KONGRUI VEČKOTNIŠKIH ŠTEVIL

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11D09

Kongruum je tako naravno število N, za katerega obstajajo naravna števila x, y in z, za katera velja $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = N$. Pokazali bomo, da lahko pojem kongrua posplošimo, če kvadrate v definiciji ustrezno zamenjamo z večkotniškimi števili.

CONGRUA OF POLYGONAL NUMBERS

Congruum is a positive integer N, for which there exist positive integers x, y, and z such that $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = N$. We will show that the concept of congruum can be generalized by replacing squares in the definition by the corresponding polygonal numbers.

Uvod

Besedo *kongruum* je v matematiko vpeljal Leonardo iz Pise (1170–1250) v svoji knjigi *Liber quadratorum*, ki jo je dokončal leta 1225 in je prevedena tudi v angleščino. Njen prevod [2] je opremljen s številnimi opombami in komentarji. Latinska beseda *congruus* pomeni *soglasen*, *skladen*, *primeren*, *prikladen*. V *Liber quadratorum* obravnava Leonardo nekatere probleme, ki so povezani s kvadrati naravnih in racionalnih števil. Eden od teh je tudi *problem kongrua*, ki je bil v Leonardovem času že zelo star, saj je že antični matematik Diofant v 3. stoletju v svoji knjigi *Aritmetika* obravnaval podobne probleme, kasneje pa tudi perzijska matematika Al Hazin (900–971) in Al Karadži (953–1029). Po Leonardu so se s problemom spopadali še drugi, na primer Pierre de Fermat (1607–1665) in Leonhard Euler (1707–1783). Problem še do danes ni v celoti rešen.

Naravno število N je *kongruum*, če obstajajo naravna števila x, y in z, pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata relaciji

$$x^2 + N = y^2, \;\; y^2 + N = z^2. \tag{1}$$

Če iz zgornjih enačb izločimo N, dobimo enačbo $x^2 + z^2 = 2y^2$, iz katere sklepamo, da sta x in z iste parnosti.

Pri tem se poraja glavno vprašanje. Ali pri danem N naravna števila x, y in z, ki zadoščajo enačbama v (1), sploh obstajajo in kako jih učinkovito najti? Izkaže se, da ni vsako naravno število kongruum. Že Leonardo iz Pise je v [2] dokazal, da nobeno kvadratno število ni kongruum. Dokaz ni ravno preprost. Najdemo ga na primer v [3] pod iztočnico *Kongruenčna števila*. Slovenski avtorji si pri tem niso enotni: nekateri uporabljajo pridevnik *kongruenčen*, nekateri pa *kongruenten*.

Do kongruov hitro pridemo s pitagorejskimi trojicami (a, b, c), kjer so a, b in c naravna števila, $a < b$ in $a^2 + b^2 = c^2$. Števili a in b sta kateti, c pa hipotenuza ustreznega pravokotnega trikotnika. Uporabimo enakosti, ki sledita iz zadnje relacije:

$$(b-a)^2 + 2ab = c^2, \quad c^2 + 2ab = (b+a)^2. \tag{2}$$

Za $x = b - a, y = c, z = b + a$ in $N = 2ab$ sta izpolnjeni relaciji (1).

Na ta način dobimo vse kongrue. Če je namreč N kongruum, obstajajo naravna števila x, y, z, pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata enačbi (1). Trojica $(a, b, c) = ((z - x)/2, (z + x)/2, y)$ je pitagorejska, ker velja

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(z^2 + x^2) = \frac{1}{2}(y^2 + N + y^2 - N) = y^2 = c^2.$$

Za pitagorejsko trojico (a, b, c) pa očitno veljata enačbi (2).

