zadošča pogoju (D1).

(d) Operator T zadošča pogoju (D3).

(e) Za vsak $S \in A_T(X)$ obstaja natanko ena zvezna funkcija $\varphi_S : [0,1) \to \mathbb{C}$, za katero $S\, e_r = \varphi_S(r)\, e_r$, $r \in [0,1)$ in $\sup_{r \in [0,1)} |\varphi_S(r)| \leq \|S\|$. Poleg tega velja: Če je $\varphi_{S_1} = \varphi_{S_2}$, je $S_1 = S_2$.

(f) Če je $S \in A_T(X)$ in ima $x : I \to \mathbb{C}$ omejen totalni razmah, je $x \in L^2$ in

$$(1) \qquad (Sx)(t) = \varphi_S(t)\, x(t) - \int_0^t x(s)\, d\varphi_S(s), \quad t \in I,$$

pri tem obstaja integral na desni v Riemann-Stieltjesovem smislu.

<u>Dokaz</u>: (a) Formula v točki (a) nam da za vsak $\lambda \in \mathbb{C} - I$ neki omejen operator R_λ. Če je funkcija $x : I \to \mathbb{C}$, denimo, zvezna, nas kratek račun kaj hitro prepriča, da je $x = (\lambda - T) R_\lambda x = R_\lambda (\lambda - T) x$, ker pa so zvezne funkcije goste v L^2, velja ta identiteta za vse $x \in L^2$.

(b) Če je $r \in \mathbb{C}$ neka lastna vrednost operatorja T, mora biti po (a) $r \in I$. Naj bo e_r poljuben lastni vektor pri lastni vrednosti r. Tedaj je

$$0 = (t - r)\, e_r(t) - \int_0^t e_r(s)\, ds, \quad t \in I,$$

zato je $e_r = 0$ (skoraj povsod) na $[0,r)$. Pri $r=1$ torej ni lastnega vektorja. Pri $r \neq 1$ pa dobimo spet iz zgornje enačbe, da je e_r konstanta (skoraj povsod) na $(r,1]$.

Torej je vektor e_r enak vektorju iz točke (b), pomnoženem z neko konstanto. Lahko pa je preveriti, da je vsak tak vektor res lastni vektor.

(c) Operator sploh nima nobene neprazne odprte množice v spektru. (d) Iz zapisa resolventne funkcije v točki (a) preberemo, da obstaja taka konstanta K, da na neki okolici spektra I velja

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{K}{\mathrm{dist}(\lambda, I)^2}, \quad \lambda \notin I,$$

in uporabimo znani izrek ([10], lema XVI.5.4) .

(e) Za $S \in A_T(X)$ in $r \in [0,1)$, je Se_r lastni vektor operatorja T pri lastni vrednosti r. Zato obstaja po točki (b) neko kompleksno število $\varphi_S(r)$, tako da je $S\, e_r = \varphi_S(r)\, e_r$. To število je s to enačbo enolično določeno. Pri tem je

$$|\varphi_S(r)| = \frac{\|S\, e_r\|}{\|e_r\|} \leq \|S\|, \quad r \in [0,1)$$

in funkcija φ_S je omejena. Za poljubna $r,s \in [0,1)$ je

$$\|e_r - e_s\| = |r-s|^{1/2}$$

zato

$$\|\varphi_S(r)\, e_r - \varphi_S(s)\, e_s\| \leq \|S\|\; |r-s|^{1/2}$$

in od tod

$$|\varphi_S(r) - \varphi_S(s)| \leq |s-1|^{-1/2} \|\varphi_S(r)\, e_s - \varphi_S(s)\, e_s\| \leq$$
$$\leq 2\,|s-1|^{-1/2} \|S\| \,|s-r|^{1/2}$$

in funkcija φ_S je zvezna. Še povratna enoličnost: Če je pri nekem $S \in A_T(X)$ φ_S identično enaka 0, uniči S vse vektorje oblike e_r, zato vse stopničaste funkcije in končno ves L^2.

(f) Trivialno je preveriti, da velja formula (1) za vse funkcije e_r, $r \in [0,1)$ in zato za vse stopničaste funkcije. Naj ima $x : I \to \mathbb{C}$ omejen totalni razmah. Tedaj je omejena in zato v L^2. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je x z leve zvezna in jo zapišemo kot

$$x = u^+ - u^- + i\,(v^+ - v^-),$$

kjer so u^+, u^-, v^+ in v^- monotono naraščajoče, z leve zvezne funkcije. Dovolj bo torej, če formulo (1) dokažemo za monotono naraščajočo, z leve zvezno funkcijo x. Pri poljubnem $n \in \mathbb{N}$ in $a = x(0)$, $b = x(1)$ naj bo

$$t_k = \sup \{ t\,;\ x(t) \leq a + (k/n)(b-a) \}$$

za $k = 1,2,\ldots,n$ in $t_0 = 0$. Tedaj je $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq$ $\leq t_n = 1$ in $x(t_k) = a + (k/n)(b-a)$. Za funkcijo

$$x_n(t) = a + (k/n)(b-a),\quad t_{k-1} < t \leq t_k\ ,$$

za $k = 1,2,\ldots,n$ in $x_n(0) = a$, velja, da je stopničasta in

$$\sup_{t \in I} |x(t) - x_n(t)| \leq 1/n .$$

Zato konvergira zaporedje funkcij x_n v L^2 normi proti funkciji x in zaporedje funkcij $(S\, x_n)(t) - \varphi_S(t)\, x_n(t)$ v L^2 normi proti funkciji $(S\, x)(t) - \varphi_S(t)\, x(t)$. Od tod pa dobimo, da skoraj za vsak $t \in I$, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, zaporedje

$$\int_0^t x_n(s)\, d\varphi_S(s) = \sum_{j=1}^{k-1} x(t_j)\, (\varphi_S(t_j) - \varphi_S(t_{j-1})) +$$

$$+ x(t_k)\, (\varphi_S(t) - \varphi_S(t_{k-1}))$$

konvergira in mora po definiciji Riemann-Stieltjesovega integrala konvergirati proti

$$\int_0^t x(s)\, d\varphi_S(s) ,$$

kar dokazuje formulo (1).

Naj bo X_α Banachov prostor vseh funkcij $x : I \to \mathbb{C}$, ki imajo omejen totalni razmah, so na vsem I z leve zvezne in zanje velja $x(0) = x(0+) = 0$, opremljen s totalnim razmahom funkcije kot normo. Z V_α pa označimo naravno vložitev prostora X_α v prostor X.

4.2.2. Izrek: Par (X_α, V_α) je notranja navidezna predstavitev operatorja T, v kateri je T_α spektralen.

Dokaz: Zaradi pogoja $x(0) = 0$, je za $x \in X_\alpha$

$$\sup_{t \in I} |x(t)| \leq \|x\|,$$

od tod pa

$$\|V_\alpha x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 \, dt \leq \|x\|^2,$$

torej je preslikava V_α omejena. Poljuben $x \in \operatorname{Ker} V_\alpha$ je na I skoraj povsod enak 0 in zaradi zveznosti z leve identično enak 0. Seveda so funkcije z omejenim totalnim razmahom goste v L^2. Za poljuben $S \in A_T(X)$ in $x \in \operatorname{Im} V_\alpha$, velja po 4.2.1(f)

$$(S\,x)(t) = \varphi_S(t)\, x(t) - \int_0^t x(s)\, d\varphi_S(s), \quad t \in I;$$

tako dobljena funkcija Sx je spet z leve zvezna, velja zanjo $(Sx)(0) = (Sx)(0+) = 0$ in ima omejen totalni razmah. Zato je par (X_α, V_α) možna notranja navidezna predstavitev operatorja T.

