Jahresbericht

des

k. k.

STAATSGYMNASIUMS

in

Rudolfswert

für das Schuljahr 1913/14.

INHALT:

Eine allgemeine Umkehrungsreihe und ihre Umgebung nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades.
Von Professor Michael Markič.

Schulnachrichten. *Vom Direktor.*

Rudolfswert.

Verlag der Lehranstalt. — Druck von J. Krajec' Nachfg.

VERZEICHNIS

der in den Jahresberichten des Rudolfswerter Gymnasiums erschienenen Abhandlungen.

Fortsetzung s. Umschlag Seite 3.

Jahresbericht

des

K. K. STAATSGYMNASIUMS

in

Rudolfswert

für das Schuljahr 1913/14.

INHALT:

Eine allgemeine Umkehrungsreihe und ihre Umgebung nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades. *Von Professor Michael Markič.*

Schulnachrichten. *Vom Direktor.*

Rudolfswert.

Verlag der Lehranstalt. — Druck von J. Krajec' Nachfg.

Druckfehler.

Seite	Zeile	Lies:
3	13.	der Kombinatorik;
3	8. u.	$f(x) = 0$
5	4. u.	$\left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)^4} +\right.$
7	4.	$= \left[\frac{y}{p}\right],$
10	12.	$= f_1^3 \frac{d}{dx}\frac{1}{f_1^3} f_1^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{f_1} \frac{d}{dx}\frac{1}{f_1} =$
11	16. u.	von $f_1^{-s'}$.
11	5. u.	$= K f_3^2 f_2 =$
11	2. u.	$-8.35 =$
12	8.	Es gibt $\frac{1}{2}(2n-1-1)$ solcher . . .
17	5.	$= (-1)^r (s-1) \cdot \frac{(s-1)\nu . n}{\alpha!\beta!\ldots\nu!\, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu (s-1)}$
17	14. u.	$= K f_{n-1} f_2 \cdot \frac{n+2}{n}$.
24	6. u.	$\ldots \begin{Bmatrix} s - pr + (p-1)r \\ r \end{Bmatrix}_p$ — — —
26	18. u.	$H_1 [n]_p = V_0 [\mathbf{n-1}]_p +$
29	11. u.	$\begin{Bmatrix} s-p \\ r-1 \end{Bmatrix}_{p,q} + \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p+1,q}$
37	4.	$= r^{m'}(2\cos^2\alpha - 1) = 2r^{m'}\cos^2\alpha - r^{m'}$.
39	2.	$x = \sqrt[n]{-(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n)}$
40	15.	von $f, f_1, f_2 \ldots$
40	16.	$g_1, g_2, \ldots$
40	13. u.	$x = h + l\left(1 - \frac{D_1}{D_0} f - \frac{D_2}{D_0} f^2 - \ldots\right)$. — — — — —
42	14.	durch $(-1)^{r-1}$ bestimmt.
43	7. u.	resumieren.

Eine allgemeine Umkehrungsreihe u. ihre Umgebung

nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades.

Von Professor Michael Markič.

Alle Sätze und Formeln, die meines Wissens neu sein dürften, habe ich ohne Rücksicht auf den jeweiligen Stoff mit fortlaufenden Zahlen bezeichnet. Einiges wird wohl dem Inhalte nach, anderes in dieser Form und ein drittes vielleicht nur in dieser Verbindung neu sein. Die hauptsächlichsten Punkte der vorliegenden Abhandlung möchte ich gleich hier hervorheben: es sind das die Umkehrungsreihe selbst, dann aber auch ihre Umgebung d. h. die Nachbargebiete, speziell die direkte Darstellung der in der Umkehrungsreihe vorkommenden Koeffizienten und die damit zusammenhängende Erweiterung des Kombinatorik; sodann die „Zerfällungszahlen" (auf zahlentheoretischem Gebiete) und einige „funktionelle" Zahlen. Ich will aber mit dem Zwecke, Neues zu bringen, noch einen zweiten, den didaktischen, verbinden. Das hat einige kurze Erklärungen notwendig gemacht; auch sonst mußte sich die Darstellungsweise diesem Nebenzwecke anpassen.

I.

Die Umkehrungsreihe. Eine Gleichung mit e i n e r Unbekannten wird Bestimmungsgleichung genannt, da der Wert der Unbekannten aus den Konstanten der Gleichung zu bestimmen ist. Eine Gleichung mit 2 Unbekannten wäre füglich eine Beziehungsgleichung zu nennen, da darin die Werte der beiden Unbekannten aufeinander bezogen sind.

Ist nun ganz allgemein eine Bestimmungsgleichung $f(y) = 0$ gegeben, welche aus der Beziehungsgleichung $f(x) = y$ dadurch hervorgeht, daß man $y = 0$ setzt, so ist dadurch natürlich die Funktion f bekannt. Die entsprechende umgekehrte Funktion möge φ heißen, so das $\varphi(y) = x$, resp. $\varphi(0) = x$, da $y = 0$ ist.

Ich stelle mir nun zur Aufgabe, die unbekannte Funktion φ und ihre Ableitungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots$ durch die bekannte Funktion f und ihre Ableitungen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n, \ldots$ auszudrücken. Nach Taylor ist bekanntlich

$\varphi(y+u) = \varphi(y) + u \cdot \varphi_1(y) + \frac{u^2}{2!}\varphi_2(y) + \frac{u^3}{3!}\varphi_3(y) + \ldots \frac{u^n}{n!}\varphi_n(y) + \ldots$ in infinitum.

Ich setze darin $y = k$ und $u = -k$; dann geht die Reihe über in

$\varphi(0) = \varphi(k) - k\varphi_1(k) + \frac{k^2}{2!}\varphi_2(k) - \frac{k^3}{3!}\varphi_3(k) + \ldots \frac{(-k)^n}{n!}\varphi_n(k) + \ldots$ in inf.

Nun differenziere ich die Gleichungen $f(x) = y$ und $\varphi(y) = x$. Man erhält: $f_1(x)\,dx = dy$; $\frac{dy}{dx} = f_1(x)$. Ebenso $\varphi_1(y)\,dy = dx$; $\frac{dx}{dy} = \varphi_1(y)$.

$\varphi_1(y) = \frac{1}{f_1(x)}$. Die Differentiation der letztern Gleichung ergibt:

$\varphi_2(y)\,dy = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^2}\,dx$; also $\varphi_2(y) = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^2} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^3}$.

Von nun an lassen wir, um Raum zu ersparen, die Argumente der Funktionen weg, so daß man sich zu den φ-Funktionen ein y und zu den f-Funktionen ein x hinzuzudenken hat. Fortgesetzte Differentiation liefert dann nach den entsprechenden Reduzierungen und Abkürzungen:

$$\varphi_3 = \frac{-f_3 f_1^3 + 3 f_2^2 f_1^2}{f_1^7} = \frac{-f_3}{f_1^4} + \frac{3 f_2^2}{f_1^5};$$

$$\varphi_4 = \frac{-f_4}{f_1^5} + \frac{10 f_3 f_2}{f_1^6} - \frac{15 f_2^3}{f_1^7};$$

$$\varphi_5 = \frac{-f_5}{f_1^6} + \frac{15 f_4 f_2 + 10 f_3^2}{f_1^7} - \frac{105 f_3 f_2^2}{f_1^8} + \frac{105 f_2^4}{f_1^9};$$

$$\varphi_6 = \frac{-f_6}{f_1^7} + \frac{21 f_5 f_2 + 35 f_4 f_3}{f_1^8} - \frac{210 f_4 f_2^2 + 280 f_3^2 f_2}{f_1^9} + \frac{1260 f_3 f_2^3}{f_1^{10}} - \frac{945 f_2^5}{f_1^{11}}$$

$$\varphi_7 = \frac{-f_7}{f_1^8} + \frac{28 f_6 f_2 + 56 f_5 f_3 + 35 f_4^2}{f_1^9} - \frac{378 f_5 f_2^2 + 1260 f_4 f_3 f_2 + 280 f_3^3}{f_1^{10}} + \frac{3150 f_4 f_2^3 + 6300 f_3^2 f_2^2}{f_1^{11}} - \frac{17325 f_3 f_2^4}{f_1^{12}} + \frac{10395 f_2^6}{f_1^{13}}.$$

Ich füge hier noch das Glied φ_8 hinzu, welches nicht mehr nach der vorstehenden Methode, sondern direkt nach dem im folgenden zu entwickelnden Bildungsgesetze gefunden wurde:

$$\varphi_8 = \frac{-f_8}{f_1^9} + \frac{36 f_7 f_2 + 84 f_6 f_3 + 126 f_5 f_4}{f_1^{10}}$$

$$-\frac{630 f_6 f_2^2+2520 f_5 f_3 f_2+2100 f_4 f_3^2+1575 f_4^2 f_2}{f_1^{11}}$$

$$+\frac{6930 f_5 f_2^3+34650 f_4 f_3 f_2^2+15400 f_3^3 f_2}{f_1^{12}}-\frac{51975 f_4 f_2^4+138600 f_3^2 f_2^3}{f_1^{13}}$$

$$+\frac{270270 f_3 f_2^5}{f_1^{14}}-\frac{135135 f_2^7}{f_1^{15}}, \text{ u. s. f.}$$

Wählt man nun einen beliebigen Wert für x, etwa h, so erhält man aus der bekannten Funktion f einen Wert für y, etwa k, so daß $f(h)=k$; natürlich gilt auch umgekehrt $\varphi(k)=h$.

Ich substituire nun in die obige Reihe für $\varphi(0)$ die im vorstehenden für die φ-Funktionen gefundenen Werte und ich erhalte die allgemeine Umkehrungsreihe:

$$\varphi(0)=x=h-f(h)\cdot\frac{1}{f_1(h)}+\frac{f(h)^2}{2!}\cdot\frac{-f_2(h)}{f_1(h)^3}$$

$$-\frac{f(h)^3}{3!}\cdot\left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)^4}+\frac{3 f_2(h)^2}{f_1(h)^5}\right)$$

$$+\frac{f(h)^4}{4!}\cdot\left(\frac{-f_4(h)}{f_1(h)^5}+\frac{10 f_3(h) f_2(h)}{f_1(h)^6}-\frac{15 f_2(h)^3}{f_1(h)^7}\right)-\ldots \text{ in inf.}$$

$$— — — — — (1)$$

Nun ist die rechte Seite von x durch lauter bekannte Funktionen und eine willkürliche Konstante h ausgedrückt.

Ersetzt man in der Taylor'schen Reihe y durch $+k$ und u durch $y-k$, so geht die Reihe über in

$$\varphi(k+y-k)=\varphi(y)=\varphi(k)+(y-k)\varphi_1(k)+\frac{(y-k)^2}{2!}\varphi_2(k)$$

$$+\frac{(y-k)^3}{3!}\varphi_3(k)+\ldots$$

Wird $k=0$ gesetzt, so entsteht daraus die Mac-Laurin'sche Reihe.

Die Substitutionen $\varphi(k)=h$, $k=f(h)$ und die Ersetzung der φ-Funktionen durch die f-Funktionen verwandeln die vorstehende Reihe in die zweite Form der allgemeinen Umkehrungsreihe:

$$\varphi(y)=x=h+[y-f(h)]\cdot\frac{1}{f_1(h)}+\frac{[y-f(h)]^2}{2!}\cdot\frac{-f_2(h)}{f_1(h)^3}+$$

$$+\frac{[y-f(h)]^3}{3!}\cdot\left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)_4}+\frac{3 f_2(h)^2}{f_1(h)^5}\right)+\ldots \text{ in infin. — — — (2)}$$

Man braucht nur $y=0$ zu setzen, um aus (2) wieder (1) zu erhalten.

Der Reihe (1) kann man eine einfachere Form geben, wenn man mit Fortlassung des Argumentes h für $\frac{f}{f_1}=f_0, \frac{f_2}{f_1}=f_{\text{II}}, \frac{f_3}{f_1}=f_{\text{III}} \ldots \frac{f_n}{f_1}=f_N$

schreibt; also: $x = h - f_0 + \frac{f_0^2}{2!}(-f_{II}) - \frac{f_0^3}{3!}(-f_{III} + 3f_{II}^2)$
$$+ \frac{f_0^4}{4!}(-f_{IV} + 10 f_{III} f_{II} - 15 f_{II}^3) - \ldots,$$ wobei man die eingeklammerten Ausdrücke noch kürzer mit $\varphi_{II}, \varphi_{III}, \varphi_{IV} \ldots \varphi_N$ bezeichnen kann.

f_0 ist offenbar die Subtangente der Funktion f für den Wert h. Es handelt sich nur noch darum, h so zu wählen, daß die Reihen (1) und (2) konvergent werden.

Die Konvergenzkonstante h. Die Konstante h scheint ein notwendiger Bestandteil einer allgemeinen unendlichen Reihe zu sein und ist mit ihr so enge verknüpft wie die Begriffe Konvergenz und Divergenz. Wenn eine Reihe diese Konstante nicht enthält, so hat man sich wohl zu denken, daß h darin einen speziellen Wert angenommen hat. Für ein bestimmtes y ist die Konstante h zwischen gewisse Grenzen eingeschlossen, sonst aber willkürlich und kann innerhalb dieser Grenzen an dem Endergebnis der Reihe nichts ändern, sie muß sich also im Laufe der fortschreitenden unendlichen Reihe, wenn auch nur erst im letzten Gliede, aufheben. Einen Einfluß übt sie nur auf die schnellere oder langsamere Konvergenz der Reihe aus; eine Größe mit solchen Eigenschaften könnte man füglich Konvergenzkonstante nennen. Die Rolle einer solchen Konvergenzkonstanten spielt in der allgemeinen Mac-Laurin'schen Reihe die Größe k; in der speziellen Mac-Laurin'schen Reihe ist $k = 0$ angenommen. Für ein bestimmtes h ist dagegen y, das Argument der Funktion, wenn die Reihe konvergieren soll, an die Bedingung geknüpft, daß es gewisse Grenzen, etwa $l_1 < y < l_2$, nicht überschreite, mit dem Unterschiede jedoch, daß sich jetzt im allgemeinen mit der Änderung des Argumentes auch der Wert der Funktion und der Reihe ändert. Überschreitet es diese Grenzen, so kann die Funktion einen endlichen Wert, die diese Funktion ausdrückende Reihe dagegen einen unendlichen Wert annehmen. Die beiden Ausdrücke können also in unendlich vielen Werten, aber doch nicht immer in allen übereinstimmen. Es besteht also zwischen ihnen im allgemeinen keine volle Gleichheit. Man sollte daher zwischen ihnen anstatt des Gleichheitszeichens $=$, des Symbols der vollen Äquivalenz, für diesen Fall ein anderes Zeichen, etwa $\overset{l_2}{\underset{l_1}{=}}$ anwenden. Es fragt sich nun: Ist es nicht möglich, h durch eine Funktion $\Lambda(y)$ zu ersetzen, welche die bedingte und begrenzte Gleichheit in eine volle verwandelte? (Jedoch dürfte diese Gleichheit auch nicht eine tautologische sein, wie man beispielsweise aus dem allgemeinen Mac-Laurin, wenn man k durch y ersetzt, $\varphi(y) = \varphi(y)$ erhält). Es wäre dann die besagte Bedingung, die gewöhnlich extra durch

2 Ungleichungen resp. Gleichungen ausgedrückt erscheint, in die Reihe selbst verlegt. So könnte z. B. für $k = \Lambda(y) = \left(\frac{y}{p}\right)$ oder $\left(\frac{y}{p}\right) q$ u. ä., wenn $\left(\frac{y}{p}\right)$ den ganzzahligen Quotienten und $\left[\frac{y}{p}\right]$ den Rest der Division $\frac{y}{p}$ bedeutet, so daß also $\frac{y}{p} = \left(\frac{y}{p}\right) + \left[\frac{y}{p}\right]$, der Ausdruck $y - \left(\frac{y}{p}\right) = \left[\frac{y}{p}\right]$ nie die Grenze p überschreiten.

Doch wir können hier die allgemeinen Bedingungen der Konvergenz nicht weiter erörtern; das würde eine eigene Abhandlung erfordern. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, daß bei allen in der vorliegenden Abhandlung behandelten Aufgaben, speziell bei der Auflösung der algebraischen Gleichungen beliebigen Grades, h stets so gewählt werden kann, daß es die Konvergenz der Reihe bewirkt. Zum allgemeinen Konvergenzproblem nur noch einige Bemerkungen!

Vorausgeschickt sei noch die Vorbemerkung, daß wir über die Größen x, y, h, k keine spezielle Annahme gemacht haben, daß also das Konvergenzgebiet eine Strecke oder eine Fläche sein kann, je nachdem wir für die erwähnten Größen nur reelle oder auch komplexe Werte zulassen.

Bemerkung 1. Es muß ein Maß für die geringere oder größere Schnelligkeit der Konvergenz geben, das wir mit v bezeichnen wollen. $\mathfrak{H}(v)$ soll das Konvergenzgebiet für v, das bei bestimmtem y, etwa $y = 0$, nur mit h im Abhängigkeitsverhältnis steht, bezeichnen, so das also $h = \mathfrak{H}(v)$ ist. Ist nun v ein Maximum $= M$, so wird das Konvergenzgebiet im allgemeinen ein Punkt sein und man könnte ihn Konvergenzmittelpunkt nennen. Ist v ein Minimum $= \mu$, so bedeutet $\mathfrak{H}(v)$ offenbar den Rand des Konvergenzgebietes. Zwischenwerte bestimmen gewisse Linien (resp. Punkte) zwischen diesem Rande und dem Mittelpunkt. Für $v = M$ ist h leicht ausfindig zu machen. Bezeichnet man nämlich die Reihe (2) mit $R(y, h)$, die Reihe (1) mit $R(0, h)$ oder kürzer mit einem Argument $R(h)$, die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ mit $x_1, x_2, \ldots$ dementsprechend die von $f_1(x) = 0$ mit $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots$ die von $f_2(x) = 0$ mit $x_{21}, x_{22}, x_{23} \ldots$, so ist wegen $f(x_1) = 0$ $R(\mathfrak{H}(M)) = R(x_1) = h = x_1$, ebenso $R(x_2) = h = x_2$ u. s. w., d. h. die $R(h)$ reduziert sich in diesen n Fällen auf ein Glied, nämlich h. Schneller kann eine Reihe nicht konvergieren. Daraus entnehmen wir den Satz: Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bilden die Konvergenzmittelpunkte. Dies gilt auch für den Fall, daß 2 oder mehrere Wurzeln gleich sind. Sind 2 Wurzeln einander gleich, etwa $x_1 = x_2$, so ist, wie man sich durch Differentiation von $f(x)$ in der Form $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots = 0$ überzeugen kann, auch $f_1(x_1) = 0$. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß bei 3 gleichen Wurzeln $x_1 = x_2 = x_3$

nicht nur $f(x_1) = 0$, $f_1(x_1) = 0$, sondern auch $f_2(x_1) = 0$ wird. Bei 4 gleichen Wurzeln kommt dazu noch $f_3(x_1) = 0$ u. s. w. Da die Reihe $R(h)$ nur aus den Quotienten $f_0, f_{II}, f_{III}, \ldots f_N$ zusammengesetzt ist und keine Ableitung von f in einer andern Verbindung enthält, so ist leicht einzusehen, daß bei 2 gleichen Wurzeln $f_0 = \frac{0}{0}$, f_{II} und die übrigen Quotienten $= \infty$ werden. Bei 3 gleichen Wurzeln wird $f_0 = \frac{0}{0}$, $f_{II} = \frac{0}{0}$, die übrigen Quotienten sind $= \infty$. u. s. f. Bei den Quotienten, die $= \frac{0}{0}$ sind, kann Zähler und Nenner differenziert werden; dadurch erhält man für $f_0 = \frac{f_1}{f_2}$, für $f_{II} = \frac{f_3}{f_2}$ u. s. f. Ist beispielsweise $f = 0, f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 \lesseqgtr 0$ u. s. w., so wird $f_0 = \frac{f_1}{f_2}$, also wiederum $= \frac{0}{0}$ und Zähler und Nenner können nochmals differenziert werden; f_0 wird dadurch zu $\frac{f_2}{f_3} = 0$, f_{II} und die übrigen Quotienten sind $= \infty$. Nun ist der Exponent von f_0 in jedem Gliede um 1 größer als der höchste Exponent in dem dazu gehörigen Polynom. Der Satz $\mathfrak{H}(M) = R(x_1) = x_1$ gilt also auch für den Fall, daß x_1 einer oder mehreren andern Wurzeln gleich ist.

Bemerkung 2. A priori können wir annehmen, daß die n um die Wurzeln herum sich ausbreitenden Konvergenzgebiete voneinander getrennt sind. Denn würden sich 2 oder mehrere von ihnen überdecken, so wäre nicht einzusehen, warum Werte des überdeckten Gebietes, da eine konvergente Reihe eindeutig ist und nicht zwischen 2 oder mehreren Werten schwanken kann, die eine und nicht auch die andere Wurzel liefern sollte. Berühren sich 2 Gebiete, so kann auch die Berührungslinie nicht 2 Gebieten zugleich angehören.

Bemerkung 3. Für h darf keine der Wurzeln von $f_1(x) = 0$ eingesetzt werden, wenn nicht auch f durch dieselben annuliert wird; f_0 würde dadurch ∞ werden.

Das allgemeine Glied φ_n. Die erste Rekursionsformel zur Bestimmung der Koeffizienten. Für die durch fortgesetzte Differentiation gefundenen Ausdrücke für φ_1 bis φ_7 gelten, wie man sich leicht überzeugen kann, folgende Sätze. Es bietet bei einer aufmerksameren Verfolgung des Rechnungsganges keine Schwierigkeiten, den Geltungsbereich der Sätze auch auf φ_8, φ_9 u. s. w., allgemein auf φ_n auszudehnen.

Satz 1. Jedes φ_n, $(n = 1, 2, \ldots 7)$, besteht aus einer Anzahl von Brüchen, deren Nenner von f_1^{n+1} bis f_1^{2n-1} so fortschreiten, daß der Exponent immer um 1 zunimmt. Jedes φ_n enthält, wenn man alle Brüche soweit als möglich abgekürzt und alle Brüche von gleichem Nenner zu einem Bruch vereinigt hat, $n - 1$ Glieder.

Satz 2. Der Zähler des ersten Bruches besteht aus einem Faktor, jeder folgende enthält einen Faktor mehr, der letzte hat $n - 1$ Faktoren.

Satz 3. Die Zähler sind Produkte der Funktionen $f_2, f_3, \ldots f_n$. Sie bilden alle möglichen Kombinationen samt Wiederholungen, doch so, daß, wenn r die Anzahl der Faktoren bedeutet, die Summe aller Indizes oder Zeiger eines Produktes $s = n + r - 1$ ist. Ist allgemein eine solche Kombination $f_a^\alpha f_b^\beta f_c^\gamma \ldots f_n^\nu$, $(a, b, c, \ldots n = 2, 3, \ldots n; \alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu \geqq 1)$, so ist natürlich die Zeigersumme $s = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots \nu n$. Beispielsweise ist s von $f_4 f_2^3 (= f_4 f_2 f_2 f_2)$ gleich $4 + 2 + 2 + 2 = 1.4 + 3.2$.

Satz 4. Die Indizessumme des Zählers ist jedesmal um 1 kleiner als die des Nenners.

Satz 5. Beide Zeigersummen, die des Zählers und die des Nenners, nehmen bei jedem folgenden Bruch um je 1 zu.

Satz 6. Das Vorzeichen der Brüche ist bei geradem r positiv, bei ungeradem r negativ, allgemein gleich dem Vorzeichen von $(-1)^r$.

Satz 7. Bezeichnet man allgemein mit $(f)_s^{(r)}$ alle möglichen Produkte der Funktion f und ihrer Ableitungen, wenn die Anzahl der Faktoren $= r$, die Summe des Indizes $= s$ ist, mit $(f_2, f_3, \ldots)_s^{(r)}$ oder einfacher mit $(f_{2,3} \ldots)_s^{(r)}$ dasselbe mit dem Unterschiede, daß die Indizes erst bei 2 beginnen, so sind die Zähler des allgemeinen Gliedes φ_n, wenn man vorläufig von den Koeffizienten absieht, so auszudrücken: $(f_{2,3} \ldots)_{n+r-1}^{(r)}$, $r = 1, 2, 3, \ldots n - 1$.

Ist für die Zeiger von f außer der untern Grenze p auch eine obere q bestimmt, so kann man schreiben: $(f_{p,q})_s^{(r)}$. Dementsprechend sind die dazu gehörigen Koeffizienten mit $(\varkappa_{p,q})_s^{(r)}$ und beide Größen zugleich mit $(\varkappa_{p,q} \cdot f_{p,q})_s^{(r)}$ oder $(\varkappa f_{p,q})_s^{(r)}$ d. h. ohne Punkt zwischen $\varkappa$ und f zu bezeichnen.

Ersetzt man endlich die Funktionen $f_2, f_3, \ldots f_n$ durch die entsprechenden Quotienten $f_{\mathrm{II}}, f_{\mathrm{III}}, \ldots, f_{\mathrm{N}}$, so ist allgemein

$\varphi_{[n]} = \sum\limits_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r \varkappa f_{\mathrm{II},\,\mathrm{III}\ldots})_{[n+r-1]}^{(r)}$ oder, da die Reihe von selbst abbricht, $\sum\limits_{r=1}^{r=\infty} \ldots$, wobei [2] eine andere Bezeichnungsweise ist für II, [3] für III... und [n] für N. Für $\varkappa$ fallen 2 und II, 3 und III u. s. w. zusammen.

Man beachte auch, daß man als Argument von $\varphi_{[n]}$ als einem zusammenfassenden Ausdrucke für eine Verbindung von $f_2, f_3 \ldots$ direkt x, resp. h ansehen kann.

Die Koeffizienten sind bestimmt entweder durch einen Einzelbruch oder durch den Zähler dieses Bruches allein. Den erstern bezeichne ich mit $\mathfrak{K} f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} \cdot f_1^{-(s+1)}$, $s = \alpha a + \beta b + \ldots \nu n$, den zweiten mit $K f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}$; $a, b, \ldots n$ sind durchgehends voneinander verschieden und $\geqq 2$. Beide Ausdrücke sind natürlich gleichwertig.

Erinnern wir uns noch einmal des Verfahrens, durch welches die Funktion φ_n ihren Ausdruck durch $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ gewonnen hat! Es war nämlich $\varphi_n(y) = \frac{1}{f_1^n(x)} \cdot \varphi_{[n]}(x)$. Also $\varphi_{n+1} \cdot dy = dx \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{f_1^n(x)} \varphi_{[n]}(x)\right]$.

$\varphi_{n+1} = \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^n} \varphi_{[n]}$, aber $\varphi_{n+1} = \frac{1}{f_1^{n+1}} \cdot \varphi_{[n+1]}$; daher allgemein:

$\varphi_{[n+1]} = f_1^n \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^n} \varphi_{[n]}$. Das heißt also:

$\varphi_{[1]} = \frac{d}{dx} \varphi_{[0]}$; dieses ist, wie aus $\varphi_1 = \frac{1}{f_1}$ zu ersehen ist, $= 1$.

$$\varphi_{[2]} = f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \varphi_{[1]} = f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1};$$

$$\varphi_{[3]} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^2} \varphi_{[2]} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^2} f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1};$$

$$\varphi_{[4]} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^3} \varphi_{[3]} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^3} f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}.$$

— —

Daher, wenn $\left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<n>}$ die formelle n malige Nebeneinandersetzung von $\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}$ bedeutet, $\varphi_{[n]} = f_1^{n-1} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<n-1>}$.

$R(h)$ erscheint nun in einer dritten Gestalt, nämlich

$$R(h) = x = h - f_0 + \frac{f_0^2}{2!} f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} - \frac{f_0^3}{3!} \cdot f_1^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<2>} + \ldots.$$

Gibt man nun darauf acht, wie ein solcher Koeffizient zustande kommt, nämlich durch Reduzierung gewisser Differentiationsergebnisse aus dem vorhergehenden Gliede, nachdem man $\frac{dx}{dy}$ durch $\frac{1}{f_1}$ ersetzt hat, so ist leicht einzusehen, daß ein jeder Koeffizient $\mathfrak{K} f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} \cdot f_1^{-(s+1)} =$

$$= l_1 \mathfrak{K} f_a^{\alpha-1} f_{a-1} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} \cdot f_1^{-s} + l_2 \mathfrak{K} f_a^{\alpha} f_b^{\beta-1} f_{b-1} \ldots f_n^{\nu} \cdot f_1^{-s} + \ldots$$
$$+ l_n \mathfrak{K} f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu-1} f_{n-1} \cdot f_1^{-s}. \quad \text{— — — — — — — — — — — —} \quad (3)$$

d. h. bei den f mit positivem Exponenten werden die Indizes der Reihe nach und zwar immer nur bei je einem Faktor um 1 vermindert. $l_1, l_2, \ldots l_n$ sind numerische Faktoren. l_1 bedeutet die Anzahl von f_{a-1} in dem ihm folgenden Ausdrucke $\mathfrak{K}_1$, l_2 die Anzahl von $f_{b-1}, \ldots, l_n$ die Anzahl von f_{n-1} in den zu diesen Zahlen gehörenden $\mathfrak{K}$. Mit andern Worten: $l_1 =$ dem Exponenten von f_{a-1} u. s. w., nachdem man sämtliche Funktionen von gleichem Index in einem $\mathfrak{K}$ zu einer Potenzgröße zusammengezogen hat. Sind einmal die $l_1, l_2, \ldots l_n$ bestimmt, so kann man in den Ausdrücken $\mathfrak{K}$ f_1 weglassen, wenn man das Symbol $\mathfrak{K}$ durch K ersetzt. Der Beweis ist sehr einfach. Denn (3) enthält die gleichen Operationen, durch welche wir φ_n gefunden haben, nur in einer andern Anordnung.

$f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu f_1^{-(s+1)} \cdot \mathfrak{K} f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu f_1^{-(s+1)}$ ist ja offenbar entstanden durch Summation derjenigen Glieder, welche nach der Differentiation von $f_a^{\alpha-1} f_{a-1} f_b^\beta \ldots f_n^\nu f_1^{-s} \mathfrak{K}_1 + f_a^\alpha f_b^{\beta-1} f_{b-1} \ldots f_n^\nu f_1^{-s} \mathfrak{K}_2 + \ldots f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^{\nu-1} f_{n-1} f_1^{-s} \mathfrak{K}_n$ das Produkt $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$ enthalten. ($\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ sind kürzere Bezeichnungen für die auf der rechten Seite von (3) zu den entsprechenden l gehörigen Ausdrücke $\mathfrak{K}$).

Die Ausführung dieser Differentiation und die Multiplikation mit f_1^{-1}, wodurch f_{a-1} zu f_a, f_{b-1} zu $f_b, \ldots f_{n-1}$ zu f_n und f_1^{-s} zu $f_1^{-(s+1)}$ wird, liefert eben $(l_1 \mathfrak{K}_1 + l_2 \mathfrak{K}_2 + l_n \mathfrak{K}_n) f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu \cdot f^{-(s+1)}$.

Ist ein Index z. B. $a = 2$, so ist f_2 im Gliede von $\mathfrak{K}_1$ entstanden durch Differentiation von $f_1^{-s'}$. Es wird $\dfrac{d}{dx} f_1^{-s'} = f_1^{-s'-1} f_2$. Nach der Multiplikation mit $\dfrac{1}{f_1}$ wird $f_1^{-s'-1}$ zu $f_1^{-s'-2}$. Dieser Ausdruck muß identisch sein mit $f_1^{-(s+1)}$; also $-s' - 2 = -s - 1$; $-s' = -s + 1$, in Übereinstimmung mit $f_a^{\alpha-1} f_{a-1} f_1^{-s} = f_a^{\alpha-1} f_1^{-s+1}$.

Durch die vorstehende Formel wird auch das Vorzeichen der Koeffizienten bestimmt.

Beispiele:

1) $\mathfrak{K} f_3^2 f_2 f_1^{-9} = 2\,\mathfrak{K} f_3 f_2 f_2 f_1^{-8} - 7\,\mathfrak{K} f_3^2 f_1 f_1^{-8}$
$= 2\,K f_3 f_2^2 - 7\,K f_3^2 = 2\,(-105) - 7 \cdot 10 = -280.$

2) $\mathfrak{K} f_5 f_3 f_1^{-9} = 1 \cdot \mathfrak{K} f_4 f_3 f_1^{-8} + 1 \cdot \mathfrak{K} f_5 f_2 f_1^{-8} = K f_4 f_3 + K f_5 f_2 =$
$= 35 + 21 = 56$

3) $\mathfrak{K} f_3^3 f_1^{-10} = 1 \cdot \mathfrak{K} f_3^2 f_2 f_1^{-9} = K f_3^2 f_2 = -280$

4) $\mathfrak{K} f_4 f_3 f_2 f_1^{-10} = 2\,\mathfrak{K} f_3^2 f_2 f_1^{-9} + 2\,\mathfrak{K} f_4 f_2^2 f_1^{-9} + (-8)\,\mathfrak{K} f_4 f_3 f_1 f_1^{-9} =$
$= 2\,K f_3^2 f_2 + 2\,K f_4 f_2^2 - 8\,K f_4 f_3 = 2\,(-280)$
$+ 2\,(-210) - 835 = -1260.$

5) $\mathfrak{K} f_2^2 f_1^{-5} = -3\,\mathfrak{K} f_2 f_1 f_1^{-4} = -3\,K f_2 = -3\,(-1) = 3.$

6) $\mathfrak{K} f_2^3 f_1^{-7} = -5\,\mathfrak{K} f_2^2 f_1 f_1^{-6} = -5\,K f_2^2 = -3\,.\,5.$
7) $\mathfrak{K} f_2^4 f_1^{-9} = -7\,\mathfrak{K} f_2^3 f_1 f_1^{-8} = -7\,K f_2^3 = 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7.$
8) $\mathfrak{K} f_2^5 f_1^{-11} = -9\,\mathfrak{K} f_2^4 f_1 f_1^{-10} = -9\,K f_2^4 = -1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9.$

Die vier letzten Beispiele sind leicht zu generalisieren. Der absolute Wert von $K f_2^n$ ist $= 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7 \ldots (2n-1)$ oder $= \dfrac{(2n-1)!}{2^{\frac{2n-2}{2}} \cdot \frac{2n-2}{2}!} = \dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}$. Diesen letztern Ausdruck erhält man, wenn man in der natürlichen Zahlenreihe $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\ldots(2n-1)$ jede zweite Zahl durch 2 dividiert. Es gibt $2n - 1 - 1$ solcher Divisionen. Das, was nach den Divisionen außer $1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots.$ übrigbleibt, ist $= \dfrac{2n-2}{2}!$ Es wird also $(2n-1)!$ noch dadurch dividiert. Aus $1\,.\,3\,.\,5 \ldots 2n$ würde man auf demselben Wege $\dfrac{2n!}{2^n\,.\,n!}$ erhalten. Beide Ausdrücke müssen natürlich einander gleich sein.

II.