Za najmanjšo pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ dobimo $x = 1, y = 5, z = 7$ in $N = 24$. Res veljata enakosti

$$1^2 + 24 = 5^2 \quad \text{in} \quad 5^2 + 24 = 7^2.$$

Pitagorejska trojica (a, b, c) je *primitivna*, če števila a, b in c nimajo skupnega faktorja. V primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je eno od števil a in b liho, eno sodo, število c pa je vedno liho. Primitivne pitagorejske trojice (a, b, c) generiramo z dvema naravnima številoma p in q s formulami

$$a = p^2 - q^2, \; b = 2pq, \; c = p^2 + q^2,$$

kjer sta si p in q tuji števili različnih parnosti ter $p > q$. Če se pri tem zgodi, da je $a > b$, števili a in b med seboj preprosto zamenjamo. Vsaka pitagorejska trojica je produkt neke primitivne z nekim naravnim številom (glej na primer [4]).

Hitro pa vidimo, da je za vsako naravno število λ število $\lambda^2 N$ kongruum, če je le N kongruum. Že Leonardo iz Pise pa je v [2] dokazal, da je število 24 najmanjši kongruum in da je vsak kongruum deljiv s 24. Slednje je ugotovil z obravnavo števila $N = 2ab$ v (2), ki ga je vzel v razstavljeni obliki $N = 4pq(p - q)(p + q)$.

Neskončno zaporedje kongruov se začne s

$$24, 96, 120, 216, 240, 336, 384, 480, 600, 720, 840, 864.$$

Kongrue dobimo s formulo $N = 2\lambda^2 ab$ z vstavljanjem katet a in b primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) in naravnimi števili λ. Kot smo že videli, je 24 kongruum, zato je kongruum tudi $96 = 2^2 \cdot 24$.

Primer 1. Pitagorejska trojica $(5, 12, 13)$ nam zaradi enakosti (2) da kongruum $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$, in sicer za $x = 7, y = 13$ in $z = 17$, kar nam prinese

$$7^2 + 120 = 13^2 \quad \text{in} \quad 13^2 + 120 = 17^2.$$

Omenimo še *kongruentna števila*. Naravno število M je *kongruentno*, če obstajajo pozitivna racionalna števila x, y in z, pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata relaciji

$$x^2 + M = y^2, \;\; y^2 + M = z^2.$$

Enakovredna definicija sloni na relacijah (2). Naravno število M je kongruentno, če obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino M. Kongruentna števila so v tesni zvezi z eliptičnimi krivuljami. Več o tem lahko preberemo na primer v [5].

Vsak kongruum je kongruentno število, vsako kongruentno število pa ni kongruum, pač pa je produkt nekega kongruuma s kvadratom nekega pozitivnega racionalnega števila. Neskončno zaporedje kongruentnih števil se začne s

$$5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28.$$

Kongruentna števila dobimo prav tako kot kongrue N, ki jih delimo z njihovimi največjimi možnimi kvadratnimi faktorji.

Primer 2. Pitagorejska trojica $(9, 40, 41)$ nam da kongruum $N = 2 \cdot 9 \cdot 40 = 720 = 12^2 \cdot 5$, zato je $M = 5$ kongruentno število. Za $x = 31, y = 41$ in $z = 49$ veljata po (2) enakosti

$$31^2 + 720 = 41^2 \quad \text{in} \quad 41^2 + 720 = 49^2.$$

Če ju delimo z 12^2, dobimo

$$\left(\frac{31}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{41}{12}\right)^2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

To je neposredni dokaz, da je 5 kongruentno število. Rezultat je poznal že Leonardo iz Pise in ga uporabil na matematičnem tekmovanju leta 1225 v prisotnosti cesarja Friderika II.

Večkotniška števila

Večkotniška (mnogokotniška, poligonalna) števila $V_n^{(k)}$ so povezana s pravilnimi k-kotniki in sestavljajo pri izbranem k neskončno številsko zaporedje, ko n teče po naravnih številih. Zato številom $V_n^{(k)}$ pravimo k-kotniška števila. Uvedemo jih kot n-te delne vsote aritmetičnega zaporedja s prvim členom 1 in diferenco $d = k - 2$ (glej na primer ([1, 3])). Kot je znano, je

n-ti člen takega zaporedja enak $1 + (n-1)(k-2)$. Vsota prvih n členov pa je enaka produktu aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov, torej

