PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 6
Strani 332–342

Uroš Milutinović:

KAJ SO SREDINE IN KAKO JIH UPORABLJAMO?

Ključne besede: matematika, matematična tekmovanja, sredine, neenakosti.

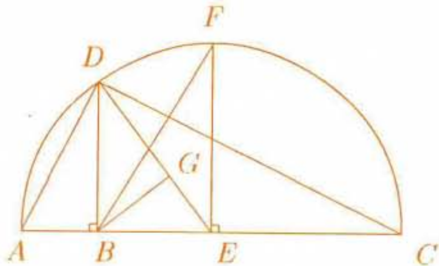
Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1151-Milutinovic.pdf

MATEMATIKA

KAJ SO SREDINE IN KAKO JIH UPORABLJAMO?

Na predlanskem občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije sem imel predavanje o neenakostih med sredinami, po katerem pa nisem utegnil odgovoriti na vsa zastavljena vprašanja. Takrat sem obljubil, da o tej temi napišem članek, v katerem bi ilustriral uporabo sredin in neenakosti med njimi. Primerov res ne primanjkuje, saj se na skoraj vsakem matematičnem tekmovanju pojavi kakšna naloga, ki se jo da rešiti s pomočjo sredin.

Oglejmo si za ogrevanje naslednjo risbo:



E je središče krožnice, A in C sta krajišči premera, D, F točki krožnice, DB in FE sta pravokotni na AC, BG pa na DE. Zadostuje, da v pravokotnih trikotnikih BGD, DBE in BEF uporabimo, da je kateta manjša od hipotenuze, pa dobimo $DG < BD < ED = EF < BF$. Označimo $AB = a$, $BC = b$. Takoj sledi

$$ED = \frac{a+b}{2}$$

in po višinskem izreku za pravokotni trikotnik ACD:

$$BD = \sqrt{ab}.$$

Nadalje sta podobna trikotnika BGD in EBD. Dobimo $DG/BD = BD/ED$, oziroma

$$DG = \frac{2ab}{a+b} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$$

Ker je $BE = \frac{b-a}{2}$, nam da Pitagorov izrek

$$BF = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Torej velja

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

In že smo pri sredinah! Izraze, ki se pojavljajo v tej formuli, imenujemo po vrsti *harmonična, geometrijska, aritmetična* in *kvadratna sredina* števil a in b. Dokazali smo, da je harmonična sredina najmanjša, sledi ji geometrijska, potem aritmetična in končno je kvadratna sredina največja. Te neenakosti so poznali že starogrški matematiki. Podobni odnosi se namreč pogosto pojavljajo v geometriji, ki je bila v njihovem času najpomembnejši del matematike. Poznali so tudi naš dokaz!

Ne spreglejmo, da sta v dokazu a in b dolžini daljic, torej pozitivni števili, in da za poljubni pozitivni števili a in b obstaja ustrezna skica. Stroge neenakosti veljajo le, če je $a < b$ (ali $b < a$ — zakaj?). Kaj pa dobimo, če je $a = b$?

Kasneje so se matematiki lotili svoje priljubljene igre — posploševanja. Tako so posplošili definicije sredin na več števil: *harmonična, geometrijska, aritmetična* in *kvadratna sredina* pozitivnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so po vrsti izrazi

$$\left(\frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Posplošili pa so tudi izrek o neenakostih in dokazali, da med sredinami za poljuben n velja enak odnos kot za dve števili. Neenakosti so stroge natanko takrat, kadar števila $a_1, \ldots, a_n$ *niso* vsa enaka. Drugače povedano: če je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, so vse sredine med seboj enake in samo v tem primeru se med različnima sredinama lahko pojavi enakost. Tega ne bomo dokazovali, ampak bomo pohiteli k primerom.[1]

[1] Kogar zanimajo dokazi, druge posplošitve in drugi primeri, jih lahko najde v članku *U. Milutinović*: "Nejednakosti među sredinama: primjeri s takmičenjâ", objavljenem v reviji "Matematika. Stručno-metodički časopis", Zagreb, 1991, št. 2, str. 43–52, ali v knjigi *D. S. Mitrinović, P. M. Vasić*: "Uvođenje mladih u naučni rad V - Sredine". Nasploh velja, da je literatura s tega področja zelo bogata.