Dokažimo, da je T_α spektralen! Ker za zvezno funkcijo $\varphi_T(t) = t$ in funkcijo x z omejenim totalnim razmahom, velja formula "per partes", je najprej

$$(2) \qquad (T_\alpha x)(t) = \int_0^t s \, dx(s) ,$$

pri čemer integral obstaja v Riemann-Stieltjesovem smislu. Vsaki funkciji $x \in X_\alpha$ lahko priredimo enolično kompleksno Borelovo mero m_x, za katero

$$x(t) = m_x([0,t)), \quad t \in (0,1].$$

Če prostor kompleksnih Borelovih mer opremimo s totalnim razmahom mere kot normo, je ta preslikava surjektivna izometrija med obema prostoroma. Za poljubno Borelovo množico $a \in PE$, definiramo na prostoru mer projektor $P(a)$ s predpisom

$$(P(a) m_x)(b) = m_x(a \cap b) , \quad b \subseteq I .$$

Tedaj so projektorji $P(a)$ enakomerno omejeni (z normo 1) in funkcija $a \mapsto P(a)$ je omejena, končno aditivna projektorska funkcija. Prepričajmo se, da je mera. Za padajoče zaporedje $a_k \in B$, s praznim presekom, je

$$\| P(a_k) m_x \| = \| m_x \| (a_k \cap I) ,$$

to pa konvergira s k proti 0. "Izračunajmo" zdaj spektralni operator skalarnega tipa

$$S = \int_E \lambda \quad dP(\lambda)$$

pri fiksnem $x \in X_\alpha$. V prostoru mer dobimo

$$(S\, m_x)\,(b) = \int_b s \, dm_x(s) \quad ;$$

Ker pa se Riemann-Stieltjesov in Lebesgov način integriranja na zveznih funkcijah ujemata, dobimo od tod v primerjavi z (2) : $S = T_\alpha$.

Trditev 4.2.1(f) in zgornji razmislek nam povesta še

4.2.3. <u>Posledica:</u> Naj bo $\hat{P}_o$ projektorska funkcija, ki jo dobimo s prenosom funkcije P v prvotni prostor in $S \in A_T(X)$. Tedaj je na Im V_α

$$S = \int_E \varphi_S(\lambda)\; d\hat{P}_o(\lambda) \quad ;$$

ta integral konvergira na Im V_α krepko.

4.2.4. <u>Primer</u>: Obstaja funkcija $F \in$ pfm B, B σ algebra, ki ima popolno notranjo mejo, pa nima natančne notranje meje.

Trivialen primer te vrste je $F \equiv X$. Operator "per partes" pa nam postreže z bolj nenavadnim primerom. Naj bo $F = D_T$; po pogoju (D3) je za množici $a, b \in K$, za kateri $a \cap b = \emptyset$, $a \cap [0,1) \neq \emptyset$, $b \cap [0,1) \neq \emptyset$: $F(a) \cap F(b) =$

$=\{0\}$ in po 4.2.1(b) $F(a) \neq \{0\}$, $F(b) \neq \{0\}$. Funkcija F je torej prav razgibana, popolno notranjo mejo ima po izreku 4.2.2 in trditvi 3.3.2(a); natančne notranje meje pa nima. Definirajmo namreč funkcijo $G \in \mathrm{pfm}\, B$ s predpisom

$$G(b) = \{ x \in L^2 ; \ x(t) = 0, \ t \in I - b \} .$$

Lahko se je prepričati, da je G mera na vsem B, torej je tudi notranje regularna. Za $a \in K$ in $x \in G(a)$ ima po trditvi 4.2.1(a) funkcija $(\lambda - T)^{-1} x$ analitično nadaljevanje na $C(a \cap I)$ in zato $x \in F(a)$. Zato je $G \leq F$ na vsem B in trojka (X,I,G) leži v $M_{B:B}(F)$. Če bi natančna meja obstajala, bi jo že imeli; torej bi bilo $(X_\alpha, V_\alpha, D_{T_\alpha}) \in M_{B:B}(G)$. Toda za $r \in (0,1)$ je $V_\alpha^{-1} e_r \in D_T(\{r\})$ in $e_r \notin G(\{r\})$.

4.2.5. Primer: Obstaja operator T, ki ima po en sam minimalni element v Σ_T in v Σ^T, sta oba enaka $\sigma(T)$, je notranje navidezno spektralen, pa ni zunanje navidezno spektralen.

Operator per partes T zadošča po 4.2.1 pogojema (D1) in (D3). Zato je po trditvi 3.2.3(b) $\sigma(T)$ edini minimalni element v Σ_T. Ker je $\sigma_p(T) = [0,1)$, je po 3.1.2(a) $\sigma(T)$ tudi edini minimalni element v Σ^T . Po izreku 4.2.2 je T notranje navidezno spektralen, po prejšnjem primeru pa D_T nima natančne notranje meje; zato obstaja po izreku 2.4.1 tak $a \in B$, da $D_T(a) \cap D_T(Ca) \neq \{0\}$ (slednje bi lahko preverili tudi neposredno). Če bi bil T zunanje navidezno spektralen, bi imela po 3.3.2(a) funkcija D^T neko popolno zunanjo mejo m^α. Toda za $x \in D_T(a) \cap D_T(Ca)$, $x \neq 0$, velja $x \in D^T(a)$ in $x \in D^T(Ca)$, zato $V^\alpha x \in F^\alpha(a)$ in $V^\alpha x \in F^\alpha(Ca)$, torej $V^\alpha x = 0$ v nasprotju s popolnostjo meje m^α.

4.3. Primer unitarnega operatorja

Za operator $T \in L(X)$ pravimo, da je <u>unitaren</u>, če je surjektivna izometrija.

4.3.1. <u>Trditev</u>: Za vsak unitaren operator T velja

(a) $\sigma(T)$ je vsebovan v enotni krožnici $\partial\Delta$.

(b) Za $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \partial\Delta$, je

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \operatorname{dist}(\lambda, \partial\Delta)^{-1} .$$

(c) T zadošča pogojem (D1) in (D3).

(d) T zadošča pogojem (D1') in (D3').

<u>Dokaz</u>: (a) in (b). Za $|\lambda| > 1$ je

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| = \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} T^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} = (|\lambda| - 1)^{-1};$$

za $|\lambda| < 1$ pa

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| = \| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k T^{-(k+1)} \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k = (1 - |\lambda|)^{-1} .$$

(c) Spekter operatorja T ne vsebuje nobene odprte množice, zato T zadošča pogoju (D1). Po (b) in lema XVI.5.4 v [10] velja tudi (D3).

(d) Pogoj (D1') je jasen. Tudi T^* zadošča pogoju (b), zato sledi (D3') po posplošitvi zgoraj omenjene leme (konvergenco zaporedij zamenjamo z * konvergenco posplošenih zaporedij).

Do konca razdelka bomo študirali primer unitarnega operatorja hkrati na več Banachovih prostorih na enotni krožnici. Argumente funkcij bomo jemali realne. Tako bo za funkcijo x pomenilo $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vrednost funkcije x v točki $\exp(it)$. Z L^p, $1 \leqslant p < \infty$, bomo označevali prostore (ekvivalenčnih razredov) funkcij na enotni krožnici, ki so Borelove in imajo končno L^p normo glede na normalizirano Lebesgovo mero na krožnici. S C pa bomo označevali Banachov prostor zveznih funkcij, opremljen s supremum normo. Na teh prostorih si oglejmo operator rotacije za kot $\varphi \in \mathbb{R}$, definiran z

$$(Tx)(t) = x(t+\varphi)\ , t \in \mathbb{R}\ .$$

4.3.2. <u>Izrek</u>:

(a) V vseh prostorih L^p in C je T unitaren.

(b) V prostoru L^2 je T vselej spektralen.

(c) V prostorih L^p, $p \neq 2$, in C je T spektralen natanko tedaj, kadar $\varphi/(2\pi) \in \mathbb{Q}$.

(d) V vseh prostorih L^p in C je T vselej dvostransko navidezno spektralen.