$$V_n^{(k)} = \frac{n}{2}(2 + (n-1)(k-2)). \tag{3}$$

V posebnih primerih dobimo za $k = 3$ trikotniška števila T_n, za $k = 4$ kvadratna Q_n in za $k = 5$ petkotniška P_n:

$$T_n = V_n^{(3)} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad Q_n = V_n^{(4)} = n^2, \quad P_n = V_n^{(5)} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Večkotniška števila $V_n^{(k)}$ za $n > 1$ *klasično* ponazorimo kot število točk v ogliščih in na stranicah $n-1$ pravilnih k-kotnikov v skupni ravnini. Pri tem njihove stranice naraščajo v aritmetičnem zaporedju. Vsi k-kotniki imajo skupno oglišče A, iz A izhajajoči stranici pa ležita na skupnih poltrakih s krajiščem v A. Oglišča mnogokotnikov označimo z debelejšo točko, nato na stranice znotraj kota med poltrakoma dodamo toliko takih točk, da bo število točk na vseh stranicah posameznih k-kotnikov enako. Število vseh točk take figure je $V_n^{(k)}$. Pri tem je $V_1^{(k)} = 1$ in $V_2^{(k)} = n$ za vsak $k \geq 3$. Na sliki 1 levo je predstavljeno četrto petkotniško število. Številke na sliki pomenijo, do kod je treba prešteti točke, da dobimo ustrezno petkotniško število. Prva štiri petkotniška števila so $1, 5, 12, 22$.

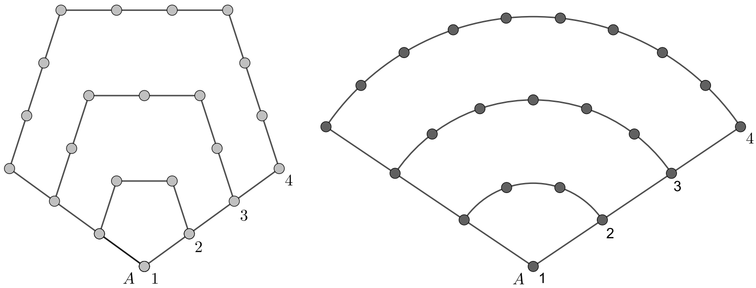
Večkotniška števila lahko ponazorimo tudi *pahljačasto*. Vzamemo poltraka s skupnim krajiščem A. Poltraka naj oklepata primerno velik kot. Nato v tem kotu med poltrakoma načrtamo krožne loke s središčem v A, njihove polmere pa izberemo v aritmetičnem zaporedju. Na prvi lok in na poltraka v enakih razdaljah nanesemo $1+(k-2)$ točk, na drugega $1+2(k-2)$, $\ldots$, na n-tega $1 + n(k-2)$ točk. Vseh točk, skupaj z A, na taki figuri je ravno $V_n^{(k)}$. Na sliki 1 desno je pahljačasto predstavljeno četrto petkotniško število.

Z večkotniškimi števili so se ukvarjali že pitagorejci, v 1. in 2. stoletju Nikomah iz Gerase, v 3. stoletju Diofant iz Aleksandrije, kasneje pa tudi Fermat, Euler, Lagrange, Cauchy in drugi.

V nadaljevanju članka uporabljamo pahljačasto predstavitev večkotniških števil, ki jo je za večje k laže izdelati z računalnikom kot klasično, v kateri uporabimo pravilne k-kotnike.

Kvadratna števila x^2, y^2 in z^2 nastopajo v (1), to je v definiciji kongrua. Sedaj pa v relacijah (1) nadomestimo kvadratna števila u^2 z večkotniškimi $V_u^{(k)}$ za $u \in \{x, y, z\}$ in $k \geq 3$, pri čemer so x, y in z naravna števila, za katera je $x < y < z$. Število N pa nadomestimo z nekim naravnim številom $N^{(k)}$. Dobimo relaciji

$$V_x^{(k)} + N^{(k)} = V_y^{(k)}, \quad V_y^{(k)} + N^{(k)} = V_z^{(k)}. \tag{4}$$



Slika 1. Klasična in pahljačasta predstavitev števila $P_4 = 22$.