1. Naj bodo v_a, v_b, v_c višine trikotnika s stranicami a, b, c; ρ naj bo polmer temu trikotniku včrtane krožnice. Dokaži, da je trikotnik enakostraničen natanko takrat, kadar je

$$v_a + v_b + v_c = 9\rho.$$

(Zahodnonemško zvezno tekmovanje, 1988)

Rešitev: $v_a + v_b + v_c = 9\rho$ je (zaradi $v_a = \frac{2P}{a}$, $v_b = \frac{2P}{b}$, $v_c = \frac{2P}{c}$, $\rho = \frac{2P}{a+b+c}$, kjer je P ploščina trikotnika) ekvivalentno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$$

oziroma

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

torej temu, da je aritmetična sredina števil a, b, c enaka harmonični. To pa drži natanko takrat, kadar je $a = b = c$.

2. Podan je trikotnik ABC. Na premici AB določimo točki A_1, B_2 tako, da je $A_1A = BC$, $BB_2 = AC$ in da je A_1ABB_2 vrstni red teh točk. Podobno določimo na premici BC točki B_1 in C_2 tako, da bo njihov vrstni red B_1BCC_2 in da bo veljalo $B_1B = CA$, $CC_2 = AB$, na premici CA pa točki C_1 in A_2 v vrstnem redu C_1CAA_2 tako, da bo veljalo $C_1C = AB$, $AA_2 = BC$ (glej sliko). Dokaži, da ploščina šestkotnika $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ ni manjša od trinajstih ploščin trikotnika ABC.

Rešitev: Naj bo $P = P_{ABC}$, $P' = P_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}$. Poleg tega naj bo v_c višina trikotnika ABC iz oglišča C ter v_c' višina trikotnika AB_2C_1 iz oglišča C_1. Zaradi podobnosti trikotnikov (katerih?) dobimo

$$\frac{v_c'}{v_c} = \frac{b+c}{b},$$

oziroma

$$v_c' = \frac{b+c}{b} v_c.$$

Zato je

$$P_{AB_2C_1} = \frac{(b+c)v_c'}{2} = \frac{(b+c)^2 v_c}{2b} = \frac{(b+c)^2}{bc} P$$

ter

$$P_{AA_1A_2} = \frac{a^2}{bc} P.$$

Ponovimo ta postopek z A, A_1, oziroma B, B_1 — dobimo

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{P}(P_{AB_2C_1} + P_{AA_1A_2} + P_{BC_2A_1} + P_{BB_1B_2} +$$

$$+ P_{CA_2B_1} + P_{CC_1C_2} - 2P_{ABC}) =$$

$$= \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{a^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{b^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{c^2}{ab} - 2 =$$

$$= 4 + \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc}.$$

Željeno oceno dobimo kot posledico neenakosti med aritmetično in geometrijsko, oziroma kvadratno in aritmetično sredino:

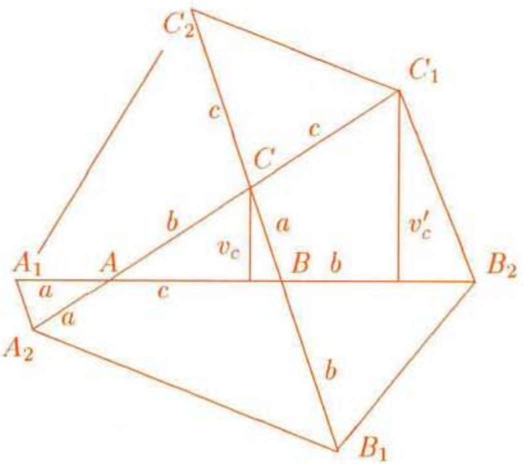
$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} \ge 27$$

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \ge \frac{1}{3}.$$

Množenje teh neenakosti nam da

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc} \ge 9.$$

Opazimo, da smo hkrati dokazali, da je $P' = 13P$ natanko takrat, ko je trikotnik ABC enakostraničen.



3. Reši enačbo $x^{20} - 20x^{19} + \cdots + 1 = 0$, če veš, da so vse njene rešitve pozitivna realna števila! (Če so vam všeč zgodbice, lahko to nalogo spremenite v zgodbo o črnilu, ki se je učencu razlilo po zvezku. Enačbo, ki jo je imel za domačo nalogo, pa je učenec kljub temu rešil.)