<u>Dokaz</u>: (a) Jasno; (b) L^2 je Hilbertov. Dokažimo (c) in (d)! Najprej naj bo $\varphi/(2\pi) \in \mathbb{Q}$; to število zapišemo v obliki m/n, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Tedaj je $T^n = I$. Naj bodo

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n-ti koreni enote ; če $\lambda \neq \lambda_k$, k=1, 2,...,n, velja $\lambda^n \neq 1$, zato je operatorska funkcija

$$R_T(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n - 1}(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}T + \dots + T^{n-1})$$

analitična povsod, razen v točkah λ_k, k=1,2,...,n . Ker je $(\lambda - T)R_T(\lambda) = I$, je $R_T(\lambda)$ ravno resolventna funkcija operatorja T. Operator ima v spektru le končno mnogo točk, torej je spektralen.

Denimo zdaj, da $\varphi/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$. Za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo funkcije $e_k(t) = \exp(ikt)$ (te ležijo v vseh prostorih, ki jih študiramo). Očitno je

$$T\, e_k = \exp(ik\varphi)\, e_k$$

in funkcije e_k so lastni vektorji operatorja T pri lastnih vrednostih $\lambda_k = \exp(ik\varphi)$. Ker $\varphi/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$, je množica $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ gosta v enotni krožnici in spekter operatorja T je vsa enotna krožnica. Na poljubni funkciji $x \in X$ (katerikoli od danih prostorov), definiramo za $k \in \mathbb{Z}$:

$$(P_k x)(t) = e_k(t) \int_{\partial\Delta} x(s)\, e_k(-s)\, ds .$$

Tedaj je P_k projektor, omejen z normo 1 in zanj velja

(1) $P_k T = T P_k$,

(2) $P_k P_j = 0, \quad k \neq j$.

Dokažimo

(3) $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P_k = X$.

Družino $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P_k$ sestavljajo ravno vsi polinomi na enotni krožnici. Ti pa so gosti v vsakem prostoru X. Dokažimo še

(4) $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} P_k = \{0\}$.

Vsaka funkcija $x \in L^p$ se da razviti v Fourrierovo vrsto

(5)
$$\alpha_0 e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e_k + \alpha_{-k} e_{-k}) \quad .$$
$$\alpha_k = \int_{\partial\Delta} x(s)\, e_k(-s)\, ds ,$$

ki (v tem redu seštevana) konvergira v L^p normi proti funkciji x. Vrsto (5) lahko zapišemo tudi v obliki

(6) $$P_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k x + P_{-k} x) \quad .$$

Če bi bil torej kakšen x v jedru vseh projektorjev P_k, bi bil enak 0, kar dokazuje (4) za $X = L^p$. Za $X = C$ pa upoštevamo, da je $C \subseteq L^p$. Dokažimo zdaj

(7) Če $a \in B$, $\lambda_k \notin a$, je $P_k D^T(a) = 0$.

Naj bo najprej $a \in K'$ in $X = L^p$. Adjungirani prostor X^* lahko po znanem izreku enačimo s prostorom L^q, $1/p + 1/q = 1$. Operator T^* lahko v smislu tega izomorfizma enačimo z rotacijo za kot $-\varphi$ na L^q. Če $\lambda_k \notin a$, je zaradi $T^* e_{-k} = \lambda_k e_{-k}$: $e_{-k} \in d_{T^*}(\complement a)$ in za $x \in D^T(a)$ po definiciji

$$0 = \langle x \mid e_{-k} \rangle = \int_{\partial\Delta} x(s)\, e_{-k}(s)\, ds = \int_{\partial\Delta} x(s)\, e_k(-s)\, ds \, ,$$

torej je $P_k x = 0$. Adjungirani prostor k prostoru C pa sestavljajo ravno kompleksne regularne Borelove mere na enotni krožnici. Tudi na njih deluje operator T^* kot rotacija mere za kot $-\varphi$. Za mero

$$m_k(a) = \int_a e_{-k}(s)\, ds$$

je torej

$$(T^* m_k)(a) = \int_{a+\varphi} e_{-k}(s)\, ds = \int_a e_{-k}(s-\varphi)\, ds =$$
$$= \lambda_k\, m_k(a)$$

in enako kot zgoraj mora biti $P_k x = 0$. Trditev (7) torej velja v vseh prostorih X, če je $a \in K'$. Vzemimo zdaj $a \in B$ poljubno in $x \in D^T(a)$. Če $\lambda_k \notin a$, je $\complement\{\lambda_k\}$ odprta množica nad a, zato po definiciji funkcije D^T velja $x \in D^T(\complement\{\lambda_k\})$, po prejšnjem pa $P_k x = 0$. Dokažimo zdaj še

(8) Če je $a \in B$, $\lambda_k \in a$, je $P_k\, D_T(a) = \mathrm{Im}\, P_k$.

Tokrat bomo imeli lažje delo. Ker je namreč $\lambda_k \in a$ in je lokalni spekter vektorja e_k enak $\{\lambda_k\}$, je $e_k \in D_T(a)$ in $P_k\, e_k = e_k$. Točki (7) in (8) skupaj, nam zaradi $D_T \leq D^T$ dokazujeta

$$P_k\, D_T(a) = P_k\, D^T(a) = \begin{cases} \mathrm{Im}\, P_k & \lambda_k \in a \\ \{0\} & \lambda_k \notin a \end{cases}, \quad a \in B,$$

torej sta $P_k\, D_T$ in $P_k\, D^T$ meri na $\mathrm{Im}\, P_k$. Zaradi (1) je $\{P_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq (\mathrm{Inv}\, D_T) \cap (\mathrm{Inv}\, D^T)$ in če upoštevamo še (3) in (4), so za funkciji D_T in D^T izpolnjeni vsi pogoji posledice 2.4.5. Obe imata torej natančni in popolni zunanji in notranji meji. Operator T zadošča pogojema (DS1) in (DS2) iz razdelka 3.4, po trditvi 4.3.1 zadošča tudi pogojema (D3) in (D3'), zato je po izreku 3.4.3 dvostransko navidezno spektralen.

Prepričajmo se še, da ni spektralen. Primer $X = C$ je obdelal Fixman (glej [14], izrek 5.1). V primeru $X = L^p$ pa se bomo sklicali na neki rezultat Uljanova (glej [33]). Denimo, da je T spektralen in izberimo neko permutacijo $k_1, k_2, k_3, \ldots$ indeksov 1, 2, 3, ... Tedaj so

$$a_n = \{\lambda_0, \lambda_{k_1}, \lambda_{-k_1}, \ldots, \lambda_{k_n}, \lambda_{-k_n}\}$$

Borelove množice in po (7) in (8)

$$P_{D_T}(a_n) = P_o + \sum_{j=1}^{n} (P_{k_j} + P_{-k_j}) .$$

Zaradi spektralnosti operatorja T so projektorji $P_{D_T}(a_n)$ enakomerno omejeni. Ker za vsak $x \in L^p$ vrsta (6) konvergira v L^p normi proti x, konvergira tudi zaporedje $P_{D_T}(a_n)x$ proti x. Toda po točki 1 izreka 6 v omenjenem članku Uljanova, obstaja taka preureditev indeksov $k_1, k_2, k_3, \ldots$ in taka funkcija x, ki leži v vseh L^p, $1 \leq p < 2$ (in seveda ne leži v L^2), da $P_{D_T}(a_n)x$ ni konvergentno v normi L^1 (torej tudi v nobeni normi L^p, $1 < p < 2$). Po točki 2 istega izreka pa obstaja pri isti preureditvi indeksov taka, celo zvezna funkcija x, za katero $P_{D_T}(a_n)x$ ne konvergira v nobeni normi L^p, $p > 2$.