Direkte Darstellung der Koeffizienten. Erweiterung der Kombinatorik. Die funktionellen Zahlen $\varkappa$, τ und einige ihrer Eigenschaften. Bekanntlich liefert $(x + y + u)^n$ ein Polynom, dessen Glieder die Form haben $x^\alpha y^\beta \ldots u^\nu$; $\alpha + \beta + \ldots \nu = n$. Der zu irgend einem Gliede gehörige Koeffizient ist gleich $\dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}$, der Permutationszahl der Elemente $x, x, x \ldots$ (α mal); $y, y \ldots$ (β mal); $\ldots$; $u, u \ldots$ (ν mal). Man kann vermuten, daß auch bei den Koeffizienten der Umkehrungsreihe ein analoges Gesetz herrschen muß; denn ein jeder ist durch die Zusammensetzung des zu ihm gehörigen Produktes $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$ vollkommen bestimmt. Durch dasselbe Produkt muß eine besondere Art der Permutation gewisser Elemente mitbestimmt sein. Ich will nun meinen Gedankengang, der mich auf dem Wege der Induktion wirklich zum Ziele geführt hat, aus gewissen Gründen unverändert wiedergeben. Ich möchte nämlich zeigen, auf was für Wegen man oft, auf gewisse Fingerzeige achtend, ans Ziel gelangt und daß die Analogie in der Mathematik, wie verschiedenartig auch das Gebiet ist, von dem sie hervorgeholt wurde, etwas mehr zu bedeuten hat als eine bloße Ähnlichkeit.

Ich dachte an die Multiplikation Hamilton'scher Quaternionen und der Grassmann'schen extensiven Größen, wo die Faktoren nicht unter allen

Bedingungen kommutativ sind, stellte mit diesen die Elemente der Permutationen in Parallele und fand, daß der Quaternionen-Multiplikation die gewöhnliche Permutation, und der gewöhnlichen Multiplikation die Quaternionen-Multiplikationen gleicher Quaternionen und die Permutation gleicher Elemente entspricht. Der allgemeinste Fall muß in der Mitte liegen. Bei den nun folgenden Versuchen ist mir, ein seltener Zufall, gleich der erste Wurf gelungen. Ich denke mir mehrere Elemente: a, b, c, d, e, f in der Form einer Multiplikation $abcdef$. Gewisse Gruppen von Elementen klammere ich ein: z. B. $(ab)(cd)(ef)$ und definiere den Ausdruck in der Weise, daß innerhalb der Klammer die Elemente (Faktoren) kommutativ sein sollen, d. h. $(ab) = (ba)$ liefert nur eine Permutation, als ob $a = b$ wäre. Klammere ich den ganzen Ausdruck noch einmal ein, also $((ab)(cd)(ef))$, so sind nun auch die Gruppen kommutativ, mit andern Worten: es sind die gegebenen Elemente in eine gewisse Anzahl von Klammern, deren Reihenfolge nicht bestimmt, also willkürlich ist, zu verteilen. Auf wie viele Arten kann das geschehen?

Nachdem wir so den Permutationsbegriff verallgemeinert haben, wollen wir einige dieser allgemeinen Permutationszahlen berechnen.

V o r b e m e r k u n g. Sind in den Klammern nur Punkte, so bedeutet dies: die übrigen Elemente.

1) $P((ab)(cd)) = (ab)(\,..\,), (ac)(\,..\,), (ad)(\,..\,) = 3$, d. h. ein Element wird mit allen übrigen verbunden, der Rest kommt in die leeren Klammern.

2) $P((ab)(cd)(ef)) = (ab)\,P((cd)(ef)), (ac)\,P((\,..\,)(\,..\,)),$
$(ad)\,P((\,..\,)(\,..\,)), (ae)\,P((\,..\,)(\,..\,)), (af)\,P((\,..\,)(\,..\,)) = (6-1).3 = 5.3.$

3) $P((ab)(cd)(ef)(gh)) = (8-1)\,P((cd)(ef)(gh)) = 7.5.3$; denn offenbar liefert a mit jedem folgenden Elemente 7 d. h. $n-1$ Amben Auf den ersten Blick sind diese Permutationszahlen, abgesehen vom Vorzeichen, identisch mit Kf_2^2, Kf_2^3, Kf_2^4. Es liegt daher nahe, dieses Verfahren auf die übrigen Koeffizienten sinngemäß auszudehnen.

4) $Kf_3\,f_2$ müßte dann, absolut genommen, also $|Kf_3\,f_2|$ gleich sein $P((abc)(de))$. In der Tat ist $P((de)(abc)) = (ab)(\,...\,), (ac)(\,...\,),$ $(ad)(\,...\,), (ae)(\,...\,), (bc)(\,...\,), (bd)(\,...\,), (be)(\,...\,), (cd)(\,...\,), (ce)(\,...\,),$ $(de)(\,...\,) = \binom{5}{2} = 10.$

5) $|Kf_4| = P(abcd) = 1.$

6) $|Kf_4\,f_2| = P((ab)(cdef)) = (ab)(\,....\,), (ac)(\,....\,), \ldots$ $= \binom{6}{2} = 15.$

7. $|Kf_3^2| = P((abc)(def)) = (abc)(\,...\,), \;.\;.\;.\;.\;.$

Bildet man alle Ternen der 6 Elemente, so ist ihre Anzahl $= \binom{6}{3}$. Nun aber enthalten die Klammern je gleich viele Elemente. Infolgedessen verringert sich die Anzahl um die Hälfte. Denn alle Ternen der ersten Klammer müssen in der zweiten wieder erscheinen. $P((abc)(def))$ ist also $= \frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$.

Wir haben uns nun in diesen Kalkül soweit hineingearbeitet, daß wir nun zur Generalisierung der Beispiele schreiten können. $Kf_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$ entspricht einer Permutation von $s = \alpha a + \beta b + \ldots \nu n$ Elementen. Je a Elemente sind in α Klammern, je b Elemente in β Klammern, ... und je n Elemente in ν Klammern verteilt. Der ganze Ausdruck kommt dann in eine sekundäre Klammer. Wir bilden zunächst alle möglichen Permutationen. Ihre Anzahl ist $s!$. Nun sind je a Elemente in α Klammern kommutativ, ebenso b Elemente in β Klammern u. s. f., d. h. sie haben dieselbe Wirkung auf die Permutationszahl, als ob sie gleich wären. Daher ist $s!$ durch $a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu$ zu dividieren. Endlich ist zu beachten, daß in den Klammern, welche gleich viel Elemente enthalten, dieselben Verbindungen so oft wieder erscheinen, als es Permutationen von diesen Klammerausdrücken gibt. Da nun auch die Klammerausdrücke als sekundäre Elemente der sekundären Klammer kommutativ sind, so ist das Ganze noch durch diese Permutationen, deren Anzahl offenbar gleich ist $\alpha!\beta!\ldots\nu!$, zu dividieren.

Stellen wir uns beispielsweise vor, daß in irgend einer Verbindung von Elementen auch $(ab)(cd)(ef)$ vorkommt. Da wegen der sekundären Klammer die einmal gewählte Reihenfolge von $\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ ($\mathfrak{k}_n$ bedeutet einen Klammerausdruck mit n Elementen) festgelegt ist, — offenbar kommt es auf dasselbe hinaus, ob man eine Reihe von Klammerausdrücken als kommutativ oder als nicht permutabel erklärt —, so ist klar, daß die $3!$ Permmutationen:

$$\left.\begin{array}{l} \ldots(ab)(cd)(ef)\ldots \\ \ldots(ab)(ef)(cd)\ldots \\ \ldots(cd)(ab)(ef)\ldots \\ \ldots(cd)(ef)(ab)\ldots \\ \ldots(ef)(ab)(cd)\ldots \\ \ldots(ef)(cd)(ab)\ldots \end{array}\right\}$$

zusammenfallen und sich nur auf 1 Permutation reduzieren, mit anderen Worten: die Permutationszahl ist durch $3!$ zu dividieren. Dasselbe gilt für andere Klammerausdrücke von gleich viel Elementen.

Es ist also $\left|Kf_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu\right| = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu}$, und da das Vorzeichen der Koeffizienten gleich ist dem von $(-1)^r$, $r =$ Anzahl der Faktoren, also $= \alpha + \beta + \ldots \nu$), so ist

$$K f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu} \quad - - (4).$$

Der Ausdruck ist selbstverständlich, da er ja eine Anzahl von Permutationen bedeutet, eine ganze Zahl.

Durch diese Formel in Verbindung mit den oben entwickelten Sätzen sind wir nun in den Stand gesetzt, jedes beliebige φ_n unabhängig vom vorhergehenden φ_{n-1} direkt auszudrücken.

Beweis. Mittelst der Formel (4) lassen sich eine Menge Rekursionsformeln entwickeln, eingliedrige und mehrgliedrige. Die eingliedrigen sind sehr einfach zu ermitteln. So ist z. B.

$$K f_a^\alpha f_b^\beta = (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b)!}{\alpha!\,\beta!\, a!^\alpha\, b!^\beta} \text{ u. } K f_c^\gamma f_d^\delta = (-1)^{\gamma+\delta} \cdot \frac{(\gamma c + \delta d)!}{\gamma!\,\delta!\, c!^\gamma\, d!^\delta}.$$

Die beiden Gleichungen, in Proportion gesetzt, ergeben:

$$K f_a^\alpha f_b^\beta = K f_c^\gamma f_d^\delta \cdot (-1)^{\alpha+\beta-\gamma-\delta} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b)!}{\alpha!\,\beta!\, a!^\alpha\, b!^\beta} \cdot \frac{\gamma!\,\delta!\, c!^\gamma\, d!^\delta}{(\gamma c + \delta d)!}.$$

Bei mehrgliedrigen Rekursionsformeln $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots \lambda_n K_n$ werden im allgemeinen mehrere Kombinationen der Werte $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ dieser diophantischen Gleichung genügen. Erweist sich nun nach der Einsetzung der Werte von $K, K_1, K_2, \ldots K_n$ aus (4) und die der Werte l_1 für λ_1, l_2 für λ_2, $\ldots l_n$ für λ_n aus (3) die obige Gleichung als eine identische, so ist die Formel (4) auf die bewiesene Formel (3) zurückgeführt und der Beweis für die Richtigkeit von (4) ist erbracht.

Ich zerlege den Beweis in drei Stufen: einen Haupt- und zwei Ergänzungssätze.

Zunächst wollen wir annehmen, daß $a > b > c > \ldots n$ ist, und zwar $a \geqq b+1, b \geqq c+1, \ldots n > 2$, so daß also $a-1$, ebenso $b-1$ u. s. w. mit keinem andern Index zusammenfallen und auch kein Index $= 1$ werden kann.

Daher ist $l_1 = 1, l_2 = 1, \ldots l_n = 1$ und die Formel (3) lautet:

$$(-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu} =$$

$$= (-1)^{\alpha-1+1+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{((\alpha-1)a + 1.(a-1) + \beta b + \ldots \nu n)!}{(\alpha-1)!\,1!\,\beta!\ldots\nu!\; a!^{\alpha-1}(a-1)!\, b!^\beta \ldots n!^\nu} +$$

$$+ (-1)^{\alpha+\beta-1+1+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + (\beta-1)b + 1.(b-1) + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,(\beta-1)!\,1!\ldots\nu!\; a!^\alpha\, b!^{\beta-1}(b-1)!\ldots n!^\nu} +$$

— —

$$+ (-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu-1+1} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots (\nu-1)n + 1.(n-1))!}{\alpha!\,\beta!\ldots(\nu-1)!\,1!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^{\nu-1}(n-1)!}.$$

Es ist nun einerseits $\frac{1}{(\alpha-1)!} = \frac{\alpha}{\alpha!}, \frac{1}{(\beta-1)!} = \frac{\beta}{\beta!}, \ldots \frac{1}{(\nu-1)!} =$

$= \frac{\nu}{\nu!}; \frac{1}{(a-1)!} = \frac{a}{a!}, \frac{1}{(b-1)!} = \frac{b}{b!}, \ldots \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!}$; andrerseits ist, wenn man $\alpha a + \beta b + \ldots \nu n = s$ und $\alpha + \beta + \ldots \nu = r$ setzt,

$((\alpha - 1) a + (a-1) + \beta b + \ldots \nu n)! = (\alpha a - a + a - 1 + \beta b + \ldots \nu n)!$
$= (s-1)!$,

$(\alpha a + (\beta - 1) b + (b-1) + \ldots \nu n)! = (\alpha a + \beta b - b + b - 1 + \ldots \nu n)!$
$= (s-1)!$,

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$(\alpha a + \beta b + \ldots (\nu - 1) n + n - 1)! = (\alpha a + \beta b + \ldots \nu n - n + n - 1)!$
$= (s-1)!$

Also ist $(-1)^r \frac{s!}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu} =$

$$= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)! \, \alpha a}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^{\alpha-1} a! \, b!^\beta \ldots n!^\nu} + (-1)^r \cdot \frac{(s-1)! \, b\beta}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^{\beta-1} b! \ldots n!^\nu}$$

$$+ \ldots (-1)^r \cdot \frac{(s-1)! \, \nu n}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^{\nu-1} n!} =$$

$$= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)! (\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu} = (-1)^r \cdot \frac{s!}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu} \quad \text{— — — — — (5)},$$

was zu beweisen war.

1. Ergänzungssatz. Es kann nun auch der Fall eintreten, daß der eine oder andere Index mit einem andern zusammenfällt, daß z. B. $a - 1 = b, b - 1 = c$ wird u. s. f. Es ist nun zu beweisen, daß dieser Fall an der vorstehenden Gleichung (5) nichts ändert. Es sei z. B. $a - 1 = b$. Dann ist der Exponent von b: $\beta + 1$, so daß $l_1 = \beta + 1$ ist. Nach der Rekursionsformel (3) ist nun zu schreiben:

$$(-1)^{\alpha - 1 + \beta + 1 + \ldots \nu} \cdot (\beta + 1) \cdot \frac{((\alpha - 1) a + (\beta + 1) b + \ldots \nu n)!}{(\alpha - 1)! (\beta + 1)! \ldots \nu! \, a!^{\alpha-1} b!^{\beta+1} \ldots n!^\nu}.$$

Wegen $\frac{1}{(\alpha-1)!} = \frac{\alpha}{\alpha!}, \frac{1}{(\beta+1)!} = \frac{1}{\beta! (\beta+1)}, \frac{1}{a!^{\alpha-1}} = \frac{a!}{a!^\alpha}$ und $\frac{1}{b!^{\beta+1}} = \frac{1}{b!^\beta \, b!}$ geht der Ausdruck, da $b = a - 1$ ist, über in

$(-1)^r \cdot (\beta + 1) \cdot \frac{(\alpha a - a + \beta b + a - 1 + \ldots \nu n)! \, \alpha \, . \, a!}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu (\beta + 1) (a-1)!}$ und wegen $a! = (a-1)! \, a$ weiter $= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)! \, \alpha a}{\alpha! \beta! \ldots \nu! \, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu}$, ein Ausdruck, der mit dem entsprechenden in (5) vollkommen übereinstimmt.

2. Ergänzungssatz. Es bleibt nur noch ein Fall übrig. Was geschieht, wenn ein Index z. B. $n - 1$ gleich 1 wird? n ist dann $= 2$ und l_n wird nach (3) $= - s + 1$. Der entsprechende Summand in (5) ist nun zu schreiben:

$(-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu-1} \cdot (1-s) \cdot \frac{(\alpha a+\beta a+\ldots(\nu-1)n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots(\nu-1)!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\,n!^{\nu-1}}$. Das ist weiter gleich $(-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu}(s-1) \cdot \frac{(\alpha a+\beta b+\ldots\nu n-n)!\,\nu.\,n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}}$ und wegen $n=2$, $2!=2$, also $n!=n$: $(-1)^{r}(s-1) \cdot \frac{(s-2)!\,\nu.\,n}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}}$.

Ferner wegen $(s-2)! = \frac{(s-1)!}{(s-1)}$ weiter

$= (-1)^{r}(s-1) \cdot \frac{(s-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}(s-1)}$.

Dadurch sind alle möglichen in Betracht kommenden Fälle erschöpft und der Beweis perfekt.

Die Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen der Kombinatorik einerseits durch Einführung von Klammern höherer Stufe als der sekundären, andrerseits durch Gleichsetzung einiger Gruppen der primären Elemente will ich nur andeuten. Dafür möchte ich noch einige typische Reihen der Koeffizienten und ihre Ermittlung durch eingliedrige Rekursionsformeln besprechen.

Solche Reihen bilden 1) die Koeffizienten von $f_3 f_2, f_4 f_2, f_5 f_2, \ldots f_n f_2 =$ 10, 15, 21, 28, 36 ..... (f_2^2 gehört nicht mehr zu diesem Typus, da die f nicht von einander verschieden sind).

Die eingliedrige Rekursionsformel dieser Reihe ist

$$K f_n f_2 = K f_{n-1} f_2 \cdot (-1)^{1+1-1-1} \cdot \frac{(n+2)!}{1!\,1!\,n!\,2!} \cdot \frac{1!\,1!\,(n-1)!\,2!}{(n-1+2)!} =$$
$$K = f_{n-1} f_2 \cdot \frac{n+2}{n}.$$

2) Für die Reihe $f_n f_m$, $n = m+1, m+2, \ldots$ findet man auf demselben Wege die Rekursionsformel: $K f_n f_m = K f_{n-1} f_m \cdot \frac{n+m}{n}$. Ebenso

3) Für die Reihe $f_2^1, f_2^2, f_2^3, \ldots f_2^n = -1, 3, -15, 105, -945, 10395, -135135, \ldots$: $K f_2^n = K f_2^{n-1} (-1)^{n-n+1} (2n-1)$.

Alle diese Ausdrücke zeichnen sich durch große Einfachheit aus, (es fehlen in ihnen die Faktoriellen), und es lassen sich in dieser Weise noch eine Menge ähnlicher Formeln aus (4), beispielsweise: f_m^n, $n = 1\ 2, 3, \ldots$ u. a. nach Belieben entwickeln, da jeder Koeffizient von jedem andern abgeleitet werden kann.

Die „funktionellen" Zahlen. Die Koeffizienten $K f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}$ lassen sich durch Einführung gewisser „funktionellen" Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_n$ noch in einer andern Form darstellen. Diese Zahlen erinnern in gewisser Beziehung an die Grassmann'schen extensiven Größen $e_1, e_2, \ldots e_n$. Sie haben das miteinander gemein, daß es bei beiden wesentlich darauf ankommt, ob ihre Indizes gleich oder verschieden sind. Unter „funktionellen" Zahlen verstehe ich allgemein solche Größen, welche, wie die Hamilton'schen Quaternionen oder die Grassmann'schen Raumgrößen, eine oder mehrere Funktionen repräsentieren. Für sie gelten bekanntlich besondere Gesetze der niedern Operationen, speziell der Multiplikation. Deshalb sind die Faktoren eines Produktes im allgemeinen auch nicht kommutativ, wie die Symbole von Funktionen f, f', f'' etc. im allgemeinen auch nicht kommutativ sind. Ich definiere nun die Multiplikation der Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_n$, von denen einige auch gleich sein können, so:

$$\left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots \varkappa_n^\nu\right] = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^\alpha\,b!^\beta\ldots n!^\nu}, \quad (6);$$

also ist $\left|K f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu\right| = \left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots \varkappa_n^\nu\right]$.

Nun sind die Indizes natürlich nicht mehr auf die Zahlen $2, 3, \ldots n$ beschränkt, sondern ganz willkürlich. Die eckige Klammer bedeutet, daß vor der Ausführung der Multiplikation alle Größen mit gleichem Index zu einer Potenzgröße zusammenzuziehen sind. Deshalb ist auch nicht $\left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots \varkappa_c^\gamma \varkappa_d^\delta \ldots\right] = \left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots\right] \cdot \left[\varkappa_c^\gamma \varkappa_d^\delta \ldots\right]$, wohl aber ist $\left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots + \varkappa_c^\gamma \varkappa_d^\delta \ldots\right] = \left[\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots\right] + \left[\varkappa_c^\gamma \varkappa_d^\delta \ldots\right]$. Innerhalb der eckigen Klammer gelten die gewöhnlichen Operationsgesetze.

Ein Blick auf die Formel (6) läßt erkennen, daß die Größen $\varkappa$ im Produkt kommutativ sind. Auch der Ausdruck $\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r (\varkappa f_{\text{II}}, {}_{\text{III}} \ldots)^{(r)}_{[s]}$ ist uns jetzt verständlicher geworden. $\varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots$ (die eckigen Klammern kann man, wo ein Mißverständnis nicht zu befürchten izt, auch fortlassen) ist nun gerade so ein Produkt, wie die dazu gehörigen Funktionen $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots$ und wir wissen nun, welche Bedeutung diesem zukommt. Andere „funktionelle" Zahlen, so z. B. σ_a mit der Multiplikationsregel $\sigma_a^\alpha \sigma_b^\beta \ldots \sigma_n^\nu = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!\,a!^\alpha\,b!^\beta \ldots n!^\nu}$ oder τ_a mit der Multiplikationsregel $\tau_a^\alpha \tau_b^\beta \ldots \tau_n^\nu = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a^\alpha\,b^\beta\ldots n^\nu}$ u. a. werden wir weiter unten kennen lernen.

Hier, wo schon von symbolischen Ausdrücken die Rede ist, möchte ich noch ein Symbol besprechen, von dem später Gebrauch gemacht werden wird. Ich bezeichne die natürliche Zahlenreihe: 1, 2, 3, ... in infin. mit einem besondern Buchstaben: t. Dann ist $1 + t = 2, 3, 4, \ldots$; $1 + 2t = 3, 5, 7, \ldots$; $2t = 2, 4, 6, \ldots$; $[t] = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \ldots$ Nun kann man den oben erwähnten Summenausdruck schreiben $\sum\limits_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa f_{[1+t]}\right)^{(r)}_{[n+r-1]}$, der für $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots f_n = 1$, also auch $f_{\mathrm{II}} = f_{\mathrm{III}} = \ldots f_{\mathrm{N}} = 1$ übergeht in $\sum\limits_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+t}\right)^{(r)}_{n+r-1}$. Er bedeutet die Summe aller Koeffizienten in einem Gliede φ_n. Sind alle f mit geradem Index $= 0$, die übrigen $= 1$, so bedeutet $\sum\limits_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1}$ die Summen aller Koeffizienten eines φ_n mit lauter ungeraden Zeigern, u. a. m.

Einige Eigenschaften der Größen $\varkappa$ und einige Verifizierungen der Umkehrungsreihe.

1) Bildet man die Summe aller Koeffizienten der φ_n-Polynome, so erhält man der Reihe nach für $\varphi_2: -1$, $\varphi_3: -1 + 3 = 2$, $\varphi_4: -1 + 10 - 15 = -6 = -1.2.3 = -3!$, $\varphi_5: -1 + 15 + 10 - 105 + 105 = 24 = 4!$ u. s. f.

Man kann schon daraus mit fast völliger Sicherheit schließen, daß die diesbezügliche Summe für φ_n lauten wird: $(-1)^{n-1} . (n-1)!$. Man kann also schreiben:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{— (7)}$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier noch einmal an die Tatsache zu erinnern, daß die Reihen $\sum\limits_{r=1}^{r=\infty} \ldots = \sum\limits_{r=1}^{r=n-1}$ sind, d. h. daß sie beim $(n-1)^{\text{ten}}$ Gliede von selbst abbrechen.

2) Wir bilden nun die Summen aller Koeffizienten mit nur ungeraden Zeigern, mit andern Worten: wir lassen aus den obigen Summen alle diejenigen Addenden aus, welche irgend einen geraden Index enthalten. Man erhält dann für $\varphi_2: 0$, $\varphi_3: -1$, $\varphi_4: 0$, $\varphi_5: -1 + 10 = 9 = 3^2$, $\varphi_6: 0$, $\varphi_7: -1 + 56 - 280 = -225 = -(1.3.5)^2$, $\varphi_8: 0$ u. s. w.

Diese wenigen Daten lassen uns die beiden Gesetze erkennen:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1.3.5 \ldots (n-2))^2$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\varkappa_{2\,\frac{n-1}{2}}\right]^2$$

Für $f_3 = f_7 = f_{11} \ldots = -1$ sind, wie man sich durch Einsetzung der Werte in $\varphi_3, \varphi_4 \ldots$ leicht überzeugen kann, die Summen alle positiv, ohne daß der absolute Wert geändert wird, d. h.

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \cdot \left((-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 \quad ——— (8)$$

Man achte darauf, daß $\left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 = \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right] \cdot \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]$, also nicht gleich $\left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2} \cdot 2}\right]$.

Zweiter Satz. In den Polynomen φ_n mit geradem n enthält jedes Glied irgend ein f mit geradem Index, also ist die Summe der Koeffizienten $= 0$ ————————————— (9)

Wollte man beide Sätze in einen Satz zusammenziehen, so müßte man annehmen. das $\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}$ für ein gerades n, d. h. $\varkappa_2$ mit einem Bruch als Exponenten $= 0$ ist. Da in $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \dfrac{\left(\frac{n-1}{2} \cdot 2\right)!}{\frac{n-1}{2}!\, 2!^{\frac{n-1}{2}}}$ jeder Faktor mit Ausnahme von $\frac{n-1}{2}!$ ein endliches Resultat liefert, müßte $\frac{n-1}{2}!$ für ein ungerades n unendlich groß sein.

Die in Rede stehenden Summen sind also gleich einer quadratischen Zahl oder $= 0$.

Obgleich wir ziemlich sicher sein können, daß wir mit den eben ausgeführten Generalisierungen das Richtige getroffen haben, so wollen wir doch noch einen Beweis folgen lassen. Er müßte sich allgemein aus den Werten der $\varkappa$-Zahlen ergeben müssen, ich schlage aber, um Raum zu ersparen, einen kürzeren Weg ein. Damit verbinde ich einige Verifizierungen der Umkehrungsreihe, wenigstens für die ersten 8 Glieder der Reihe, die wir wirklich berechnet haben. Da wir nur solche Funktionen als Beispiele wählen, von denen die Umkehrungen bekannt sind, und es immer erlaubt sein muß, vom Bekannten auf das Unbekannte zu schließen, auch wenn dieses Unbekannte auf direktem (aber schwierigerem) Wege gefunden werden könnte, so können dieselben bekannten Umkehrungsreihen, die wir für die ersten berechneten 8 Glieder als Verifikationen gebrauchten, nachdem wir uns vergewissert haben, daß keine Fehler begangen worden sind, für die weiteren Glieder als Beweismittel dienen.

1) Als erstes Beispiel wählen wir $f(x) = e^x$. Die Umkehrung der Gleichung $e^x = y$ (allgemein mit $Uf = \varphi$ bezeichnet) ist bekanntlich *lognat* $y = x$ oder kürzer $ly = x$. Nun ist $f_1 = \frac{de^x}{dx} = e^x$; ebenso f_2, f_3 u. s. f. also für $h = 0$ $f = f_1 = f_2 = \ldots f_n = 1$. Folglich ist φ_n nach (7) $= (-1)^{n-1}(n-1)!$ Durch diese Substitutionen verwandelt sich die Reihe (2) in: $0 + \frac{y-1}{1} + \frac{(y-1)^2}{2}(-1) + \frac{(y-1)^3}{3!}2! + \frac{(y-1)^4}{4!}(-3!)\ldots$ $= (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots$

Damit stimmt die Reihe für ly vollständig überein, wodurch die Umkehrungsreihe verifiziert erscheint und die Formel (7) vom 8. Gliede an als bewiesen gelten kann.

2) $f(x) = \sin x$. $U \sin = \arcsin$; also $\arcsin y = x$. $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = -\sin x$, $f_3(x) = -\cos x$, $f_4(x) = \sin x$, $f_5(x) = \cos x$, $f_6(x) = -\sin x$, $f_7 x = -\cos x$ u. s. f.

Für $x = h = 0$ wird $f = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, $f_3 = -1$, $f_4 = 0$, $f_5 = 1$, $f_6 = 0$, $f_7 = -1$ u. s. w., d. h. f und alle Ableitungen von f mit geradem Index sind $= 0$, die übrigen sind $= (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Daher wird nach (8) und (9) die Summe der Koeffizienten für $\varphi_n = (1.3,5\ldots(n-2))^2$ resp. 0 und die Reihe (2) liefert:

$$x = 0 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!}\cdot 0 + \frac{y^3}{3!}\cdot 1^2 + \frac{y^4}{4!}\cdot 0 + \frac{y^5}{5!}(1.3)^2 + \frac{y^6}{6!}\cdot 0 +$$
$$\frac{y^7}{7!}(1.3.5)^2 + \ldots = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}(3)^2 + \frac{y^7}{7!}(3\cdot 5)^2 + \ldots.$$

Für $\frac{3^2}{5!}$ kann man schreiben $\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}$, für $\frac{(3.5)^2}{7!}$ $\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}$, allgemein $\frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n}$, eine Form, in der gewöhnlich die Reihe für *arcsin* y erscheint.

3) $f(x) = \cos x$. $U\cos = \arccos$. Hier darf man h nicht gleich 0 setzen, da sonst die Glieder, mit Ausnahme des ersten, unendlich groß werden würden. Dagegen wird für $h = \frac{\pi}{2}$ die Reihe sub 3) gleich der sub 2), negativ genommen, mit Ausnahme des ersten Gliedes, welches ja $= \frac{\pi}{2}$ ist. Die Reihe (2) liefert also die bekannte Formel $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$.

Hier zeigt sich besonders deutlich, daß die Konvergenz einer allgemeinen Umkehrungsreihe nicht *a priori* fixiert sein kann, d. h. sie muß eine allgemeine Konvergenzkonstante enthalten.

Von einer allgemeinen Umkehrungsreihe kann man ferner verlangen, daß sie nicht nur f in Uf, sondern auch Uf wieder in $UUf = f$ verwandelt. Und in der Tat wird für $f(x) = lx$ $f_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$ und für $x = h = 1$ ist $f_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$ Diese Werte, in die φ_n-Polynome eingesetzt, ergeben überall das interessante Resultat: $+1$. Die Koeffizientensummen sind also von n ganz unabhängig. Ein solches Monom hat die Form:

$$(-1)^{\alpha+\beta+..\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \ldots \nu n)!\,((a-1)!(-1)^{a-1})^{\alpha} \ldots ((n-1)!(-1)^{n-1})^{\nu}}{\alpha! \ldots \nu!\, a!^{\alpha} \ldots n!^{\nu}}$$

$= (-1)^{\alpha a + ..\nu n} \cdot \dfrac{(\alpha a + \ldots \nu n)!}{\alpha! \ldots \nu!\, a^{\alpha} \ldots n^{\nu}}$, also die funktionelle Größe, die wir oben mit $\tau_{\alpha}^{a} \ldots \tau_{n}^{\nu}$ bezeichnet haben.

Man kann den eben gefundenen Satz in die Form kleiden:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{s}\, \tau_{a}^{\alpha}\, \tau_{b}^{\beta} \ldots \tau_{n}^{\nu} = 1 \quad \text{— — — — — — — — — — — —} \quad (10)$$

Aus (2) fließt wegen $f(1) = l1 = 0$ ohneweiters:

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots = e^y$$

In dieser Weise kann man nach Belieben fortfahren, immer erweist sich die Umkehrungsreihe als richtig und man erhält als Nebengewinn einen Summensatz und oft eine besondere funktionelle Zahl. Die $f_1, f_2 \ldots f_n$ werden für ein spezielles h zu einer Funktion von n oder zu einer Konstanten. Verwendet man für diese das Symbol $\chi(n)$, so verdient auch die Koeffizientensumme für φ_n eine eigene Bezeichnung. Ich schreibe dafür $\Phi(\chi(n))$. Das Resultat dieser Summe ist wieder eine Funktion von n, etwa $\psi(n)$ oder eine Konstante. Die Sätze (7) und (10) lauten nun in der neuen Form: $\Phi(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ und $\Phi((-1)^{n-1}(n-1)!) = 1$. Satz (8) und (9): $\Phi(\Re(-1)^{\frac{n-1}{2}}) = [\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}]^2$ und das Gegenstück dazu, gewonnen aus der Umkehrung von *arcsin* x $\Phi([\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}]^2) = \Re(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Man erhält somit, wenigstens für diese beiden Fälle, die merkwürdige Relation: $\Phi(\chi) = \psi$ und $\Phi(\psi) = \chi$.

(Um die χ und ψ als Funktionen von n deutlich hervortreten zu lassen, habe ich geschrieben $\Re(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, lies: der reelle Wert von $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Dadurch wird für ein gerades n das Symbol von selbst $= 0$).

Eine Ausdehnung dieser Relation auf andere Fälle wollen wir nicht weiter versuchen. Wir haben die Leistungsfähigkeit unserer Umkehrungsreihe mit ihren Koeffizienten und funktionellen Zahlen genügend erprobt. Sie offenbart namentlich durch die zweiten Umkehrungen eine wahre

Proteusnatur. Sie kann in jede Reihe übergehen und sich wieder zurück in sich selbst verwandeln. Es ist sehr verlockend, in dieser Weise noch weiteres Material für eine „Theorie der funktionellen Zahlen" zu sammeln, doch das würde uns zuweit vom eigentlichen Thema ablenken; auch wegen Raummangels müssen wir nun diesen Gegenstand verlassen.

III.

Zerfällungszahlen. Man braucht bei der Berechnung der φ_n-Polynome eine Kontrolle, um sich zu vergewissern, daß man kein Glied ausgelassen hat. So enthält z. B. der Zähler des 2. Bruches in φ_8 3 Glieder, der Zähler des 3. Bruches in demselben Polynome 4 Glieder. Wovon hängt das ab? Die Frage wird gelöst durch die — Zerfällungszahlen. Darunter verstehe ich eine Zahl, welche angibt, auf wie viel Arten eine gegebene ganze Zahl s in Summanden von gleicher Beschaffenheit aufgelöst werden kann. Gewöhnlich nennt man ja die Auflösung einer Zahl in Summanden eine „Zerfällung" im Gegensatz zur Zerlegung, der Auflösung einer Zahl in Faktoren. Beispielsweise bedeutet $\mathfrak{Z}_2(6)$: $1+5$, $2+4, 3+3=3$; $\mathfrak{Z}_2(8)=1+7, 2+6, 3+5, 4+4=4$. Der Index bezeichnet die Anzahl der Summanden. $\mathfrak{Z}_3(9)$ ist also $=1+1+7$, $1+2+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3=7$.