Če taka naravna števila x, y, z in $N^{(k)}$ obstajajo, bomo število $N^{(k)}$ imenovali k-*kongruum*. Običajni kongrui so 4-kongrui, ki smo jih definirali v Uvodu. Videli smo, da le-ti obstajajo. Zastavlja se seveda vprašanje, ali obstajajo k-kongrui za vse $k \geq 3$. Za $3 \leq k \leq 12$ se da ob pomoči računalnika neposredno ugotoviti, da obstajajo.

Predpostavimo, da naravna števila x, y, z in $N^{(k)}$ v (4) obstajajo. Potem se relaciji (4) z upoštevanjem formule (3) izražata takole:

$$\frac{x}{2}(2 + (k-2)(x-1)) + N^{(k)} = \frac{y}{2}(2 + (k-2)(y-1)),$$

$$\frac{y}{2}(2 + (k-2)(y-1)) + N^{(k)} = \frac{z}{2}(2 + (k-2)(z-1)).$$

Če ju preuredimo in odpravimo ulomke, dobimo enakovredni relaciji

$$(2(k-2)x - (k-4))^2 + 8(k-2)N^{(k)} = (2(k-2)y - (k-4))^2,$$

$$(2(k-2)y - (k-4))^2 + 8(k-2)N^{(k)} = (2(k-2)z - (k-4))^2.$$

Ker je $k \geq 3$ in $x \geq 1$, so števila

$$X = 2(k-2)x - (k-4), \quad Y = 2(k-2)y - (k-4), \quad Z = 2(k-2)z - (k-4)$$

in

$$M^{(k)} = 8(k-2)N^{(k)}$$

naravna in zadoščajo sistemu diofantskih enačb

$$X^2 + M^{(k)} = Y^2, \quad Y^2 + M^{(k)} = Z^2.$$

Pri tem je $X < Y < Z$ in $M^{(k)}$ običajni kongruum. Če izločimo $M^{(k)}$ iz zgornjih enačb, dobimo diofantsko enačbo

$$X^2 + Z^2 = 2Y^2.$$

Enačba ima trivialno rešitev $X = Y = Z = n$ za vsako celo število n. Ta ne pride v poštev. Vemo pa tudi, da morata biti X in Z iste parnosti. Enačbo pomnožimo na obeh straneh z 2 in jo zapišemo v obliki

$$(Z - X)^2 + (Z + X)^2 = (2Y)^2.$$

To pa pomeni, da morajo števila $Z - X, Z + X, 2Y$ sestavljati pitagorejsko trojico. Zato obstaja primitivna pitagorejska trojica (a, b, c), kjer je $a < b$ in $a^2 + b^2 = c^2$, in naravno število λ, tako da veljajo zveze

$$Z - X = \lambda a, \;\; Z + X = \lambda b, \;\; 2Y = \lambda c.$$

Ker je v primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) število c vedno liho število, mora biti λ sodo število: $\lambda = 2\mu$. Število μ je naravno. Potemtakem lahko zapišemo

$$Z - X = 2\mu a, \;\; Z + X = 2\mu b, \;\; Y = \mu c.$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo X in Z. Zapišimo po vrsti:

$$X = \mu(b - a), \;\; Y = \mu c, \;\; Z = \mu(b + a).$$

To so naravna števila. Ustrezni kongruum je

$$M^{(k)} = Y^2 - X^2 = \mu^2(c^2 - (b - a)^2) = 2\mu^2 ab,$$

ki je tudi naravno število. Nazadnje imamo

$$x = \frac{\mu(b - a) + k - 4}{2(k - 2)}, \;\; y = \frac{\mu c + k - 4}{2(k - 2)}, \;\; z = \frac{\mu(b + a) + k - 4}{2(k - 2)}. \qquad (5)$$

Tu pa nastane težava, ker števila x, y in z niso vedno naravna.