4.4. Matrični operatorji

Začnimo s tole preprosto in dobro znano resnico:

4.4.1. Trditev: Za vsako ničlo λ_o polinoma

$$\pi(\lambda) = \lambda^n + \pi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \pi_n$$

velja

$$|\lambda_o| \leq 2 \max |\pi_k|^{1/k} .$$

Dokaz: Pa denimo nasprotno in pridemo v protislovje:

$$|\lambda_o|^n = \left|\sum_{k=1}^{n} \pi_k \lambda_o^{n-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\lambda_o|^k}{2^k} |\lambda_o|^{n-k} = \frac{2^n-1}{2^n} |\lambda_o|^n <$$

$$< |\lambda_o|^n .$$

Naj bo E_o metričen topološki prostor in $\Pi(E_o)$ družina funkcij

$$\pi(\lambda, t) = \lambda^n + \pi_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + \pi_n(t), \lambda \in \mathbb{C},\ t \in E_o,$$

kjer so π_k zvezne funkcije na E_o. Nadalje naj bo A_o najmanjša algebra, ki jo generira topologija prostora E_o.

4.4.2. Trditev: Za vsak $\pi \in \Pi(E_o)$ obstaja neka končna delitev $D \subseteq A_o$ množice E_o, za katero velja: Za vsak $d \in D$ obstaja tak $\pi^d \in \Pi(d)$, da je za vsak $t \in d$, vsaka ničla polinoma $\pi(\ .\ ,t)$ tudi ničla polinoma $\pi^d(\ .\ ,t)$, vendar samo z mnogokratnostjo 1.

Dokaz: Pri fiksnem $t \in E_o$, je postopek jasen: Najprej poiščemo po Evklidovem algoritmu največji skupni delitelj polinomov $\pi^1 = \pi$ in $\pi^2 = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\pi$. Nato delimo prvotni polinom s tem deliteljem. Dokažimo, da je skupni delitelj iskane oblike, pa bo trditev veljala.

Denimo, da smo na nekem koraku Evklidovega algoritma prišli do naslednje situacije: Obstaja končna delitev $D \subseteq A_o$ množice E_o; na vsakem $d \in D$ imata zadnja dva polinoma v algoritmu obliko $\pi^{1,d}, \pi^{2,d} \in \Pi(d)$. Fiksirajmo $d \in D$ in delimo polinom $\pi^{1,d}$ s $\pi^{2,d}$:

$$\pi^{1,d}(\lambda,t) = \sigma(\lambda,t)\,\pi^{2,d}(\lambda,t) + \varrho(\lambda,t) .$$

Tedaj je $\varrho(\lambda,t)$ oblike

$$\varrho(\lambda,t) = \varrho_o(t)\lambda^k + \varrho_1(t)\lambda^{k-1} + \ldots + \varrho_k(t) ,$$

pri tem je k manjši od stopnje polinoma $\pi^{2,d}$, funkcije ϱ_j, $j=0,1,\ldots,k$ pa so zvezne na d. Naj bo

$$\begin{aligned} e_o &= \{t \in d ; \varrho_o(t) \neq 0\} \\ e_j &= \{t \in d ; \varrho_i(t) = 0, i=0,\ldots,j-1; \varrho_j(t) \neq 0\}, \; j=1,\ldots,k, \\ e_{k+1} &= \{t \in d ; \varrho_i(t) = 0, i=0,\ldots,k\}. \end{aligned}$$

Množic e_j ni več kot n; ker je prva odprta v d, druga odprta v ostanku, itd, so vse elementi A_o. Poleg tega so paroma disjunktne in njihova unija je enaka d.

Če $e_{k+1} \neq \emptyset$, je na tej množici Evklidov algoritem končan in $\pi^{2,d}$ je iskani skupni delitelj predpisane oblike. Na množici e_j, $j=0,\dots,k$ (če je neprazna) pa prenesemo nadaljnjim korakom algoritma polinoma

$$\pi^{1,e_j}(\lambda,t) = \pi^{2,d}(\lambda,t)\ , \quad t\in e_j,$$

in

$$\pi^{2,e_j}(\lambda,t) = \lambda^{k-j} + \frac{\varrho_{j+1}(t)}{\varrho_j(t)}\lambda^{k-j-1} + \dots + \frac{\varrho_k(t)}{\varrho_j(t)}\ , \quad t\in e_j\ .$$

Ko Evklidov algoritem končamo povsod, moč delitve D gotovo ne presega števila n^n.

4.4.3. Trditev: Naj ima $\pi\in\Pi(E_o)$ stopnje n v vsaki točki $t\in E_o$ le enkratne ničle in naj bo $a\subseteq E_o$ kompaktna. Tedaj velja:

(a) Število

$$\varepsilon(a) = \inf\left\{ |\lambda_1-\lambda_2|\ ;\ \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ ničli polinoma } \pi(\,.\,,t) \text{ pri nekem } t\in a\right\}$$

je različno od nič.

(b) Obstaja končna delitev $D\subseteq A_o$, množice a, za katero velja: Za vsak $d\in D$, obstajajo $\lambda_k : d\to \mathbb{C}$, $k=1,\dots,n$, zvezne in take, da je

$$\pi(\lambda,t) = (\lambda-\lambda_1(t))\ \dots\ (\lambda-\lambda_k(t)),\quad t\in d\ .$$

Dokaz: (a) Privzemimo nasprotno. Tedaj obstaja zaporedje $t_k \in a$ in zaporedji $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}$ z lastnostmi

$$\pi(\lambda_k, t_k) = \pi(\mu_k, t_k) = 0,$$

$$\lambda_k \neq \mu_k, \ |\lambda_k - \mu_k| \to 0.$$

Ker je a kompaktna, lahko s prehodom na podzaporedje dosežemo $t_k \to t_0 \in a$. Koeficienti polinoma π so zvezne funkcije, zato na a omejene in po 4.4.1 sta zaporedji λ_k, μ_k omejeni. S prehodoma na podzaporedji lahko dosežemo $\lambda_k \to \lambda_0 \in \mathbb{C}$ in $\mu_k \to \mu_0 \in \mathbb{C}$. Tedaj je zaradi $\lambda_k - \mu_k \to 0$: $\lambda_0 = \mu_0$ in λ_0 je ničla polinoma $\pi(\,.\,, t_0)$. Toda zaporedje

$$0 = \frac{\pi(\lambda_k, t_k) - \pi(\mu_k, t_k)}{\lambda_k - \mu_k} =$$

$$= \frac{\lambda_k^{\,n} - \mu_k^{\,n}}{\lambda_k - \mu_k} + \pi_1(t_k)\,\frac{\lambda_k^{\,n-1} - \mu_k^{\,n-1}}{\lambda_k - \mu_k} + \ldots + \pi_{n-1}(t_k)$$

konvergira s k proti $\frac{\partial}{\partial\lambda}\pi(\lambda_0, t_0)$ in λ_0 je dvojna ničla polinoma $\pi(\,.\,, t_0)$, v nasprotju s predpostavko.

(b) Pri poljubnem $t_0 \in a$ naj bodo $\lambda_1(t_0), \ldots, \lambda_n(t_0)$ ničle polinoma $\pi(\,.\,, t_0)$. Pri nadaljnjem $t \in a$ naj bo $\lambda_1(t_0, t)$ tista izmed ničel polinoma $\pi(\,.\,, t)$, ki je najbližja številu $\lambda_1(t_0)$; $\lambda_2(t_0, t)$ tista izmed preostalih ničel, ki je najbližje številu $\lambda_2(t_0)$; itd.

Denimo, da so pri nekem zaporedju $t_j \in a$, $t_j \to t_o$, zaporedja $\lambda_k(t_o,t_j)$ vsa konvergentna z limitami $\mu_k \in \mathbb{C}$, $k=1,\dots,n$. Opustimo prvih nekaj členov zaporedja, tako da

$$|\lambda_k(t_o,t_j) - \mu_k| \leq \frac{1}{3}\varepsilon(a).$$

Števila μ_k so ničle polinoma $\pi(\,.\,,t_o)$, paroma različna in zato vse ničle tega polinoma. Ker je $\lambda_1(t_o,t_j)$ tista izmed ničel polinoma $\pi(\,.\,,t_j)$, ki je najbližje številu $\lambda_1(t_o)$ in obstaja med temi ničlami tudi neka ničla $\lambda_k(t_o,t_j)$, za katero $|\lambda_k(t_o,t_j) - \lambda_1(t_o)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon(a)$, je $|\lambda_1(t_o,t_j) - \lambda_1(t_o)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon(a)$ in zato

$$|\lambda_1(t_o,t_j) - \lambda_k(t_o,t_j)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon(a),$$

od tod pa $\lambda_1(t_o,t_j) = \lambda_k(t_o,t_j)$ in končno $\mu_1 = \lambda_1(t_o)$. Z indukcijo dobimo $\mu_k = \lambda_k(t_o)$, $k=1,\dots,n$.