$\mathfrak{Z}_3(9)_2=2+2+5, 2+3+4, 3+3+3=3$. Der Index rechts von der Klammer bedeutet also die untere Grenze der Summanden. Will man für diese auch eine obere Grenze annehmen, so soll sie daneben geschrieben werden. Demnach bedeutet $\mathfrak{Z}_3(9)_{1,4}=1+4+4, 2+3+4$, $3+3+3=3$; die allgemeine Bezeichnung ist also $\mathfrak{Z}_r(s)_{p,q}$ oder noch kürzer: $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q}$ beziehungsweise, wenn keine obere Grenze vorhanden ist, $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p$, welches dann identisch ist mit $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,\infty}$. Dieselbe Zahl wird aber auch schon durch die Ordnungszahl n und die Anzahl der Summanden r bestimmt. Ordnungszahl nenne ich den Index von φ_n und schreibe $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q}=\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,q}$. Die Buchstaben s, r bedeuten dasselbe, wie oben bei den Produkten $f_a^\alpha f_b^\beta \dots f_n^\nu$. Denn offenbar fällt die Aufgabe, alle möglichen Produkte von $f_a, \dots f_b, \dots$ von gleicher Zeiger- und Faktorensumme zu bilden, mit der Aufgabe zusammen, die Zeigersumme s auf alle möglichen Arten in soviel Summanden zu zerfällen, als das Produkt Faktoren hat.

Ich habe in der folgenden Tabelle I einige Zerfällungszahlen für $p=2$ zusammengestellt. r ist Abszisse und n Ordinate (mit der positiven Richtung nach unten).

Hat man die ersten Zahlen direkt berechnet, so kann man die übrigen durch Rekursionsformeln finden. Hiebei kommen hauptsächlich zwei Fundamentalsätze in Betracht. Der erste wird auf folgende Weise ermittelt. Ist $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p$ z. B. $\left\{\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right\}_2$ zu suchen, so schreibe ich zunächst p r mal in r Kolumnen hin; darüber werden die restlichen Einser, deren Anzahl $s-pr$ beträgt, auf alle möglichen Arten verteilt. Man erhält so

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & 1 \\
 & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\left\{\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right\}_2 = & 2+ & 2+ & 2, & 2+ & 2+ & 2, & 2+ & 2+ & 2, & 2+ & 2+ & 2,
\end{array}$$

nach Summierung der Kolumnen $= 2+2+6,\ 2+3+5,\ 2+4+4,\ 3+3+4 = 4$, d. h.

$$\left\{\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right\}_2 = \left\{\begin{matrix}10-2\cdot 3\\1\end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix}10-2\cdot 3\\2\end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix}10-2\cdot 3\\3\end{matrix}\right\}_1,$$ allgemein

$$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = \left\{\begin{matrix}s-pr\\1\end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix}s-pr\\2\end{matrix}\right\}_1 + \ldots\ldots \left\{\begin{matrix}s-pr\\r\end{matrix}\right\}_1 \qquad (11)$$

Den 2. Fundamentalsatz findet man durch folgende Erwägungen. Vermehrt (resp. vermindert) man die Indizes der Produkte gleicher Zeiger- und Faktorensumme, etwa in $f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}$ und $f_a^{\alpha'} f_b^{\beta'} \ldots f_n^{\nu'}$ um dieselbe Zahl m, so haben auch die neuen Produkte untereinander die gleiche Zeigersumme s'. Denn ist $\alpha a + \beta b + \ldots \nu n = \alpha' a + \beta' b + \ldots \nu' n$, so ist auch $\alpha(a+m) + \beta(b+m) + \ldots \nu(n+m) = \alpha'(a+m) + \beta'(b+m) + \ldots \nu'(n+m)$, da ja $\alpha + \beta + \ldots \nu = \alpha' + \beta' + \ldots \nu'$ ist. Durch diese Änderung bleibt die Anzahl der Faktoren r und infolgedessen auch die entsprechende Zerfällungszahl unberührt. Es ist daher wegen $s' = s + (\alpha + \beta + \ldots \nu) m = s + rm$

$$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = \left\{\begin{matrix}s'\\r\end{matrix}\right\}_{p+m} = \left\{\begin{matrix}s+mr\\r\end{matrix}\right\}_{p+m} \qquad (12)$$

Bringt man in (11) mittelst dieser Regel alle Zeiger auf p, so lautet nun die Formel:

$$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = \left\{\begin{matrix}s-pr+(p-1)\,1\\1\end{matrix}\right\}_{1+p-1} + \left\{\begin{matrix}s-pr+(p-1)\,2\\2\end{matrix}\right\}_p + \ldots\ldots \left\{\begin{matrix}r-pr+(p-1)\,r\\r\end{matrix}\right\}_p \qquad (13)$$

Nun ist nach der eben gefundenen Formel wegen $s-p-p(r-1) = s-pr$

$$\left\{\begin{matrix}s-p\\r-1\end{matrix}\right\}_p = \left\{\begin{matrix}s-pr+(p-1)\\1\end{matrix}\right\}_p + \left\{\begin{matrix}s-pr+(p-1)\,2\\2\end{matrix}\right\}_p + \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix}s-pr+(p-1)(r-1)\\r-1\end{matrix}\right\}_p,$$

eine Reihe, welche bis auf das letzte Glied mit der vorigen übereinstimmt. (13) vereinfacht sich dadurch zu einer zweigliedrigen Rekursionsformel: $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = \left\{\begin{matrix}s-p\\r-1\end{matrix}\right\}_p + \left\{\begin{matrix}s-r\\r\end{matrix}\right\}_p$. — — (14)

TABELLE I.

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_2$$

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n = 1$	1 s = 0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 2$	0	1 s = 2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 3$	0	1 s = 3	1 s = 4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 4$	0	1 s = 4	1 s = 5	1 s = 6	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 5$	0	1 s = 5	2 s = 6	1 s = 7	1 s = 8	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 6$	0	1 s = 6	2 s = 7	2 s = 8	1 s = 9	1 s = 10	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 7$	0	1 s = 7	3 s = 8	3 s = 9	2 s = 10	1 s = 11	1 s = 12	0	.	.	.	.	.	.	.	.
$n = 8$	0	1 s = 8	3 s = 9	4 s = 10	3 s = 11	2 s = 12	1 s = 13	1 s = 14	0	.	.	.	.	.	.	.
$n = 9$	0	1 s = 9	4 s = 10	5 s = 11	5 s = 12	3 s = 13	2 s = 14	1 s = 15	1 s = 16	0	.	.	.	.	.	.
$n = 10$	0	1 s = 10	4 s = 11	7 s = 12	6 s = 13	5 s = 14	3 s = 15	2 s = 16	1 s = 17	1 s = 18	0	.	.	.	.	.
$n = 11$	0	1 s = 11	5 s = 12	8 s = 13	9 s = 14	7 s = 15	5 s = 16	3 s = 17	2 s = 18	1 s = 19	1 s = 20	0	.	.	.	.
$n = 12$	0	1 s = 12	5 s = 13	10 s = 14	11 s = 15	10 s = 16	7 s = 17	5 s = 18	3 s = 19	2 s = 20	1 s = 21	1 s = 22	0	.	.	.
$n = 13$	0	1 s = 13	6 s = 14	12 s = 15	15 s = 16	13 s = 17	11 s = 18	7 s = 19	5 s = 20	3 s = 21	2 s = 22	1 s = 23	1 s = 24	0	.	.
$n = 14$	0	1 s = 14	6 s = 15	14 s = 16	18 s = 17	18 s = 18	14 s = 19	11 s = 20	7 s = 21	5 s = 22	3 s = 23	2 s = 24	1 s = 25	1 s = 26	0	.
$n = 15$	0	1 s = 15	7 s = 16	16 s = 17	23 s = 18	23 s = 19	20 s = 20	15 s = 21	11 s = 22	7 s = 23	5 s = 24	3 s = 25	2 s = 26	1 s = 27	1 s = 28	0
$n = 16$	0	1 s = 16	7 s = 17	19 s = 18	27 s = 19	30 s = 20	26 s = 21	21 s = 22	15 s = 23	11 s = 24	7 s = 25	5 s = 26	3 s = 27	2 s = 28	1 s = 29	1 s = 30
$n = 17$	0	1 s = 17	8 s = 18	21 s = 19	34 s = 20											
$n = 18$	0	1 s = 18	8 s = 19	24 s = 20	39 s = 21											
$n = 19$	0	1 s = 19	9 s = 20	27 s = 21	47 s = 22											
$n = 20$	0	1 s = 20	9 s = 21	30 s = 22	54 s = 23											
$n = 21$	0	1 s = 21	10 s = 22	33 s = 23	64 s = 24											
$n = 22$	0	1 s = 22	10 s = 23	37 s = 24	72 s = 25											
$n = 23$	0	1 s = 23	11 s = 24	40 s = 25	84 s = 26											
$n = 24$	0	1 s = 24	11 s = 25	44 s = 26	94 s = 27											
$n = 25$	0	1 s = 25	12 s = 26	48 s = 27	108 s = 28											

TABELLE II.

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{2,8} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{2,8}$$

$r =$	1	2	3	4
$n = 2$	1 s = 2	0	.	.
$n = 3$	1 s = 3	1 s = 4	0	.
$n = 4$	1 s = 4	1 s = 5	1 s = 6	0
$n = 5$	1* s = 5	2 s = 6	1 s = 7	1 s = 8
$n = 6$	1 s = 6	2 s = 7	2 s = 8	1 s = 9
$n = 7$	1 s = 7	3 s = 8	3 s = 9	2 s = 10
$n = 8$	1 s = 8	3 s = 9	4 s = 10	3 s = 11
$n = 9$	0 s = 9	4* s = 10	5 s = 11	5 s = 12
$n = 10$	0 s = 10	3 s = 11	7 s = 12	6 s = 13
$n = 11$	0 s = 11	3 s = 12	7 s = 13	9 s = 14
$n = 12$	0 s = 12	2 s = 13	8 s = 14	10 s = 15
$n = 13$	0 s = 13	2 s = 14	8* s = 15	13 s = 16
$n = 14$	0 s = 14	1 s = 15	8 s = 16	14 s = 17
$n = 15$	0 s = 15	1 s = 16	7 s = 17	16 s = 18
$n = 16$	0 s = 16	0 s = 17	7 s = 18	16 s = 19
$n = 17$	0 s = 17	.	5 s = 19	18* s = 20
$n = 18$	0 s = 18	.	4 s = 20	16 s = 21
$n = 19$	0 s = 19	.	3 s = 21	16 s = 22
$n = 20$	0 s = 20	.	2 s = 22	14 s = 23
$n = 21$	0 s = 21	.	1 s = 23	13 s = 24
$n = 22$	0 s = 22	.	1 s = 24	10 s = 25

Noch einfacher gestalten sich die Formeln, wenn man $\left\{{s \atop r}\right\}_p$ durch $\left[{n \atop r}\right]_p$ ersetzt. In der Kolumne für $r=1$ fällt s mit n zusammen, in jeder folgenden Kolumne wächst s um $p-1$, während selbstverständlich n unverändert bleibt. In der n-ten Zeile und r-ten Kolumne ist also $s=n+(p-1)(r-1)$ und $n=s-(p-1)(r-1)=s-pr+p+r-1$.

Beweis. In der Tabelle I ist s in der n-ten Zeile und r-ten Kolumne $=n+r-1$, und da wir $\left\{{s \atop r}\right\}_p=\left[{n \atop r}\right]_p$ angenommen haben, so ist $n'=n+m$, also $n=n'-m$ und $m=p-2$ anzunehmen, wenn wir aus $\left\{{s \atop r}\right\}_2$ das allgemeine Symbol $\left\{{s \atop r}\right\}_p$ bekommen wollen. Wegen $s'=s+rm$ erhält man daher $s'=n+r-1+rm=n'-m+r-1+rm=n'-(p-2)+r-1+r(p-2)=n'+(p-1)(r-1)$ und wenn man statt n', s' wieder allgemein n und s schreibt, so ergibt sich daraus die obige Formel. Demnach ist $\left\{{s \atop r}\right\}_p=\left[{s-pr+p+r-1 \atop r}\right]_p$ und $\left[{n \atop r}\right]_p=\left\{{n+pr-p-r+1 \atop r}\right\}_p$. (13) und (14) kann man also auch in der Form schreiben:

$$\left[{n \atop r}\right]_p=\left[{n-r \atop 1}\right]_p+\left[{n-r \atop 2}\right]_p+\dots\left[{n-r \atop r}\right]_p. \quad (15)$$

und $$\left[{n \atop r}\right]_p=\left[{n-1 \atop r-1}\right]_p+\left[{n-r \atop r}\right]_p. \quad (16).$$

Um in der Tabelle I eine Zahl z. B. $\left\{{12 \atop 3}\right\}_2$ oder, was dasselbe ist, $\left[{10 \atop 3}\right]_2$ zu finden, verfährt man folgendermaßen:

Man gehe von dem in der Kolumne für $r=1$ stehenden Gliede der nächstvorhergehenden Zeile in der Diagonale rechts hinauf bis zum Kreuzungspunkt der Diagonale mit der r-ten, hier also mit der dritten Kolumne, und addiere zu der so gefundenen Zahl alle vorhergehenden Zahlen in derselben Zeile, die Kolumne für $r=1$ noch eingeschlossen (nach (15)), oder man addiere zur nächsten Zahl links oben die im erwähnten Kreuzungspunkt befindliche Zahl! (nach (16)). Man erhält so für

$$\left[{10 \atop 3}\right]_2=\left[{9 \atop 2}\right]_2+\left[{7 \atop 3}\right]_2=4+3=7.$$

Die Fortsetzung der Tabelle ist nun sehr einfach.

Es existieren aber noch andere interessante Beziehungen zwischen den Zahlen der Tabelle. Man gewahrt daselbst eine stärker ausgezogene krumme Linie. Sie trennt 2 Kategorien von Zahlen. Bei den rechtsseitigen ist die Reihenfolge in der Zeile nach rechts und in der Kolumne nach oben die gleiche. Bei den anderen ist das nicht der Fall.

Aus (16) folgt durch Entwicklung des letzten Gliedes nach eben dieser Regel:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1-r \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1-2r \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1-3r \\ r-1 \end{bmatrix}_p$$

u. s. w., bis die Reihe abbricht. — — — — — — — — — — — — (17).

D. h., addiert man zu einer Zahl der $(r-1)$-ten Kolumne und $(n-1)$-ten Zeile jede r-te Zahl in der Kolumne aufwärts, so ergibt die Summe die nächste in der Diagonale nach rechts unten stehende Zahl.

Man kann die Tabelle auch nach links erweitern mit Hilfe der Formel (16): $\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p - \begin{bmatrix} n-r \\ r \end{bmatrix}_p$.

Für $r = 0$ erhält man überall Null, mit Ausnahme von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_2$, das $= 1$ ist, was schon aus der Umkehrungsreihe hervorgeht, da ja das Glied φ_1 nicht verschwindet. Alle übrigen durch negative Werte von n oder r bestimmten, in der Tabelle nicht vorhandenen Felder sind mit Nullen besetzt zu denken.

Ferner findet man aus (16), wenn man alle Zahlen einer Horizontalreihe addiert und wenn $H_{r=1}[n]_p$ diese Summe, $D_{r=1}[n]_p$ die Summe der nach rechts oben gerichteten Diagonale, beide von $r = 1$ ausgehend, und $V_{r=0}[n]_p$ die von n ausgehende Vertikalreihe der nullten Kolumne bedeutet: $H_1[n]_p = H_0[n-1]_p + D_1[n-1]_p$. — — — — — — — (18) und daraus durch Entwicklung von H:

$H_1[n]_p = V_0[n]_p + D_1[n-1]_p + D_1[n-2]_p + D_1[n-3]_p$ u. s. f., bis die Reihe abbricht, — — — — — — — — — — — — (19) das ist: der ganze Raum oberhalb $H_1[n]_p$ zwischen $V_0[n-1]_p$ und $D_1[n-1]_p$, beide eingeschlossen.

Ferner folgt aus (17), wenn man r unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen in der n-ten Zeile und r-ten Kolumne aufwärts addiert, daß dadurch die $(r-1)$-te Kolumne, von $(n-1)$ angefangen, gerade voll wird. Es ist also $V_r[n, n-r+1]_p$, d. h. die r Zahlen der Vertikalreihe in der r-ten Kolumne von n (inklusive) bis $(n-r+1)$ (inklusive) $= V_{r-1}[n-1]_p =$ der ganzen Vertikalreihe $(r-1)$ von $(n-1)$ angefangen, $(n-1)$ eingeschlossen. — — — — — — — — — — — — — — — (20).

Behandelt man ebenso die $(r-1)$ untersten Zahlen von V_{r-1}, sodann die $(r-2)$ untersten Zahlen von V_{r-2} u. s. f., so ergibt sich, daß $V_r[n, n-r+1]_p$ $(= V_{r-1}[n-1]_p)$ gleich ist dem ganzen rechteckigen Streifen zwischen V_0 und V_{r-1} als linker und rechter Begrenzung, beide eingeschlossen, und mit $n-r$ als unterer Grenze; oben ist der Streifen unbegrenzt. Der mathematische Ausdruck dafür ist

$V_r[n, n-r+1]_p = V_{0, r-1}[n-r]_p$. — — — — — — — — (21).

In den vorstehenden Formeln kann man die eckige Klammer durch die geschweifte ersetzen, wenn man darin für die Ordnungszahl n die entsprechende zu zerfällende Zahl s einsetzt.

$Hr\,\{s\}_p$ bezeichnet also eine Horizontalreihe mit dem Anfangsgliede $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p$, wie $Hr\,[n]_p$ eine solche mit dem Anfangsgliede $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p$. Eventuell vorkommende Endglieder werden vom Anfangsgliede durch einen Beistrich getrennt. Reduziert sich die Reihe auf ein Glied, so ist n resp. s doppelt zu schreiben und $Hr\,\{s, s\}_p$ sowie $Hr\,[n, n]_p$ fällt mit $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p$ resp. $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p$ zusammen. Gleiches gilt von den Reihen V und D.

Die Tabelle II unterscheidet sich von der Tabelle I nur dadurch, daß hier auch nach oben eine Grenze q festgesetzt wurde. In unserer Tabelle ist $q = 8$.

Zu den entsprechend modifizierten Fundamentalsätzen (11) und (12), nämlich

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} s - pr \\ 1 \end{Bmatrix}_{1,q-p} + \begin{Bmatrix} s - pr \\ 2 \end{Bmatrix}_{1,q-p} + \dots \begin{Bmatrix} s - pr \\ r \end{Bmatrix}_{1,q-p} \quad \text{— —} \quad (22),$$

wo man den untern Index 1 mit Hilfe des folgenden Satzes durch Addition von $p - 1$ und entsprechende Änderung der Summe auf p bringen kann, und $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} s + mr \\ r \end{Bmatrix}_{p+m,\, q+m}$ — — — — — — — — — (23)

kommen hier noch einige neue dazu.

Ein Blick auf die Tabelle II belehrt uns, daß die Vertikalreihen symmetrisch sind. Der Beweis ergibt sich aus (23), wenn man bedenkt, daß für negative Werte der drei Zahlen s, p, q alle bisher entwickelten Gesetze in Geltung bleiben müssen, da ja eine negative Zahl in ebensoviel negative Summanden zerfällt werden kann, wie die entsprechende positive Zahl in positive Summanden zerfällt werden kann. Es ist also

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} -s \\ r \end{Bmatrix}_{-p,\,-q}. \quad \text{— — — — — — — — — — — — —} \quad (24)$$

Dies, in Verbindung mit (23), liefert den Symmetriesatz:

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} r\,(p+q) - s \\ r \end{Bmatrix}_{p+q-p,\; p+q-q}. \quad \text{— — — — — —} \quad (25)$$

Es ändert sich also nur die Zahl s in $r\,(p + q) - s$, die übrigen drei Zahlen r, p, q bleiben unverändert; denn offenbar kann man die untere und die obere Grenze miteinander vertauschen, da es ja gleichgiltig ist, ob man die Summanden bei der Zerfällung fallend oder steigend anordnet.

Den Symmetriepunkt findet man, wenn man s gleichsetzt $r\,(p+q) - s$. Daraus folgt $2s = r\,(p + q)$; $s = \frac{r\,(p+q)}{2}$. Ist dieser Bruch teilbar, so ist die so erhaltene Zahl selbst der Symmetriepunkt, in der Tabelle II mit einem Sternchen gekennzeichnet. Ist sie nicht teilbar, so fällt der Symmetriepunkt in die Grenze zwischen 2 Zahlen.

Nun entwickeln wir für unsern speziellen Gebrauch, denn wir von den limitierten Zerfällungszahlen in dieser Abhandlung machen werden, nur noch einen Satz, der uns erlaubt, $\left\{{s \atop r}\right\}_{p,q}$ wenigstens für $r = 3$ und 2 aus der Tabelle I zu berechnen.

Sucht man beispielweise den Wert von $\left\{{18 \atop 4}\right\}_{2,8}$, so ist die Zahl offenbar $= \left\{{18 \atop 4}\right\}_2$, vermindert um die folgenden Fälle:

$$\text{den Fall 1)}\ \begin{array}{c} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ \hline 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 2+2+2+2 \end{array} \qquad \text{und die Fälle 2)}\ \begin{array}{c} \overbrace{1}\\ 1\\ \underbrace{1}\\ 1\\ \hline 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 2+2+2+2 \end{array}$$

, wo die eingeklammerten Einser auf die übrig bleibenden $r-1$ Kolumnen auf alle möglichen Arten zu verteilen sind.

Der Querstrich bezeichnet die obere Grenze, die von den einzelnen Summanden nicht überschritten werden darf.

Allgemein ist s', die Anzahl der Einser, $= s - pr$; q', die obere Grenze für die Einser, $= q - p$; $d' = s' - q'$, die über dem Querstrich befindlichen Einser im Falle 1); die Anzahl der Einser in der Klammer ist also $= d' - 1$. Der allgemeine Ausdruck für den Fall 1) ist $\left\{{d' \atop 1}\right\}_1$, für die Fälle 2):

$$\left\{{d'-1 \atop 1}\right\}_1 + \left\{{d'-1 \atop 2}\right\}_1 + \dots \left\{{d'-1 \atop r-1}\right\}_1 +$$
$$+ \left\{{d'-2 \atop 1}\right\}_1 + \left\{{d'-2 \atop 2}\right\}_1 + \dots \left\{{d'-2 \atop r-1}\right\}_1 +$$

— — — — — — — — — — — — — — u. s. f., bis die Vertikalreihen nach unten von selbst abbrechen. Wir erhalten somit unter Anwendung des Satzes (12) für $m = p - 1$ und nach Summierung der Vertikalreihen die Formel:

$$\left\{{s \atop r}\right\}_{p,q} = \left\{{s \atop r}\right\}_p - \left\{{d'+m \atop 1}\right\}_p - V_1\{d'-1+m\}_p - V_2\{d'-1+2m\}_p - \dots V_{r-1}\{d'-1+(r-1)m\}_p. \qquad (26),$$

die sich nach (21) noch weiter vereinfachen läßt. Nach (20) ist nämlich mit Rücksicht darauf, daß für $r = 1$ die eckige und die geschweifte Klammer zusammenfallen,

$\begin{Bmatrix} d'+m \\ 1 \end{Bmatrix}_p = V_1\,[d'+m,\, d'+m-1+1]_p = V_0\,[d'+m-1]_p$ und dadurch erhält der Satz mit Rücksicht auf $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} s-(p-1)(r-1) \\ r \end{bmatrix}_p$ die einfachere Form: $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p - V_{0,r-1}\,[d'-1+m]_p =$

$= \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p - V_r\,[d'-1+m+r,\, d'+m]_p$; also

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p - V_r\,[n-q+p-1,\, n-q+p-r]_p. \quad --- \quad (27)$$

Diese Formel gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß bei der Verteilung von $d'-1$ auf die übrigen Kolumnen keine der folgenden, also auch nicht die zweite das Niveau der ersten übersteigt. D. h. $s'-2q' \leqq 2$ oder $s' \leqq 2q'+2$. Nach Einsetzung der Werte für s' und q' und unter Beachtung des Symmetriegesetzes, wonach $2s = r(p+q)$ ist, erhält man $r(q-p) \leqq 4(q-p)+4$; also $r \leqq 4 + \frac{4}{q-p}$ und, da $q-p$ nicht negativ wird, $r \leqq 4$. Mit andern Worten: man kann mittelst (27) für $r \leqq 4$ alle Zahlen berechnen bis zum Symmetriepunkt, diesen selbst eingeschlossen, und da sich die Zahlen weiter unten in umgekehrter Folge wiederholen, so ist klar, daß die vorstehenden Formeln zur allgemeinen Berechnung der 4 ersten Kolumnen hinreichen.

Andere Relationen führe ich nur an. Die Anzahl der Summen mit dem ersten Summanden p bei der Zerfällung einer Zahl ist $\begin{Bmatrix} s-p \\ r-1 \end{Bmatrix}_{p,q}$, die Anzahl der übrigen Summen $= \begin{Bmatrix} s-p \\ r \end{Bmatrix}_{p+1,q}$.

Also 1) $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} s-p \\ r-1 \end{Bmatrix}_{p,q} + \begin{Bmatrix} s-p \\ r \end{Bmatrix}_{p+1,q}$.

2) $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} s \\ 1 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} s \\ 2 \end{Bmatrix}_1 + \dots \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_1$.

3) $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,p} = \begin{Bmatrix} s \\ p \end{Bmatrix}_{r,r}$ kann nur die Werte 1 oder 0 annehmen.

4) Für $q \geqq s-(r-1)p$ wird $\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{p,q} = \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_p$. Die schraffierte Linie in der Tabelle II trennt die mit der Tabelle I übereinstimmenden und nicht übereinstimmenden Zahlen voneinander.

IV.

Auflösung algebraischer Gleichungen. Wir wollen zunächst annehmen, die gegebene Gleichung, die wir in der Form schreiben: $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots a_{n-1} x + a_n = 0$, habe nur reelle Koeffizienten. (Natürlich braucht dieses n mit dem n des allgemeinen

Gliedes φ_n nicht zusammenzufallen). Zu ihrer Auflösung stehen mehrere Wege offen.

1) Man setzt a priori $h = 0$. Nun kann man es immer so einrichten, daß durch Verwandlung der Funktion $f(x)$ in eine andere: $f'(z^V)$ die Subtangente f'_0 sowie die neuen Quotienten f'_{II}, f_{III} etc. entweder Null oder echte Brüche werden. Ich setze zunächst $z = x + p$. Ist $p \geqq a + 1$ (a ist der absolute Wert des größten Koeffizienten), so werden dadurch alle reellen Wurzeln und von komplexen Wurzeln der reelle Bestandteil zu positiven Zahlen und > 1.

Beweis. Bekanntlich besteht die Beziehung: $(a+1)^n > a(a+1)^{n-1} + a(a+1)^{n-2} + \ldots a(a+1) + a$, da die rechte Seite der Ungleichung, die ich kurz mit R bezeichne, gleich ist $a \cdot \dfrac{(a+1)^n - 1}{(a+1) - 1} = (a+1)^n - 1$. Wir argumentieren nun so: $(a+1)^n - R$ kann unter keinen Umständen $= 0$ werden. Denn substituiert man in die Gleichung für x $a + 1$, so kann der Ausdruck $a_1 (a+1)^{n-1} + a_2 (a+1)^{n-2} + \ldots a_n$ nur kleiner sein als R, auch wenn alle Glieder positiv sind. Sind einige Glieder negativ, so wird der Ausdruck noch kleiner. Folglich ist in jedem Falle $(a+1)^n - R$ größer als Null. Es gibt also keinen absoluten Wert $\geqq a + 1$, der die gegebene Gleichung annullieren könnte. Daher ist $a + 1$ größer, als der absolute Wert der größten Wurzel. Will man auch die untere Grenze der Wurzeln berechnen, so braucht man nur die Stammgleichung in die entsprechende mit reziproken Wurzeln zu verwandeln und die obere Grenze in gleicher Weise zu bestimmen.

Sodann mache ich der Reihe nach $z^I = \dfrac{1}{z}$; dadurch werden alle Wurzeln zu echten positiven Brüchen. $z^{II} = n + z^I$; $z^{III} = \dfrac{1}{z^{II}}$ und $z^{IV} = n - 1 + z^{III}$; dadurch werden die absoluten Werte der Wurzeln auf den Zwischenraum zwischen $n - 1 + \dfrac{1}{n}$ und $n - 1 + \dfrac{1}{n+1}$ beschränkt. Endlich wird $z^V = -z^{IV}$ gemacht; dadurch wird erreicht, daß alle Koeffizienten der Gleichung $f'(z^V)$ positiv werden und infolgedessen die Vorzeichen der Umkehrungsreihe intakt bleiben. Der Satz, daß man f_1 größer als f und zugleich größer als $f_2, f_3, \ldots f_n$ und so alle Quotienten $f_0, f_{II}, f_{III} \ldots$ kleiner als eins machen kann, ist an und für sich bemerkenswert. Wir ziehen aber daraus in dieser Abhandlung keine weiteren Konsequenzen, da der Konvergenzbeweis nicht leicht ist und im Falle einer langsamen Konvergenz die Reihe sowieso in der Praxis wenig brauchbar wäre.

2) Da man also in der Praxis nur energisch konvergierende Reihen brauchen kann und man weiß, daß Potenzreihen nur in der Nähe der

Wurzeln stark konvergieren, so verfährt man am rationellsten, wenn man durch eine der bekannten Näherungsmethoden h ziemlich nahe an einer Wurzel bestimmt. Wir wollen nun beweisen, daß man in jedem Fall ein h finden kann, für welches die Umkehrungsreihe sehr rasch konvergiert. Zu diesem Behufe modifiziere und ergänze ich die Gräffe'sche Methode nach mehrern Richtungen hin.

Dabei habe ich mir in erster Linie zur Aufgabe gestellt, rasch über alle bei der Auflösung algebraischer Gleichungen in Betracht kommenden Fälle einen Überblick zu gewinnen und es auf dem kürzesten Wege evident zu machen, daß und wie allgemein und nach einer sichern Methode eine Auflösung möglich ist. Bei der Ausführung im besondern kann es sich natürlich bei diesen Rechnungen nur um eine relative Raschheit handeln. Denn wer sich nur einigermaßen mit diesem Problem beschäftigt hat, der wird wissen, wie sich gerade bei diesen Rechnungen die Schwierigkeiten häufen. Kaum ist ein Fall erledigt, so knüpft sich an den gelösten Fall ein neuer, für den das bisher Gefundene nicht mehr gilt, und man steht wieder vor einer ganz neuen Aufgabe.

Beim Ausdruck „sichere Methode" denke ich speziell an die Bedingung, daß alle Versuchsrechnungen ausgeschlossen sein sollen, deren Anzahl mit n wachsen und eine kleine, auch im allgemeinsten Falle besondere, von n unabhängige Zahl übersteigen würde und die nicht rasch zu einer Entscheidung führten.

Gräffe leitet aus einer gegebenen Gleichung, ohne ihre Wurzeln zu kennen, eine andere ab, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Durch die Substitution $x = \sqrt{z}$ in die gegebene Gleichung und nach der Entfernung der Quadratwurzeln erhält er eine Gleichung:

$$z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-1} + \ldots C_{n-1} z + C_n = 0, \text{ wobei}$$

$$C_1 = -(a_1^2 - 2a_2),\; C_2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4,$$

$$C_3 = -(a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_6),\; C_4 = a_4^2 - 2a_3 a_5 + 2a_2 a_6 - 2a_1 a_7 + 2a_8, \text{ u. s. w.}$$

Ich erhebe die Wurzeln zur 3ten, also zu einer ungeraden Potenz, wodurch die Vorzeichen der Wurzeln unverändert bleiben, und vermeide dadurch einerseits Versuchsrechnungen zur Bestimmung des Vorzeichens der Wurzeln, anderseits nehmen die Potenzen bei der Wiederholung des Verfahrens viel schneller zu. Das Verfahren wird nämlich so oft wiederholt, wie man will, und während Gräffe auf diese Weise die 4., 8., 16., 32., . . . Potenz der Wurzeln erhält, bekommen wir dafür Potenzen des 9., 27., 81., 243. . . . Grades. In beiden Fällen ist in der so gefundenen Endgleichung: $z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots A_{n-1} z + A_n = 0$

$A_1 = -(x_1^m + x_2^m + \ldots x_n^m)$ oder annähernd, wenn wir $|x_1| > |x_2| > \ldots |x_n|$ annehmen, da gegen x_1^m bei hinreichend großem m die übrigen Glieder verschwinden, $= -x_1^m$ ☆ (der Asteriskus soll andeuten, daß der gefundene Wert nur approximativ ist).

$$A_2 = x_1^m x_2^m ☆, \; A_3 = -x_1^m x_2^m x_3^m ☆, \; \ldots . \; A_n = (-1)^n x_1^m x_2^m \ldots x_n^m.$$

Daraus findet man:

$$x_1 = \sqrt[m]{-A_1} ☆, \quad x_2 = \sqrt[m]{\frac{-A_2}{A_1}} ☆, \quad x_3 = \sqrt[m]{\frac{-A_3}{A_2}} ☆, \ldots$$

$$x_n = \sqrt[m]{\frac{-A^n}{A_{n-1}}} ☆.$$

Die zweite Änderung der Gräffe'schen Methode besteht darin, daß ich in derselben Weise auch die reziproken Wurzeln $\frac{1}{x^m}$ berechne, nachdem man die Stammgleichung in die entsprechende mit reziproken Wurzeln verwandelt hat. Vorher kann man $f(x)$ durch die Substitution $x = px'$ so umformen, daß das letzte Glied $= 1$ wird. Der reziproke Wert dieser reziproken Wurzeln liefert dann eine zweite Reihe von approximativen Werten für x. Soweit nun die beiden Werte übereinstimmen, auf soviel Dezimalen kann x als bestimmt angenommen werden. Diese Werte nun, in die Umkehrungsreihe für h eingesetzt, liefern dann die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit.

Sollte die Reihe nicht hinreichend rasch konvergieren, so kann man ja das Gräffe'sche Verfahren so lange fortsetzen, bis man einen passenden Wert für h findet.

Die Voraussetzung für die vorstehende Methode war allerdings die, daß alle Wurzeln reell und voneinander verschieden sind.

Wir wollen nun zeigen, wie man aus einer gegebenen Gleichung eine andere mit zur dritten Potenz erhobenen Wurzeln ableitet.

Die gegebene Gleichung verwandelt sich durch die Substitution $x = \sqrt[3]{z}$, $a_0 = 1$ gesetzt, in die folgende:

$a_0 z^{\frac{n}{3}} + a_1 z^{\frac{n-1}{3}} + a_2 z^{\frac{n-2}{3}} + \ldots = 0$. Für $n = 6$ lautet die Gleichung:

$$a_0 z^2 + a_1 z^{\frac{5}{3}} + a_2 z^{\frac{4}{3}} + a_3 z + a_4 z^{\frac{2}{3}} + a_5 z^{\frac{1}{3}} + a_6 = 0.$$

Daraus folgt: $a_0 z^2 + a_3 z + a_6 = -a_1 z \cdot z^{\frac{2}{3}} - a_2 z \cdot z^{\frac{1}{3}} - a_4 z^{\frac{2}{3}} - a_5 z^{\frac{1}{3}}$;

$a_0 z^2 + a_3 z + a_6 = -(a_1 z + a_4) z^{\frac{2}{3}} - (a_2 z + a_5) z^{\frac{1}{3}}$; $(a_0 z^2 + a_3 z + a_6)^3$

$= -(a_1 z + a_4)^3 z^2 - (a_2 z + a_5)^3 z + 3(a_1 z + a_4)(a_2 z + a_5) z (a_0 z^2 + a_3 z + a_6).$

$$a_0^3 z^6 + (3a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_1^3) z^5 +$$
$$+ (3a_0^2 a_6 - 3a_0 a_1 a_5 - 3a_0 a_2 a_4 + 3a_0 a_3^2 + 3a_1^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 + a_2^3) z^4 +$$
$$+ (6a_0 a_3 a_6 - 3a_0 a_4 a_5 - 3a_1 a_2 a_6 - 3a_1 a_3 a_5 + 3a_1 a_4^2 + 3a_2^2 a_5 - 3a_2 a_3 a_4 +$$
$$+ a_3^3) z^3 + (3a_0 a_6^2 - 3a_1 a_5 a_6 - 3a_2 a_4 a_6 + 3a_2 a_5^2 + 3a_3^2 a_6 - 3a_3 a_4 a_5 +$$
$$+ a_4^3) z^2 + (3a_3 a_6^2 - 3a_4 a_5 a_6 + a_5^3) z + a_6^3 = 0.$$

Wir sehen in der Bildung der Koeffizienten folgende Gesetzmäßigkeiten, die, wie man aus der vorletzten Gleichung leicht ersehen kann, für jedes n gelten müssen.