Da dobimo rešitev problema, je treba izbrati primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ tako, da bodo x, y in z naravna števila. Pripomnimo, da so $b - a, b + a$ in c liha števila. Za k-kongruum $N^{(k)}$ dobimo preprost izraz

$$N^{(k)} = \frac{\mu^2 ab}{4(k - 2)}. \qquad (6)$$

Število $M^{(k)} = 8(k - 2)N^{(k)} = 2\mu^2 ab$ je običajni kongruum.

Pogoj, da je $8(k - 2)N$ kongruum, je zato potreben pogoj, da je naravno število N k-kongruum. Pogoj pa ni zadosten. Število 12 ni 3-kongruum, čeprav je $8 \cdot 12 = 96$ kongruum, saj je $2^2 + 96 = 10^2$ in $10^2 + 96 = 14^2$. Če bi število 12 bilo 3-kongruum, bi morala veljati relacija (6), to je $\mu^2 ab/4 = 12$ oziroma $\mu^2 = 48/(ab)$, pri čemer je μ naravno število, a in b pa tuji si kateti primitivnega pitagorejskega trikotnika. To pomeni $a \geq 3, b \geq 4$ in $ab \leq 48$. V poštev pride samo $a = 3$ in $b = 4$, kar nam da $\mu = 2$ in po (5) necele x, y in z. Zato 12 ni 3-kongruum.

Primeri

Iskanja k-kongruov si ne moremo zamisliti brez uporabe ustreznih računalniških programov. Napisati je treba program, ki nam bo iskal pri danem k naravna števila x, y in z po zgoraj razvitih formulah. Generiranje primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) s parametroma p in q ne dela težav. V program vključimo tudi parameter μ. Vse tri parametre spreminjamo do neke, morda precej visoke vrednosti, in prej ali slej nam le uspe najti naravna števila x, y in z. To je sicer groba metoda, ki pa nam za manjše k le da rezultate. Oglejmo si nekaj izbranih primerov.

1. Za trikotniška števila T_n je 3-kongruum $T = N^{(3)} = \mu^2 ab/4$ in pri naravnih številih x, y, z, kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$T_x + T = T_y, \;\; T_y + T = T_z.$$

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

$$x = \frac{\mu(b-a)-1}{2}, \;\; y = \frac{\mu c - 1}{2}, \;\; z = \frac{\mu(b+a)-1}{2},$$

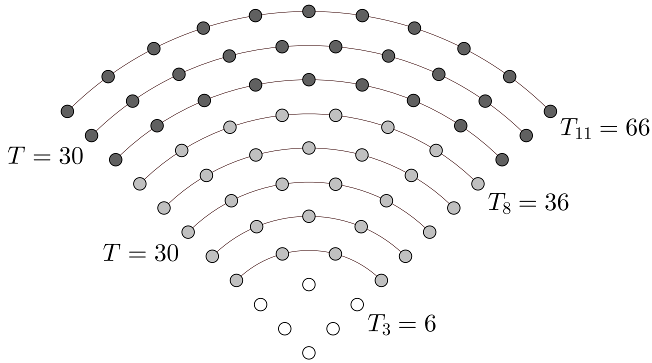
ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti liho število. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (8, 15, 17)$ in $\mu = 1$ dobimo $x = 3, y = 8, z = 11$ in $T = 30$. Število $8T = 240$ je običajni kongruum. Grafično ponazoritev predstavlja slika 2. Slika tudi ponazarja, kako bi v grškem antičnem gledališču lahko posedli 30 v rdeče in 30 v modro oblečenih oseb, pri čemer število sedežev z višino narašča za 1, pri tem pa v rdeče oblečene osebe polno zasedajo nekaj zaporednih vrst, takoj za njimi pa v modro oblečene osebe polno zasedajo nekaj nadaljnjih zaporednih vrst.