   Rešitev: Naj bodo $x_1, \ldots, x_{20}$ koreni te enačbe. Vièteove formule nam dajo $x_1 + \cdots + x_{20} = 20$ in $x_1 x_2 \cdots x_{20} = 1$, zato je aritmetična sredina vseh korenov enaka geometrijski. To pa je možno samo, če so vsi koreni enaki. Torej je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{20} = 1$ rešitev, ki smo jo iskali.

4. Določi vse polinome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, za katere je $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\} \subseteq \{1, -1\}$ in za katere so vse rešitve enačbe $p(x) = 0$ realne.

   Rešitev: Lahko predpostavimo, da je $a_n = 1$. (Ostale dobimo tako, da le-te pomnožimo z -1.) Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni takšnega polinoma p. Vièteove formule nam dajo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$, $x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n = a_{n-2}$, $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0$ in je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) = 1 \pm 2$. Ker so koreni realni, je možno samo $1 + 2 = 3$. Neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino pozitivnih števil $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ (ker je njihov produkt 1, očitno nobeno izmed teh števil ni enako 0) nam da:

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2} = 1,$$

torej je $n \leq 3$. Pri tem je $n = 3$ (ker tedaj velja enakost) le v primeru $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$, oziroma le, če so absolutne vrednosti vseh treh korenov enake. Ker je prosti člen enak 1, je ta skupna absolutna vrednost lahko enaka le 1. Polinoma $(x-1)^3$ in $(x+1)^3$ ne prideta v poštev (ker imata tudi koeficiente 3 ali -3), ostaneta samo možnosti $(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$ in $(x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$. Za $n = 1$ oziroma $n = 2$ lahko z neposrednim preverjanjem ugotovimo, da so $x+1, x-1, x^2+x-1, x^2-x-1$ edini iskani polinomi.

5. Določi maksimum funkcije $f(x) = \sin^n x \cos x$, $n \in \mathbb{N}$.

   Rešitev: Očitno zadostuje, če obravnavamo f samo na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, na katerem sta funkciji $\sin x$ in $\cos x$ pozitivni. Neenakost med geometrijsko in kvadratno sredino $(n+1)$-terice števil $(\sin x, \ldots, \sin x, \sqrt{n}\cos x)$ nam da

$$\sqrt[n+1]{\sin^n x \cdot \sqrt{n}\cos x} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cdots + \sin^2 x + n\cos^2 x}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

   iz česar sledi $f(x) \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$. Pri tem doseže f ta ekstrem tedaj, ko je $\sin x = \sqrt{n}\cos x$, oziroma $\operatorname{tg} x = \sqrt{n}$.

6. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila. Dokaži, da je

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

   (Avstrija, 1987)

   Rešitev: Označimo s H, A, K harmonično, aritmetično, oziroma kvadratno sredino števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Takoj ugotovimo, da pravzaprav dokazujemo veljavnost neenakosti:

$$nA + \sqrt{n}K \leq \frac{n+\sqrt{n}}{n^2} \cdot \frac{n}{H} \cdot nK^2,$$

   oziroma $nAH + \sqrt{n}KH \leq (n+\sqrt{n})K^2$. Ker je $A, H \leq K$, dobimo $AH \leq K^2$ oziroma $nAH \leq nK^2$. Podobno iz $K, H \leq K$ dobimo $KH \leq K^2$, oziroma $\sqrt{n}KH \leq \sqrt{n}K^2$. Če ti neenačbi seštejemo, dobimo trditev naloge. Poleg tega vidimo, da velja enakost natanko takrat, kadar je $A = H = K$, oziroma $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

7. Naj bodo a, b, c pozitivna realna števila. Dokaži, da je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

(1. nordijska matematična olimpiada, 1987)

Rešitev: Neenakosti med kvadratno in aritmetično oziroma aritmetično in geometrijsko sredino števil $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ nam dajo:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2}{3} =$$

$$= \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \cdot \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, kar pa je ekvivalentno (zakaj?) pogoju $a=b=c$.