1) Alle Koeffizienten sind ein Produkt dreier Faktoren; also ist $r = 3$. 2) Die Summe der Indizes ist der Reihe nach: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18. Denken wir uns, um die Tabelle II auf unsern Fall anwenden zu können, alle Indizes um 2 vermehrt, so daß wir für a_0^3 b_2^3, für $a_0^2 a_3$ $b_2^2 b_5$ erhalten u. s. f., so beträgt dann die Indizessumme: 6, 9, 12, ... 24. Zu jedem z^k $(k = 0, 1, 2, \ldots 6)$ gehören dann alle möglichen Kombinationen dreier Faktoren b_i $(i = 2, 3, \ldots 8)$ mit der Zeigersumme $s = 6 + 3(n - k)$. 3) Die Anzahl der zu jedem z^k gehörigen Koeffizienten beträgt $\left\{ {s \atop r} \right\}_{2,8}$; also in unserm speziellen Fall, wie man aus der Tabelle II entnehmen kann, $\left\{ {6 \atop 3} \right\}_{2,8} = 1 = \left\{ {24 \atop 3} \right\}_{2,8}$, $\left\{ {9 \atop 3} \right\}_{2,8} = 3 = \left\{ {21 \atop 3} \right\}_{2,8}$, $\left\{ {12 \atop 3} \right\}_{2,8} = 7 = \left\{ {18 \atop 3} \right\}_{2,8}$ und $\left\{ {15 \atop 3} \right\}_{2,8} = 8$. 4) Der numerische Faktor zu jedem $b_2^\alpha b_3^\beta \ldots b_8^\nu$ ist gleich $\dfrac{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!}{\alpha! \ \beta! \ \ldots \nu!}$, wenn die Indizes untereinander nach dem Modulus 3 kongruent sind. 5) Sind 2 Indizes inkongruent, so ist jeder mit dem dritten inkongruent. In diesem Fall ist der numerische Faktor allgemein: -3.

E r k l ä r u n g. Trägt man die natürlichen Zahlen anstatt in einer Richtung im Kreise herum auf die Strahlen eines n-strahligen Büschels auf, so nennt man alle Zahlen eines und desselben Strahls untereinander kongruent; auf verschiedenen Strahlen befindliche Zahlen sind untereinander inkongruent. Die Anzahl der Strahlen nennt man den Modulus der Kongruenz und schreibt: $a \equiv b \pmod{n}$ So ist, wie aus der Figur 1 zu entnehmen ist:

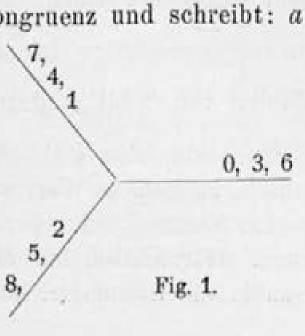

Fig. 1.

$$0 \equiv 3 \equiv 6 \pmod 3$$
$$1 \equiv 4 \equiv 7 \pmod 3$$
$$2 \equiv 5 \equiv 8 \pmod 3.$$

Trennung der gleichen von den ungleichen Wurzeln. Kommen in der gegebenen Gleichung gegen unsere vorläufige Annahme neben ungleichen Wurzeln auch gleiche vor, so kann man die letztern von den erstern absondern. Schreibt man die gegebene Gleichung $f(x)$ in der Form eines Produktes: $f = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$ und sind einige Wurzeln einander gleich, etwa $(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \ldots$, $\alpha = 2, 3 \ldots \nu$, ebenso β, dann ist der erste Differentialquotient $f_1 = \alpha (x - x_1)^{\alpha - 1} (x - x_2)^\beta \ldots + \beta (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^{\beta - 1} + \ldots\ldots$ Das größte gemeinschaftliche Maß der Funktionen f und f_1 ist offenbar $(x - x_1)^{\alpha - 1} (x - x_2)^{\beta - 1} \ldots = f'(x)$. Hat die letztere Gleichung wieder mehrere gleiche Wurzeln, so verfährt man mit ihr wie mit der Stammgleichung, bis man eine Endgleichung bekommt, wo nur noch voneinander verschiedene Wurzeln vorhanden sind.

Unterscheiden sich 2 Wurzeln nur durch das Vorzeichen voneinander, sei es daß beide reell oder beide rein imaginär sind, so kann man sie, indem man sie zum Quadrat erhebt, gleich machen, und dann von den übrigen Wurzeln absondern.

Komplexe Wurzeln. Kommen in einer Gleichung mit reellen Koeffizienten auch komplexe Wurzeln vor, so müssen bekanntlich je 2 zueinander konjugiert sein. Das ist ein Fall, wo 2 Wurzeln zwar ungleich sind, aber doch einen gleichen absoluten Wert haben. In diesem ganz neuen dritten Fall, wo also $|x_1| = |x_2| > |x_3| > \ldots |x_n|$, ist $A_1 = -(x_1^m + x_2^m) \star$ zu setzen und $A_2 = x_1^m x_2^m \star$. Schreibt man für $x_1 = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und für x_2, da es zu x_1 konjugiert ist, $r_1 (\cos \alpha - i \sin \alpha)$, so ist $x_1^m = r_1^m (\cos m\alpha + i \sin m\alpha)$ und $x_2^m = r_1^m (\cos m\alpha - i \sin m\alpha)$, also $A_1 = -2 r_1^m \cos m\alpha \star$ und $A_2 = r_1^{2m} (\cos^2 m\alpha + \sin^2 m\alpha) \star = r_1^{2m} \star$; daher $r_1 = \sqrt[2m]{A_2} \star$ und $\cos m\alpha = -\frac{A_1}{2 r_1^m} \star = \frac{-A_1}{2\sqrt{A_2}} \star$ — — (28).

Wir nennen diesen Wert kurz $\mathfrak{a}$.

Aus dieser Relation folgt $m\alpha = \arccos \mathfrak{a} \mp 2\pi k$, k eine ganze Zahl, und $\alpha = \frac{1}{m} \arccos \mathfrak{a} + 2\pi \cdot \frac{k}{m}$, eine scheinbar sehr einfache Formel, doch in dieser Gestalt praktisch fast unbrauchbar. Man vergegenwärtige sich nur, was $\frac{k}{m}$ zu bedeuten hat. Da k alle ganzen Zahlen von 0 bis m durchlaufen kann und m ja in den meisten Fällen eine sehr hohe Zahl sein wird, etwa 81 oder gar 243, so müßte man, um den wahren Wert von α zu finden, versuchsweise m Substitutionen in die Stammgleichung vornehmen, um nur einen Wert behalten zu können. Wir müssen uns also nach einem andern Mittel umsehen. Würde man in die Stammgleichung für x $u+vi$ einsetzen, so erhielte man 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, die eine vom n-ten, die andere vom n'-ten Grade ($n' < n$); würde man nun die eine Unbekannte eliminieren, so erhielte man schließlich eine Gleichung vom $n \cdot n'$-ten Grade, worin nur eine Wurzel den wahren Wert repräsentiert. Also wieder nn' Versuchsrechnungen und dazu noch die Auflösung einer Gleichung vom höhern Grade als die Stammgleichung! Ich erwähne das alles, um es recht klar zu machen, daß der Weg, den wir, um diese letzte Klippe zu umgehen, einschlagen, trotz der etwas langwierigen Rechnungen im Vergleich zu den vorhandenen Schwierigkeiten doch noch als ein einfacher Ausweg erscheint und daß unsere Modifikation der Gräffe'schen Methode, die Erhebung der Wurzeln zum Kubus, nun neben der letztern sich als eine Notwendigkeit erweist.

Ich leite nun aus der Stammgleichung auch nach der Gräffe'schen Methode, (das Vorzeichen der Wurzeln ist ja schon durch unser Verfahren bestimmt worden) eine Endgleichung ab, worin die Wurzeln zur m'-ten Potenz erhoben sind. Man kann auch mit beiden Verfahren abwechseln und erhält so eine dritte, wenn nötig, auch eine vierte Endgleichung u. s. f., worin die Exponenten $m', m'', m''', \ldots$ eine von den Zahlen $2^p\, 3^q$ (p und q beliebige ganze Zahlen) bedeuten. Man erhält so neben $m\alpha = arccos\, \mathfrak{a} + 2\pi k \star$ noch andere Gleichungen $m'\alpha = arccos\, \mathfrak{a}' + 2\pi k' \star$, $m''\alpha = arccos\, \mathfrak{a}'' + 2\pi k'' \star$ u. s. w. Wenn man nun diese Gleichungen in passender Weise addiert, resp. subtrahiert, so wird es immer möglich sein, eine Kombination zu finden, für welche $m\alpha \mp m'\alpha \mp m''\alpha + \ldots = \alpha$ ist. So ist, um ein Beispiel anzuführen, $32 - 27 = 5$, $256 - 243 = 13$, $81 - 64 = 17$; und endlich $13 + 5 - 17 = 1$. Demnach $\alpha = arccos\, \mathfrak{a} \mp \mp arccos\, \mathfrak{a}' \mp arccos\, \alpha'' + \ldots . (k \mp k' \mp k'' + \ldots) 2\pi \star$, — — — (29).
worin $k \mp k' \mp k'' + \ldots$ wieder eine ganze Zahl ist.

Da ferner $-(x_1^m + x_1^m) = A_1$ und $x_1^m x_2^m = A_2$ die Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, so kann man auch schreiben:

$$z^2 + A_1 z + A_2 = 0; \text{ also}$$

$$z = x_1^m,\ x_2^m = -\frac{A_1}{2} \mp \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2} \star \text{ und}$$

$$x_1, x_2 = \sqrt[m]{-\frac{A_1}{2} \mp \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2} \star} \text{ — — — — — (30).}$$

Natürlich begreift diese Lösung auch den Fall in sich, daß die größten Wurzeln reell, gleich oder ungleich, sind. Doch ist der Wurzelausdruck m-deutig; er kann nach (29) eindeutig gemacht werden. Es entfällt also, wenn man die Formel (30) anwendet, die vorherige Untersuchung darüber, ob die beiden höchsten Wurzeln, komplex oder reell, gleich oder ungleich sind.

Doch wie überzeugt man sich davon, wann man mit Potenzierungen der Wurzeln aufhören kann? Antwort: Wenn sich die Werte für x_1 resp. r_1 und α in der nächstfolgenden Gleichung mit Rücksicht auf die für den besondern Zweck in Betracht kommende Genauigkeit nicht mehr ändern.

Durch die vorstehenden Formeln sind jedoch noch nicht alle möglichen Fälle erledigt. Es kann auch vorkommen, daß 3 Wurzeln, 2 komplexe und eine reelle, dem absoluten Werte nach gleich sind oder 2 komplexe Wurzelpaare u. s. f., ja es können auch alle Wurzeln, absolut genommen, einander gleich sein und sich nur durch den Richtungskoeffizienten voneinander unterscheiden.

Ein Kriterium für die Anzahl der quantitativ gleichen größten Wurzeln findet man durch folgende Erwägungen:

Gibt es k quantitativ unter sich gleiche größte Wurzeln $z = x^m$ und sind die übrigen $n - k$ Wurzeln gegen sie verschwindend klein, so ist, wenn r den absoluten Wert dieser Wurzeln bezeichnet, $A_k = (-1)^k r^k ☆$, da ja das Produkt ihrer Richtungskoeffizienten $e^{i\alpha - i\alpha} . e^{i\beta - i\beta} \ldots = 1$ ist und die übrigen Summanden in A_k gegen das erste Glied verschwinden. Ist also bei der nächsthöhern oder bei mehrern aufeinander folgenden Endgleichungen mit den Wurzelexponenten $m, m', m'', \ldots$ ($\mu = m' - m$, $\mu' = m'' - m', \ldots$ eine gerade Zahl) $A'_k = A_k^{m'-m}$, $A''_k = A_k'^{m''-m'}$ u. s. w., während von den vorhergehenden Gliedern $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots$ dies nicht gilt, so ist das ein Kennzeichen dafür, daß die absoluten Werte von k der höchsten Wurzeln der Stammgleichung einander gleich sind. — — (31). Denn, wenn diese Relation bei einem Gliede A_k stattfindet, so ist das ein Beweis dafür, daß die Wurzeln $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots$ gegen die frühern verschwinden, x_{k+1}, x_{k+2}, also kleiner sind als $x_1, x_2, \ldots x_k$. Wären aber die ersten k Wurzeln nicht einander gleich, so müsste die Relation schon bei einem frühern Gliede stattfinden. Die Relation kann auch nicht stattfinden, weder bei einem frühern Gliede als A_k bei k quantitativ gleichen Wurzeln noch bei A_k, wenn mehr als k Wurzeln quantitativ einander gleich sind. Denn in diesem Falle besteht sicher für ein gerades $\mu = m' - m$ wenigstens eines der beiden Glieder A_k und A'_k aus mehr als einem Summanden, die nicht verschwinden, etwa $A_k = w_{k1} + w_{kh}$. Dann aber kann $w_{k1}^{\mu} + w_{kh}^{\mu}$ nicht gleich sein $(w_{k1} + w_{kh})^{\mu}$. Wäre mit $z_1, \ldots z_k$ noch das konjugierte Wurzelpaar z_{k+1} und z_{k+2} quantitativ gleich, so kommt zum ersten Gliede von A_k $z_1, \ldots z_k$, welches wir mit w_{k1} bezeichnet haben, noch wenigstens ein Glied dazu, welches nicht verschwindet, nämlich w_{kh}, in dem das neue Wurzelpaar als Produkt vorkommt. Wäre mit $z_1, z_2, \ldots z_k$ noch e i n e reelle Wurzel z_{k+1} quantitativ gleich, so könnte allerdings in $z_1 \ldots z_k + z_{k+1} \,(2r^m \cos\alpha + 2r^m \cos\beta + \ldots)$ trotz großer Werte von r^m das zveite Glied wegen der Kleinheit der Kosinusse verschwinden, jedoch nicht mehr in A'_k bei geradem μ (etwa $\mu = 2$) wegen $r^{m'} . \cos 2\alpha = r^{m'} (2 \cos\alpha - 1) = 2 r^{m'} \cos\alpha - r^{m'}$. Denn wenn $\cos\alpha$ verschwindet, so verschwindet nicht $\cos 2\alpha$ und umgekehrt.

Um nun diese k-Wurzeln zu bestimmen, hat man nur zu schreiben: $z^k + A_1 z^{k-1} + \ldots A_{k-1} z + A_k = 0$, worin nun keine quantitativ ungleichen Wurzeln mehr vorkommen.

Ich ersetze nun in der vorstehenden Gleichung die Größe z durch $Z \mp r$. (Von den beiden Vorzeichen $\mp$ ist, damit mit Rücksicht auf die nur approximativen Wertbestimmungen die Wurzeln nicht zu klein werden, das mit dem Vorzeichen von A_1 übereinstimmende zu wählen). Dadurch werden alle Wurzeln bis höchstens auf ein Wurzelpaar quantitativ voneinander verschieden und es kann nun nicht geschehen, daß man durch die Substitution $Z \mp r$ den Nullpunkt der Zahlenebene an einen Ort verlegt, wo 3, 4 oder noch mehr von den neuen Wurzeln einander gleich werden könnten. Eine eventuelle weitere Substitution $Z = q Z'$, um das letzte Glied $= 1$ zu machen, alteriert unser Resultat nicht, da sich ja die Wurzeln dabei nur proportional ändern.

Hat man so die k größten Wurzeln gefunden, so wird die Stammgleichung durch $(x - x_1) \ldots (x - x_k)$, dividiert und so der Grad der gegebenen Gleichung um k erniedrigt. Mit der neuen Gleichung verfährt man in gleicher Weise. Man braucht die Potenzierungen nicht noch einmal vorzunehmen, sondern man findet beispielsweise für $k = 2$, den Koeffizienten C_1 der neuen Gleichung $z^{n-2} + C_1 z^{n-3} + C_2 z^{n-4} + \ldots = 0$, indem man $A_3 = - x_1^m x_2^m (x_3^m + x_4^m + \ldots) \star$ durch $x_1^m x_2^m$ dividiert. In entsprechender Weise wird C_2 bestimmt, u. s. f.

Komplexe Koeffizienten. Es ist nur noch ein Fall kurz zu besprechen: die gegebene Gleichung hat komplexe Koeffizienten. Man kann in diesem Falle einfach die gegebene Gleichung mit der entsprechenden konjugierten multiplizieren. Diese letztere liegt zur erstern symmetrisch in Bezug auf die Abszissenachse. Es wird so die gegebene Gleichung in eine solche mit reellen Koeffizienten verwandelt. Eine Substitution der daraus gefundenen Wurzeln in die ursprüngliche Gleichung entscheidet über das Vorzeichen des imaginären Bestandteils der Wurzel.

Wir haben uns nun überzeugt, daß unser Verfahren wirklich in jedem Fall zum Ziele führt. In sehr vielen Einzelfällen wird es natürlich möglich sein, direkt ein h zu finden, welches die Konvergenz der Umkehrungsreihe verbürgt.

V.

In den Fällen, wo man direkt die Konvergenzkonstante h nicht bestimmen kann, haben sich, wie Kapitel IV gezeigt hat, als notwendige Vorstufe für die Benützbarkeit der Umkehrungsreihe ziemlich langwierige Rechnungen ergeben, die genügend lange fortgesetzt, wenigstens, was die algebraischen Gleichungen anbetrifft, die Umkehrungsreihe sogar entbehrlich erscheinen lassen. Worin besteht also der Wert der Umkehrungsreihe? Ich will in der Antwort darauf die Begriffe „theoretisch" und „praktisch" gar nicht anwenden, weil, was jetzt praktisch ist, wenn man ein besseres Mittel für den betreffenden Zweck gefunden hat, wertlos werden und umgekehrt, was jetzt nur „theoretischen" Wert besitzt, eminent praktische Bedeutung erlangen kann. Um mich kurz zu fassen, die Umkehrungsreihe ist ein analytischer Ausdruck, mit dem man weiter operieren kann. Man kann sie multiplizieren, potenzieren, differenzieren, in andere Formen überführen und auf alle möglichen Arten variieren, während die gewöhnlichen Näherungsmethoden, obgleich sie für spezielle Zwecke von großem Werte sind, diese Eigenschaft, da sie eines einheitlichen Ausdruckes entbehren, natürlich nicht besitzen können.

Variation der Umkehrungsreihe. Die funktionellen Zahlen σ und ε. Unter Variation verstehe ich hier ganz allgemein eine Änderung des Ausdruckes. Dies kann geschehen: erstens durch Verwandlung der Umkehrungsreihe in einen unendlichen Kettenbruch, auf dessen Verwandschaft mit der Reihe schon das abwechselnde Vorzeichen der Glieder deutlich hinweist, oder man variiert die gegebene Funktion, entweder indem man das Argument x durch eine neue Funktion $\mathfrak{F}(x)$ ersetzt, oder, indem man die gegebene Funktion zum Argumente einer neuen macht oder beides miteinander verbindet. Das Symbol dafür ist also $Ff\mathfrak{F}(x) = y = 0$. Diese Änderungen haben den Zweck, eine Reihe zu entwickeln, welche für ein bestimmtes h, etwa $h = 0$, konvergiert und wenigstens die diesem h entsprechende Wurzel mit der Stammgleichung gemein hat.

Alle diese Änderungen können jedoch nur eine Vereinfachung der Lösung einer Aufgabe herbeiführen, auf die wir schon im vorigen Kapitel eine positive Antwort erhalten haben. Es fehlt uns der Raum, alle diese Variationen wirklich auszuführen und wir beschränken uns auf bloße Andeutungen. Diese Variationen können aber noch andere Zwecke verfolgen, und wir wollen speziell nur an denjenigen Stellen etwas länger verweilen, wo neue Beziehungen zwischen den uns schon bekannten oder neuen „funktionellen" Zahlen aufgedeckt werden, denen wir ja schon im ersten Teil unserer Abhandlung eine größere Aufmerksamkeit zugewendet haben.

1) $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$ ist gegeben. Daraus folgt $x^n = -(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n)$; $x = \sqrt[n]{-(a\,x^{n-1} + \ldots a^n)}$ und endlich $x - \sqrt[n]{-(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n)} = 0$. Da der Wurzelausdruck n-deutig ist, so könnte man daraus für ein passendes h alle Wurzeln der Gleichung aus der Umkehrungsreihe erhalten.

2) $lf(x) = g(x) = y$. Da $f(x) = 0$ ist, so ist y in der Umkehrungsreihe $= 1$ zu setzen. Es ist $g_1 = \frac{f_1}{f}$, $g_2 = \frac{f_2}{f} - \frac{f_1^2}{f^2}$; $g_3 = \frac{f_3}{f} - \frac{3f_2 f_1}{f^2} + \frac{2f_1^3}{f^3}$; $g_4 = \frac{f_4}{f} - \frac{4f_3 f_1 + 3f_2^2}{f^2} + \frac{12 f_2 f_1^2}{f^3} - \frac{6f_1^4}{f^4}$;

$$g_5 = \frac{f_5}{f} - \frac{5f_4 f_1 + 10 f_3 f_2}{f^2} + \frac{20 f_3 f_1^2 + 30 f_2^2 f_1}{f^3} - \frac{60 f_2 f_1^3}{f^4} + \frac{24 f_1^5}{f^5};$$

$$g_6 = \frac{f_6}{f} - \frac{6f_5 f_1 + 15 f_4 f_2 + 10 f_3^2}{f^2} + \frac{30 f_4 f_1^2 + 120 f_3 f_2 f_1 + 30 f_2^3}{f^3}$$
$$- \frac{120 f_3 f_1^3 + 270 f_2^2 f_1^2}{f^4} + \frac{360 f_2 f_1^4}{f^5} - \frac{120 f_1^6}{f^6}.$$

Das allgemeine Bildungsgesetz der Koeffizienten für ein Glied $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$, wenn wir wieder die Anzahl der Faktoren mit r bezeichnen, lautet: $(-1)^{r-1} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!\,(r-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^\alpha\,b!^\beta\ldots n!^\nu}$, und ihre Summe für jedes g_n ist $= 0$. — — — — — — — — — — — — — — — — — (32)

3) Setzt man für F den hyperbolischen Sinus, so wird $\mathfrak{Sin}\,p\,f(x) = g(x) = y = 0$; p ist eine beliebige Konstante. Die Werte für x, welche $f(x)$ annullieren, genügen auch der Gleichung $\mathfrak{Sin}\,pf = 0$. Die nach Potenzen fortschreitende Größe $g_0 = \frac{g}{g_1}$ ist offenbar $\frac{\mathfrak{Sin}\,pf}{pf_1\,\mathfrak{Cos}\,pf} = \frac{\mathfrak{Tg}\,pf}{pf_1}$. Für reelle pf ist $\mathfrak{Tg}\,pf$ immer ein echter Bruch und, da wir über p beliebig verfügen, können wir mittelst dieser Konstanten für g_0 einen beliebigen Wert zwischen 0 und 1 festsetzen. Nun ist $g_1 = pf_1\,\mathfrak{Cos}\,pf$; $g_2 = p^2 f_1^2\,\mathfrak{Sin}\,pf + pf_2\,\mathfrak{Cos}\,pf$; $g_3 = 3p^2 f_1 f_2\,\mathfrak{Sin}\,pf + (p^3 f_1^3 + pf_3)\,\mathfrak{Cos}\,pf$; $g_4 = (p^4 f_1^4 + 4p^2 f_1 f_3 + 3p^2 f_2^2)\,\mathfrak{Sin}\,pf + (6p^3 f_1^2 f_2 + pf_4)\,\mathfrak{Cos}\,pf$; u. s. f.

Dies genügt, um das Gesetz der Koeffizientenbildung zu erkennen. Es ist dasselbe Gesetz wie in der Umkehrungsreihe für $f(x)$, nur daß der niedrigste Index auch 1 sein kann und das Vorzeichen immer positiv ist. D. h. $\mathrm{K}\,f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^\alpha\,b!^\beta\ldots n!^\nu} = \varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots \varkappa_n^\nu$. — — (33).

Der Exponent von p ist $= r = \alpha + \beta + \ldots \nu$.

Substituiert man die so gewonnenen Werte $g_1, g_2, g_3, \ldots$ der Gleichung 2) und 3) in die Umkehrungsreihe und nennt die neue Potenzgröße in

2): $\mathfrak{P}$ und in 3) $\mathfrak{Q}$, so ergibt sich in beiden Fällen die merkwürdige Tatsache, daß im allgemeinen Gliede in 2): $\frac{\mathfrak{P}^n}{n!}(\varphi_N + \mathfrak{A}_n)$ ebenso wie in 3): $\frac{\mathfrak{Q}^n}{n!}(\varphi_N + \mathfrak{B}_n)$ der Ausdruck φ_N unverändert wieder erscheint, nur additiv vermehrt um ein Polynom $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$ — — — — — — — — (34).

In 2) ist außerdem die Koffizientensumme von $\varphi_N - \mathfrak{A}_n$ wieder $= 0$.

4) Man kann aus $Ff(x) = g(x)$, auch eine unendliche Reihe bilden, so daß $g(x) = p_1 f + p_2 f^2 + p_3 f^3 + \ldots$ in inf.; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sind beliebige konstante Größen.

Ist also $f(x) = 0$, so ist auch $g(x) = 0$.

Es ist dann $g_1 = p_1 f_1 + 2p_2 ff_1 + 3p_3 f^2 f_1 + \ldots.$

$g_2 = p_1 f_2 + 2p_2(ff_2 + f_1^2) + 3p_3(f^2 f_2 + 2ff_1^2) + \ldots.;$

allgemein $g_1 = k_{11} p_1 + k_{12} p_2 + k_{13} p_3 + \ldots.$

$g_2 = k_{21} p_1 + k_{22} p_2 + k_{23} p_3 + \ldots.$

— — — — — — — — — —, worin $k_{11}, k_{12}, \ldots k_{21}, \ldots$ irgendwelche Verbindungen von $f, f_1, f_2 \ldots.$ bedeuten. Setzt man nun $g_1 g_2, \ldots$ der Reihe nach $= 1$, berechnet mittelst Determinanten aus dem obigen System von unendlich vielen Gleichungen die Größen $p_1, p_2, \ldots$ (die zu p_1 gehörige Determinante bezeichnen wir mit D_1, die zu p_2 gehörige mit D_2 u. s. f. und die Determinante des Systems mit D_0), so ist

$$p_1 = \frac{D_1}{D_0},\ p_2 = \frac{D_2}{D_0},\ \text{u. s. w.},\ g(x) = \frac{D_1}{D_0}f + \frac{D_2}{D_0}f^2 + \frac{D_3}{D_0}f^3 + \ldots\ldots$$

und $x = l\left(1 + \frac{D_1}{D_0}f + \frac{D_2}{D_0}f^2 + \ldots\right)$. — — — — — — — — — (35).

Die Reihe ist, wenn $f < 1$, was man immer erreichen kann, und wenn kein Quotient $\frac{D^n}{D_0} = \infty$ ist, konvergent. Für andere Werte für $g_1, g_2, \ldots$ würde man anstatt l auch wieder andere Funktionen (z. B. *arcsin*) erhalten.

Erklärung. Das Symbol 1) $\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}$ nennt man eine zweireihige, das Symbol 2) $\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{vmatrix}$ eine dreireihige Determinante.

Allgemein müssen die Horizontal- und Vertikalreihen (Zeilen und Kolumnen) gleich viel Glieder (Elemente) enthalten. Man versteht dann unter einer n-reihigen Determinante die Summe aller möglichen, aus n Faktoren derart gebildeten Produkte der n^2 Elemente, daß nicht zwei Elemente eines Produktes aus der gleichen Reihe oder aus der gleichen Kolumne entnommen werden. Es gibt $n!$ solcher Produkte.

Wir wollen nun noch eine Regel angeben, wie man aus der Figur (der Matrix) selbst das Vorzeichen eines solchen Produktes bestimmen kann. Ich verbinde alle Elemente eines Produktes durch Striche und erhalte so einen vom linken bis zum rechten Vertikalstrich reichenden Linienzug. Die Elemente unterhalb dieses Linienzuges bleiben unbeachtet. Hat man in jeder Zeile alle rechts vom gewählten Elemente stehenden Elemente durchgestrichen, so bleibt oberhalb des Linienzuges noch eine Anzahl Elemente (in der Figur mit Sternchen bezeichnet) zurück. Ist diese Anzahl $= a$, so ist $(-1)^a$ das Vorzeichen des betreffenden Produktes — — (36). Demnach ist 1) $= ad - bc$, 2) $aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec$. Das Vorzeichen, beispielweise von gec, wie Fig. 2 zeigt, ist $= (-1)^3$, das Vorzeichen von dhc (Fig. 3) $= (-1)^2$.

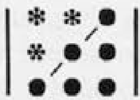
Fig. 2.

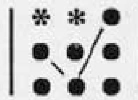
Fig. 3.

(Ich habe diesen Satz ohne Beweis wegen seiner Anschaulichkeit mitgeteilt. Ein Beweis würde wieder andere Erklärungen erfordern und kann von jedem Fachmann, wenn er die mit dem Steigen und Fallen der Verbindungsstriche zusammenhängenden Inversionen beachtet, leicht hergestellt werden.)

Ein System von Gleichungen, z. B. $\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array}\right\}$ wird mittelst der Determinanten auf folgende Weise aufgelöst. Man bildet zunächst die Determinante des Systems: $\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = D_0$. Die zu x gehörige Determinante D_1 findet man, wenn man in D_0 a durch d ersetzt. Die zu y gehörige Determinante D_2 ist gleich D_0, worin b durch d ersetzt ist. Endlich findet man D_3, die zu z gehörige Determinante, durch Ersetzung des Buchstaben c durch d. Dann ist $x = \frac{D_1}{D_0}$, $y = \frac{D_2}{D_0}$ und $z = \frac{D_3}{D_0}$. Dementsprechend verfährt man bei einem System von n Gleichungen.

5) $\frac{a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots}{b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots}$ kann man gleichsetzen $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots$ in inf. Nach Ausmultiplizierung von $(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots)$ $(b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ und Gleichsetzung der entsprechenden Koeffizienten findet man: $b_1 c_0 = a_1$; $b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2$;

$b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 = a_3$; $b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 + b_4 c_0 = a_4$;

$b_1 c_4 + b_2 c_3 + b_3 c_2 + b_4 c_1 + b_5 c_0 = a_5$; u. s. w.

Daraus ergibt sich sukzessive:

$$c_0 = \frac{a_1}{b_1};\quad c_1 = \frac{a_2}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1^2};\quad c_2 = \frac{a_3}{b_1} - \frac{a_2 b_2 + a_1 b_3}{b_1^2} + \frac{a_1 b_2^2}{b_1^3};$$

$$c_3 = \frac{a_4}{b_1} - \frac{a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4}{b_1^2} + \frac{a_2 b_2^2 + 2\, a_2 b_2 b_3}{b_1^3} - \frac{a_1 b_2^3}{b_1^4};$$

$$c_4 = \frac{a_5}{b_1} - \frac{a_4 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_4 + a_1 b_5}{b_1^2} + \frac{a_3 b_2^2 + 2\, a_2 b_2 b_3 + a_1 b_3^2 + 2\, a_1 b_2 b_4}{b_1^3}$$

$$- \frac{a_2 b_2^3 + 3\, a_1 b_2^2 b_3}{b_1^4} + \frac{a_1 b_2^4}{b_1^5};\ \text{u. s. w.}$$

Aus dem obigen System der Gleichungen kann man diese Ausdrücke für c auch mittelst der Determinanten darstellen.

Die in diesen Ausdrücken herrschenden Gesetze liegen auf der Hand. Für das allgemeine Glied c_n ergeben sich folgende Regeln:

Die Indizessumme eines Produktes im Zähler des r-ten Bruches ist $n + r$. Die Anzahl der Faktoren eines solchen Produktes im r-ten Bruche ist $= r$. Die numerischen Koeffizienten sind nicht von den a-, sondern nur von den b-Faktoren abhängig und $= \frac{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!}{\alpha!\, \beta! \ldots \nu!}$. Das Vorzeichen wird durch $(-1)^{n-r}$ bestimmt.

Die Ähnlichkeit von $c_0, c_1, \ldots$ mit den Gliedern unserer Umkehrungsreihe ist unverkennbar. Vergleicht man beispielsweise c_4 mit dem Ausdrucke für φ_5, so ist es sehr naheliegend, b_1 mit f_1, b_2 mit $\sigma_2 f_2$, b_3 mit $\sigma_3 f_3$ u. s. f. zu identifizieren. Ferner ist gleichzusetzen: $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$ und $\varphi_5 f_1^4 = c_4$ (allgemein $\varphi_n f_1^{n-1} = c_{n-1}$). $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sind funktionelle Zahlen, deren Multiplikationsregel sich aus der Erwägung ergibt, daß sich die numerischen Faktoren von b nach der Multiplikation wieder aufheben müssen und nur die $\varkappa$-Produkte übrig bleiben dürfen.

Es ist also $\overset{\alpha}{\sigma}_a \overset{\beta}{\sigma}_b \ldots \overset{\nu}{\sigma}_n = \overset{\alpha}{\varkappa}_a \overset{\beta}{\varkappa}_b \ldots \overset{\nu}{\varkappa}_n \cdot \frac{\alpha!\, \beta! \ldots \nu!}{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!} = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!\, a!^\alpha\, b!^\beta\, n!^\nu}$. Nimmt man noch eine funktionelle Zahl ε an, mit der Multiplikationsregel $\varepsilon^n = \frac{1}{n!}$, so daß also $[\varepsilon \,.\, \varepsilon^n] = \frac{1}{(n+1)!}$, dann ergibt eine genaue Vergleichung mit der Umkehrungsreihe

$$x = h - f \cdot \frac{1}{f_1} + f \cdot \frac{f}{2!\, f_1} f_1 \varphi_2 - f \cdot \frac{f^2}{3!\, f_1^2} f_1^2 \varphi_3 + \ldots =$$

$$= h - \left[\varepsilon f \,.\, \left(c_0 - \frac{1}{1!} f_0 c_1 + \frac{1}{2!} f_0^2 c_2 - \ldots\right)\right]$$ eine neue Form derselben:

$$x = h - \left[\frac{\varepsilon f}{f_1 - \sigma_2 f_2 (\varepsilon f_0) + \sigma_3 f_3 (\varepsilon f_0)^2 - \ldots (-1)^{n-1} \sigma_n f_n (\varepsilon f_0)^{n-1}}\right] \quad \text{— — (37)},$$

wobei $t = -\frac{\varepsilon f}{f_1} = -\varepsilon f_0$ gesetzt wurde.