Do takega problema pridemo tudi, če v zaporedju naravnih števil iščemo števila

$$x+1, x+2, \ldots, y; y+1, y+2, \ldots, z,$$

za katera velja

$$(x+1) + (x+2) + \cdots + y = (y+1) + (y+2) + \cdots + z.$$



Slika 2. $T_3 + 30 = T_8, \;\; T_8 + 30 = T_{11}$.

Najmanjši tak primer je $1, 2; 3$ za $x = 0, y = 2$ in $z = 3$, ker je $1 + 2 = 3$. Ta izjema je v skladu s 3-kongruum, če privzamemo, da je $T_0 = 0$.

Za pitagorejsko trojico (a, b, c), v kateri je $b - a = 1$, je lahko x katerokoli naravno število ali 0. Za $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ vzamemo $\mu = 2x + 1$ in dobimo $y = 5x + 2$ in $z = 7x + 3$. Ustrezni 3-kongruum je $T = 3(2x + 1)^2$. Prav tako z $(a, b, c) = (20, 21, 29)$ za $\mu = 2x + 1$ dobimo 3-kongruum $T = 105(2x + 1)^2$ in $y = 29x + 14$ ter $z = 41x + 20$. Števila $8T$ so, kot smo že videli, običajni kongrui. To se pravi, da so števila $24(2x + 1)^2$ in $840(2x + 1)^2$ običajni kongrui.

Opazimo, da je v teh primerh 3-kongruum T deljiv s 3. Ni pa težko dokazati, da je vsak 3-kongruum deljiv s 3. Neskončno zaporedje 3-kongruov se začne s $3, 15, 27, 30, 42, 75, 90, 105, 135, 147, 165, 243, 252$.

2. Za kvadratna števila Q_n je 4-kongruum $Q = N^{(4)} = \mu^2 ab/8$ in pri naravnih številih x, y, z, kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$Q_x + Q = Q_y, \;\; Q_y + Q = Q_z.$$

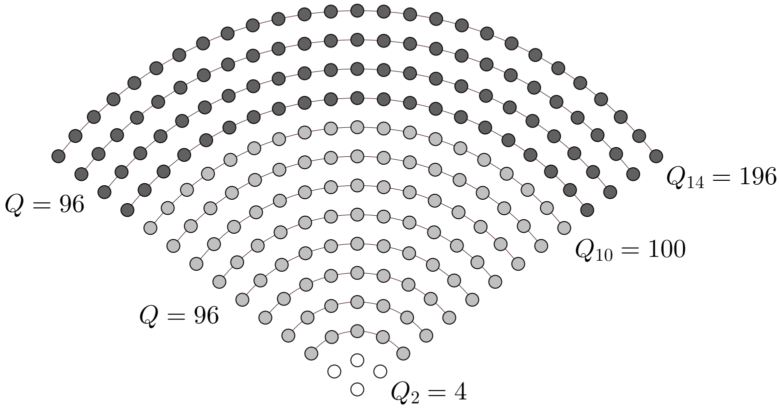
Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

$$x = \frac{\mu(b - a)}{4}, \;\; y = \frac{\mu c}{4}, \;\; z = \frac{\mu(b + a)}{4},$$

ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti deljiv s 4. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ in $\mu = 8$ dobimo $x = 2, y = 10, z = 14$ in $Q = 96$. Grafično ponazoritev predstavlja slika 3.

3. Za petkotniška ali pentagonalna števila P_n je 5-kongruum $P = N^{(5)} = \mu^2 ab/12$ in pri naravnih številih x, y, z, kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$P_x + P = P_y, \;\; P_y + P = P_z.$$