Za konec se sami preizkusite z naslednjimi nalogami:

1. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila in $S = x_1+x_2+\cdots+x_n$. Dokaži, da je

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

(1. azijsko-pacifiška olimpiada, 1989)

2. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila in naj bo S_k vsota vseh produktov po k števil, izbranih med števili $a_1, \ldots, a_n$. Dokaži, da je

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \cdots a_n$$

za $k = 1, \ldots, n-1$.

(2. azijsko-pacifiška olimpiada, 1990)

3. Diagonali štirikotnika $ABCD$ se sekata v notranjosti štirikotnika v točki O. Označimo ploščini trikotnikov AOB in COD s P_1 oziroma P_2, ploščino štirikotnika $ABCD$ pa s P. Dokaži, da je

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} \leq \sqrt{P}$$

in da velja enakost natanko tedaj, ko sta stranici AB in CD vzporedni.

(Švedska, 1986; Madžarska, 1988)

4. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ taka pozitivna realna števila, da velja

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{2^{n^2+n}}.$$

Dokaži, da je

$$(1 + 2^{2\cdot 1} a_1)(1 + 2^{2\cdot 2} a_2) \cdots (1 + 2^{2\cdot n} a_n) \geq 2^n.$$

(2. magrebška olimpiada, 1985)

5. Naj bo $n \geq 2$ ter naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pozitivna realna števila, za katera velja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Dokaži, da je

$$\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n} + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

(1. balkanska olimpiada, 1984)

6. Vsi koeficienti kvadratnega polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$ so pozitivni in velja $a + b + c = 1$. Dokaži: Če za pozitivna realna števila $x_1, \ldots, x_n$ velja $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, tedaj velja tudi $f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \geq 1$.

(Sovjetska zveza, 1990)

7. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sqrt[n]{7} + \sqrt[n]{4} > 2\sqrt[n]{5}.$$

(Hrvatska, 1990)

8. Dokaži: Če za realna števila a, b, c velja $a + b + c = 6$, tedaj je $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

(Srbija, 1990)

9. Naj bodo x, y, z pozitivna realna števila, za katera velja $x + y + z = 1$. Dokaži, da je tedaj

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) \geq 64.$$

(Jugoslavija, 1989)

10. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila, za katera velja $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokaži, da je

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \cdots (4 + a_n) \geq 5^n.$$

(Jugoslavija, 1987)

11. Naj bodo x, y, z pozitivna realna števila, takšna da velja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokaži, da je $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \geq 8$.

(Jugoslavija, 1983)

12. Pri kateri vrednosti x ima funkcija

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + x}}}} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 - x}}}}$$

maksimum?

(Leningrajski GU, sprejemni izpit, 1982)

13. Naj bodo $a, x_1, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila in $n \geq 2$. Dokaži, da je

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}.$$

(Hrvatska, 1988)

14. Dokaži, da za poljubni nenegativni realni števili a in b velja

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

(Hrvatska, 1987)

15. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right]=\left[\sqrt{16n+20}\right].$$

($[x]$ pomeni največje celo število, ki ni večje od x; npr. $[5{\cdot}17] = 5$, $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-2{\cdot}1] = -3$)

("Mala olimpiada", 1990)

16. Dokaži neenakost

$$(1+\frac{1}{2^{51}})(1+\frac{1}{2^{52}})(1+\frac{1}{2^{53}})\cdots(1+\frac{1}{2^{100}})<1+\frac{1}{2^{49}}.$$

(Sovjetske republiške olimpiade, 1982)

17. Določi

$$\left[\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}\right],$$

kjer je [ ] funkcija iz 15. naloge.

(Iz revije "Matematika v škole")

18. Dokaži, da za poljubna pozitivna realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in za $n \geq 2$ velja

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a_{i+2}}{a_{i+1}+a_{i+2}}\geq 0,$$

če definiramo $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$.

("Matematika v škole")

19. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivna realna števila. Dokaži, da velja

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}\geq\frac{n}{n-1}.$$

20. Vsota pozitivnih števil $x_1, \ldots, x_n$ je enaka 1. Naj bo S največje izmed števil

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Določi najmanjšo vrednost za S. Pri katerih $x_1, \ldots, x_n$ jo doseže?

Želim vam veliko uspeha pri delu!

Uroš Milutinović