Da ferner, wenn n die höchste Potenz in der algebraischen Gleichung ist, de Ableitung f_{n+1} und alle folgenden $= 0$ sind, so bricht die Reihe im Nenner des Ausdruckes (37) bei $\sigma_n f_n$ von selbst ab.

Stellt man endlich aus dem obigen System der Gleichungen für a, b, c die Zahlen c durch Determinanten dar, so ist beispielsweise $c_4 =$

$$= \begin{vmatrix} a_1, & 0, & 0. & 0, & b_1 \\ a_2, & 0, & 0, & b_1 & b_2 \\ a_3, & 0, & b_1, & b_2 & b_3 \\ a_4, & b_1, & b_2, & b_3 & b_4 \\ a_5, & b_2, & b_3, & b_4 & b_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & b_1 \\ 0, & 0, & 0, & b_1, & b_2 \\ 0, & 0, & b_1, & b_2, & b_3 \\ 0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5 \end{vmatrix}$$

Ersetzt man darin die a_n, b_n durch die entsprechenden Werte $\sigma_n f_n$ $(n = 2, 3, 4, ..)$ u. s. f., wie oben, und nimmt $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = 1$ an, so erhält man mit Rücksicht auf (7) und, da die zweite Determinante $= (-1)^{1+2+3+4} = (-1)^{\frac{5.4}{2}}$ ist, die merkwürdige Relation zwischen den Zahlen σ_n wegen $c_4 = \varphi_5 f_1^4$:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \sigma_2 \\ 0, & 0, & 1, & \sigma_2, & \sigma_3 \\ 0, & 1, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4 \\ 0, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4, & \sigma_5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+4} . (-1)^4 . 4! \quad \text{— — — — (38).}$$

Die Verallgemeinerung dieser Relation für c_n ergibt sich aus der vorstehenden Matrix, in der man die erste Zeile und die erste Kolumne auch fortlassen kann und die dann symmetrisch wird, von selbst. Die zweite Determinante beschränkt sich auf die Diagonale, welche nach (36) $= (-1)^{1+2+3+\cdots n}$. Der höchste Index von σ ist $n + 1$.

So ist z. B. für $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & \sigma_2 \\ 0, & \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \sigma_2 \\ \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix} = [\sigma_3 - \sigma_2^2] = \frac{3!}{1!\,3!} - \frac{4!}{2!\,2!^2} =$$
$$= 1 - 3 = -2 = (-1)^{1+2} . (-1)^2 . 2!$$

Andere Werte für $f_1, f_2, \ldots$, wie wir sie etwa in (8), (9), (10) angenommen haben, würden auch wieder andere Beziehungen zwischen den Größen σ liefern.

Wie man sieht, ist unsere Umkehrungsreihe noch lange nicht nach allen Richtungen hin ausgewertet; ich begnüge mich jedoch damit, gezeigt zu haben, um noch einmal die hauptsächlichsten Resultate unserer Abhandlung zu reasummieren,

1) daß eine verhältnismäßig einfache Umkehrungsreihe existiert, welche tiefliegende Beziehungen zu vielen Nachbargebieten, namentlich zu den funktionellen Zahlen, aufweist, und

2) daß es immer möglich ist, auf direktem Wege ohne eigentliche Versuchsrechnungen jede algebraische Gleichung mit beliebiger Genauigkeit aufzulösen.

Schulnachrichten.

I.

Das Äußere der Schule.

A. Lehrpersonale.

1. Veränderungen im Lehrkörper.

Während dieses Schuljahres kamen keine Veränderungen vor.

2. Beurlaubungen.

Professor **Bogumil Remec** wurde mit Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 17. August 1913, Z. 38954, behufs Fortführung der Leitung der zweiklassigen slowenischen Handelsschule in Laibach für die Dauer des Schuljahres 1913/14 vollständig beurlaubt. (Intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. vom 5. September 1913, Z. 5798.)

3. Personalstand und Fächerverteilung am Schlusse des Schuljahres 1913/14.

Für obligate Lehrfächer.

	Name und Charakter	Ordinarius in der Klasse	Lehrfach und Klasse	Wöchentliche Stundenzahl
1	**Franz Breznik,** Direktor der VI. Rangsklasse	—	Griechisch VII.	4
2	**Dr. Cyrill Ažman,** Professor, Weltpriester	—	Religion I.—VIII.	20
3	**Josef Germ,** Professor, Kustos der Lehrmittelsammlung für den Zeichenunterricht	—	Zeichnen I.—IV. — Schreiben I. a u. b	18

	Name und Charakter	Ordinarius in der Klasse	Lehrfach und Klasse	Wöchentliche Stundenzahl
4	**Dr. Martin Gorjanec,** Professor	I. a	Latein I. a. — Slowenisch I. a, V., VI., VIII.	17
5	**Rudolf Južnič,** Professor, Kustos d. Lehrerbibliothek	I. b	Latein I. b. — Griechisch V. — Slowenisch I. b.	16
6	**Dr. Jakob Kelemina,** wirklicher Gymnasiallehrer, Kustos der deutschen Schülerbibliothek	V.	Deutsch V.—VIII. — Propaedeutik VII. und VIII.	16
7	**Karl Kunc,** Professor, Kustos des physikalischen Kabinettes	—	Mathematik III., IV., V., VII., VIII. — Physik VIII.	I. 17 II. 18
8	**Anton Lovše,** Professor	VII.	Latein VII. — Griechisch III. — Deutsch II. a und III.	19
9	**Martin Majcen,** Professor der VIII. Rangsklasse	III.	Latein III. — Deutsch II. b, IV. — Slowenisch III. und VII.	20
10	**Michael Markič,** Professor der VIII. Rangsklasse	VIII.	Latein V. u. VIII. — Griechisch VIII.	16
11	**Bogumil Remec,** Professor der VIII. Rangsklasse, Mitglied des Landesschulrates	—	beurlaubt	—
12	**Max Sever,** Professor	II. b	Latein II. b. — Griechisch VI. — Deutsch I. b. — Slowenisch II. b.	19
13	**Amat Škerlj,** Professor der VIII. Rangsklasse	IV.	Latein IV. u. VI. — Griechisch IV.	16
14	**Dr. Viktor Tiller,** Professor, Kustos der geographischen u. historischen Lehrmittelsammlung	VI.	Geschichte VI., VII., VIII. — Geographie I. a, II. a u. b.	I. 18 II. 17
15	**Dr. Milan Šerko,** provisor. Gymnasiallehrer, Kustos des naturhistorischen Kabinettes	—	Naturgeschichte I. a u. b, II. a u. b, V., VI. — Physik III. u. IV.	18
16	**Dr. Josef Rožman,** supplierender Gymnasiallehrer	—	Mathematik I. a u. b, II. a u. b, VI. — Physik VII.	19
17	**Peter Prosen,** supplierender Gymnasiallehrer, Kustos der slowenischen Schülerbibliothek	II. a	Latein II. a. — Deutsch I. a. — Slowenisch II. a. — Geschichte II. a u. b.	20
18	**Franz Stopar,** supplierender Gymnasiallehrer, Kustos der Unterstützungsfonds-Bibliothek	—	Geschichte III., IV. u. V. — Geographie I. b, III., IV. u. V. — Turnen I.—IV.	24

Für die wahlfreien Lehrgegenstände.

	Name und Charakter	Lehrgegenstand	Wöchentliche Stundenzahl
19	**Dr. Cyrill Ažman,** Professor	Italienische Sprache I. Kurs II. „ III. „	2 2 2
20	**Josef Germ,** Professor	Zeichnen V.—VIII. Klasse	3
21	**Rudolf Južnič,** Professor	Stenographie II. Kurs: a) deutsche b) slowenische	2 2
22	**Max Sever,** Professor	Stenographie I. Kurs: a) deutsche b) slowenische	2 2
23	**Franz Stopar,** supplierender Gymnasiallehrer	Turnen V.—VIII. Klasse	2
24	**Ignaz Hladnik,** Kapitelorganist	Gesang in 2 Abteilungen	4
25	**Anton Lovše,** Professor	Schiessübungen in der VII. Klasse	1
26	**Dr. Milan Šerko,** provisorischer Gymnasiallehrer	Schiessübungen in der VIII. Klasse	1

Gymnasialdiener: **Edmund Schott.**
Aushilfsdiener: **August Ferlič.**

II.

Durchführung des Lehrplanes.

A. Obligate Lehrgegenstände.

In allen Klassen lag dem Unterrichte in den obligaten Lehrgegenständen, ausgenommen die slowenische Sprache in allen Klassen und die deutsche Sprache in der I. und II. Klasse, der vom k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht mit dem Erlasse vom 20. März 1909, Z. 11.662 herausgegebene Normallehrplan des Gymnasiums zugrunde. Die slowenische Sprache wird nach dem vom k. k. Landesschulrate für Krain mit Erlaß vom 28. Mai 1888, Z. 885, genehmigten Lehrplane gelehrt. Der Lehrplan für die deutsche Sprache in der I. und II. Klasse wurde mit dem U.-M.-Erl. vom 6. Juli 1892, Z. 11.297 festgestellt und durch die weiteren U.-M.-Erlässe vom 22. September und 14. Dezember 1908, Z. 27.245

und 40.914 dahin abgeändert, daß an den utraquistischen Staatsgymnasien in Krain sukzessive die slowenische Unterrichtssprache nach Maßgabe der für die einzelnen Disziplinen zur Verfügung stehenden approbierten Lehrmittel und Lehrbehelfe eingeführt werde. Weiters wurde die Zahl der wöchentlichen Unterrichtsstunden aus der deutschen Sprache in der I. und II. Klasse von 4 auf 5 und in der III. Klasse von 3 auf 4 erhöht. Demnach wurden im Schuljahre 1913/14 am Untergymnasium alle Gegenstände, mit Ausnahme des deutschen Sprachfaches, in slowenischer Sprache gelehrt. Am Obergymnasium wurden Religion, Slowenisch, Mathematik und Naturgeschichte slowenisch, die übrigen Lehrgegenstände deutsch gelehrt.

Für das Schreiben in der I. Klasse war die Ministerial-Verordnung vom 29. Jänner 1910, Z. 49.538 ex 1909, für den Unterricht im Turnen die Verordnung des Ministers für Kultus und Unterricht vom 27. Juni 1911, Z. 25.681, maßgebend.

Das Turnen war am Untergymnasium obligat.

Slowenische Sprache.

I. Klasse. Grammatik: Die Lehre vom einfachen Satze in elementarer Vollständigkeit; die regelmäßige Formenlehre und die notwendigsten Unregelmäßigkeiten, in der Reihenfolge, die der paralelle Lateinunterricht verlangt; empirische Erklärung der Elemente des zusammengezogenen und zusammengesetzten Satzes an Beispielen aus dem Lesebuche, mit besonderer Hervorhebung dessen, was man beim Lateinunterrichte braucht. — Lektüre mit sachlicher Erklärung und den notwendigen grammatischen Bemerkungen. Nacherzählen, Memorieren und Vortragen poetischer und prosaischer Stücke. — Schriftliche Arbeiten: Im Anfange einige Diktate behufs Einübung der Ortographie; dann Wiedergabe vom Lehrer vorgetragener einfacher Erzählungen und erzählender Beschreibungen. — Alle 14 Tage eine Schulaufgabe; im II. Semester wechseln Schul- und Hausaufgaben ab.

II. Klasse. Grammatik: Der zusammengezogene und zusammengesetzte Satz; die Interpunktionslehre; Ergänzung der Formenlehre; besonders ausführliche Behandlung des Verbums. — Lektüre und schriftliche Arbeiten wie in der I. Klasse.

III. Klasse. Grammatik: Systematische Wiederholung der Formenlehre, Syntax des Nomens, Berücksichtigung der Bedeutungslehre. — Lektüre mit sachlichen, sprachlichen und stilistischen Erklärungen und Anmerkungen. Memorieren und Vortragen. — Schriftliche Arbeiten: Monatlich eine Schul- und eine Hausaufgabe nach den in den Instruktionen für das Deutsche gegebenen Anleitungen.

IV. Klasse. Grammatik: Systematische Lehre vom zusammengesetzten Satz in Verbindung mit der Syntax des Verbums. Grundzüge der Prosodik und Metrik. Figuren und Tropen. — Lektüre und schriftliche Arbeiten wie in der III. Klasse.

V. Klasse. Die wichtigsten Punkte der Stammbildungslehre. Nominal- und Verbalstämme. Komponierte Nominalstämme. Epik. Nationalepos. Kunstepos. Lektüre der entsprechenden Lesestücke mit besonderer Berücksichtigung der epischen Nationalliteratur. Privatlektüre. Memorieren und Vortragen. Monatlich eine schriftliche Arbeit, abwechselnd Schul- u. Hausarbeiten.

VI. Klasse. Fortsetzung der Epik, Lyrik, Dramatik. Lektüre der bezüglichen Lesestücke nach dem Lesebuche. Auswahl serbischer Volkslieder; dieser Lektüre wurde eine kurze Darlegung der hauptsächlichen Eigentümlichkeiten der serbo-kroatischen Sprache vorausgeschickt. Privatlektüre. Memorieren und Vortragen. Aufsätze wie in der V. Klasse.

VII. Klasse. Altslowenische Lautlehre. Dehnung und Steigerung in den drei Hauptgruppen der Vokale. Die wichtigsten Veränderungen der Konsonanten vor weichen und präjotierten Vokalen. Altslowenische Formenlehre mit steter Berücksichtigung der neuslowenischen Wortformen, indem auf Grund der altslowenischen Sprache auf die Entwicklung der neuslowenischen Formen, auf die Gleichheit und Abweichung beider Sprachen hingewiesen und dadurch eine genauere Kenntnis des Neuslowenischeu erzielt wird. Die wichtigsten Angaben über die Geschichte der altslowenischen Sprache. Neuslowenische Lektüre nach Auswahl und solche der serbo-kroatischen Dichtung: „Smrt Smail-age Čengića“. Privatlektüre, Deklamationen, freie Vorträge. Aufsätze wie in der V. Klasse.

VIII. Klasse. Altslowenische Denkmäler. Altslowenische Lektüre nach dem Lesebuche. Geschichte der neuslowenischen Literatur und Sprachentwicklung auf Grund entsprechender Musterlektüre. Lektüre ausgewählter Dichtungen neuerer Schriftsteller. Privatlektüre, Deklamationen und Redeübungen. Aufsätze wie in der V. Klasse.

Deutsche Sprache
in den beiden ersten Klassen.

I. Klasse. Empirische Erklärung der Elemente des einfachen und zusammengesetzten Satzes. Die Formenlehre parallel mit dem slowenischen und lateinischen Unterrichte. Einübung der starken Verba gelegentlich der Lektüre. — Lesen, Sprechen, Nacherzählen und Vortragen memorierter poetischer und prosaischer Stücke. Schriftliche Übersetzungen aus dem Slowenischen ins Deutsche. Im II. Sem. mitunter schriftliche Wiedergabe erklärter Lesestücke. Monatlich zwei Arbeiten, abwechselnd Schul- und Hausarbeiten.

II. Klasse. Wiederholung und Ergänzung der Formenlehre, namentlich systematische Behandlung der starken Verba. Empirische Behandlung des zusammengezogenen und zusammengesetzten Satzes. Systematische Durchnahme der ortographischen Regeln. Interpunktionslehre. — Lektüre wie in der I. Klasse. — Schriftliche Arbeiten wie in der I. Klasse, doch vorwiegend Nacherzählungen.

Übersicht der Verteilung der obligaten Lehrfächer nach d. einzelnen Klassen u. wöch. Stunden.

Lehrgegenstände	I. a, b à	II. a, b à	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen
Religionslehre	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Latein	8	7	6	6	6	6	5	5	64
Griechisch	—	—	5	4	5	5	4	5	28
Deutsch	5	5	4	4	3	3	3	3	40
Slowenisch	3	2	3	2	2	2	2	2	23
Geographie	2	2	2	2	1	1	—	I. 3	I. 17, II. 14
Geschichte	—	2	2	2	3	4	3	I. 1, II. 3	I. 19, II. 21
Mathematik	3	3	3	3	3	3	3	2	29
Naturgeschichte	2	2	—	— / 3	3	2	—	—	I. 13, II. 16
Physik	—	—	2	3 / —	—	—	4	I. 3, II. 4	I. 12, II. 10
Propaedeutik	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Freihandzeichnen	3	3	2	2	—	—	—	—	16
Schreiben	1	—	—	—	—	—	—	—	2
Turnen	2	2	2	2	—	—	—	—	12
	31	30	33	32	28	28	28	I. 32 II. 31	299

B. Freie Lehrgegenstände.

Italienische Sprache.

I. Kurs. Baroni-Segatini, Lehr- u. Lesebuch der ital. Sprache I. T.

II. Kurs. Dr. Mussafia-Dr. Madealena, Italien. Sprachlehre 28. Aufl.: Verbum und Syntax, Esercizi di lettura A—D.

III. Kurs. Gustavo Sacerdote, Nel Bel Paese. Manuale della lingua italiana parlata: I, 1—20. II, III, 2. IX, 1—6. X, 2. XII, 1—3. XIII, 1—2. XIV, 1—4. XVIII, XX, IV, 1—4.

III.

Lehrbücher,

welche im Schuljahre 1914/15 dem Unterrichte in den obligaten Lehrfächern zugrunde gelegt werden.

A. **Religion.** I. Kl.: *a)* Veliki katekizem. Pr. 80 h; *b)* Stroj, Liturgika. Pr. 1 K 40 h. — II. Kl.: wie I. — III. Kl.: I. Sem. Stroj, Liturgika. — II. Sem. Karlin, Zgodovina razodetja božjega v stari zavezi. Pr. 2 K. — IV. Kl.: Karlin, Zgodovina razodetja božjega v novi zavezi. Pr. 2 K. — V. Kl.: Dr. Svetina, Resničnost katoliške vere. Pr. 2 K 80. — VI. Kl.: Dr. Pečjak, Dogmatika. Pr. 2 K 80 h. — VII. Kl.: Dr. Pečjak, Moralka. Pr. 2 K 80 h. — VIII. Kl.: Dr. A. Medved, Zgodovina katoliške cerkve. Pr. 2 K 50 h.

B. **Latein. Sprache.** *a) Grammatik:* I.—IV. Kl.: Pipenbacher, Latinska slovnica. Pr. 3 K 20 h. — V.—VIII. Kl.: Schmidt, Lat. Schulgrammatik. Pr. 2 K 40 h. — *b) Übungsbuch:* I. Kl.: Pipenbacher, Latinske vadbe za I. razred. Pr. 2 K — h. — II. Kl.: Pipenbacher, Latinske vadbe za II. razred. Pr. 3 K. — III. Kl.: Požar, Latinske vadbe za III. razr. Pr. 2 K. — IV. Kl.: Požar, Latinske vadbe za IV. r. Pr. 2 K 20 h. — V.—VI. Kl.: Hauler, Latein. Stilübungen für die oberen Klassen der Gymn., 1. Abt. Pr. 2 K 20 h. — VII.—VIII. Kl.: Hauler, Lateinische Stilübungen für die ob. Klas. 2. Abt. Pr. 2 K. — *c) Autoren:* III. Kl.: Košan, Latinska čitanka. Pr. 1 K 50 h. — IV. Kl.: Prammer, C. J. Cæsaris comment. de bello Gallico. Pr. 2 K 80 h. — V. Kl.: Sedlmayer, Ausgewählte Gedichte des P. Ovidius Naso. Pr. 1 K 90 h. — Zingerle, Titi Livii ab urbe cond. I. Pr. 2 K 20 h. — VI. Kl.: Scheindler, Sallustii Crispi bell. Jugurth. Pr. 70 h. Klouček, Vergils Aeneis (nebst ausgewählten Stücken aus den Buk. und Georg.) Pr. 3 K; Nohl, Ciceros Reden gegen Katilina. Pr. 1 K 20 h. — VII. Kl.: Klouček, wie in VI.; Schiche, Aus Ciceros philos. Schriften. Pr. 2 K; Kukula, G. Plinii Secundi epistolae selectae. Editio minor. Pr. 80 h. — VIII. Kl.: Historische Schriften v. A. Weidner. Preis 2 K — h; Petschenig, Horatius Flaccus. Auswahl. Pr. 1 K 80 h.

C. **Griech. Sprache.** III.—IV. Kl.: Tominšek, Grška slovnica. Pr. 3 K; Grška vadnica. Pr. 3 K 50 h. — V. Kl.: Curtius-Hartel, Griech. Schulgrammatik, bearb. von Weigl. Pr. 3 K 10 h; Schenkl, Griech. Elementarbuch. Pr. 3 K; Schenkl-Kornitzer, Chrestomathie aus Xenophon. Pr. 3 K 20 h; A. Th. Christ, Homers Ilias. Pr. 3 K. — VI. Kl.: Grammatik, wie in V.; Schenkl, Übungsbuch für die oberen Klassen Preis 2 K 10 h; Chrestomathie aus Xenophon, wie in V.; A. Th. Christ, Homers Ilias, wie in V.; Holder, Herodoti hist. lib. VI. Preis 90 h. —

VII. Klasse: Grammatik, wie in V.; Übungsbuch, wie in VI.; Wotke, Demosthenes ausg. Reden. Pr. 1 K 70 h; A. Th. Christ, Homers Odyssee in verk. A. Pr. 2 K 50 h. — C. Huemer, Chrestomathie aus Platon. Pr. 3 K 60 h. — VIII. Kl.: Grammatik, wie in V.; Chrestomathie aus Platon nebst Proben aus Aristoteles von Huemer, Pr. 3 K 60 h; Sophokles, Ajas von Schubert-Hütter. Pr. 1 K 50 h. — A. Th. Christ, Homers Odyssee, Pr. 2 K 50 h.

D. **Deutsche Sprache.** I.—II. Kl.: Končnik u. Fon, Deutsches Lesebuch I. Bd. Pr. 3 K. — III. Kl.: Končnik-Fon, Deutsches Lesebuch II. Bd. Pr. 4 K —. — IV. Kl.: Willomitzer-Tschinkel, Deutsche Sprachlehre, Pr. 2 K 40 h; Štritof, Deutsches Lesebuch für die IV. Kl. 2. Aufl. mit Ausschluß der 1. Pr. 3 K 20 h. — V. Kl.: Willomitzer wie in IV.; Lampel: Deutsches Lesebuch I. T. u. Dr. Leo Langer: Grundriß der deutschen Lit. I. Pr. 1 K. (6. Aufl. Pr. 2 K 80 h.) — VI. Kl.: Willomitzer, wie in IV.; Lampel, Lesebuch, II. Teil. 7. Aufl. Pr. 3 K 20 h. — Langer, Grundriß II. Pr. 1 K 44 h. — VII. Kl.: Willomitzer wie in IV.; Lampel, Lesebuch, III. T. 4. Aufl. Pr. 3 K 10 h; Langer, Grundriß III. Pr. 1 K 20 h. — VIII. Kl.: Willomitzer wie in IV.; Lampel, Lesebuch, IV. Teil. 3. Aufl. Pr. 3 K 20 h; Langer, Grundriß IV. Pr. 1 K 90 h.

E. **Slowenische Sprache.** I. Kl.: Janežič-Sket, Slovenska slovnica X. Auflage mit Ausschluß der früheren. Pr. 3 K — h; Sket-Wester, Slovenska čitanka za I. g. r. Pr. 2 K. — II. Kl.: Slovnica, wie in I.; Sket-Wester, Slov. čitanka za II. g. r. Pr. 2 K 50 h. — III. Kl.: Slovnica, wie in I.; Sket, Slovenska čitanka za III. gimn. razr. Pr. 2 K — h. — IV. Kl.: Slovnica, wie in I.; Sket, Slovenska čitanka za IV. gimn. razr. Pr. 2 K. 50 h. — V. Kl.: Slovnica, wie in III.; Sket, Slov. čitanka za V. in VI. r. sr. šol. Pr. 3 K 60 h. — VI. Kl.: wie in V. — VII. Kl.: Slovnica, wie in I.; Slovenska slovstvena čitanka. Pr. 3 K; Sket, Staroslovenska čitanka. Pr. 3 K. — VIII. Kl.: wie in VII.

F. **Geographie und Geschichte.** I. Kl.: Pajk, Zemljepis za I. g. r. Pr. 1 K 80 h; Kozenn, Geographischer Schulatlas, nur 41. u. 42. Auflage, neu bearb. von Heidrich und Schmidt. Pr. 8 K. — II. Kl.: Bežek, Zemljepis za II. in III. razr. Pr. 2 K 40 h; Kozenn, wie in I.; Mayer-Kaspret, Zgodovina starega veka. Pr. 2 K 30 h; Putzger, Historischer Schulatlas. Pr. 3 K 60 h, oder: Kiepert, Atlas antiquus. Pr. 4 K. — III. Kl.: Kozenn, wie in I.; Bežek, wie in II.; Putzger wie in II.; Mayer-Kaspret, Zgodovina srednjega veka. Pr. 2 K — h. — IV. Kl.: Atlas von Kozenn, Putzger, wie in II.; Mayer-Kaspret, Zgodovina novega veka. Pr. 2 K — h; Orožen, Domovinoznanstvo. Pr. 2 K 20 h. — V. Kl.: Gindely-Tupetz, Gesch. des Altertums, Pr. 3 K 50 h; Kozenn, wie in IV.; Putzger wie in II.; Müllner, Lehrbuch der Geographie f. d. V. Kl. Pr. 2 K 50 h. — VI. Kl.:

Gindely-Tupetz, Geschichte des Altertums, wie in V.; Gindely-Tupetz, Lehrbuch der Geschichte, II. Teil, Pr. 2 K 50 h, und Gindely-Tupetz, III. Teil. Pr. 3 K 40 h; Müllner, Erdkunde für Mittelsch. Ausg. A 5. T. f. d. VI. Kl.; Atlanten wie in V. — VII. Kl.: Gindely-Tupetz III. T.; Atlanten wie in V. — VIII. Kl.: Zeehe-Heiderich-Grunzel, Österreichische Vaterlandskunde, Pr. 3 K 40 h; Atlanten, wie in V.

G. **Mathematik.** I. Kl.: Matek-Peterlin, Aritmetika za nižjo stopnjo. Pr. 2 K 60 h; Mazi, Geometriški nazorni nauk. Pr. 1 K. — II. Kl.: Matek-Peterlin wie in I. Mazi, Geometrija za 2. r. Pr. 1 K 80 h. — III. Kl.: Matek-Peterlin, wie in I. Kl.; Mazi, Geometrija za III. razred. Pr. 1 K 80 h. — IV. u. V. Kl.: Matek, Aritmetika in algebra za IV. in V. r. Pr. 3 K 20 h; Matek-Mazi, Geometrija za IV. in V. razred. Pr. 3 K 30 h. — VI.—VIII. Kl.: Adam, Logarithmentafeln. Pr. 1 K 40 h; Matek, Zupančič, Aritmetika in Algebra za VI., VII. in VIII. razred. Pr. 2 K 80 h; Matek, Geometrija za VI., VII. in VIII. razr. Pr. 3 K 30 h.

H. **Naturgeschichte.** I. Kl.: Macher, Prirodopis živalstva. Pr. 2 K 50 h; Macher, Prirodopis rastlinstva. Pr. 4 K. — II. Kl.: wie in I. — IV. Kl.: Dr. V. Herle,; Mineralogija in kemija. Pr. 2 K 20 h. — V. Kl.: Poljanec, Mineralogija in geologija za v. g. Pr. 2 K 80 h; Macher, Botanika za v. r. Pr. 4 K 50 h. — VI. Kl.: Poljanec: Prirodopis živalstva za višje razrede. Pr. 5 K 60 h.

K. **Physik.** III.—IV. Kl.: Senekovič, Fizika. 3. Auflage. Pr. 3 K 70 h. — VII. Kl.: Reisner J., Fizika, Pr. 5 K 80 h; Kemija, Pr. 2 K 50 h. — VIII. Kl.: Rosenberg, Lehrbuch der Physik f. d. oberen Klassen. 5. Aufl. Pr. 5 K 60 h.

L. **Philos. Propädeutik.** VII. Kl.: Oswald, Logika, Pr. 2 K 50 h. — VIII. Kl.: Höfler, Grundlehren der Psychologie. Pr. 3 K.

M. **Wörterbücher.** III. Kl.: Košan, Latinsko-slov. slovarček. Pr. 2 K 50 h — IV. Kl.: Rožek, Latinsko-slovenski slovnik. Pr. 5 K 40 h. — V.—VIII. Kl.: Stowasser, Latein.-deutsches Wörterbuch, Pr. 13 K; Heinichen, Lat.-deutsches Wörterbuch; Menge, Griechisch-deutsches Wörterbuch; Schenkl, Griechisch-deutsches Wörterbuch; Gemoll, Griechisch-deutsches Wörterbuch. Pr. 10 K.

N. **Hilfsbücher.** A. Novaković, Srbske narodne pesmi. (Kosovo.) — Drechsler, Srpske narodne piesme. — Ilešič, Hrvatska knjižnica.

IV.

Absolvierte Lektüre.

I. a Klasse.

Deutsch: Končnik-Fon, Deutsches Lesebuch: Nr. 1—100 (ausgenommen Nr. 74).

Memoriert: Nr. 27, 32, 34, 35, 55, 66, 85, 87, 100.

Slowenisch: Sket-Wester, Slovenska čitanka I.: Nr. 1—132.

Memoriert: Nr. 1, 6, 13, 28, 48, 76, 88, 98, 111, 122.

I. b Klasse.

Deutsch: Končnik-Fon, Deutsches Lesebuch: Nr. 1—100.

Memoriert: Nr. 19, 21, 27, 34, 51, 58, 60, 66, 74, 85, 97, 97, 100.

Slowenisch: Sket-Wester, Slovenska čitanka I.: Nr. 2—7, 9—11, 14, 17, 19, 23—26, 28—30, 33, 36, 37, 39, 40, 43—45, 47, 48, 51, 54—57, 61—75, 78, 79, 82, 83, 87—89, 92, 93, 95—97, 101, 102, 105, 107—110, 112—115, 118, 120, 122, 125, 126, 131, 132.

Memoriert: Nr. 6, 40, 43, 57, 61, 66, 73, 102, 107, 109.

II. a Klasse.

Deutsch: Končnik-Fon, Deutsches Lesebuch I.: Nr. 101—190.

Memoriert: Nr. 111, 113, 124, 145, 161, 172, 183.

Slowenisch: Sket-Wester, Slovenska čitanka II.: Št. 2, 3, 11, 15—18, 20—32, 36, 38—41, 44—47, 49, 51, 56, 58-60, 62, 64, 65, 67, 69, 74, 76, 77, 84, 86, 89, 91—93, 95, 97, 101, 104, 105, 107, 113—115, 117, 119, 123.

Memoriert: Gregorčič: Rabeljsko jezero, Aškerc: Brodnik, Stritar: Turki na Slevici, Gregorčič: Primula, Sirota Jerica (Nar. pes.), Aškerc: Ilirska tragedija, Funtek: Žive plamenice, Pagliaruzzi: Rada.

II. b Klasse.

Deutsch: Končnik-Fon: Deutsches Lesebuch I.: Nr. 101—190.

Memoriert: Nr. 111, 113, 124, 145, 161, 172, 183.

Slowenisch: Sket-Wester, Slovenska čitanka II.: Št. 3, 5, 10, 11, 14—19, 21—24, 27, 28, 30—32, 36, 39—45, 47, 49, 51, 54, 56, 58, 60, 65, 67—70, 72, 74, 76, 79—81, 83—85, 87—93, 95, 97, 99, 101, 104, 107, 108, 111, 113, 117, 119, 123.

Memoriert: Wie in der II. a.

III. Klasse.

Latein: Cornelius Nepos: De Miltiade, De Aristide. Q. Curtius Rufus: Alexander Magnus, Nr. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9.

Memoriert: Nr. 5, Z. 1—37; Nr. 6, Z. 30—50.

Deutsch: Štritof, Deutsches Lesebuch III.: Nr. 4, 5, 12, 14, 20, 21, 26, 27, 29, 32, 33, 39, 45, 47, 49, 51, 54, 57—59, 67, 71, 87—89, 91, 92, 94, 105, 107, 109, 111, 135, 139, 149, 156, 160.

Memoriert: Nr. 23, 30, 40, 41, 44, 112, 132, 146, 158.

Slowenisch: Sket, Slovenska čitanka III.: Št.: 2, 3, 4, 5, 7—20, 22, 24—31, 33, 34, 36, 39, 40, 42—52, 54—73, 75, 77, 80—95, 97, 99.

Memoriert: Št. 4, 19, 30, 54, 88, 110, 116.

IV. Klasse.

Latein: Cæsar, De bello Gallico, l.; II.; III. c. 7—16; IV. c. 20—27; V. c. 1—23; VI. 11—28.

Deutsch: Štritof, Deutsches Lesebuch f. d. IV. Kl.: Das ganze Lesebuch.

Memoriert: Nr. 8, 9, 24, 58, 71, 80.

Slowenisch: Sket, Slovenska čitanka IV.: Št. 2, 4—8, 11, 13—15, 18, 20, 23, 25, 27—29, 32, 35, 36, 39, 41, 43, 44, 47, 49, 50, 52, 54, 56, 59—64, 68, 72, 75, 77, 79—84, 86, 88, 91, 93, 95—97, 99, 101.

Memoriert: Nr. 1, 10, 17, 26, 38, 57, 66, 69, 76, 87, 100.

V. Klasse.

Latein: Ovid: Die vier Weltalter; die große Flut; Deukalion und Pyrrha, Raub der Proserpina, Niobe; die wunderbare Rettung Arions, Strenger Winter, Unheilbare Leiden. — Cæsar, De bello Gallico, l. VII. cap. 68—75, 84—90. — Livius l. I., XXI. (in Auswahl).

Privatlektüre: Ovid: An die Freunde (Janžekovič), Abschied von Rom (Koretič), Perseus und Andromeda (Kramarič), König Midas (Kvas), O süße Heimat (Mušič), Wankelmut des Glückes (Pegan), Götterversammlung (Plot), Orpheus und Eurydice (Račič), An die Gattin (Schweiger Dr.), Selbstbiographie (Šegula), An einen Freund (Zobec Joh.).

Memoriert: Ovid: Die vier Weltalter.