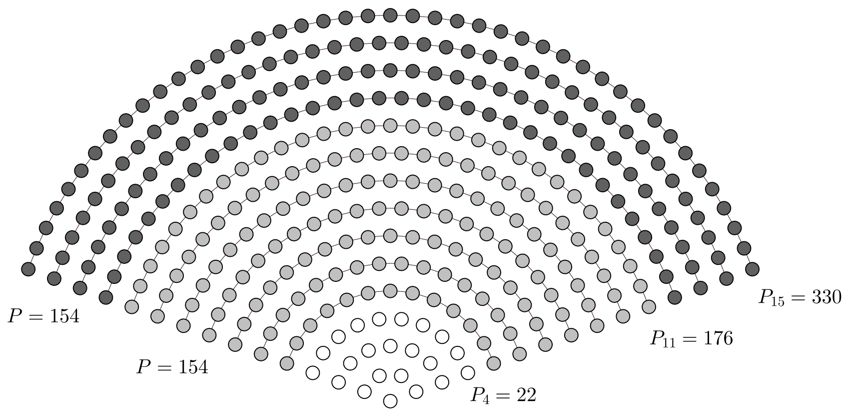


Slika 3. $Q_2 + 96 = Q_{10}, \ \ Q_{10} + 96 = Q_{14}$.

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

$$x = \frac{\mu(b-a)+1}{6}, \ \ y = \frac{\mu c + 1}{6}, \ \ z = \frac{\mu(b+a)+1}{6},$$

ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti liho število. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (33, 56, 65)$ in $\mu = 1$ dobimo $x = 4, y = 11, z = 15$ in $P = 154$, ki je najmanjši 5-kongruum. Običajni kongruum je število $24P = 3696$. Grafično ponazoritev predstavlja slika 4.



Slika 4. $P_4 + 154 = P_{11}, \ \ P_{11} + 154 = P_{15}$.

4. Tako lahko nadaljujemo s kongrui v nedogled. Za primere vzemimo šestkotniška ali heksagonalna števila $V_n^{(6)} = n(2n-1)$, sedemkotniška ali heptagonalna števila $V_n^{(7)} = n(5n-3)/2$, osemkotniška ali oktagonalna števila $V_n^{(8)} = n(3n-2)$, devetkotniška ali eneagonalna števila $V_n^{(9)} = n(7n-5)/2$, desetkotniška ali dekagonalna števila $V_n^{(10)} = n(4n-3)$, enajstkotniška ali hendekagonalna števila $V_n^{(11)} = n(9n-7)/2$ in dvanajstkotniška ali dodekagonalna števila $V_n^{(12)} = n(5n-4)$. V tabeli navajamo po en primer za $4 \leq k \leq 12$. Dobljeni so ob pomoči računalnika. Več primerov bi zahtevalo veliko daljši članek.

k	(a,b,c)	(x,y,z)	μ	$N^{(k)}$
4	(3,4,5)	(1,5,7)	4	24
5	(33,56,65)	(4,11,15)	1	154
6	(20,21,29)	(1,22,31)	6	945
7	(65,72,97)	(1,10,14)	1	234
8	(33,56,65)	(8,22,30)	4	1232
9	(133,156,205)	(2,15,21)	1	741
10	(88,105,137)	(11,86,121)	10	28875
11	(279,440,521)	(63,203,280)	7	167090
12	(95,168,193)	(15,39,53)	4	6384

Za konec

Problemi v zvezi s k-kongrui so približno enaki kot s klasičnimi kongrui. Ali obstajajo k-kongrui za vsa naravna števila od 3 naprej? Katera števila so k-kongrui? Kako jih učinkovito najti? Kako poiskati ustrezna števila x, y in z? Ali imajo k-kongrui neko uporabnost?

Za najvztrajnejše pa še splošna naloga. Za naraščajoče aritmetično zaporedje $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ z diferenco d, kjer so a_k naravna števila, izdelajte metodo za iskanje indeksov x, y in z $(x < y < z)$, za katere velja enakost

$$a_{x+1} + a_{x+2} + \cdots + a_y = a_{y+1} + a_{y+2} + \cdots + a_z.$$

LITERATURA

[1] E. Deza in M. Deza, *Figurate numbers*, World Scientific, Hackensack (NJ) 2012.

[2] L. P. Fibonacci, *The book of squares*, Academic Press, Boston in drugje 1987. Prevod L. E. Sigler.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.

[4] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

[5] I. Vidav, *Eliptične krivulje in eliptične funkcije*, DMFA – založništvo, Ljubljana 1991.