Izberimo zdaj poljubno zaporedje $t_j \in a$, $t_j \to t_o$. S prehajanjem na podzaporedja lahko dosežemo, da zaporedja $\lambda_k(t_o,t_j)$ konvergirajo k poljubnim svojim stekališčem. Zato so po prejšnjem edina stekališča teh zaporedij $\lambda_k(t_o)$ in funkcije $\lambda_k(t_o,t)$ so zvezne v točki $t = t_o$.

Naj bo u_o neka odprta okolica točke $t_o \in a$, na kateri

$$|\lambda_k(t_o,t) - \lambda_k(t_o)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon(a)\ , \quad t \in u_o\ ;$$

nadalje naj bo $t_1 \in u_o$ in tudi tej točki priredimo po istem postopku funkcije $\lambda_k(t_1,t)$, za lastnostjo $\lambda_k(t_1,t_1) = \lambda_k(t_o,t_1)$, ki so po prejšnjem zvezne v točki t_1, in okolico u_1, na kateri velja :

$$|\lambda_k(t_1,t) - \lambda_k(t_1,t_1)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon(a)\ , \quad t \in u_1\ .$$

Tedaj je za $t \in u_o \cap u_1$

$$|\lambda_k(t_o,t) - \lambda_k(t_1,t)| \leq |\lambda_k(t_o,t) - \lambda_k(t_o)| +$$

$$+ |\lambda_k(t_o) - \lambda_k(t_o,t_1)| + |\lambda_k(t_1,t_1) - \lambda_k(t_1,t)| \leq \frac{3}{4}\varepsilon(a)$$

in $\lambda_k(t_o,t) = \lambda_k(t_1,t)$. Zato so funkcije $\lambda_k(t_o,t)$ zvezne v vsaki točki $t \in u_o$.

Po zgornjem postopku priredimo vsaki točki $t \in a$ neko odprto okolico u in zvezne funkcije $\lambda_k(t)$, definirane na tej okolici. Ker je množica a kompaktna, jo prekrije že končno mnogo okolic $u_1, \dots ,u_m$. V delitev D vzamemo neprazne izmed množic

$$u_1\ ,\ u_2 - u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_m - \bigcup_{i=1}^{m-1} u_i\ .$$

Odslej naj bo E_o kompakten metričen prostor, fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ ter zvezne funkcije

$$\tau_{ij} : E_o \to \mathbb{C}\,, \quad i,j=1,\dots,n\,,$$

ki jih zapišemo v matriko

$$T(t) = \begin{Vmatrix} \tau_{11}(t) & & \tau_{1n}(t) \\ & & \\ \tau_{n1}(t) & & \tau_{nn}(t) \end{Vmatrix} .$$

Nadalje označimo

$$\pi(\lambda\,,t) = \det\,(\,\lambda - T(t)\,)$$

in če je pri nekem $t \in E_o$ število $\lambda_o \in \mathbb{C}$ ničla polinoma $\pi(\,\cdot\,,t)$, označimo s $P_{\lambda_o}(t)$ spektralni projektor matrike $T(t)$, prirejen točki spektra λ_o.

4.4.4. Trditev:

(a) Obstajajo Borelove funkcije $\lambda_k : E_o \to \mathbb{C}$, vse enakomerno omejene z neko konstanto M, za katere

$$\pi(\lambda\,,t) = (\lambda - \lambda_1(t))\ \dots\ (\lambda - \lambda_n(t))\ ,\ t \in E_o.$$

(b) Obstaja končna Borelova delitev D množice E_o, za katero velja: Za vsak $d \in D$ ima pri vseh $t \in d$ matrika $T(t)$ natanko n_d točk v spektru, $\mu_k(t)$, $k=1,\dots,n_d$, in te točke lahko zasnujemo kot Borelove funkcije $t \in d$.

(c) Komponente matrik $P_{\mu_k(t)}(t)$ so Borelove funkcije na vsakem $d \in D$.

(d) Obstaja neka kvečjemu števna družina kompaktnih množic K_o v E_o, za katero $\bigcup_{a_o \in K_o} a_o = E_o$ in na vsakem $a_o \in K_o$ so komponente projektorjev $P_{\mu_k(t)}(t)$ enakomerno omejene.

Dokaz: Polinomu π poiščemo po trditvi 4.4.2 delitev D množice E_o in polinome $\pi^d \in \Pi(d)$. Ker je vsak $d \in D$ v A_o, obstaja neko naraščajoče zaporedje kompaktnih množic a_k^d, $k \in \mathbb{N}$, z unijo d. V družino K_o vzamemo vse a_k^d po $k \in \mathbb{N}$ in $d \in D$. Dodatno pišemo še $a_o^d = \emptyset$. Danemu $a_k^d \in K_o$ poiščemo po trditvi 4.4.3 Borelovo delitev D_k^d množice a_k^d in pri fiksnem $e \in D_k^d$ še zvezne funkcije $\mu_1, \dots, \mu_{n_d}$ (n_d je stopnja polinoma π^d). To definicijo funkcij μ_r obdržimo na vseh nepraznih $e - a_{k-1}^d$, $e \in D_k^d$, $k \in \mathbb{N}$, pa dobimo točko (b).

Pri fiksnih $a_k^d \in K_o$ in $e \in D_k^d$ naj bo $\mathcal{N}_e$ družina vseh tistih n_d-terk $\alpha = (m_1, \dots, m_{n_d})$, za katere obstaja tak $t \in e - a_{k-1}^d$, da je $\mu_r(t)$ v polinomu $\pi(\cdot, t)$ ničla stopnje m_r; z f_α, $\alpha \in \mathcal{N}_e$ pa označimo družino vseh takih t. Tedaj je $\{f_\alpha\}$ neka končna Borelova delitev množice $e - a_{k-1}^d$ in na vsakem f_α zapišemo med funkcije $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vsako od funkcij $\mu_1, \dots, \mu_{n_d}$ z njeno kratnostjo. Tako dobimo točko (a).

Fiksirajmo spet $a_k^d \in K_o$, $e \in D_k^d$ in f_α, $\alpha \in \mathcal{N}_e$. Označimo z $S(\lambda, t)$ prirejenko k matriki $\lambda - T(t)$, to je matriko, ki jo dobimo tako, da definiramo $\sigma_{ij}(\lambda, t)$ kot poddeterminanto k (j,i)-tem elementu matrike $\lambda - T(t)$. Komponente $\sigma_{ij}(\lambda, t)$ so polinomi v λ, katerih koeficienti so zvezne funkcije t na vsem E_o. Za $\beta = (m_1', \dots, m_{n_d}')$, pri katerem obstaja tak $t \in f_\alpha$, da se da $S(\lambda, t)$ krajšati z $(\lambda - \mu_r(t))$ natanko $(m_r - m_r')$-krat, naj bo g_β množica vseh takih t. Družina $\{g_\beta\}$ je končna, Borelova delitev množice f_α in na g_β ima minimalni polinom $\varrho(\lambda, t)$ matrike $T(t)$ obliko

$$\varrho(\lambda, t) = (\lambda - \mu_1(t))^{m_1'} \dots (\lambda - \mu_{n_d}(t))^{m_{n_d}'}, \quad t \in g_\beta.$$

Spektralni projektor $P_{\mu_r(t)}(t)$ dobimo na g_β po Hermitovi formuli, za $r=1,\dots,n_d$:

$$P_{\mu_r(t)}(t) = \beta_r(T(t), t),$$

$$\beta_r(\lambda, t) = \varrho^r(\lambda, t) \sum_{s=0}^{m_r'-1} \gamma_{rs}(t)\,(\lambda - \mu_r(t))^s,$$

$$\varrho^r(\lambda, t) = \frac{\varrho(\lambda, t)}{(\lambda - \mu_r(t))^{m_r'}},$$

$$\gamma_{rs}(t) = \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left[\frac{1}{\varrho^r}\right]_{(\mu_r(t), t)}.$$

Komponente spektralnih projektorjev so torej zvezne na vsakem g_β in zato Borelove na vsakem $d \in D$, torej velja točka (c).