Griechisch: Xenophon, Anabasis: I. Rüstungen zum Kriege. II. Der Zug gegen den König. III. Die Schlacht bei Kunaxa. IV. Charakter des Kyros. V. Der Meineid des Tissaphernes. VI. Eingreifen Xenophons. Wahl neuer Befehlshaber. VII. Der Zug durch das Land der Karduchen. IX. Ankunft in Trapezunt. Kyrupädie: Kyros und Astyages (Anfang). V. Kyros als Feldherr der Perser. — Homer: Ilias, I. Buch. (Memoriert V. 1—21. u. V. 234—239.) II. Buch.

Deutsch: Aus dem Lampelschen Lesebuche wurden die Schüler mit den hauptsächlichsten Erzeugnissen des altdeutschen Schrifttums bekannt gemacht, so insbesondere mit dem Nibelungen- und Gudrunliede, den höfischen Epen und dem Minnesange. — Besprechung einzelner im „Anhange" abgedruckter Stücke.

Memoriert: Belsazer von Heine; Die Traumdeuterin, Halmmessern von Walter von der Vogelweide.

Slowenisch: Sket, Slovenska čitanka: Št. 1–70.

Memoriert: Nr. 45, 46, 51, 53, 55, 68. — Sket-Wester, Slovenske balade in romance (izd. „Družbe sv. Mohorja"): Izbor.

VI. Klasse.

Latein: Sallust, b. J.; Cicero, in Cat. I.; Virg. Aen. I.

Memoriert: Cic. in Cat. I., § 1—5; Virg. Aen. I. v. 1—33.

Privatlektüre: Cic. in Cat. IV. (1); de imp. Gn. Pompei (1); Virg. Aen. II. (4), III. (1); Eklog. I., V., VII., IX. (4).

Griechisch: Homer, Ilias VI., VII. (in Auswahl)., XVI, XVIII., XIX., XXII. (in Auswahl). — Herodot, VI. (in Auswahl).

Privatlektüre: Homer, Ilias XXIV. (alle Schüler). — Herodot I. 108—130, 204–214 (Hvala); III. 39—43, 120–125 (Marjetič); VII. in Auswahl (Furlan, Kek, Kraut, Mramor, Mušič, Smolik); VIII. in Auswahl (Artič, Bele, Bukovič, Eržen, Gerden, Lončar, Lovšin, Markič, Pintar, Pire); IX. in Auswahl (Artič, Jerman, Mervar). — Chrest. von Thumser: Aes. Fab. 3, 11, 15, 17, 18, Claud. Ael. 5, 6, Varia hist. 9, 10 (Kit).

Memoriert: Homer, Ilias VI. 367—382, 398—458.

Deutsch: Auswahl aus dem Lampelschen Lesebuche, außerdem als Schul- bezw. kontrollierte Privatlektüre: Minna von Barnhelm, Emilia Galotti, Götz von Berlichingen, Egmont, Räuber.

Memoriert: „Der Mensch hat nichts so eigen", Simon Dach, Die beiden Musen, Die frühen Gräber.

Slowenisch: Prešeren, Krst pri Savici; A. Medved, Kacijanar; Gregorčič, Poezije (izd. „Družbe sv. Mohorja").

Memoriert: Prešeren, Uvod Krsta pri Savici; Gregorčič, „Soči" in „Kmetski hiši".

VII. Klasse.

Latein: Cicero, Philosophische Schriften: De re publica (Auswahl); Disputationes Tusculanae V. (Auswahl); De officiis (Auswahl); Verg. Aen. l. II. u. l. VI. (Auswahl); Plinius' Briefe.

Memoriert: Vergil, Aen. II, vv. 1—56.

Griechisch: Homer, Odyssee l. I. vv. 1—75; V.—X. — Demosthenes I. u. II. Ol. — Platos Apologie des Sokrates.

Memoriert: Homers Odysse I. vv. 1—21; Platos Apol. cap. 3.

Deutsch: Auswahl aus dem Lampelschen Lesebuche, außerdem als Schul- bzw. kontrollierte Privatlektüre: Iphigenie auf Tauris, Torquato Tasso, Hermann und Dorothea, Wallenstein, Maria Stuart.

Memoriert: Der Fischer, Erlkönig, Harfenspieler, Derselbe, Mignon, Erinnerung, Wanderers Nachtlied. Ein Gleiches, ein Freigewähltes.

Slowenisch: Dóktorja Francéta Prešérna Poezije. Uredil Skript. L. Pintar. Sonetje. Oton Zupančič: Samogovori. Eine Auswahl aus V. Vodniks Schriften und Ivan Cankars Hlapec Jernej in njegova pravica. Altkirchenslavische Texte nach Skets Staroslovenska čitanka.

Memoriert: Sonetni venec von Prešeren.

VIII. Klasse.

Latein: Horatius, carm. I. 1—4, 6, 7, 10—12, 18, 34, 37, 38; II. 3, 14, 15, 17; III. 1—3, 12, 13, 17, 18, 23, 25, 28, 30; IV. 3, 7, 11; Epod. II.; Sat. I. 5, 6, 9; II. 2; Epist. II. 3 (in Auswahl); Tacitus, Annales l. I.

Memoriert: Horatius carm. I. 1; III. 30.

Privatlektüre: Horatius carm. III. 4, 5, 6 (Gregorc u. Hočevar). carm. sæculare (Turk).

Griechisch: Platon, Kriton, Phaidon 59—60, 69—77, 115—123; Aristoteles, Poetik 1—96; Definition der Tragödie, c. 6. — Sophokles, Elektra.

Memoriert: Kriton 54; Elektra vv. 86—120.

Stegreiflektüre: Homer, Odyssee.

Privatlektüre: Homer, Odyssee, l. XXI. vv. 269—423 u. l. XXIII. (Guzelj); l. XV. (Trost).

Deutsch: Auswahl aus dem Lampelschen Lesebuche, außerdem Faust, Wilhelm Tell, Jungfrau von Orleans, König Ottokars Glück und Ende als Schul- bzw. kontrollierte Privatlektüre.

Memoriert: Das Lied von der Glocke.

Slowenisch: Prešeren, Poezije. Stritar, Dunajski sonetje. Zupančič, Samogovori. Auswahl aus Levstik und Cankar.

Memoriert: Prešeren, Sonetni venec. Zupančič, Z vlakom.

V.

Themen für die schriftlichen Arbeiten.

a) In der deutschen Sprache.

V. Klasse. 1. Schularbeiten: 1. Durch viele Streiche fällt selbst die stärkste Eiche. — 2. Beowulfs Ende. — 3. Die Freuden des Winters (a); Der Jahrmarkt in einer kleinen Stadt (b). — 4. Brunhilds Burg auf Isenstein (a); Die Fahrt über die Donau (b). — 5. Die wunderbare Rettung Arions. — 6. Betrachtungen zum Schulschluß.

2. Hausarbeiten: 1. Bilder von der Weinlese. — 2. Ein Ausflug nach Luegg. — 3. Häusliches Leben in den Nibelungen. — 4. Wie wird Feuer gewonnen.

Vorträge: Abram: Marie Antoinettes Jugend; Baškovič: Die Bibliothek eines Studierenden; Bele: Schillers Kindheit; Bučar: Die Hochseefischerei einst und jetzt; Dolenc: Ein Ausflug nach Triest; Čižmek: Bergmilch; Dular: Der Lindwurm in der Sage; Janžekovič: Charakterzüge der Inder; Kramarič: Die Phönizier, Väter der Seefahrt, des Handels und zahlreicher Erfindungen; Krašovec: Aus dem Haushalte eines römischen Senators; Kozoglav: Das Verschwinden des Berges Mazama; Kvas: Die Weißbäckin; Koretič: Krain zur Zeit der Römer; Kuder: Die Gymnastik bei den Griechen; Medic Fr.: Ein Werk der Barmherzigkeit; Medic Jos.: Die Eisberge; Medja: Fürsten und Priester in Afrika; Merzelj: Das Land Tibet; Plot: Das . . . . . des Vandalenkönigs Ingo; Videtič: Die Brücken einst und jetzt.

VI. Klasse. 1. Schularbeiten: 1. Lebensgefährliche Berufe. — 2. Welche Mittel hat der Mensch sich zu verteidigen. — 3. Die ersten Jugendeindrücke. — 4. Der Konflikt in Minna von Barnhelm. — 5. Die Rolle der Gräfin Orsini in Emilia Galotti. — 6. Unwissen ist das teuerste Ding im Lande.

2. Hausarbeiten: 1. Bedeutung der Buchdruckerkunst. — 2. Freies Thema. — 3. Das Leben in den mittelalterlichen Burgen. — 4. Die Exposition in Götz von Berlichingen.

Vorträge: Artič: Einiges über die Verbreitung und Bekämpfung der Tuberkulose; Bele: Vom Papier; Bučar: Das griechische Drama; Bukovič: Franz Eichert; Cesar: Luftfahrzeuge in Krieg und Frieden; Dular: Über die Wahrheit und Täuschung; Horvat: Der Alkohol und die menschliche Gesundheit; Kek: Die Gefahren auf der See und deren Bekämpfung.

VII. Klasse. 1. Schularbeiten: 1. Wie ehren wir unsere Toten. — 2. Bescheidenheit und Selbstbewußtsein. — 3. Der Segen der Arbeit.

— 4. Iphigeniens Pflichtenstreit. — 5. Die innere Entwicklungsgeschichte in Tasso. — 6. Aller Zustand ist gesund, der natürlich ist und vernünftig.

2. Hausarbeiten: 1. Wichtige Produkte, die uns das Meer liefert. — 2. Das Göttliche von Goethe (Analyse). — 3. Freies Thema. — 4. Mein liebstes Buch.

Vorträge: Skušek: Die Slaven in Deutschland; Štemberger: Die Passionsspiele in Oberammergau; Zakrajšek: Das Hexenwesen und die Reformation; Žlajpah: Über die Naturkräfte.

VIII. Klasse. 1. Schularbeiten. 1. Kleine Ursachen, große Wirkungen. — 2. *a)* Mein Erbteil wie herrlich, weit und breit! Die Zeit ist mein Gewinn, mein Acker ist die Zeit (Goethe); *b)* Aus den „Sprüchen in Prosa“ (freie Wahl). — 3. *a)* Gedanken über Freunde und Freundschaft; *b)* Unsere Auswanderer. — 4. *a)* Ja, wäre nur ein Zaubermantel mein (Faust); *b)* Sobald du dir vertraust, sobald weißt du zu leben (Faust). — 5. *a)* Die ersten erziehlichen Einflüsse meiner Jugend; *b)* Die Ambrosia der früheren Jahrhunderte ist das tägliche Brot der späteren (M. v. Ebner-Eschenbach). — 6. Maturitätsarbeit.

2. Hausarbeiten: 1. Handwerk und Studium. — 2. Freies Thema. — 3. Ausblicke in die Zukunft. — 4. Ein Spruch aus Horaz.

Vorträge: Andolšek: Über das Drama; Gerčar: Musik und Mode; Logar: Der Traum ein Leben; Petrič: Die österreichische Kriegsflote; Pirec: Über das Interessante. *Dr. J. Kelemina.*

b) In der slowenischen Sprache.

V. Klasse. Schulaufgaben: 1. Izza velikih počitnic. — 2. Ob Krki. — 3. *a)* Zimsko veselje. *b)* Brez muke ni moke. — 4. Na kmetiškem domu. — 5. Za mano ostani zidovje, iz mesta radosten hitim, čez travnik, polje in grmovje, od holma do holma hitim (Levstik). — 6. Zgodovinsko ozadje slovenskih narodnih pesmi o kralju Matjažu.

Hausaufgaben. 1. Ob trgatvi. — 2. Mutec Osojski. (Prizor ob smrti.) — 3. Smrt carja Samuela. (Disp. nal.) — 4. Moj rojstni kraj.

VI. Klasse. Schulaufgaben: 1. Prizor iz „Krsta pri Savici“ (na izbero). — 2. *a)* Kacijanarjev značaj. *b)* Značaj Ivana in Nikolaja Zrinjskega (v Medvedovi tragediji „Kacijanar“). — 3. *a)* V snegu in ledu. *b)* Coeli narrant gloriam Dei. — 4. *a)* Nulla Fides fronti. *b)* Ljubezen do domovine. — 5. Življenska filozofija v Gregorčičevih pesmih. — 6. Najhujše je vseh bolečin kesanje, krivice spomin (Gregorčič).

Hausaufgabe: 1. V kmetski hiši. — 2. Tempus divitiae meae, tempus ager meus. — 3. Pust na vasi. — 4. Ženske podobe v srbskih narodnih pesmih (Kosovo). *Dr. Dav. Gorjanec.*

VII. Klasse. Schulaufgaben: 1. Dolenjsko gričevje, terra incognita — najlepša, kar so jih zrle kdaj moje oči! (Iv. Vavpotič, Poglavja o slovenski umetnosti. — Poezija in proza teh besed.) — 2. Prosto izbran tema. — 3. Mladost upa, starost se spominja. (Slika kontrasta). — 5. *a)* Idejna analiza drugega vrha v Prešernovem Sonetnem vencu. *b)* O značaju Prešernove domoljubne pesmi. — 5. Boji za pravico individualnosti v slovenski poeziji za časov Prešernovih in Čopovih.

Hausaufgaben: 1. Poglavitne kulturne pridobitve, ki jih je prinesla Slovencem protestantska slovstvena doba. — 2. *a)* Tam na klancu je vse živo. (S. Jenko: Zimski dan. — Slika zimskega športa v Novem mestu.) *b)* Pomen zimskega športa za naš telesni in duševni razvitek. (Razprava.) — 3. Kup mrklih hiš na pustem bregu. Kot jata ptic so, ki na begu so dolgem gladne, trudne odpočile . . . (Al. Gradnik: Istrska vas. — Pokrajinska slika in naše razpoloženje ob njej.) — 4. Prosto izbran tema. — 5. Finis coronat opus. (Ob koncu šoskega leta.)

Vorträge: Josef Cvelbar: Vlahi; Josef Štemberger: Matija Čop; Bogomir Benedik: Cankarjev Hlapec Jernej in njegova pravica; Kasimir Budna: Slovenske pripovedke o jezerih; Ivan Cesar: Finžgarjeva Naša kri; Vinzenz Dular: Nekaj o zrakoplovstvu. *Dav. Majcen.*

VIII. Klasse. Schulaufgaben: 1. Kuj me, življenje, kuj, če sem kremen, se raziskrim, če sem jeklo, bom pel, če steklo, naj se zdrobim. (Zupančič.) — 2. Kulturne razmere na Slovenskem v preporodni dobi. — 3. Domoljubje v Prešernovem Sonetnem vencu. — 4. Mladost, mladost, kako si krasna! Ti zarje jutranje si soj. In same zlate nade sije iz sebe žar nebeški tvoj. (Aškerc.) — 5. Slovenska zemlja. — 6. Maturitätsaufsätze.

Hausaufgaben: 1. Socijalno stanje našega kmeta. — 2. Koder se nebo razpenja, grad je pevcu brez vratarja, v njem zlatnina čista zarja, srebrnina rosa trave. (Prešeren.) — 3. Eno pak potrebno je: Skrbi zase, ljubi brata, dvigni ga, odpri mu vrata in sodnik naj bo srce. — 4. Bilanca mojih gimnazijskih študij.

Vorträge: Lavrič: Trdinove bajke in povesti o Gorjancih; Eršte: Prešeren in Petrerka; Krhne: Trdinove bajke in povesti; Rifelj: Slovenska romantika. *Dr. Dav. Gorjanec.*

VI.

Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

A. Lehrerbibliothek.

I. **Durch Ankauf:** Verordnungsblatt des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht, Jg. 1913. — Zeitschrift für österr. Gymnasien. Jg. 65. — Zeitschrift für das Realschulwesen, Jg. 39. — Österreichische Mittelschule, Jg. 28. — Mitteilungen der k. k. geographischen Gesellschaft, Jg. 56. — Monatshefte für Mathematik und Physik, Jg. 23. — Jagić, Archiv für slawische Philologie, Bd. 35. — Ljubljanski Zvon, Jg. 34. — Slovan, Jg. 11. — Dom in Svet, Jg. 27. — Popotnik, Jg. 35. — Carniola, Neue Folge, Jg. 5. — Euphorion, Jg. 19. — Časopis za zgodovino in narodopisje, Jg. 10. — Publikationen der Matica Slovenska, Glasbena Matica und der Slovenska Šolska Matica für das Jahr 1913. — Dr. J. Valjavec, Laško-slovenski slovar, Laibach 1914. — Georg Weber-Dr. Alfred Baldamus, Lehr- und Handbuch der Weltgeschichte. 5 Bde. Leipzig 1911/12. — Theodor Gomperz, Griechische Denker, 3. Bd. Leipzig 1909. — Dr. L. Dalla Rosa, Physiologische Anatomie des Menschen. Leipzig-Wien 1898. — Sammlung von Spielen und Wettkampfübungen für Lehrer, Turner und Schüler. Linz. — Festschrift zur Jahrhundertfeier der Befreiungskriege 1813 von Dr. Richard Kralik. — Der Balkan von Dr. Albrecht Wirth. — Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens in Österreich, 27. Jg.

II. **Durch Geschenke:** *a)* Des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht: Zeitschrift für deutsches Altertum, Jg. 56. — Zeitschrift für österr. Volkskunde, Jg. 19. — Österreichische botanische Zeitschrift, Jg. 64. — Jahreshefte der österr. archäologischen Gesellschaft. — Rezente Pfahlbauten von Donja Dolina in Bosnien.

b) Der k. k. Landesregierung: Landesgesetzblatt.

c) Des Landesmuseums: Jahresbericht des Landesmuseums.

d) Des Herrn k. k. Staatsanwaltes Dr. Kremžar: Eduard Fuchs, Illustr. Sittengeschichte vom Mittelalter bis zur Gegenwart. — Molière: Les femmes savantes. — L'école des femmes. — Le Tartuffe.

e) Der Lehrerin Frl. M. Tavčar: Heine, Gedichte.

f) Des Herrn Pfarrers Franz Peterca in Duropolje: Dragutin Franić, Plitvička jezera i njihova okolica.

g) Des Herrn cand. phil. Dr. Paul Brežnik: Le Danube de Passau à la Mer noir.

h) Der löbl. Franck'schen Verlagsbuchhandlung in Stuttgart: Volkstümliche Naturwissenschaft.

i) Der Katoliška tiskarna in Laibach: Fizika in kemija za višje razrede srednjih šol, spisal prof. J. Reisner.

k) Der Karl Fromme-schen Hof-Buchhandlung in Wien: Österreich. Vaterlandskunde von F. J. Graf von Silva-Tarouca.

l) Des österr. Flottenvereines: Das Ende des Kontinentalismus in Österreich, von Anton von Moerl.

m) Des Herrn Pfarrers in Ajdovec, Anton Poljak: Krajnska Zhebeliza. Na svitlobo dal M. Kasteliz v Ljubljani 1830 (I.), 1831 (II), 1832 (III. knjiga).

III. **Durch Tausch**: 450 Programme der österr.-ungar. Lehranstalten; 418 Programme reichsdeutscher Anstalten. *R. Južnič.*

B. Schülerbibliothek.

Deutsche Abteilung.

Durch Ankauf: Sven Hedin, Der Kampf um den Nordpol (= Jugendschriften der Österr. Lehrmittelanstalt 68). — Leo Smolle, Der Waldbub von Aggstein. — Mein Bergland, mein Vaterland. Ein Sträußlein aus den Werken öst. Schriftsteller; gesammelt von Hans Frauengruber. — Ehre die Arbeit! Bilder aus Werkstatt und Leben; ausgew. von Hans Frauengruber u. H. Sauer. — Von Krieg und Kriegsvolk. Skizzen zur Entwickelung der österr. Wehrmacht; von Hauptmann Max Schönowsky v. Schönwies. — Gaudeamus XII. Jg.

Durch Geschenke: Sr. Exz. des Herrn Landespräsidenten Freiherrn Th. Schwarz: Erzherzog Franz Ferdinand, unser Tronfolger (Illustr. Sonderheft der Öst. Rundschau). — Des Graeserschen Verlages (Schulausgaben): August von Kotzebue, Die deutschen Kleinstädter, hrsg. von Dr. E. v. Komorzynski. — Ferdinand Raimund, Der Verschwender, hrsg. v. Dr. R. Prisching. — Karl Gutzkow, Der Königsleutenant, hrsg. v. Dr. A. Walheim. — Richard Wagner, Die Meistersinger von Nürnberg, hrsg. v. Dr. Egon v. Komorzynski. — Des Herrn Dir. Franz Brežnik: Joseph Spillmann S. J., Die Schiffbrüchigen.

Dr. J. Kelemina.

Slowenische Abteilung.

Durch Ankauf: Dom in Svet 1913. — Zvonček 1913. — Vrtec 1913. — Angeljček 1913. — Mentor 1912/13. — Planinski vestnik 1913. — Koledar Družbe sv. Mohorja 1914. — Dr. I. Pregelj: Mlada Breda. — — Dr. J. Zore: V tem znamenju boš zmagal. — Dr. Gruden: Zgodovina slovenskega naroda 3. zv. — Utva in Mira: Pravljice. — Tolstoj: Ljudske pripovedke. — Dr. Pivko: Telovadne igre II.

Durch Geschenke: Vom Schüler A. Kastelic der II. a Klasse: Knjižnica za mladino (26, 30). — Slovenske Večernice zv. 64. — Cankar: Troje povesti. — Knezova knjižnica, zv. XV. — Knjižn. Družbe sv. Cirila in Metoda, IX. zv. — Drobne povesti. — Ljudska knjižnica, IX. zv. — Spisi Krištofa Šmida (VII., XII.). — Stritar: Zimski večeri. — Jos. Jurčič: Zbrani spisi, II. zv. — Hoffmann: Kar Bog stori, vse prav stori. — Lah: Uporniki. — Kostanjevec: Življenja trnjeva pot. — Erjavec: V naravi. — Zabavna knjižnica za slovensko mladino, zv. 5. — Spisi Andrejčkovega Joža, VIII. — Spillmann: Ljubite svoje sovražnike. — Hočevar: Mlinarjev

Janez. — Slovanska knjižnica 69—70. — Levstikovi zbrani spisi I. — Mayer: Mučenci. — Tkalec: Tiun Lin. — Zabavna knjižnica (XIII., XIV., XVI.). — Angeljček XVIII. — Dr. Vošnjak: Navzgor-navzdol. — Vom Schüler Al. Germovšek der III. Klasse: Krmar Milanovič. — Vom Kustos: Dr. Detela: Tujski promet. — Zabavna knjižnica XXIV. — Podlimbarski: Gospodin Franjo. — Izbrani spisi J. Mencingerja, II. zv. — Koledar Družbe sv. Mohorja (l. 1911, 1912, 1913, 1914). — Dom in Svet, letnik XVII. in XIX. — Drobne povesti. — Dr. Pregelj: Mlada Breda. — Trunk: Na Jutrovem. — Knezova knjižnica, XV. zv. — Slovenske Večernice, 66. zv. — Utva in Mira: Pravljice. — Dr. Zore: V tem znamenju boš zmagal. — Dr. Gruden: Zgodovina slovenskega naroda III. — Slovenske balade in romance. *Peter Prosen.*

C. Geographisch-historische Lehrmittelsammlung.

Durch Ankauf: Handapparat zur Darstellung der scheinbaren Bewegung der Sonne in verschiedenen Breiten. — Die Geldsorten aller Länder, Ausgabe 1913. — Die Huldigung der Kärntner auf dem Zollfelde (1334).

Stand der Sammlung am Schlusse des Schuljahres: 98 Wandkarten, 4 Atlanten, 340 Bilder, 75 Ansichtskarten, 2 Stereoskopapparate und 1 Handapparat; zusammen 520 Stücke. *Dr. Viktor Tiller.*

D. Das naturhistorische Kabinett.

Durch Ankauf: I. Dr. P. Pfurtscheller, Zoologische Wandtafeln in Farbendruck. Gr. 130 × 140 cm, auf Leinwand mit Stäben: Nr. 23 Lepidoptera (Pieris brassicae, Raupe); Nr. 24 Lepidoptera (Pieris brassicae, Puppe); Nr. 25 Araneine, Epeira; Nr. 26. Amphibia, Anura. Rana I. Entwicklung des Frosches; Nr. 27 Amphibia, Anura, Rana II. Anatomie des Frosches.

II. Geographische Charakterbilder aus Österreich: *a)* Blatt 15: Erzberg von A. Heilmann (in Farbendruck). *b)* Blatt 16: Salzbergwerk in Wielicka von A. Heilmann (in Farbendruck). *c)* Blatt 17: Salzgärten bei Capo d'Istria von A. Heilmann (in Farbendruck). Alle 3 Bilder sind mit starkem Papier unterklebt und mit Leinwand versehen.

III. Technologische Wandtafeln von M. Eschner; in Farben ausgeführt *a)* Blatt 3: Hochofen; *b)* Blatt 4: Eisengießerei; *c)* Blatt 10: Kohlenbergwerk; *d)* Blatt 12: Glasbereitung; *e)* Blatt 13: Kochsalzgewinnung; *f)* Blatt 18: Porzellanbereitung; *g)* Blatt 26: Diamantengrube zu Kimberley.

IV. Prof. Dr. Benninhaven: Anatomische Wandtafeln gezeichnet von Maler Franz Frohse unter Mitwirkung Dr. G. Broesikes. Jede Tafel schulfertig zum Aufhängen. Nr. 6, 7, 8, Brust- und Baucheingeweide des Menschen I., II., III.

Durch Geschenke: 1. Fulica atra, das schwarze Wasserhuhn, Geschenk des Herrn k. k. Regierungsrates Wilhelm Frh. v. Rechbach. 2. Acherontia Atropos, Geschenk des Frl. Martina Ferlič.

Für alle Geschenke besten Dank! *Dr. Milan Šerko.*

E. Physikalisches Kabinett.

Tesla Versuche kompl. *A. Kunc.*

F. Lehrmittel für das Zeichnen.

Durch Ankauf: 1. 1 Schachtel mit 50 Kartons zum Aufspannen gepreßter Blätter. — 2. 10 Künstler-Ansichtskarten. — 3. Jiránek I., Einleitung zum Studium der Ornamentalkomposition nach der Natur, I. u. II. T. — 4. Bengler R., Leitfaden für das freie Zeichnen nach der Natur. — 5. Micholitsch A., Der moderne Zeichenunterricht, I. u. II. T.

Durch Geschenke: 15 Schmetterlinge vom H. L.-G.-R. J. Bučar.

J. Germ.

G. Lehrmittel für den Gesang.

1. Vaje v petju (6 Stück), zložil Anton Nedved. — 2. Studentenmesse (1 Partitur) von Antonio Lotti.

VII.

Reifeprüfungen.

A. Nachtrag zu dem Berichte über die Reifeprüfung im Sommertermine 1913.

Die mündliche Prüfung wurde unter dem Vorsitze des k. k. Regierungsrates, Herrn Dr. Franz Detela, am 14. und 15. Juli abgehalten.

Der Prüfung unterzogen sich 15 öffentliche Schüler der VIII. Klasse.
Approbiert wurden *a)* als reif mit Auszeichnung 2
b) als reif 12
Einer wurde auf ein halbes Jahr reprobiert.

B. Reifeprüfung im Herbsttermine 1913.

Zur mündlichen Prüfung, welche am 25. September unter dem Vorsitze des Anstaltsdirektors Herrn Franz Brežnik stattfand, wurden zwei öffentliche Schüler der VIII. Klasse zugelassen, welchen die Prüfungskommission die Reife zuerkannte.

Verzeichnis der im Sommer- und Herbsttermine approbierten Abiturienten:*

Post.-Nr.	Name	Geburtsort u. Vaterland	Geburtsjahr	Dauer der Gymnasial-Studien	Von sämtlichen Approbiert. erklärten sich zu zuwenden
1	Amon Josef	Slake, Steiermark	1889	10	Theologie
2	**Cirman Cyrill**	Pölland b. Bischoflack, Krain	1892	8	Jus
3	Gorenc Franz	Bučka, Krain	1894	8	Theologie
4	Hostnik Josef	Lukovec, Krain	1891	9	Theologie
5	Jerin Georg	Zagorje, Krain	1892	10	Turnen
6	Kambič Bogomir	Wippach, Krain	1893	8	Medizin
7	Komljanec Johann	Bučka, Krain	1892	8	Theologie
8	Kunstelj Alois	Fužine, Krain	1891	10	Theologie
9	Mrgolè Matthias	St. Kanzian, Krain	1891	9	Medizin
10	Pakiž Franz	Reifnitz, Krain	1893	9	Theologie
11	Schneider Albert	Hopfenbach, Krain	1895	8	Medizin
12	Smola Josef	Möttling, Krain	1895	8	Medizin
13	**Springer Bogomir**	Hönigstein, Krain	1893	8	Jus
14	Škofic Alois	Treffen, Krain	1895	8	Theologie
15	Vahtar Michael	Mannsburg, Krain	1889	10	Tierheilkunde
16	Zupančič Franz	Weixelburg, Krain	1891	9	Philosophie

C. Schriftliche Reifeprüfung im Sommertermine 1914.

Zu den schriftlichen Prüfungen, welche am 3., 4., 5. und 6. Juni vorgenommen wurden, erschienen 24 öffentliche Schüler der VIII. Klasse.

Die Themen der schriftlichen Prüfungen lauteten:

I. Deutsche Sprache:

a) Österreich — ein Hort der Nationen;

b) Mein Lieblingsheld. Motto: Ein jeglicher muß seinen Helden wählen,
Dem er die Wege zum Olymp hinauf
Sich nacharbeitet. (Goethe, Iph. II., 1, 208.

c) Die Darstellung des Konfliktes in Schillers Wilhelm Tell.

Das erste Thema wählten 12, das zweite 6 und das dritte 6 Schüler.

II. Slowenische Sprache:

a) Pomen Adrije za Avstrijo v gospodarskem oziru.

b) Kakšne načrte sem si napravil za bodočnost.

c) Jeklen značaj, dolžnosti spolnjevanje
najvišja, prava dika je moža. (Gregorčič.)

Das erste Thema wählten 11, das zweite 8 und das dritte 5 Schüler.

III. Lateinische Sprache: Tacitus Germania c. 14. und 15.

IV. Griechische Sprache: Herodot lib. I. 23, 24.

Die mündliche Prüfung wird am 9. Juli beginnen.

Das Resultat derselben wird im Jahresberichte pro 1914/15 mitgeteilt werden.

* Fetter Druck bezeichnet Reife mit Auszeichnung.

VIII.

Chronik.

1913.

8. Juli. Seine Exzellenz der Herr Landespräsident Theodor Schwarz Freiherr von Karsten besuchte das neue Gymnasialgebäude. Der Herr Landespräsident war vom Herrn Probsten Dr. Seb. Elbert begleitet und wurde vom Gymnasialdirektor Franz Brežnik erwartet und begrüßt. Der Herr Landespräsident durchmusterte unter der Führung des Gymnasialdirektors mit besonderer Aufmerksamkeit die schönen Schulräume, die Lehrmittelsammlungen und die Turnhalle mit sichtlicher Freude über die herrliche Lage des Gebäudes und seine praktische Einrichtung.

18. August. Anläßlich des Allerhöchsten Geburtsfestes Seiner Majestät des Kaisers Franz Josef I. wurde vom hierortigen Stadtpfarrer Probsten Dr. Seb. Elbert in der Kapitelkirche ein Festgottesdienst zelebriert, welchem über Einladung des Herrn k. k. Landesregierungsrates Wilhelm Freiherrn von Rechbach die Vertreter sämtlicher Behörden beiwohnten. Der Lehrkörper war durch den Direktor und zwei Professoren vertreten.

16. und 17. September. Einschreibungen und Aufnahmsprüfungen. Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen.

18. September. Eröffnung des Schuljahres 1913/14 mit einem feierlichen Hochamte in der Franziskanerkirche, woran sich daselbst die Absingung der Volkshymne anschloß.

19. September. Beginn des regelmäßigen Unterrichtes.

Vom 21. September angefangen wohnten die Schüler an jedem Sonn- und Feiertage dem Schulgottesdienste und der Exhorte, welche vom Katecheten der Anstalt für die Schüler des ganzen Gymnasiums gemeinsam gehalten wurde, in der Franziskanerkirche bei.

Am 25. September nachmittags fand unter dem Vorsitze des Anstaltsdirektors Franz Brežnik die Reifeprüfung im Herbsttermine statt. Zur Ablegung derselben wurden zwei Abiturienten, Kunstelj Alois und Vahtar Michael, zugelassen. Beide Kandidaten wurden von der Prüfungskommission für reif erklärt.

4. Oktober. Anläßlich des Allerhöchsten Namensfestes Seiner Majestät des Kaisers Franz Josef I. fand in der Franziskanerkirche ein Festgottesdienst statt, welcher mit der Absingung der Volkshymne geschlossen wurde.

Am 18. Oktober beging das Gymnasium die Jahrhundertfeier der Schlacht bei Leipzig. Um 8 Uhr wohnten der Lehrkörper und die Schüler einem Festgottesdienste in der Franziskanerkirche bei, welchen P. Athanasius Ausser mit Asistenz zelebrierte. Nach dem Festgottesdienste versammelten sich Lehrer und Schüler in der Turnhalle des Gymnasiums, wo vor der festlich geschmückten Kaiserbüste der Gymnasialsängerchor unter Begleitung des Violinorchesters das Loblied auf Österreich „Domovje moje Avstrija“ vortrug. Hierauf schilderte Professor Dr. Viktor Tiller den Kampf der Verbündeten gegen Napoleon bei Leipzig, hob die hervorragenden Verdienste Österreichs um die Freiheit Europas hervor, entwickelte in detailierter Ausführung die Befreiung Krains und des Küstenlandes von der französischen Okkupation und schloß seine einstündige Rede mit einem Živijo auf Seine Majestät unseren gnädigsten Kaiser und Friedensfürsten Franz Josef I., welches von den Versammelten stehend dreimal mit Begeisterung wiederholt wurde.

Am 23. und 24. Oktober empfingen die Schüler die hl. Sakramente der Buße und des Altars.

19. November. Anläßlich des Allerhöchsten Namensfestes weiland Ihrer Majestät der Kaiserin Elisabeth, wurde in der Franziskanerkirche ein Gedächnisgottesdienst abgehalten.

18. Dezember. Herr k. k. Hofrat und Landesschulinspektor Franz Hubad besuchte die Anstalt und wohnte dem Unterrichte in der deutschen Sprache in der VIII., der lateinischen Sprache in der II. b und der Naturgeschichte in der V. Klasse bei.

1914.

Vom 6. bis zum 10. Februar wurden die Semestralprüfungen der Privatisten und Privatistinnen abgehalten.

14. Februar. Schluß des I. Semesters mit einem Festgottesdienste. Verteilung der Semestralausweise.

Am 18. Februar begann das II. Semester.

Auf die heilige Osterkommunion wurde die Jugend durch dreitägige geistliche Übungen (vom 4. bis 7. April) und die dabei vom Franziskaner-Ordenspriester P. Mariophil Holeček aus Laibach gehaltenen Vorträge vorbereitet.

Am 19. Mai war Maiausflug. (Siehe Ausflüge.)

Am 19. und 20. Mai fand die Studienreise an die Adria statt, welche die Ortsgruppe Laibach des österreichischen Flottenvereines veranstaltete. An dieser beteiligten sich 40 Schüler und eine Privatistin unter der Leitung und Aufsicht der Professoren Dr. Viktor Tiller und Dr. Milan Šerko. (Siehe Ausflüge.)

Am 25. Mai vormittags fand die Einweihung und Eröffnung der Weißkrainer Bahn (Rudolfswert-Tschernembl-Möttling-Bubnjarci) statt. Der Einweihung, welche der hochwürdigste Herr Fürstbischof von Laibach, Dr. Bonaventura Jeglič, unter Assistenz von 9 geistlichen Herren auf der

Station Rudolfswert vollzog, wohnten der Lehrkörper und die studierende Jugend bei. Der Gymnasialgesangschor brachte unter der Leitung des Herrn Ignaz Hladnik Foersters Kantate „Ako Gospod ne zida hiše“ zum Vortrage.

Die Ehre, Seiner Exzellenz dem Herrn Eisenbahnminister Zdenko Freiherrn von Forster, vorgestellt zu werden hatte unter anderen Honoratioren auch der Anstaltsdirektor Franz Brežnik.

Am 8. Juni wohnten der Lehrkörper und die studierende Jugend in der Franziskanerkirche dem Trauergottesdienste für den verstorbenen pflichttreuen Schüler der III. Klasse, Viktor Vasič, bei, der schon im Schuljahre 1912/13 durch Krankheit am regelmässigen Besuche des Schulunterrichtes abgehalten worden war.

Am 8. Juni inspizierte den Zeichenunterricht der Fachinspektor für den Zeichenunterrricht, Herr Pazdirek Ladislaus, Professor am k. k. Staatsrealgymnasium in Graz.

Am 11. Juni beteiligte sich das ganze Gymnasium an der Frohnleichnamsprozession.

Am 17. und 18. Juni empfingen die Schüler zum dritten Male die hl. Sakramente der Buße und des Altars.

Am 28. Juni lief aus Sarajevo die entsetzliche Nachricht ein, daß Seine kaiserliche und königliche Hochheit

Erzherzog Thronfolger Franz Ferdinand und seine Gemahlin Sophie Herzogin von Hohenburg

das Opfer eines ruchlosen Attentates wurden, wodurch das Kaiserhaus und ganz Österreich-Ungarn einen unersetzlichen Verlust erlitten haben. Auf dem Gymnasialgebäude wurde die Trauerfahne gehißt und im Namen der Anstalt ersuchte der Direktor den Herrn Bezirkshauptmann den ehrfurchtvollsten Ausdruck des tiefsten Beileids über den herben Verlust an den Stufen des allerhöchsten Thrones zu unterbreiten. Der Lehrkörper und die Gymnasialjugend wohnten dem Trauergottesdienste am 3. Juli in der Franziskanerkirche bei.

Die Prüfungen der Privatistinnen und die mündlichen Versetzungsprüfungen wurden in der Zeit vom 19. bis 27. Juni vorgenommen.

Das Schuljahr wurde am 4. Juli mit einem feierlichen Gottesdienste in der Franziskanerkirche und der Absingung der Volkshymne geschlossen. Sodann wurden die Schüler nach der Verteilung der Jahreszeugnisse entlassen.

Ordentliche Konferenzen fanden statt:

1913: Am 18. September, 6., 24. und 21. Oktober, 21. November, 19. Dezember.

1914: Am 11. Februar, 6. und 27. März, 24. April, 5. Mai, 5. und 27. Juni, 2. Juli.

Außerordentliche:

1913: 22. September, 9. Oktober.

1914: 15. Jänner, 16. und 29. Mai.

IX.

Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1) Mit Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 16. Juni 1913, Z. 2444, wurde angeordnet, daß beim griechischen Unterrichte in der VI. Klasse der Gymnasien die schriftlichen Übersetzungsarbeiten aus der Unterrichtssprache in das Griechische als Schularbeiten in Hinkunft zu entfallen haben (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. vom 26. Juni 1913, Z. 3961).

2) Normale des k. k. L.-Sch.-R. v. 5. Juli 1813, Z. 4162, womit den Kindern und jugendlichen Personen bis zum 16. Lebensjahre ausnahmslos der Besitz von Schußwaffen und Munitionsgegenständen untersagt wird, insofern sie sich nicht mit einem, auf ihren Namen und die betreffende Waffe lautenden Waffenpasse ausweisen können.

3) Normale des k. k. L.-Sch-R. v. 22. Juli 1913, Z. 4511, betreffend die Frequentationszeugnisse der Volksschüler, wornach Schülern mit nicht genügenden oder kaum genügenden Leistungen in der Religionslehre, den Sprachen und im Rechnen die Aufnahme in die erste Klasse einer Mittelschule zu versagen ist.

4) Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 7. September 1913, Z. 358, betreffend die Unzulässigkeit der Errichtung und des Betriebes von Funkentelegraphenanlagen ohne Einvernehmen mit der Staatstelegraphenverwaltung (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. v. 25. September 1913, Z. 6383).

5) Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht v. 6. Juni 1913, Z. 23.531, betreffend die Förderung des Fremdenverkehres seitens

der Schule (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. v. 6. Oktober 1913, Z. 4631).

6) Mit Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 2. Oktober 1913, Z. 37.642 wurde die Eröffnung eines dritten Kurses für den nicht obligaten Unterricht in der italienischen Sprache genehmigt (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. v. 8. Oktober 1913, Z. 6870).

7) Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht v. 22. Oktober 1913, Z. 1163, betreffend die Förderung der Redegewandheit in der Mittelschule (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. v. 29. Oktober 1913, Z. 7484).

8) Der Erlaß des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 9. Dezember 1913, Z. 56.172 bestimmt, daß die Weihnachtsferien vom 24. Dezember 1913 bis 5. Jänner 1914 dauern, (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. vom 16. Dezember 1913, Z. 8599).

9) Erlaß des k. k. Ministeriums für öffentliche Arbeiten v. 7. August 1913, Z. 39.988—IV a, betreffend die Geschäftsführung für die staatstechnischen Beamten hinsichtlich ihrer Mitwirkung bei der Staatsgebäudeverwaltung im Herzogtume Krain (intim. mit Erl. des k. k. L.-Sch.-R. vom 21. November 1913, Z. 6462).

10) Erlaß des k. k. L.-Sch.-R. v. 2. März 1914, Z. 1014, betreffend den Besuch des Laibacher Kinematographen „Ideal“, womit den Schülern lediglich der Besuch der Schülervorstellungen gestattet wird, während in Hinkunft zu allen anderen Kinovorstellungen den Schülern der Zutritt ausnahmslos strengstens untersagt wird.

11) Erlaß des k. k. L.-Sch.-R. v. 27. Februar 1914, Z. 1328, betreffend die Disziplinarbehandlung der Schüler.

12) Erlaß des k. k. L.-Sch.-R. v. 18. April 1914, Z. 618, wornach den Mittelschülern die Teilnahme an Vereinen und die Beteiligung an Kampf- und Wettspielen mit Nichtmittelschülern strengstens verboten ist.

X.

Zusammenwirken zwischen Schule und Haus.

Die Schule hat alles getan, um den Verkehr mit den Angehörigen der Schüler zu fördern.

Der Direktor war täglich in der Direktionskanzlei zur Verfügung, die Mitglieder des Lehrkörpers hatten im Sprechzimmer wöchentlich 2—3 Sprechstunden. Bei vorheriger Anmeldung waren aber die Professoren auch außerhalb dieser Zeit im Konferenzzimmer oder in ihren Lehrmittelkabinetten zu sprechen. Rücksprachen über Betragen und Leistungen der Schüler werden grundsätzlich nur in den Amtslokalitäten des Gymnasiums, nicht aber in Privatwohnungen oder anderwärts gepflogen. Dringend nötig ist es, daß Eltern und Quartiergeber von der gebotenen Gelegenheit zum Austausch der Meinungen über Betragen und Leistungen der Zöglinge des Gymnasiums mehr zu rechter Zeit und ausgiebigeren Gebrauch machen, als dies bisher geschehen ist. Um Mißverständnissen vorzubeugen, werden die Angehörigen der Schüler darauf aufmerksam gemacht, daß Rücksprachen mit dem Direcktor oder Klassenvorstande in den meisten Fällen nicht ausreichen, weil die genauesten Aufschlüsse über Leistungen in den einzelnen Unterrichtsgegenständen selbstverständlich nur der betreffende Fachlehrer geben kann, und daß in den letzten Wochen des Semesters, unmittelbar vor der Klassifikation (abgesehen von wohlbegründeten Ausnahmen) über Schülerleistungen keine Auskünfte erteilt werden sollen. Um den Angehörigen der Schüler die Möglichkeit zu bieten, den Ausfall der schriftlichen Arbeiten zu überwachen, wird den Schülern im ersten Monate des Semesters der Arbeitsplan diktiert, aus dem zu ersehen ist, an welchem Tage Arbeiten geschrieben werden. Diesen Arbeitsplan haben die Schüler ihren Angehörigen mitzuteilen, damit so den Eltern die Möglichkeit gegeben wird, sich über die schriftlichen Arbeiten zu unterrichten. Wünschenswert ist es auch, daß die nach jeder Zensurkonferenz gemachten Mitteilungen über das Betragen und die Leistungen der Schüler sobald als möglich, versehen mit der Unterschrift des gesetzlichen Vertreters des Schülers, der Direktion zurückgeschickt werden.

Von den Schülern des Gymnasiums wohnten 112 bei ihren Eltern, 174 bei Privaten.

XI.

Körper- und Gesundheitspflege.

Das Turnen wurde als obligater Gegenstand in der I.—IV. Klasse betrieben. Nur 20 Schüler waren wegen körperlicher Gebrechlichkeit davon enthoben. In den oberen Klassen war es freier Gegenstand und wurde in 1 Abteilung mit 2 wöchentlichen Stunden betrieben. Das Turnen unterrichtete in der modern eingerichteten Turnhalle der Gymnasiallehrer Franz Stopar.

Die Jugendspiele fanden wie im vorigen Jahre auf dem Platze an der Gurk (na Loki) statt, der von der löblichen Gemeinde Rudolfswert zur Benützung überlassen wurde. Die Schüler spielten jeden Donnerstag und Samstag, außer wenn das Wetter ungünstig war, von 2 bis 6 Uhr, bezw. in der warmen Jahreszeit von 3 bis 7 Uhr. Gespielt wurden folgende Spiele: Ballspiel, Croquetspiel, Schlagball, Schleuderball, Ballinospiel. Der größten Beliebtheit aber erfreute sich das Footballspiel. Der

Spielplatz „na Loki“ entspricht zwar nicht ganz den Anforderungen eines normal großen Footballspielplatzes, denn sowohl die Länge als auch die Breite desselben mußte reduziert werden, genügt aber im großen und ganzen zur Ausübung der Mannschaften. Das Footballspiel, das erst voriges Jahr eingeführt worden ist, wurde heuer so eifrig betrieben, daß schon zwei Mannschaften, bestehend aus den Schülern des Obergymnasiums, ausgebildet wurden, die einen bedeutenden Fortschritt aufweisen. Außerdem übten sich die Schüler des Untergymnasiums (1 Mannschaft). Am 2. Juni wurde mit den Spielern des I. Staatsgymnasiums in Laibach ein regelrechtes Wettspiel ausgetragen, wozu unsere Spieler vom I. Staatsgymnasium eingeladen worden sind. Das Resultat des Matches fiel für die Laibacher günstiger aus, erbrachte jedoch den Beweis, daß auch unsere Mannschaft trotz der kurzen Übungszeit schon bedeutend vorgeschritten ist. Am 28. Juni kamen dagegen die Laibacher nach Rudolfswert, wo ein Match stattfand. Nach hartem Kampf endete das Spiel gegen die Laibacher mit 2 : 1. Somit gingen unsere Footballisten bei der Revanche als Sieger hervor. Es wurde an folgenden Tagen gespielt: am 21., 25., 28. April; am 7., 14., 16. und 23. Mai; am 2., 4., 10., 13., 18., 20., 25., 27. Juni und am 2. Juli.

Auch allerlei Sportübungen erfreuten sich eifriger Pflege. Infolge des schneereichen, strengen Winters kam insbesondere der Wintersport zur Geltung. Das Rodeln betrieben 177 Schüler, d. i. 60 %, und das Eislaufen 118 Schüler, d. i. 41 %. Sehr eifrig wurde auch das Kahnfahren auf der Gurk betrieben. Dagegen konnte das Baden in der Gurk wegen der regnerischen und kühlen Witterung im Monate Juni nur wenig betrieben werden.

Schwimmer gab es in der

I. a	Klasse	unter	23	Schülern	10	oder	47 %
I. b	„	„	22	„	9	„	45 %
II. a	„	„	20	„	14	„	70 %
II. b	„	„	23	„	8	„	39 %
III.	„	„	31	„	21	„	65 %
IV.	„	„	30	„	25	„	83 %
V.	„	„	44	„	35	„	79 %
VI.	„	„	45	„	36	„	80 %
VII.	„	„	24	„	20	„	83 %
VIII.	„	„	24	„	19	„	79 %
im ganzen		unter	286	Schülern	197	oder	67 %.

Das Radfahren betrieben unter 276[10] Schülern 133 oder 46 %.

In den Ferien leben von 276[10] Schülern 210 oder 73 % auf dem Lande.

Im allgemeinen war der Gesundheitszustand im neuen Gymnasialgebäude ein recht günstiger. Die hohen, lichten und luftigen Lehrzimmer, die durch Ventilationen stets gelüftet werden können, sind während des Unterrichtes ein sehr gesunder Aufenthalt; auf den breiten, lichten Gängen können sich die Schüler in den Erholungspausen ergehen, wenn das Wetter nicht erlaubt, sich im Garten oder auf dem Spielplatze um das Gebäude herum zu tummeln. Im Interesse der Körperpflege der Schüler war der Unterricht mit geringen Ausnahmen auf den Vormittag verlegt, so daß die freien Nachmittage teils zur Widerholung des Lehrstoffes, teils zur Erholung im Freien und zu Spiel und Sport oder zu gemeinsamen Spaziergängen in die schöne Umgebung der Stadt verwendet werden konnten.

Schüler-Ausflüge.

Am 21. April. Ausflug der I. b Klasse auf den eine Stunde entfernten Stadtberg unter der Leitung des Professors Franz Stopar zu geographischen Zwecken.

Am 5. Mai. Ausflug der I. a Klasse über das Stadtfeld gegen Weinhof auf den Stadtberg unter der Leitung des Professors Dr. Viktor Tiller zu geographischen Zwecken.

Der Maiausflug, an dem sich alle Klassen in Begleitung ihrer Klassenvorstände beteiligten, fand am 19. Mai statt. Während die I. a Klasse dem bekannten Badeorte Töplitz zustrebte, fuhren die I. b, II. a und b mit der Bahn nach Sittich, gingen zu Fuß nach St. Martin bei Littai, wo das Mittagessen eingenommen wurde, und kehrten nach Besichtigung der Ortssehenswürdigkeiten nach Rodockendorf zurück, von wo sie mit dem Abendzuge in Rudolfswert eintrafen. Die III. und IV. Klasse fuhren mit dem Zuge nach Großlaschitsch, besichtigten das Schloß Turjak (Auersperg), besuchten Retje, den Geburtsort des slowenischen Dichters und Literaten Levstik, und Rašica, den Geburtsort Trubars. Dann marschierten sie auf der neuen Strasse nach Škofeljca, von wo sie mit dem Abendzuge heimkehrten.

Die V. Klasse machte den Ausflug nach Dürrenkrain. Mit dem Zuge in Unter-Straža angekommen, marschierte sie bis Seisenberg, wo die Mittagsrast stattfand. Von Seisenberg erreichte sie auf einem Leiterwagen Obergurk. Von hier zog sie nach Muljava, dem Geburtsorte des slowenischen Schriftstellers und Dichters Jurčič. Von da kehrte sie über Sittich nach Rudolfswert zurück.

Die VIII. Klasse fuhr nach Veldes. Eine Wanderung durch die romantische Rotweinklamm brachte die muntere Schar wieder an die Bahn zur Rückfahrt nach Rudolfswert.

Am 19. und 20. Mai fand die von der Ortsgruppe Laibach des österreichischen Flottenvereines in Laibach veranstaltete Studienreise an die Adria statt, an welcher sich 41 Schüler der Anstalt unter der Leitung und Aufsicht der Professoren Dr. V. Tiller und Dr. M. Šerko beteiligten. Die Abfahrt nach Laibach fand am 18. Mai mit dem Abendzuge statt. In Laibach wurden sie am Unterkrainerbahnhof von einem Komitee erwartet und in die Landwehrkaserne geführt, wo sie übernachteten und um 4 Uhr früh auf den Hauptbahnhof geleitet wurden. Da begann um halb 5 Uhr die Einwaggonierung der Teilnehmer von 6 Mittelschulen Krains. Um 5 Uhr fand die Abfahrt nach Fiume mittelst Sonderzuges statt. In Fiume kamen sie um 9 Uhr an. Nach Besichtigung der Sehenswürdigkeiten dieser Stadt führte ein Separatdampfer die Teilnehmer nach Abbazia und von da nach Pola, wo übernachtet wurde. Der Vormittag des 20. Mai wurde zur Besichtigung der Stadt Pola, der Arena, des Hauptkriegshafens, des Marine-See-Arsenals, des Marine-Museums und einiger Kriegsschiffe verwendet. Um 1 Uhr vormittags fand die Abfahrt von Pola mit einem Separatdampfer nach Brioni statt. Hier wurden die Römerbäder, der Tiergarten und sonstige Sehenswürdigkeiten besichtigt. Die Abfahrt von Brioni nach Triest fand um halb 4 Uhr statt. Von Triest kehrten die Ausflügler mittelst Sonderzuges nach Laibach zurück, wo die Teilnehmer des Rudolfswerter-Gymnasiums wieder in der Landwehrkaserne übernachteten und am 21. Mai mit dem Abendzuge nach Rudolfswert zurückkehrten.

Allen jenen Faktoren, welche diese instruktive Studienreise an die Adria angeregt und nach Kräften gefördert haben, insbesondere den Ortsgruppen des österr. Flottenvereines in Laibach und Rudolfswert, sowie den k. u. k. Militärbehörden für die Bequartierung der Teilnehmer des Rudolfswerter-Gymnasiums in den Kasernen spricht die k. k. Gymnasialdirektion den verbindlichsten Dank aus.

XII.

Der fakultative Schießunterricht.

Der fakultative Schießunterricht hat für das Schuljahr 1913/14 am 16. Oktober begonnen. Ihre Teilnahme am Schießunterricht meldeten zu Beginn des Schuljahres folgende Septimaner: Benedik, Budna, Cesar, Cvelbar, Dular, Gebauer, Jarc, Kastelic, Kolbezen, Kozoglav, Kranjc, Mazele, Mlakar, Prah, Pristou, Rant, Skušek, Štukelj, Zakrajšek und Žlajpah. Aus der VIII. Klasse meldeten sich zum Schießunterrichte die Schüler: Andolšek, Cvar, Eršte, Gregorc, Guzelj, Hočevar, Jakša, Kuder, Petrič, Srimšek, Struna, Trost und Zupančič.

Wie im Schuljahre 1912/13 übernahmen auch heuer die Leitung des Schießunterrichtes die Herren Professoren Anton Lovše und Dr. Milan Šerko; den Schießübungen wohnte der Anstaltsdirektor öfters bei.

In den ersten Unterrichtsstunden wurde die Beschaffenheit des Mannlicher-Gewehres M. 95 erläutert, wobei besonders die Aufmerksamkeit der Wirkungsweise des Verschlußstückes, dem Grünsel und dem Korn gewidmet wurde. Dem theoretischen Unterrichte im Anschlagen und Zielen folgten die praktischen Anschlag- und Zielübungen, wobei man besonderes Gewicht auf das Fehlerdreieck legte.

Der darauf folgende Unterricht wurde in zwei Kurse eingeteilt. Die Schüler der VII. Klasse (I. Kurs) schoßen unter Leitung des Herrn Professor A. Lovše bis zum 14. Jänner 1914 auf die Schulscheibe, wobei jeder Schuß in das dafür bestimmte Schußblatt eingetragen wurde. Vom 4. Jänner an bis zum Schluße des Schießunterrichtes schoß man auf ganze Figuren im Sandkasten in liegender, kniender und stehender Körperstellung. — Die Schüler der VIII. Klasse (II. Kurs) schoßen unter Aufsicht des Herrn Professor Dr. Milan Šerko, nachdem die Theorie des Schießens kurz wiederholt worden war, in allen drei Körperlagen auf eherne Figuren im Sandkasten.

Am 28. April und 2. Mai fuhren sämtliche Teilnehmer am Schießunterrichte nach Laibach, wo sie sich auf der militärischen Schießstätte im scharfen Schießen auf 200 und 300 Schritte übten.

Das k. k. Stationskommando in Laibach hat der Anstalt ein Mannlicher-Gewehr M. 95, dann 7 Gewehre M. 88—90 und einen Repetierstutzen zur Verfügung gestellt.

Am 27. Juni beteiligten sich 16 Schüler der Anstalt am Bestschießen auf der Garnisonsschießstätte in Laibach, wo am genannten Tage die Schüler aller Mittelschulen Krains, 325 an der Zahl, um die Priorität rangen. Die besten Treffresultate unserer Anstalt erzielten die Septimaner Wilhelm Gebauer, dem als erster Preis der Anstalt ein prächtiger Spazierstock zufiel, und Josef Rant, der sich den zweiten Preis, eine Touristenausrüstung, errang. Den dritten Preis, eine Brieftasche, gewann der Oktavaner Emanuel Petrič. Es wurde mit Mannlicher Repetierstutzen auf eine Distanz von 300 Schritten geschossen.

XIII. Statistik der Schüler.

	Klasse											Summe
	I. a	I. b	II. a	II. b	III.	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	
1. Zahl.												
Zu Ende 1912/13	23^{2}	22^{2}	44^{1}	—	29^{2}	23^{2}	25	39	28^{1}	25	17	275^{10}
Zu Anfang 1913/14	28^{1}	28^{1}	23^{1}	21^{2}	33^{1}	28^{2}	—	43^{1}	43	27^{1}	24	298^{10}
Während d. Schuljahres eingetreten	0^{1}	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	2^{1}
Im ganzen aufgenommen	28^{2}	28^{1}	23^{1}	21^{2}	33^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	27^{1}	24	300^{11}
Darunter:												
Neu aufgenommen und zwar:												
Aufgestiegen	28^{1}	27^{1}	—	—	—	1	—	3	5	4	—	68^{2}
Repetenten	—	—	—	2	—	1	—	2	4	—	—	9
Wiederaufgenommen und zwar:												
Aufgestiegen	—	—	23^{1}	17^{2}	32^{1}	24^{2}	—	38^{1}	33	23^{1}	24	214^{8}
Repetenten	0^{1}	1	—	2	1	2	—	—	3	—	—	9^{1}
Während d. Schuljahres ausgetreten	6	8^{1}	3	—	3	—	—	—	—	4	—	24^{1}
Schülerzahl Ende 1913/14	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}
Darunter:												
Öffentliche Schüler							—					
Privatisten							—					
2. Geburtsort (Vaterland).												
Stadt Rudolfswert	5^{1}	3	2	$—^{2}$	3	2	—	6^{1}	7	$—^{1}$	3	31^{5}
Krain sonst	16	16	18	19	26	24^{2}	—	30	33	20	21	223^{2}
Steiermark	—	1	—	1	1	1	—	3	4	2	—	13
Ober-Österreich	0^{1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0^{1}
Nieder-Österreich	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Tirol	—	—	0^{1}	—	—	—	—	—	—	—	—	0^{1}
Küstenland	—	—	—	—	0^{1}	1	—	2	1	—	—	4^{1}
Ungarn	—	—	—	1	—	—	—	2	—	—	—	3
Bosnien	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}

	Klasse											Summe
	I. a	I. b	II. a	II. b	III.	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	
3. Muttersprache.												
Slowenisch	21^{1}	20	20	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	44	23^{1}	24	274^{8}
Deutsch	1^{1}	—	—^{1}	—	—	—	—	—	1	—	—	2^{2}
Summe	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}
4. Religionsbekenntnis.												
Katholisch des lateinischen Ritus	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}
Summe	22^{2}	20	20^{1}	20^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}
5. Lebensalter.												
Am Schlusse d. Schuljahres hatten vollendet: 10 Jahre	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11 Jahre	7	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14
12 »	8	3	2	2	3	—	—	—	—	—	—	18
13 »	6	7	7	8	5	—	—	—	—	—	—	33
14 »	3	3	9	8	8	4	—	—	—	—	—	35
15 »	—	—	2	3	9	9	—	16	1	—	—	40
16 »	—	—	1	2	4	10	—	14	8	—	—	39
17 »	—	—	—	—	1	2	—	6	4	8	—	21
18 »	—	—	—	—	1	5	—	3	17	6	3	35
19 »	—	—	—	—	—	—	—	5	10	4	5	24
20 »	—	—	—	—	—	—	—	—	5	3	2	10
21 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	4	6
22 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
23 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	5	6
24 »	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
Summe	24	20	21	23	31	30	—	44	45	24	24	286
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.												
Ortsangehörige	6	2	1	0^{2}	3	1	—	6^{1}	6	0^{1}	2	27^{4}
Auswärtige	16^{2}	18	19^{1}	21	27^{1}	27^{2}	—	37	39	23	22	249^{6}
Summe	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}

7. Klassifikation.

	I. a	I. b	II. a	II. b	III.	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	Summe
a) Zu Ende des Schuljahres 1913/14:												
Zum Aufsteigen in die nächste Kl. waren (bezw. haben die oberste Klasse beendet)												
Vorzüglich geeignet (mit vorzüglichem Erfolg)	4	4	2^{1}	4^{1}	1	1^{1}	—	1	5	2^{1}	3	27^{4}
Geeignet (mit gutem Erfolge)	10	7	7	10	14^{1}	15^{1}	—	24^{1}	28	14	19	148^{3}
Im allgemeinen geeignet	3	4	6	5	6	1	—	—	—	—	—	25
Nicht geeignet (mit nicht genügendem Erfolg)	5^{1}	4	4	2^{1}	9	11	—	10	6	2	—	53^{2}
Die Bewilligung zu einer Wiederholungsprüfung erhielten	—	1	—	—	—	—	—	7	6	5	1	20
Nicht klassifiziert wurden	0^{1}	—	1	—	—	—	—	1	—	—	1	3^{1}
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summe	22^{2}	20	20^{1}	21^{2}	30^{1}	28^{2}	—	43^{1}	45	23^{1}	24	276^{10}
b) Nachtrag zum Schuljahre 1912/13:												
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt	—	—	—	—	—	—	—	5	6	5	2	18
Entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	5	6	5	2	18
Nichtentsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nachtragsprüfungen waren bewill.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht erschienen sind	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

	Klasse											Summe
	I. a	I. b	II. a	II. b	III.	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	
Demnach ist das Ergebnis für das Schuljahr 1912/13:												
Zum Aufsteigen in die nächste Klasse waren:												
Vorzüglich geeignet (bezw. haben die oberste Klasse beendet) . .	3^1	6^1	1	—	4^1	3	3	5	2^1	3	1	31^4
Geeignet	16	11	25^1	—	14^1	18^1	13	32	22	22	16	189^2
Im allgemeinen geeignet	4	3^1	10	—	7	—	6	—	—	—	—	30^1
Nicht geeignet	$—^1$	2	7	—	4	2	3	1	4	—	—	23^1
Ungeprüft blieben	1	—	1	—	—	$—^1$	—	1	—	—	—	3^1
Summe . .	23^2	22^2	44^1	—	29^2	23^2	25	39	28^1	25	17	275^{10}
8. Geldleistungen der Schüler.												
Das Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet: im I. Semester .	5^1	7^1	—	4	1	3	—	3^1	6	—	3	32^3
im II. Semester .	3^1	3^1	8	2^1	16	11	—	20^1	13	6	6	88^4
Zur Hälfte befreit waren:												
im I. Semester .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
im II. Semester .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ganz befreit waren:												
im I. Semester .	19	15	20^1	17^2	32^1	25^2	—	40	37	27^1	21	253^7
im II. Semester .	19^1	17	12^1	20	15^1	17^2	--	23	32	17^1	18	190^6
Das Schulgeld betrug im Ganzen:												
im I. Semester .	180·—	240·—	—·—	120·—	30·—	90·—	—	120·—	180·—	—·—	90·—	1050·—
im II. Semester .	120·—	120·—	240·—	90·—	480·—	330·—	—	630·—	390·—	180·—	180·—	2760·—
Summe .	300.—	360·—	240·—	210·—	510·—	420·—	—	750·—	570·—	180·—	270·—	3810·—
Die *Aufnahmstaxen* betrugen . .	121·80	117·60	—·—	8·40	—·—	8·40	—	21·—	37·80	16·80	—·—	331·80
Die *Lehrmittelbeiträge* betrugen .	90·—	87·—	72·—	69·—	102·—	90·—	—	132·—	135·—	84·—	72·—	933·—
Die *Taxen für Zeugnisduplikate* betrugen	—·—	—·—	—·—	—·—	4·—	8·—	—	—·—	—·—	—·—	—·—	12·—
Summe .	211·80	204·60	72·—	77·40	106·—	106·40	—	153.—	172·80	100·80	72·—	1276·80

	Klasse											Summe
	I. a	I. b	II. a	II. b	III.	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	
9. Besuch des Unterrichtes in den relativ obligaten und nicht obligaten Lehrgegenständen.												
Turnen	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	3	10
Italienische Sprache: I. Kurs	—	—	—	—	—	16	—	6	18	3	—	43
II. Kurs	—	—	—	—	—	—	—	7	10	3	2	22
III. Kurs	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3[1]	9	12[1]
Stenographie:												
I. Kurs *a)* slowenische	—	—	—	—	—	4	—	2	4	—	—	10
b) deutsche	—	—	—	—	—	5	—	7	12	—	—	24
II. Kurs *a)* slowenische	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	—	7
b) deutsche	—	—	—	—	—	—	—	4	5	—	—	9
Gesang: I. Kurs	10	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15
II. Kurs	—	—	8	10	10	7	—	—	11	3	11	60
Zeichnen	—	—	—	—	—	—	—	3	7	4[1]	5	19[1]
Schießunterricht	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17	14	31
10. Stipendien.												
Anzahl der Stipendisten	1	—	—	—	3	3	—	5	7	3	5	27
Gesamtbetrag der Stipendien	50·—	—	—	—	625·—	440·—	—	818·—	1689·—	685·—	628·66	4935.66

XIV.

Studenten-Unterstützungsverein.

Der Studenten-Unterstützungsverein hat die Unterstützung wahrhaft dürftiger und würdiger Schüler durch Beteilung mit Lehrmitteln und Kleidungsstücken, durch Aushilfen in Krankheitsfällen u. s. w. zum Zwecke.

Die Wirksamkeit desselben ist aus folgendem den Zeitraum vom Ende Juni 1913 bis Ende Juni 1914 umfassenden Rechnungsabschlusse ersichtlich:

Nr.	Einnahmen	K	h	Nr.	Ausgaben	K	h
1	Kassarest Ende Juni 1913	576	75	1	Beitrag für die Erhaltung der Studentenküche . . .	200	—
2	Couponerlös	342	60	2	Beiträge für Lehrmittel . .	245	05
3	Spende der Stadtsparkasse in Rudolfswert	200	—	3	Für Medikamente	117	54
4	Beiträge d. Vereinsmitglieder	235	—	4	Beitrag zum Schulgelde . .	60	—
				5	Beitrag zur Studienreise an die Adria	30	—
				6	Kleinigkeiten	20	45
					Gesamtausgaben .	673	04
					Kassarest	681	31
	Summe	1354	35		Summe	1354	35

Außerdem besitzt der Verein ein Stammvermögen im Nominalwerte von 9336 K, angelegt teils in Wertpapieren, teils in der Rudolfswerter Sparkasse.

In Krankheitsfällen wurden die Schüler von den Herren Dr. Johann Vaupotič, k. k. Ober-Bezirksarzt, Dr. J. Buh, Distriktsarzt, Dr. J. Strašek, Primarius im Frauenspitale in Rudolfswert, liebenswürdigerweise unentgeltlich behandelt. Mehrere schwer erkrankte Schüler fanden im Spitale der Barmherzigen Brüder unentgeltlich die liebevollste und sorgfältigste Pflege.

Von den Herren Apothekern Drag. Andrijanič und Josef Bergmann wurden dem Unterstützungsvereine die Medikamente zu bedeutend herabgesetzten Preisen verabfolgt.

In der unter der Leitung des k. k. Professors, Herrn Dr. Cyrill Ažman, stehenden Studentenküche bekamen das ganze Schuljahr hindurch 54 Schüler das Mittagmahl und auch noch das Abendbrot.

Außerdem wurden wie in den früheren Jahren viele dürftige Schüler der Anstalt von Seite des Konventes der hochw. P. P. Franziskaner, und mehrerer Bürger und Beamten durch Gewährung der ganzen Kost oder einzelner Kosttage in edelmütigster Weise unterstützt.

Ferner hat der Gemeinderat von Rudolfswert laut Zuschrift des Herrn Bürgermeisters vom 13. Jänner 1914 den verfügbaren Überschuß der städtischen Sparkasse aus dem Jahre 1912 im Betrage von 700 K mit der ausdrücklichen Bestimmung edelmütig gespendet, daß um diese Summe armen und würdigen Schülern der Anstalt Kleider angeschafft werden. So wurden 30 Schüler der Anstalt mit Kleidern beteilt.

Der Vereinsausschuß besteht aus folgenden Mitgliedern:

Franz Brežnik, k. k. Gymn.-Direktor, Obmann.
Dr. Sebastian Elbert, inful. Propst.
Dr. Anton Rogina, k. k. Oberlandesgerichtsrat.
Dr. Cyrill Ažman, k. k. Professor.
Horvat Urban, Buchhändler.
Albin Smola, k. k. Ober-Landesgerichtsrat.
Rudolf Južnič, k. k. Professor.

Ehrenmitglied: Herr Dr. Johann Vaupotič, k. k. Ober-Bezirksarzt.

VERZEICHNIS
der P. T. Mitglieder des Unterstützungsvereines und ihrer Beitragsleistungen.