Ker so komponente matrike $T(t)$ na vsem E_o omejene in so $\mu_r(t)$ omejene na vsem E_o (za mejo teh funkcij M brez škode za splošnost predpostavimo $M \geqslant 1$), bo veljala točka (d), brž ko dokažemo, da so $\gamma_{rs}(t)$ omejene, neodvisno od s, r, $t \in g_\beta$, $g_\beta \subseteq f_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{N}_e$, $e \in D_k^{\,d}$ in $k \in \{1,..,k_o\}$. Naj bo $\varepsilon_o = \varepsilon(a_{k_o}{}^d)$ (trditev 4.4.3(a)); brez škode za splošnost privzamemo $\varepsilon_o \leqslant 1$. Če pri ocenjevanju nismo preveč nežni, lahko dobimo

$$(1) \qquad \left| \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left[\frac{1}{\varrho^r}\right]_{(\mu_r(t),t)}\right| \leqslant 2^{s^2}\left(\frac{2Mn}{\varepsilon_o}\right)^{ns} \varepsilon_o^{-n} .$$

Jasno je namreč

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\, \varrho^r(\mu_r(t),t)\right| \leqslant (2Mn)^n$$

in

$$\left|\varrho^r(\mu_r(t),t)\right| \geqslant \varepsilon_o^{\,n} ,$$

zato velja (1) pri s=0. Pri $s>0$ je

$$0 = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \frac{\partial^{s-j}}{\partial\lambda^{s-j}}\, \varrho^r\, \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left[\frac{1}{\varrho^r}\right]$$

in če (1) že velja pri s-1, je

$$\left| \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left[\frac{1}{\varphi^r}\right]_{(\mu_r(t),t)} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon_o^{-n} \sum_{j=o}^{s} \binom{s}{j} (2Mn)^n \, 2^{(s-1)^2} \left(\frac{2Mn}{\varepsilon_o}\right)^{n(s-1)} \varepsilon_o^{-n} \leq$$

$$\leq 2^{s^2} \left(\frac{2Mn}{\varepsilon_o}\right)^{ns} \varepsilon_o^{-n}$$

in (1) velja pri s. Ta ocena pa nam pove

$$|\gamma_{rs}(t)| \leq \left(\frac{4Mn}{\varepsilon_o^2}\right)^{n^2}$$

in trditev velja.

Na kompaktnem, metričnem prostoru E_o izberimo končno, pozitivno, Borelovo mero m , število p, $1 < p < +\infty$ in število $n \in \mathbb{N}$. Naj bo L^p prostor (ekvivalenčnih razredov) Borelovih funkcij na E_o, ki imajo končno L^p normo glede na mero m , X pa naj bo direktna vsota n primerkov prostora L^p, opremljena z normo: $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in L^p$

$$\| x \| = \left[\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_p^{\,p} \right]^{1/p} .$$

Na X definiramo operator T s predpisom

$$(Tx)_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}(t)\, x_j(t), \; i=1,\ldots,n, \; t \in E_o;$$

ta je gotovo omejen.

4.4.5. <u>Trditev</u>: Operator T zadošča pogojem (D1), (D3), (D1') in (D3').

<u>Dokaz</u>: Ker je X refleksiven in se T^* na X^* izraža s transponirano matriko k matriki T(t), je dovolj pokazati le veljavnost pogojev (D1) in (D3).

Pa naj bo $a \in K$ poljubna kompaktna množica na razširjeni ravnini in $x \in d_T(a)$. Tedaj obstaja naraščajoče zaporedje odprtih množic $c_k \in K'$, $k \in \mathbb{N}$, z unijo Ca in analitične funkcije $\hat{x}_k : c_k \to X$ z lastnostjo $(\lambda - T)\, \hat{x}_k(\lambda) = x$, $\lambda \in c_k$. Pišimo

$$\hat{y}_k = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \hat{x}_k^{(n-1)} ,$$

pa spoznamo $(\lambda - T)^n \hat{y}_k(\lambda) = x$, $\lambda \in c_k$. Izberimo poljuben $\lambda_0 \in Ca$ in k dovolj velik, da je $\lambda_0 \in c_k$. Nadalje izberimo poljubne reprezentante $\hat{y}_k(\lambda_0,t)$, $\hat{x}_k(\lambda_0,t)$ in $x(t)$ razredov $\hat{y}_k(\lambda_0)$, $\hat{x}_k(\lambda_0)$ in x. Tedaj je skoraj povsod na E_0

$$(\lambda_0 - T(t))^n \hat{y}_k(\lambda_0,t) = x(t) \tag{2}$$

$$(\lambda_0 - T(t))\, \hat{x}_k(\lambda_0,t) = x(t) . \tag{3}$$

Naj pri $t \in E_0$ velja (2) in (3). Če λ_0 ni ničla polinoma $\pi(\,.\,,t)$, je

$$(4) \qquad \xi(\lambda,t) = \frac{1}{\pi(\lambda,t)} S(\lambda,t)\, x(t)$$

(matrično funkcijo $S(\lambda,t)$ smo definirali v dokazu prejšnje trditve) pri $\lambda = \lambda_0$ edina rešitev enačbe (3). Če pa je pri tem t, λ_0 ničla polinoma $\pi(\,\cdot\,,t)$, je zaradi (2) in $P_{\lambda_0}(t)(\lambda_0 - T(t))^n = 0$: $P_{\lambda_0}(t)\, x(t) = 0$ in (4) ima v točki λ_0 odpravljivo singularnost. Če s $\xi(\lambda_0,t)$ označimo limito funkcije $\xi(\lambda,t)$, ko ge λ proti λ_0, je $\xi(\lambda_0,t)$ edina rešitev enačbe (3). Zato je $\xi(\lambda_0,\cdot) = \hat{x}_k(\lambda_0,\cdot)$, neodvisno od k. Med drugim smo s tem dokazali pogoj (D1).

Naj bo zdaj U_a družina tistih $x \in X$, za katere

$$(5) \qquad \sum_{\lambda \in a} P_\lambda(t)\, x(t) = x(t)$$

skoraj povsod na E_0. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je a omejena, sicer bi jo omejili z večjim od obeh števil $\| T \|$ in M, kjer je M meja ničel v polinomih π. Nadalje vzamemo, da je $M \geqslant 1$ in da (5) velja povsod na E_0.

Za poljuben $x \in U_a$ lahko s (4) po prejšnjem premisleku definiramo $\xi(\lambda,t)$ za vsak $\lambda \in Ca$ in $t \in E_0$. Pri tem je

$$\xi(\lambda,t) = \frac{1}{\pi(\lambda,t)}\, z(\lambda,t),$$

$$z(\lambda,t) = z_1(t)\,\lambda^{n-1} + \dots + z_n(t), \quad t \in E_o,$$

kjer so $z_i \in X$ in obstaja taka konstanta M_1, odvisna le od matrike $T(t)$, da je

$$\| z_i \| \leq M_1 \ \| x \| .$$

Naj bodo $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ Borelove funkcije iz trditve 4.4.4(a) in e_1 družina tistih $t \in E_o$, za katere $z(\lambda_1(t),t) = 0$. Definiramo

$$\pi^1(\lambda,t) = \pi(\lambda,t), \quad z^1(\lambda,t) = z(\lambda,t), \quad t \notin e_1,$$

$$\pi^1(\lambda,t) = \frac{\pi(\lambda,t)}{\lambda - \lambda_1(t)}, \quad z^1(\lambda,t) = \frac{z(\lambda,t)}{\lambda - \lambda_1(t)}, \quad t \in e_1.$$

Tedaj je z^1 spet polinom in za njegove koeficiente velja

$$\| z_i^{\,1} \| \leq n\, M^n\, M_1 \ \| x \| .$$

Postopek nadaljujemo s funkcijo $\lambda_2(t)$, itd. Po kvečjemu n krajšanjih dobimo

$$\xi(\lambda,t) = \frac{1}{\pi^n(\lambda,t)}\, z^n(\lambda,t)$$

in za koeficiente polinoma z^n velja

$$\| z_i^{\,n} \| \leq n\, M^n \ \| z_i^{\,n-1} \| \leq (n\, M^n)^n \ M_1 \ \| x \| .$$

Ker vse ničle polinoma π^n ležijo v a, velja za $\lambda \in$ Ca, dist(λ,Ca) ≤ 1, da je

$$|\pi^n(\lambda,t)| \geq (\mathrm{dist}(\lambda,\mathrm{Ca}))^n .$$

Naj bo M_2 večji od absolutne vrednosti vseh elementov množice a in večji od $\|T\|$, ter $M_3 = n\, M_2^{\,n}\, (n\, M^n)^n\, M_1$. Tedaj velja za $\lambda \in$ Ca, $|\lambda| < M_2$:

(6) $\|\xi(\lambda\, , .)\| \leq M_3\, (\mathrm{dist}(\lambda,\mathrm{Ca}))^{-n}\, \|x\|$, dist($\lambda$,Ca) ≤ 1,

(7) $\|\xi(\lambda\, , .)\| \leq M_3\, \|x\|$, dist($\lambda$,Ca) > 1.

Za poljuben $\lambda \in$ Ca je torej preslikava $R_\lambda : U_a \longrightarrow U_a$, $R_\lambda : x \longmapsto \xi(\lambda\, , .)$ omejen, linearen operator na U_a, zato ima enolično razširitev na $\overline{U}_a$, ki slika spet v prostor $\overline{U}_a$. Prostor U_a je invarianten za T in na njem velja

$$(\lambda - T)|_{U_a} R_\lambda = R_\lambda (\lambda - T)|_{U_a} = I_{U_a} .$$

Zato je $\sigma(T|_{\overline{U}_a}) \subseteq$ a in od tod $\overline{U}_a \subseteq d_T(a)$.

Izberimo zdaj $x \in d_T(a)$, $b \in K$, $b \subseteq$ Ca in $a_o \in K_o$, kjer je K_o družina iz trditve 4.4.4(d). Definirajmo

$$y(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda \in b} P_\lambda(t)\, x(t) , & t \in a_o \\ 0 , & t \in E_o - a_o \end{cases} ;$$

ker so komponente projektorjev $P_\lambda(t)$ enakomerno omejene, nam preslikava $x \mapsto y$ določa na vsem X definiran omejen projektor, ki komutira s T. Zato je pri izbranem x : $y \in d_T(a)$; po prejšnjem pa je $y \in d_T(b)$ in po pogoju (D1) $y = 0$. Ker je množica K_o kvečjemu števna in pokrije ves E_o, je

$$\sum_{\lambda \in b}' P_\lambda(t) x(t) = 0$$

skoraj povsod na E_o. Ker pa lahko s števno mnogo takih b pokrijemo ves Ca, je $x \in U_a$. Tako dokazane inkluzije

$$(8) \qquad d_T(a) \subseteq U_a \subseteq \overline{U}_a \subseteq d_T(a) ,$$

nam povedo, da T zadošča pogoju (D3).

Definicijo (5) prostorov U_a in inkluzije (8) bomo še potrebovali.

4.4.6. <u>Izrek</u>: T je dvostransko navidezno spektralen.

<u>Dokaz</u>: Za $a_o \in K_o$ definiramo projektor $Q_{a_o} = \chi_{a_o} I$, na prostoru X, kjer je χ_{a_o} karakteristična funkcija množice a_o in I identična matrika. Ti projektorji so omejeni (z normo 1), komutirajo s T in zato $Q_{a_o} \in \text{Inv } D_T$ in $Q_{a_o} \in \text{Inv } D^T$. Poleg tega velja

$$\bigcap_{a_o \in K_o} \operatorname{Ker} Q_{a_o} = \{0\}$$

$$\bigvee_{a_o \in K_o} \operatorname{Im} Q_{a_o} = X .$$

Zato bo izrek veljal po posledici 2.4.5 in izreku 3.4.3, brž ko dokažemo, da sta $Q_{a_o} D_T$ in $Q_{a_o} D^T$ meri na $\operatorname{Im} Q_{a_o}$ za vsak $a_o \in K_o$.

Fiksirajmo torej $a_o \in K_o$ in definirajmo na $\operatorname{Im} Q_{a_o}$ projektorsko funkcijo $P(a;\,.\,)$, $a \in B$, s predpisom

$$P(a;t) = \sum_{\lambda \in a} P_\lambda(t), \quad t \in a_o, \quad a \in B .$$

Po 4.4.4(c) so komponente te matrike Borelove funkcije in po 4.4.4(d) enakomerno omejene po t in a. Zato je $P(a;\,.\,)$ omejena projektorska funkcija z mejo, danimo M. Očitno je končno aditivna na vsem $\operatorname{Im} Q_{a_o}$ in B; dokažimo še njeno števno aditivnost! V ta namen izberimo $x \in \operatorname{Im} Q_{a_o}$ in naraščajoče zaporedje $a_k \in B$ z unijo E. Nadalje naj bo

$$b_k = \{ t \in a_o;\ P(a_j;t) = P(a_k;t) = I ,\ j \geq k \} ;$$

b_k je naraščajoče zaporedje Borelovih množic v E_o z unijo a_o. Izberimo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ in tak dovolj pozen $k \in \mathbb{N}$, da je

$$\| Q_{b_k} x - x \| \leq \varepsilon ;$$

tedaj je

$$\| P(a_j; .) Q_{b_k} x - P(a_j; .) x \| \leq M \varepsilon ,$$

ter zaradi $P(a_j; .) Q_{b_k} = Q_{b_k}$, $j \geq k$:

$$\| P(a_j; .) x - x \| \leq (M+1) \varepsilon , \quad j \geq k .$$

Funkcija $a \mapsto P(a; .)$ je torej projektorska mera na prostoru $\mathrm{Im}\, Q_{a_o}$.

Za $a \in K$ in $x \in \mathrm{Im}\, P(a; .)$, velja po (5) in (8), da je $x \in Q_{a_o} D_T(a)$; po istem razmisleku velja za $x \in Q_{a_o} D_T(a)$ tudi $x \in \mathrm{Im}\, P(a; .)$, zato je po regularnosti

(9) $$Q_{a_o} D_T(a) = \mathrm{Im}\, P(a; .), \quad a \in B .$$

Po istem premisleku je na X^* :

$$Q_{a_o} D_{T^*}(a) = \mathrm{Im}\, P(a; .)^{Tr} , \quad a \in K ;$$

(pri tem smo s Tr označili transponirano matriko k dani matriki). Prostor $\mathrm{Im}_{X^*} Q_{a_o}$ je dual prostora $\mathrm{Im}_X Q_{a_o}$ in projektor, prirejen matriki $P(a; .)^{Tr}$, je na prostoru $\mathrm{Im}_{X^*} Q_{a_o}$ adjungiran k projektorju $P(a; .)$ na $\mathrm{Im}_X Q_{a_o}$. Zato je $Q_{a_o} D^T(a) = \mathrm{Im}\, P(a; .)$, $a \in K'$ in po regularnosti

(10) $$Q_{a_0} D^T(a) = \mathrm{Im}\, P(a; .), \quad a \in B .$$

Ker je $P(a; .)$ projektorska mera na $\mathrm{Im}\, Q_{a_0}$, smo z (9) in (10) dokazali izrek.

S pomočjo tega izreka smo našli bogato množico dvostransko navidezno spektralnih operatorjev, iz katere si oglejmo le en konkreten primer.

4.4.7. Primer: Obstaja dvostransko navidezno spektralen operator T z lastnostjo $\sigma_v(T) = \sigma(T)$, ki ima neomejena skalarni del in radikal.

Naj bo $E_0 = [-1,1]$, m Lebesgova mera, p poljuben in

$$T(t) = \begin{Vmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & -1 & -t \end{Vmatrix} .$$

Tedaj je $\pi(\lambda, t) = (\lambda - t)^2 (\lambda + t)$; točko $t = 0$, v kateri ima $\pi(. ,t)$ trojno ničlo, lahko zanemarimo, saj ima mero 0. Pri $t \neq 0$ pa dobimo spektralna projektorja

$$P_t(t) = I - P_{-t}(t), \quad P_{-t}(t) = \begin{Vmatrix} (2t)^{-2} & -(2t)^{-2} & -(2t)^{-1} \\ (2t)^{-2} & -(2t)^{-2} & -(2t)^{-1} \\ -(2t)^{-1} & (2t)^{-1} & 1 \end{Vmatrix}$$

zato je skalarni del S operatorja T določen z matriko

$$S(t) = tP_t(t) - tP_{-t}(t) = \begin{Vmatrix} t-(2t)^{-1} & (2t)^{-1} & 1 \\ -(2t)^{-1} & t+(2t)^{-1} & 1 \\ 1 & -1 & -t \end{Vmatrix}$$

in je zaprt, vendar ni omejen. Tudi radikal N, določen z matriko

$$N(t) = \begin{Vmatrix} -(2t)^{-1} & (2t)^{-1} & 0 \\ -(2t)^{-1} & (2t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

je zaprt, ni omejen in zanj velja $N^2 = 0$.

4.4.8. Primer: Obstaja dvostransko navidezno spektralen operator, katerega skalarni del in radikal sta oba omejena in netrivialna.

V prostoru iz prejšnjega primera vzamemo

$$T(t) = \begin{Vmatrix} t & 0 & t \\ 2 & -t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{Vmatrix},$$

izračunamo $\pi(\lambda,t) = (\lambda-t)^2(\lambda+t)$ in pri $t \neq 0$

$$P_t(t) = I - P_{-t}(t), \quad P_{-t}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -t^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$S(t) = \begin{Vmatrix} t & 0 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{Vmatrix} \quad \text{in} \quad N(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Seznam oznak

Seznam pogojev

Stvarno kazalo

Literatura

[1] Albrecht,E.:Generalized Spectral Operators; Functional Analysis: Surveys and Recent Results; North-Holland Math. Studies, 27(Notas de mat., 38), str. 259-277

[2] Apostol,C.:Spectral Decompositions and Functional Calculus; Rev.Roum.Math.Pures Appl.,13(1968),str.1481-1528

[3] Bartle,R.G.:Spectral Decomposition of Operators in Banach Spaces, Proc. London Math.Soc.(3)20(1970), str.438-450

[4] Berberian,S.K.:Measure and Integration; The Macmillan Company, New York, 1965

[5] Berkson,E.: A Characterization of Scalar Type Operators on Reflexive Banach Spaces; Pacific J.Math.,13(1963), str. 365-373

[6] Bishop,E.: A Duality Theorem for an Arbitrary Operator, Pacific J.Math.,9(1959),str.379-397

[7] Colojoara,I.,Foiaş,C.: Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and Breach, New York, 1968

[8] Dunford,N.,Schwartz,J.T.:Linear Operators,p.I,Interscience Publishers, New York, 1958

[9] Dunford,N.,Schwartz,J.T.:Linear Operators,p.II,Interscience Publishers, New York, 1963

[10] Dunford,N.,Schwartz,J.T.:Linear Operators,p.III,Wiley-Interscience, New York, 1971

[11] Erdelyi,I.:Spectral Resolvents;Operator Theory and Functional Analysis(I.Erdelyi,editor);Research Notes Math., 38(1979), str.16-30

[12]Erdelyi,I.,Lange,R.:Spectral Decompositions in Banach Spaces; Lecture Notes Math.,623,Springer Verlag,Berlin, 1977

[13]Fialkow,L.:A Note on Quasisimilarity II;Pacific J.Math., 70(1977),str.151-162

[14]Fixman,U.:Problems in Spectral Operators,Pacific J.Math. 9(1959),str.1029-1051

[15]Foiaş,C.:Spectral Capacities and Decomposable Operators, Rev.Roum.Math.Pures Appl.,13(1968)str.1539-1545

[16]Gray,J.D.:Local Analytic Extensions of the Resolvent; Pacific J.Math.27(1968),str.305-324

[17]Herrero,D.A.:On Analytically Invariant Subspaces and Spectra; Trans.Amer.Math.Soc.,233(1977)str.37-44

[18]Hille,E.,Phillips,R.S.:Functional Analysis and Semi-Groups;American Mathematical Society,Providence R.I.,1957

[19]Kantorovitz,Sh.:A Jordan Decomposition for Operators in Banach Space; Bull.Amer.Math.Soc.,71(1965),str.891-893

[20]Lange,R.:Analytically Decomposable Operators;Trans.Amer. Math.Soc.,244(1978),str.225-239

[21]Leaf,G.K.:A Spectral Theory for a Class of Linear Operators;Pacific J.Math.,13(1963)141-155

[22]Ljancè,V.E.:On a Generalization of the Concept of Spectral Measure;Amer.Math.Soc.Translations,(2)51 (1966), str.273-315(angl.prevod)

[23]Ljubič,Ju.I.,Macaev,V.I.:On Operators With a Separable Spectrum;Amer.Math.Soc.Translations,(2)47(1965),str.89-129(angl.prevod)

[24] Nagy,B.Sz.-,Foiaş,C.:Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space; North-Holland Publ.Company,Amsterdam,1970

[25] Nikol'skij,I.K.:Invariantnije podprostranstva v teorii operatorov i teorii funkcij;Itogi nauki tehniki,Mat.Analiz,12,V.2(1974),str.199-412

[26] Nordgren,E.,Radjabalipour,M.,Radjavi,H.,Rosenthal,P.: On Invariant Operator Ranges;Trans.Amer.Math.Soc.,251 (1979),str.389-398

[27] Ringrose,J.R.:On Well-Bounded Operators;Proc.London Math. Soc.,(3)13(1963),str.613-638

[28] Rudin,W.:Real and Complex Analysis; McGraw-Hill,London, 1970

[29] Shulberg,G.W.:Spectral Resolvents and Decomposable Operators; Operator Theory and Functional Analysis(I.Erdelyi, editor),Research Notes Math.,38(1979),str.71-84

[30] Sine,R.C.:Spectral Decomposition of a Class of Operators, Pacific J.Math.,14(1964),str.333-352

[31] Taylor,A.E.: Introduction to Functional Analysis; John Wiley,New York,1958

[32] Turner,J.K.:On Well-Bounded and Decomposable Operators; Proc. London Math.Soc.,(3)37(1978),str.521-544

[33] Ul'janov,I.L.: O rjadah po perestavlennoj trigonometričeskoj sisteme; Izvestija akad.nauk SSSR,Ser.Mat.,22 (1958),str.515-542

[34] Vidav,I.,Omladič,M.:Invariantni podprostori omejenih linearnih operatorjev v Banachovem prostoru, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana, 1979

[35] Wu, P.Y.: Quasi-Similarity of Weak Contractions; Proc. Amer. Math. Soc., 69(1978), str. 277-288

[36] Wu, P.Y.: Hyperinvariant Subspaces of C_{11} Contractions; Proc. Amer. Math. Soc. 75(1979), str. 53-58