Herr	Abram Heinrich, k. k. Kanzlei-Vorstand	2 K
»	Agnitsch Andreas, Spengler und Hausbesitzer	2 »
»	Andrijanić Dragotin, Apotheker	2 »
»	Afh Ernst, Inspektor der k. k. Staatsbahn	2 »
»	Dr. Cyrill, Ažman k. k. Professor	5 »
»	Barborič Karl, Kaufmann	2 »
»	Bergmann Josef, Mag. pharm., Apotheker u. Hausbesitzer	2 »
»	Brežnik Franz, k. k. Gymnasial-Direktor	6 »
»	Božič Franz, Kaufmann und Besitzer	2 »
»	Dolenc Rich., Dir. d. Weinbauschule i. P. u. Hausbesitzer	2 »
Frau	Dolinšek M., k. k. Oberlandesgerichtsrats-Witwe	2 »
Herr	Dr. Elbert Seb., inf. Propst, Komtur d. Franz Josef Ordens	6 »
»	Dr. Furlan Landesgerichtsrat	6 »
»	Garzaroli Fr., Edler von Thurnlack, Kreisgerichtspräs.	5 »
»	† Gerdešič Josef, k. k. Hofrat, Ritter d. Ord. d. eisernen Krone III. Klasse	4 »
»	Germ Josef, k. k. Professor	2 »
»	Dr. Globevnik Josef. Advokat	5 »
»	Guzelj August, k. k. Forstinspektor i. P.	2 »
»	Horvat Urban, Buchhändler	5 »
»	Hanuš Jaroslav, k. k. Baurat	2 »
»	Hrstka Josef, k. k. Geometer	2 »
»	Illovsky L., Besitzerin	1 »
»	Jakše Franz, Gastwirt und Besitzer	2 »
»	Južnič Rudolf, k. k. Professor	1 »
»	Kalčič Ludwig, Krankenhausverwalter	2 »
»	Kastelic Edmund, Kaufmann in Kandija	1 »

Frau	Kastelic Sophie, Besitzerin	1 K
Herr	Dr. Kelemina Jakob, Gymn.-Lehrer	1 »
»	Koderman Franz, k. k. Kanzleidirektor	1 »
»	Kuder Anton, k. k. Bezirksrichter	1 »
»	Krajec Johann, Besitzer in Kandia	3 »
»	J. Krajec' Nachfolger in Rudolfswert	5 »
»	Dr. Kraut Stefan, k. k. Landesgerichtsrat	3 »
»	Kunc Karl, k. k. Professor	2 »
»	Lapajne Anton, landwirtschaftl. Adjunkt in Stauden	2 »
»	Levičnik J. Edler von, k. k. Bezirksrichter	2 »
»	Lobe Janko, Vikar	1 »
»	Lončar Ivan, k. k. Finanzrat	20 »
»	Majcen Martin, k. k. Professor	1 »
»	Markič Michael, k. k. Professor	2 »
»	Mikolič Jakob, Kleidermacher und Besitzer	1 »
»	Mogolič Josef, Hausbesitzer	1 »
»	Možina Franc, Kaufmann und Besitzer	2 »
»	Mramor Michael, Lederer	2 »
Frau	Oblak Katharina, Besitzerin	3 »
Herr	Opitz Theodor, k. k. Eisenbahn-Oberinspektor	4 »
»	Pauser Adolf, Besitzer	4 »
»	Perko J., k. k. Gerichtsoffizial	2 »
»	Picek Georg, Kaufmann und Besitzer	2 »
»	Pöll Anton von Föhrenau, k. u. k. Oberst i. P., Ritter des Franz Josef-Ordens	5 »
»	Poula Josef, Besitzer und Gastwirt	1 »
»	Povše Franz, Kanonikus, Ritter des Franz Josef-Ordens	4 »
»	Dr. Poznik, k. k. Notar und Besitzer	12 »
»	Baron Rechbach Wilhelm, k. k. Landesregierungsrat	5 »
»	Rohrmann W., Dir. d. landwirtschaft. Schule in Stauden	2 »
»	Dr. Rogina Anton, k. k. Oberlandesgerichtsrat	4 »
Frl.	Rosina Hedw., Lehrerin i. P.	3 »
Frau	Rozina Maria, Beamtenswitwe	2 »
Herr	Rosmann Karl, Besitzer und Bürgermeister	2 »
»	Seidl Franz, Kaufmann	2 »
Frl.	Seidl Maria, Hausbesitzerin	2 »
Herr	Skalicky Bohuslav, k. k. Weinbauinspektor	2 »
»	Dr. Schegula Jakob, Advokat	5 »
»	Dr. Šerko Milan, k. k. prov. Gymnasiallehrer	1 »
»	Skale Othmar, k. k. Obertierarzt	2 »
»	Dr. Slanc Karl, Advokat	10 »
»	Smola Albin, k. k. Oberlandesgerichtsrat	2 »
»	Špendal Franz, Kanonikus	2 »
»	Škrabl M., Sparkassasekretär	2 »
»	Šuklje Franz Edler von, k. k. Hofrat	7 »
»	Dr. Tiller Viktor, k. k. Profesor	3 »
»	Virant Johann, Kanonikus	2 »
»	Zdolšek Rudolf, Adjunkt der landvirtschaftl. Schule in Stauden	1 »

Herr Zurc Josef, Landtagsabgeord., Besitzer u. Bürgermeister in Kandia . . . . 2 »
» Zwitter J., k. k. Bezirksrichter . . . . 2 »
» Dr. Žitek Vladimir, Advokat . . . . 5 »
» Žlogar Anton, Kanonikus . . . . 2 »

Im Namen der edelmütig unterstützten Jugend spricht der Berichterstatter, zugleich Obmann des Studenten-Unterstützungsvereines, allen Wohltätern und Gönnern den verbindlichsten Dank aus und knüpft daran die Bitte, die arme studierende Jugend auch in Zukunft gütigst unterstützen zu wollen.

XV.

Anzeige betreffend den Beginn des Schuljahres 1914/15.

Das Schuljahr 1914/15 wird am 18. September 1914 mit einem feierlichen Gottesdienste und der Anrufung des hl. Geistes eröffnet werden.

Gemäß den Bestimmungen des Erlasses des k. k. L. Sch. R. vom 5. Februar 1886, Z. 25, findet die Schüleraufnahme in die I. Klasse in zwei Terminen statt und zwar zu Ende des eben abgelaufenen Schuljahres am 4. Juli und zu Beginn des neuen Schuljahres am 16. September.

Schüler, welche in die I. Klasse als öffentliche Schüler oder als Privatisten aufgenommen werden wollen, haben sich in *Begleitung ihrer Eltern* oder deren *verantwortlicher Stellvertreter* an einem der oben bezeichneten Termine bei der Gymnasialdirektion zu melden und sich hiebei durch den Tauf- oder Geburtsschein darüber auszuweisen, daß sie bis Ende Dezember des laufenden Jahres wenigstens das zehnte Lebensjahr zurücklegen. Außerdem haben diejenigen Bewerber, welche die Volks- oder Bürgerschule öffentlich besucht haben, ein Frequentationszeugnis von der von ihnen zuletzt besuchten Schule vorzuweisen, das nebst der ausdrücklichen Bezeichnung, daß es zum Zwecke des Eintrittes in eine Mittelschule ausgestellt sei, die Noten aus der Religionslehre, der Unterrichtssprache und dem Rechnen zu enthalten hat.

Die wirkliche Aufnahme erfolgt auf Grund einer gut bestandenen Aufnahmsprüfung, bei welcher nach den Ministerial-Erlässen vom 14. März 1870, Z. 2370 und vom 27. Mai 1884, Z. 8019 folgende Anforderungen gestellt werden: „In der *Religion* jenes Maß von Wissen, welches in den ersten vier Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann; in der *Unterrichtssprache* Fertigkeit im Lesen und Schreiben, Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre, Fertigkeit im Analysieren einfach bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie; im *Rechnen* Übung in den vier Grundrechnungsoperationen mit ganzen Zahlen.“

Die Aufnahmsprüfungen werden am 4. Juli, resp. am 16. Sept. abgehalten.

Eine Wiederholung der Aufnahmsprüfung, sei es an ein und derselben oder an einer anderen Anstalt, ist laut hohen Ministerialerlasses vom 2. Jänner 1886, Zl. 85 unzulässig.

Die Schüleraufnahme in die übrigen Klassen (II.—VIII.) findet am 17. September statt.

Schüler, welche im letzten Semester dieser Anstalt angehört haben, müssen das letzte Jahreszeugnis, Schüler aber, welche von anderen Lehranstalten an diese überzutreten wünschen, ihren Tauf- oder Geburtsschein, das letzte Jahreszeugnis, versehen mit der ordnungsmäßigen Abgangsklausel, und etwaige Schulgeldbefreiungs- und Stipendiendekrete mitbringen.

Jeder neu eintretende Schüler zahlt eine *Aufnahmstaxe* von 4 K 20 h und einen *Lehrmittelbeitrag* von 3 K; den Lehrmittelbeitrag zahlen auch die der Anstalt bereits angehörenden Schüler.

Die *Wiederholungs-* und *Nachtragsprüfungen* beginnen am 16. September und müssen am 18. beendet sein.

Das *Schulgeld* beträgt per Semester 30 K und muß von den öffentlichen und Privat-Schülern, wofern sie von der Zahlung desselben nicht ordnungsmäßig befreit sind, im Laufe der ersten sechs Wochen eines jeden Semesters im voraus gezahlt werden. Eine Ausnahme besteht im I. Semester für die Schüler der I. Klasse, die das Schulgeld spätestens im Laufe der ersten drei Monate nach Beginn des Schuljahres zu entrichten haben und denen, wenn sie, beziehungsweise die zu ihrer Erhaltung Verpflichteten, wahrhaft dürftig sind, unter Umständen die Zahlung des Schulgeldes bis zum Schlusse des ersten Semesters gestundet werden kann.

Schülern, welche innerhalb der angegebenen Frist ihrer Schuldigkeit nicht nachgekommen sind, ist der fernere Besuch der Schule nicht gestattet.

Die *Befreiung* von der Entrichtung des Schulgeldes kann in der Regel nur öffentlichen Schülern gewährt werden:

a) wenn sie im letzten Semester in Beziehung auf das Betragen eine der beiden ersten Noten der vorgeschriebenen Notenskala erhalten haben und zum Aufsteigen in die nächste Klasse als geeignet bezeichnet worden sind, und

b) wenn sie, beziehungsweise die zu ihrer Erhaltung Verpflichteten, wahrhaft dürftig, das ist, in den Vermögensverhältnissen so beschränkt sind, daß ihnen die Bestreitung des Schulgeldes nicht ohne empfindliche Entbehrungen möglich sein würde.

Um die Befreiung von der Entrichtung des Schulgeldes zu erlangen, haben die Schüler ein an den k. k. Landesschulrat für Krain gerichteten, mit dem Zeugnisse über das letzte Semester bezw. Schuljahr und dem Vermögensausweise belegtes Gesuch bei der Direktion zu überreichen.

Die Gesuche um die Stundung des Schulgeldes sind gleichfalls an den k. k. Landesschulrat zu richten, mit dem Vermögensausweise zu belegen und binnen acht Tagen nach erfolgter Aufnahme bei der Direktion zu überreichen.

Der Vermögensausweis ist von dem *Gemeindevorsteher* und dem *Ortsseelsorger* auszustellen und darf bei der Überreichung nicht über ein Jahr alt sein; er hat die Vermögensverhältnisse so genau und eingehend, als zu sicherer Beurteilung derselben erforderlich ist, anzugeben.

Die Gymnasialdirektion.

Naznanilo o začetku šolskega leta 1914/15.

Šolsko leto 1914/15 se začne dné 18. septembra 1914 s slovesno službo Božjo na čast sv. Duhu.

Po določilih ukaza c. kr. dež. šolskega sveta z dne 5. februarja 1886, št. 25 se sprejemajo učenci v I. razred v dveh obrokih in sicer konec ravnokar preteklega šolskega leta dné 4. julija in v začetku novega šolskega leta dné 16. septembra.

Učenci, ki želé vstopiti v I. razred, bodi si kot javni bodi si kot privatni učenci, se morajo s svojimi *starši* ali njih *odgovornimi zastopniki* v jednem gori imenovanih obrokov oglasiti pri gimnazijskem ravnateljstvu ter s krstnim ali rojstnim listom izkazati, da bodo koncem decembra tekočega leta vsaj deseto leto izpolnili. Vrh tega morajo oni prosilci, ki so kot javni učenci obiskovali ljudsko ali meščansko šolo, obiskovalno izpričevalo dotične šole predložiti, v katerem mora biti izrečno povedano, da je bilo izdano za vstop v srednjo šolo, in v katerem morajo biti redi iz veroznanstva, učnega jezika in računstva.

A da se resnično sprejmo, morajo z dobrim uspehom narediti sprejemni izpit, pri katerem se po določilih minist. ukazov z dne 14. marca 1870, št. 2370 in 27. maja 1884, št. 8019 zahteva sledeče: „*V veroznanstvu* toliko znanje, kolikor se ga more pridobiti v prvih štirih letnih tečajih ljudske šole; *v učnem jeziku* spretnost v čitanju in pisanju, znanje početnih naukov iz oblikoslovja, spretnost v analizovanju prosto razširjenih stavkov, znanje pravopisnih pravil; *v računstvu* vaje v štirih osnovnih računskih vrstah s celimi števili.“

Sprejemni izpiti se vršé dné 4. julija, oziroma 16. septembra.

Sprejemnih izpitov ponavljati, bodisi na istem ali na kakem drugem učilišču, ni dovoljeno po odredbi visokega ministerstva z dné 2. januarja 1886, štev. 85.

V ostale razrede (II.—VIII.) se bodo učenci sprejemali 17. septembra. Učenci, ki so zadnje polletje obiskovali tukajšnje učilišče, morajo s seboj prinesti zadnje izpričevalo, učenci pa, ki želé z drugih učilišč prestopiti na tukajšnje, krstni ali rojstni list, izpričevalo o zadnjem polletju, katero pa mora imeti pristavek o pravilno naznanjenem odhodu, in ako so bili oproščeni šolnine ali dobivali štipendije, tudi dotične dekrete.

Vsak na novo vstopivši učenec plača 4 K 20 h *sprejemnine* in 3 K kot *prinos za nakup učil;* zadnji znesek morajo plačati tudi oni učenci, ki so bili že doslé na tukajšnjem zavodu.

Ponavljalni in *dodatni izpiti* se začnó 16. septembra in morajo 18. biti zvršeni.

Šolnina znaša za *vsako polletje* 30 kron ter jo morajo javni in izvenredni učenci naprej plačati v *prvih šestih tednih.* Izjema je za učence prvega razreda v prvem polletju, ki morajo šolnino plačati najkesneje v prvih treh mesecih po začetku šolskega leta, a morejo, če so sami, oziroma oni, ki so dolžni zanje skrbeti, v resnici revni, pod uveti pridobiti si dovoljenje, da smejo šolnino plačati šele konec prvega tečaja. Učencem, ki tej svoji dolžnosti ne zadosté v povedanem obroku, se prepové daljše šolsko obiskovanje.

Navadno se morejo *plačevanja šolnine oprostiti* le javni učenci.

a) ako so v preteklem polletju v obnašanju dobili jeden prvih dveh redov, predpisanih v redovni lestvici, in ako so bili pri klasifikaciji spoznani sposobni, da prestopijo v naslednji razred, in

b) ako so sami, oziroma oni, katerih dolžnost je zanje skrbeti, v resnici revni, to je, ako so njih imovinske razmere takšne, da bi jim plačevanje šolnine brez posebnega pritrgovanja ne bilo možno.

Da dosežejo učenci oproščenje plačevanja šolnine, morajo vložiti pri ravnateljstvu prošnjo na c. kr. deželni šolski svèt, podprto z izpričevalom zadnjega polletja ali šolskega leta in z imovinskim izkazom.

Učenci prvega razreda, ki hočejo prositi odložitve šolninskega plačila do konca prvega tečaja, morajo svoje prošnje na c. kr. deželni šolski svèt podpreti z imovinskim izkazom ter v prvih 8 dneh po sprejemu vložiti pri ravnateljstvu.

Imovinski izkaz, ki ga morata podpisati *župan* in *župnik,* ne sme biti več ko leto star, kadar se izroči prošnja. V njem morajo biti imovinski podatki točno in toliko obširno zaznamovani, kolikor je to treba, da se dajo natančno presoditi.

Gimnazijsko ravnateljstvo.

XVI.

Verzeichnis der öffentlichen Schüler am Schlusse des Schuljahres 1913/14.*)

I. a Klasse.

Bele Ernst aus Rudolfswert
Bernard Otto aus Ernstbrunn in Niederösterreich
Bon Vinzenz aus Stranska vas
Brudar Martin aus Vinja vas
Bučar Josef a. St. Michael b. Rudolfswert
Dovnik Alois aus Dervent in Bosnien
Dular Franz a. Ziegelhütten b. Rudolfswert
Fajdiga Franz aus Temenica
Furlan Anton aus Ober-Laibach
Globelnik Edmund aus Rudolfswert
Grom Alois aus Rudolfswert
Hrovat Albin aus Rudolfswert
Jarc Albert aus Treffen
Karlovšek Josef aus Šmarjeta
Klemenčič Johann a. Lokvica b. Möttling
Klodič Richard, Ritter von Sabladoski aus Bohinjska Bistrica
Kopitar Method aus Petrova vas bei Tschernembl
Košak Johann aus Rudolfswert
Košak Rudolf aus Rudolfswert
Kralj Franz aus St. Cantian
Lazar Josef aus Lokve bei Dobrniče
Vehovec Felix aus Seisenberg

Privatisten:

Blažon Gregor aus St. Ruprecht bei Klagenfurt
Hüfinger Johann aus Windischgarsten in Oberösterreich.

I. b Klasse.

Mahorčič Karl aus Weixelburg
Malnerič Adolf aus Tschernembl
Murgelj Franz aus Gornje Kamence bei Rudolfswert
Nečimer Alois a. Kandia bei Rudolfswert
Oblak Franz aus Laibach
Ozmec Franz aus Veličane bei Svetinje in Steiermark
Pečjak Alois aus Korita bei Döbernik
Plut Martin aus Gorenja Lokvica bei Möttling
Prijatelj Anton aus Tržišče bei Nassenfuß
Pugelj Friedrich aus Zirknitz
Rozman Josef aus Gorenji Podboršt bei Hönigstein
Seljak Johann a. Dobrava b. St. Cantian
Skalický Zdenko aus Rudolfswert
Slanc Josef aus Seisenberg
Stukelj Franz aus Rudolfswert
Supančič Karl a. Ratschach b. Steinbrück
Sušnik Johann aus Rudolfswert
Štrukelj Johann a. Rob b. Groß-Laschitz
Weselko Johann aus Treffen
Zorko Eduard aus Gottschee.

---

*) Fette Schrift bezeichnet Schüler mit allgemeiner Vorzugsklasse.

II. a Klasse.

Adamlje Franz aus Rodockendorf
Bastař Theodor aus Einöd
Berus Nikolaus aus St. Michael bei Rudolfswert
Bradač Josef aus Podhosta bei Töplitz
Dular Anton aus Potok bei Rudolfswert
Grom Milan aus Rudolfswert
Jazbec Wilibald a. St. Michael b. Seisenberg
Kastelic Anton aus Rudolfswert
Kernc August aus Nassenfuß
Knafelc Stanislaus aus St. Michael bei Rudolfswert
Kukar Jakob aus Ručetna vas bei Tschernembl (krankheitshalber ungeprüft)
Kukman Matthias aus Ručetna vas bei Tschernembl
Lavrič Franz aus Prečna
Lazar Alois aus Lokve bei Döbernik
Malerič Boris aus Tschernembl
Medvešek Ludwig aus Froschdorf bei Rudolfswert
Miklavžič Josef aus Laibach
Miklič Ignaz aus Lokve bei Döbernik (krankheitshalber ungeprüft)
Nahtigal Franz aus Vrhovo bei Seisenberg
Novak Dragoslav aus Trojane
Privatist: **Mazanec Heinrich, Edl. v. Engelhardswall** a. Innsbruck in Tirol.

II. b Klasse.

Abram Zvonimir aus Agram
Kobe Johann aus Stopitsch
Papež Karl aus Ratjé bei Hinje
Pavček Josef aus Prečna
Pavlovič Anton aus Drašiči
Pehani Ernst aus Seisenberg
Penca Franz aus Videž bei Lapor in Steiermark
Pirc Franz aus Gržeča vas b. Haselbach
Premru Stanislaus aus Boštanj
Premru Vladimir aus Boštanj
Rauch Method aus Krupa bei Semič
Rems Maximilian aus Nevlje bei Stein
Rezelj Josef aus Ivanja vas bei Hönigstein
Sitar Johann aus Töplitz bei Rudolfswert
Skube Sylvester aus Hinje
Smrke Franz aus Neudegg
Šepic Alois aus Froschdorf bei Rudolfswert
Tekavčič Johann aus Prevale bei Hinje
Trunkelj Viktor aus Zagradec
Zajec Cyrill aus Muljava
Žukovec Franz aus Döbernik

Privatistinnen:

Ogrin Emilie aus Rudolfswert
Rozman Aloisia aus Rudolfswert.

III. Klasse.

Agnitsch Andreas aus Rudolfswert
Ausec Adolf aus St. Kanzian bei Nassenfuß
Bele Friedrich aus Rudolfswert
Bregar Ernst aus Sittich
Ferkul Anton aus Struge bei Gutenfeld
Fux Franz aus Möttling
Gebauer Friedrich aus St. Margareten
Germovšek Alois a. Lukovek bei Treffen
Grum Ignaz aus Šmartno bei Littai
Hermann Franz aus Graz
Junc Josef aus Kandia bei Rudolfswert
Kampuš Franz aus Ober-Strascha
Kastelic Alois aus St. Veit bei Sittich
Klenha Otto aus Ober-Strascha
Kovač Rudolf aus Senožeče
Kraut Božidar aus Ober-Loitsch
Lindič Cyrill aus Tržišče bei Nassenfuß
Malovič Milan aus Rudolfswert
Mušič Alois aus Kandia bei Rudolfswert
Oswald Leopold aus Tschernembl
Pehani Hubert aus Treffen
Picek Johann aus Reifnitz
Pirc Vinzenz aus Velika vas b. Gurkfeld
Premru Maximilian aus Krainburg
Slak Anton aus Döbernik
Šušteršič Anton aus Semič

Troppan Maximilian aus Mleščevo bei Sittich
Vehovec Alois aus Seisenberg
Vovk Franz aus Seisenberg
Vukšinič Martin aus Radoviči bei Möttling

Privatistin: Vasič Nada aus Pola.

IV. Klasse.

Absec Matthias aus Mihelja vas b. Tschernembl
Ajdič Karl a. Ziegelhütten b. Rudolfswert
Anžiček Anton aus Dolenja Nemška vas bei Treffen
Bele Franz aus Sittich
Brudar Ivan aus Vinja vas bei Rudolfswert
Filipič Josef aus Preserje
Glogovšek Anton aus Gurkfeld
Hofman Franz aus Seisenberg
Hrovat Silverius aus Seisenberg
Jarc Miran aus Tschernembl
Jazbec Vladimir a. St. Michael b. Seisenberg
Jerele Josef aus Rudolfswert
Jurečič Franz aus Vel. Mraševo b. Landstraß
Kamin Michael a. Dolenja vas b. Großlack
Kastelic Robert aus Rudolfswert
Klabučar Hermann aus Gurkfeld
Kovačič Anton a. Mali Vrh b. Hönigstein
Oswald Rudolf aus Illyrisch Feistritz
Pehani Paul aus Treffen
Podbevšek Anton aus Stauden bei Rudolfswert
Pungerčič Erasmus aus Jarenina in Steiermark
Pureber Alois a. Froschdorf bei Rudolfswert
Pureber Emil a. Froschdorf bei Rudolfswert
Srimšek Rudolf aus Kandia
Šproc Stanislaus a. Tolmein in Küstenland
Štukelj Leo aus Kandia
Toporiš Ivan aus Tschernembl
Žmavec Paul aus Gurkfeld

Privatistinnen:

Kraut Anna aus Unter-Loitsch
Žmavec Marija aus Reifnitz.

V. Klasse.

Abram Leo aus Agram
Baškovč Ivan aus Žejno bei Čatež
Bele Josef aus Kandia bei Rudolfswert
Bučar Alois aus Töplitz
Čižmek Alexander aus Agram
Dolenc Erwin aus Rudolfswert
Drganc Anton aus Möttling
Dular Method aus Rudolfswert
Ercigoj Ferdinand aus Landstraß
Janžekovič Franz aus Krašnji vrh b. Radovica
Jarc Alois aus Ratschach bei Steinbrück
Jelenc Franz aus Groß-Laschitz
Kirar Franz aus St. Margarethen
Konečnik Vladimir aus Graz in Steiermark
Koretič Franz aus Orehovec b. Landstraß
Kozoglav Franz aus Rudolfswert
Kramarič Alois aus Radovica b. Möttling
Krašovec Franz aus St. Veit bei Sittich
Kuder Stanislaus aus Laibach
Kvas Friedrich aus Rudolfswert
Matko Karl aus Töplitz
Medic Franz aus Töplitz
Medic Josef aus Birčna vas bei Rudolfswert
Medja Johann aus Golica bei Gor. Tuhinj
Mervar Franz aus Klečet bei Seisenberg
Merzelj Ignaz aus Zagrič bei Littai
Mušič Karl aus Kandia bei Rudolfswert
Pegan Franz aus Gabrije in Küstenland
Plot Karl aus Ratje bei Seisenberg
Račič Ivan aus Županča vas bei Cerklje
Rizmal Karl aus Klein-Frasslau in Steiermark
Sajovec Franz aus Graz in Steiermark
Schweiger Dragotin aus Tschernembl
Schweiger Viktor aus Rudolfswert
Slanc Johann aus Semič
Šproc Anton aus Tolmein in Küstenland

Trost Leon aus St. Bartlmä
Turk Josef aus Rudolfswert
Videtič Josef aus Dragomlja vas b. Suhor
Zobec Jakob aus Prigorica bei Reifnitz
Zobec Ivan aus Prigorica bei Reifnitz
Žlindra Ottokar aus Dobe bei Landstraß

Privatistin:

Šegula Maria Helena aus Rudolfswert

Krankheitshalber ungeprüft:

Puc Anton aus Seisenberg.

VI. Klasse.

Artič Franz aus Dobovec in Steiermark
Barborič Karl aus Rudolfswert
Bele Josef aus Sittich
Bučar Danilo aus Tschernembl
Bukovič Johann aus Wippach
Cesar Martin aus Radovica
Dular Josef aus Rudolfswert
Eržen Anton aus Podgorje in Steiermark
Furlan Alois aus Slap bei Wippach
Grden Anton a. Martinja vas b. St. Lorenz
Horvat Stanislaus aus Laibach
Hvala Bogomir a. St. Giovanni b. Triest
Jerman Franz aus Naklo bei Tschernembl
Judnič Josef aus Töplitz bei Rudolfswert
Kek Franz aus Prudof bei Treffen
Kit Johann aus Rohitsch-Sauerbrunn in Steiermark
Knafelj Johann aus Mošnje b. Radmannsdorf
Kordiš Josef aus Brod bei Rudolfswert
Kraut Štephan aus Lukovitz
Kvas Ferdinand aus Riek bei Gottschee
Lončar Franz aus Laibach
Lovšin Anton aus Reifnitz
Marjetič Josef a. Segonje bei St. Cantian
Markič Viktor aus Neumarktl
Mervar Alois aus Cvibel bei Seisenberg
Mramor Viktor a. Bršljin b. Rudolfswert
Mušič Georg a. Kandia bei Rudolfswert
Oblak Raphael aus Rudolfswert
Ogrin Anton aus Rudolfswert
Pintar Viktor aus Rudolfswert
Pirc Josef aus Velika vas bei Leskovec
Póka de Pókafalva Dagobert a. Seisenberg
Ramor Max aus Kandia bei Rudolfswert
Režen Franz aus Polje bei Tržišče
Ropas Milan aus Rudolfswert
Saje Josef aus Oberlaibach
Schneider Viktor aus Hopfenbach bei Rudolfswert
Smolik Franz aus Rudolfswert
Smrke Alois aus Unter-Strascha
Tomšič Ignaz aus Oberlaibach
Turk Josef aus Verdun bei Stopitsch
Vidic Anton aus Nova vas bei Rakek
Viher Josef aus St. Nikolai bei Friedau in Steiermark
Zupančič Jakob aus Otavec bei Tschernembl
Žužek Franz aus Kompolje bei Gutenfeld.

VII. Klasse.

Benedik Bogomir aus Flödnigg
Budna Kasimir aus Laufen in Steiermark
Cesar Ivan aus Dolenja Težka voda
Cvelbar Josef aus Dolenja Prekopa
Dular Vinzenz aus Jurka vas
Gebauer Wilhelm aus St. Margareten
Jarc Bogomir aus Ratschach a. d. Save
Kastelic Lorenz aus Martinja vas
Kolbezen Josef aus Loka bei Tschernembl
Kozoglav Franz a. St. Jobst b. Stopitsch
Kranjc Bogdan aus St. Barbara in Steiermark
Mazele Ferdinand aus Wien
Mlaker Franz aus Seisenberg
Oreščck Ignaz aus Spodnje Vodale
Poljanec Franz aus St. Margareten
Prah Josef aus Vrhovska vas
Pristau Alois aus Laibach
Rant Josef aus Godešče
Skušek Valentin aus Jeprjek
Stemberger Josef aus Gočo
Štukelj Josef aus Ručetna vas
Zakrajšek Josef aus Dvorska vas
Žlajpah Anton aus Seisenberg

Privatistin:

Rogina Mira aus Rudolfswert.

VIII. Klasse.

Ajdič Augustin aus Ziegelhütten bei Rudolfswert
Andolšek Rudolf a. Pluska b. St. Lorenz
Cvar Alois aus Zamostec bei Sodražica
Eršte Johann aus Rudolfswert
Gerčar Jakob aus Dupeljne bei Stein
Gregorc Albin aus Rudolfswert
Guzelj Stojan aus Kandia bei Rudolfswert
Hočevar Johann aus Dvorska vas bei Groß-Laschitz
Jakša Josef aus Seisenberg
Krhne Stephan aus Wippach
Kuder Milan aus Laibach
Lavrič Josef aus Prečna
Lobe Felix aus Laibach
Logar Josef aus Eisnern
Petrič Emanuel aus Rudolfswert
Pirec Andreas aus Ravno bei Gurkfeld
Rifelj Franz aus Čilpah bei Trebelno
Skuk Anton aus Kreuz bei Nassenfuß
Srimšek Johann aus Nassenfuß
Struna Alois aus Hrib bei Töplitz
Škoda Josef aus St. Stefan bei Treffen
Trost Vladimir aus St. Bartlmä
Turk Alois aus Verdun bei Stopitsch
Zupančič Martin a. Perovo b. Großlupp.

1873. *J. Poljanec,* Obsežek Demostenovega govora Megalopoljskega.
1874. *Fr. Šuklje,* Tridesetletna vojska v svojih početkih.
1875. *Fr. Sparmann,* P. Hofmanus Peerlkampius qua ratione emendaverit satiras Horatianas, nonnullis ostenditur exemplis.
1876. *a) J. Fischer,* Über Abfassung der Lehrbücher.
b) J. Ogórek, Horat. Carm. I, 28 ad dialogi similitudinem revocari non posse demonstratur.
1877. *J. Ogórek,* De Socrate marito patreque familias.
1878. *a) P. Ladislaus Hrovat,* Slovenski dom.
b) J. Ogórek, Wann hat Cicero die beiden ersten Katilinarischen Reden gehalten?
c) J. Fischer, Bewegung der Schülerzahl.
d) „ „ Über das Tellurium des Prof. Klemenčič.
1879. *J. Ogórek,* Wann hat Cicero die beiden ersten Katilinarischen Reden gehalten? (Schluß).
1880. *Fr. Brežnik,* O Sokratovi metodi s posebnim ozirom na Platonovega Menona in o pojmu.
1881. *Nik. Donnemiller,* Der Römerzug Ruprechts von der Pfalz und dessen Verhältnis zu Österreich insbesondere zu Herzog Leopold.
1882. *J. Teutsch,* Der absolute Genetiv bei Homer.
1883. *Fr. Brežnik,* Erziehung und Unterricht bei den Griechen.
1884. „ „ Erziehung und Unterricht bei den Römern zur Zeit der Könige und des Freistaates.
1885. *G. Stanger,* Die Platonische Anamnesis.
1886. *J. Poljanec,* Nekoliko o Srbskih národnih pesnih.
1887. *L. Koprivšek,* Die Gegner des Hellenismus in Rom bis zur Zeit Ciceros.
1888. *A. Derganc,* Die Entdeckung des Hypnotismus und der mit demselben verwandten Zustände und der sogenannte animalische oder Lebensmagnetismus.
1889. *V. Bežek,* Jezik v Mat. Ravnikarja „Sgodbah ſvetega piſma sa mlade ljudi."
1890. *R. Perušek,* Zloženke v novej slovenščini.
1891. *L. Koprivšek,* Latinsko-slovenska frazeologija k I. knjigi Caesarjevih komentarjev de bello gallico za naše četrtošolce.
1892. *J. Vrhovec,* Ein Defraudationsprozeß aus dem Jahre 1782.
1893. *J. Poljanec,* Črtica o romantični poeziji srbski. Ženitev Maksima Črnojeviča. Narodna pesen.
1894. *Fr. Novak,* Samoznaki in okrajšave v slovenski stenografiji.
1895. *Dr. J. Marinko,* Božji Grob pri Grmu poleg Novega mesta.
1896. *I. Fajdiga,* Die atmosphärische Elektrizität und der Blitzableiter.
1897. *a) M. Petelin,* Katalog der Lehrerbibliothek.

b) Dr. Fr. Detela, Slavnostni govor ob stopetdesetletnici novomeške gimnazije.

1898. *A. Virbnik,* Katalog der Lehrerbibliothek (Schluß).

1899. *a) M. Markič,* Studien zur exakten Logik und Grammatik.

b) Dr. Fr. Detela, Govor ob vladarski petdesetletnici 2. dec. 1898.

1900. *M. Markič,* Studien zur exakten Logik und Grammatik.

1901. *H. Skopal,* Über das Altarbild von Tintoretto in der Rudolfswerter Kapitelkirche nebst einer kurzen Charakteristik der Darstellungsweise dieses Meisters im allgemeinen.

1902. *a) Dr. K. Pamer,* Das k. k. Staats-Obergymnasium zu Rudolfswert.

b) Dr. Fr. Detela, Professor P. Ladislav Hrovat.

1903—1906. *Dr. K. Pamer,* Das k. k. Staats-Obergymnasium zu Rudolfswert. (Fortsetzung.)

1907. *L. Pettauer,* Das k. k. Staats-Obergymnasium zu Rudolfswert. (Fortsetzung und Schluß.)

1908. *D. Majcen,* Simon Gregorčič, pesnik najplemenitejšega domoljubja.

1909. *a) Fr. Brežnik,* Slavnostni govor ob vladarski šestdesetletnici 2. dec. 1908.

b) Dr. J. Šlebinger, O. Ivan Krstnik od Sv. Križa, slov. propovednik.

1910. *Fr. Brežnik,* Schulnachrichten.

1911. *Rudolf Južnič,* Tavriška Ifigenija pri Evripidu in pri Goetheju.

1912. *Dr. Viktor Tiller,* Ustavoznanstvo Avstrijsko-ogrske države.

1913. *Dr. Viktor Tiller,* Državoznanstvo Avstro-Ogrske.

1914. *M. Markič,* Eine allgemeine Umkehrungsreihe und ihre Umgebung nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades.