PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 1
Strani 4–9

Jože Malešič:

VERIŽNO MERJENJE DOLŽIN

Ključne besede: matematika, geometrija, merjenje dolžin, verižni ulomki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1208-Malesic.pdf

VERIŽNO MERJENJE DOLŽIN

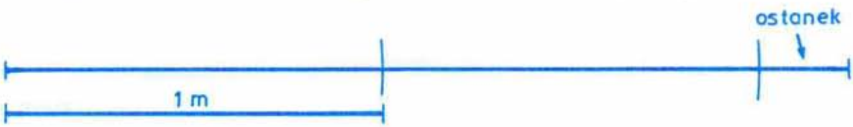
Denimo, da pri roki nimamo nikakršnega merila, le palico, za katero vemo, da je dolga ravno en meter. Ali je mogoče s tako palico meriti dolžine vsaj na centimeter natančno? Ena od rešitev bi bila, da bi iz palice naredili merilo: razdelili bi jo najprej na deset delov, potem pa še vsakega od teh spet na deset in bi dobili centimetre. Z nekaj znanja geometrije in z nekaj iznajdljivosti se to da narediti, zahteva pa dosti časa. Precej hitreje pa dolžine lahko merimo po verižnem postopku, ki je razložen v naslednjem primeru:

1. primer

Narisani sta daljica z neznano dolžino in 1m dolga daljica (seveda pomanjšani).

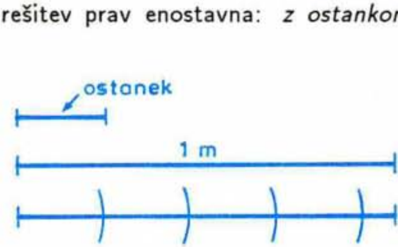
Slika 1

Da bomo merili kolikor mogoče natančno, bomo uporabljali šestilo:



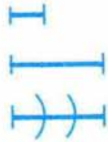
Slika 2

Daljica je torej dolga 2m in še nekaj ostane. Koliko ostane? Na prvi pogled se ostanka ne da izmeriti, saj nimamo drugega merila razen 1m dolge daljice. Vendar je rešitev prav enostavna: *z ostankom izmerimo metrsko daljico*:



Slika 3

Vidimo, da je metrska daljica nekoliko daljša od štirih ostankov. Torej je ostanek nekoliko krajši od četrtine metra. Dobili smo natančnejši rezultat, pa še vseeno ne dovolj natančen. Spet uporabimo zgornjo idejo – stari ostanek izmerimo z novim:



Slika 4

Zdaj se nam je merjenje izšlo: novi ostanek je ravno tretjina starega. Rezultate vseh treh meritev zapišimo v obliki ulomkov:

$$1\text{m} = 4 + \frac{1}{3} \quad \text{starega ostanka.}$$

Zato je

$$\text{stari ostanek} = \frac{1}{4+\frac{1}{3}}\text{m}$$

in od tod

$$\text{dolžina daljice} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{3}}\ \text{m}.$$

Ker je

$$\frac{1}{4+\dfrac{1}{3}} = \frac{1}{\dfrac{13}{3}} = \frac{3}{13}$$

in je

$$\frac{3}{13} = 0,2307\ldots,$$

je torej daljica dolga nekaj več kot 2m in 23cm.
Takim ulomkom, kot je

$$2 + \frac{1}{4+\dfrac{1}{3}},$$

pravijo zaradi značilne oblike *verižni ulomki*. Pravkar opisanemu načinu merjenja dolžin pa recimo verižno merjenje.

2. primer

Premislimo, ali opisano verižno merjenje vedno pripelje do rezultata. Če je mersko število dolžine daljice ulomek, gotovo. To vidimo v naslednjem primeru. Denimo, da je daljica dolga $\frac{267}{77}$ metra. Nekdo, ki njene dolžine ne pozna, jo verižno meri . Vmesne rezultate merjenja lahko predvidimo z naslednjimi računi. Najprej ulomek razcepimo na celi del in ostanek:

$$\frac{267}{77} = 3\frac{36}{77}.$$

Torej bo najprej ugotovil, da je daljica dolga nekaj več kot 3 metre. Nato bo metrsko daljico meril z ostankom. Zato moramo obratno vrednost $\frac{77}{36}$ ostanka razcepiti na celi del in nov ostanek:

$$\frac{77}{36} = 2\frac{5}{36}.$$

Obratno vrednost novega ostanka pa spet razcepimo na celi del in ostanek:

$$\frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}.$$

Merilec bo dobil rezultat

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{5}}}.$$

Če je mersko število daljice ulomek (v posebnem primeru lahko tudi desetiški s končno mnogo decimalkami), se verižno merjenje po nekaj korakih vedno konča, saj imajo ostanki čedalje manjše števce in prej ali slej pridemo do števca 1.

3. primer

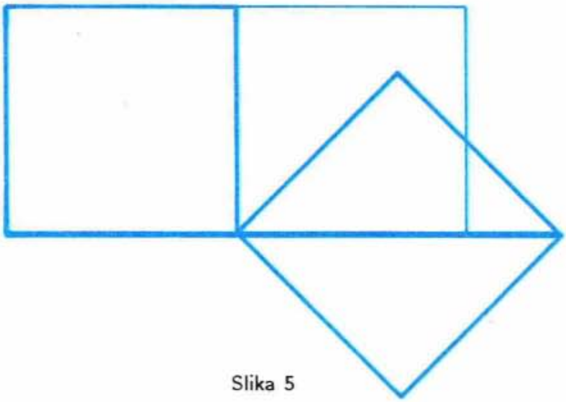
Sam verižno izmeri diagonalo kvadrata, pri čemer naj bo merska enota stranica kvadrata (ni treba, da stranica kvadrata meri ravno 1m). Dobil boš rezultat

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{?}}}.$$

Vprašaj pomeni, da so na tem mestu ostanki že tako majhni, da se nadaljnja števila ne dajo več natančno določiti. Izmeril si, da je dolžina diagonale enaka približno

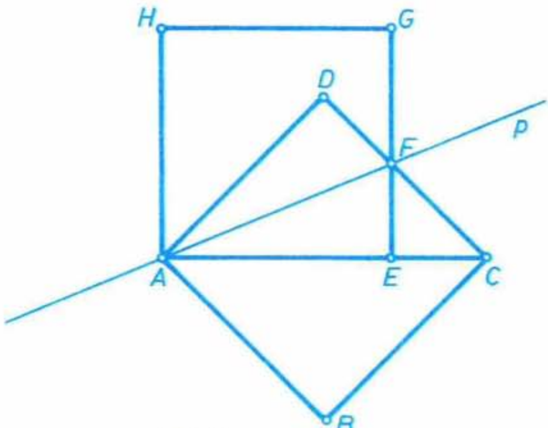
$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1,4 \quad \text{dolžine stranice.}$$

Rezultat se kar dobro ujema z znanim pravilom, da je dolžina diagonale enaka dolžini stranice, pomnoženi s $\sqrt{2}$, saj je $\sqrt{2}=1,4142\ldots$. Števila na mestu vprašaja bomo zdaj natančno določili z geometrijskim sklepanjem. Mislimo si, da ne merimo diagonale s stranico, ampak vsoto diagonale in stranice s stranico:



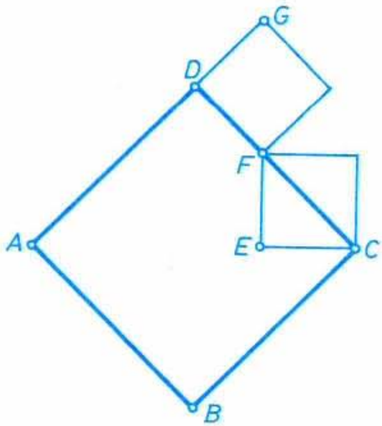
Slika 5

Dobimo dve dolžini stranice in ostanek. Na naslednji sliki si natančneje oglejmo ostanek:



Slika 6

Ostanek EC je skladen z daljico EF, ker je trikotnik $\triangle ECF$ enakokrak. Skozi točki A in F potegnimo premico p. Pri zrcaljenju čez premico p dobimo iz kvadrata $ABCD$ kvadrat $AEGH$. Zato je tudi daljica FD skladna z ostankom EC. Torej je stranica kvadrata (v našem primeru stranica CD) enaka vsoti stranice in diagonale manjšega kvadrata, ki ima za stranico ravno ostanek EC:



Slika 7

Vidimo, da se pri verižnem merjenju začetna slika (slika 5) kar naprej ponavlja. Zato je rezultat verižni ulomek

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}},$$

ki se nikoli ne konča. Če merimo samo diagonalo s stranico, pa je seveda rezultat verižni ulomek

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}},$$

ki se tudi nikoli ne konča. Čimveč dvojk vzamemo v tem ulomku, tem natančnejši rezultat dobimo. Na primer, če vzamemo pet dvojk, dobimo ulomek

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}=1\frac{29}{70}=1,41428\ldots,$$

ki se na štiri decimalke ujema s številom $\sqrt{2}$.
Spotoma smo ugotovili še nekaj: $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Če bi bil $\sqrt{2}$ racionalno število, bi ga lahko izrazili z ulomkom. Iz ulomka pa, kot vemo iz 2. primera, dobimo vedno končen verižni ulomek.

4. primer

Sam poskusi izmeriti obseg kroga z njegovim premerom. En način je, da krog narišeš na karton in ga izrežeš. Na obodu si označi točko in krog kotali po ravni črti. S tem dobiš daljico, katere dolžina je enaka obsegu kroga. Nato s šestilom verižno meri obseg s premerom kroga. Dobil boš rezultat

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{?}}.$$

Obseg kroga je potemtakem približno $\frac{22}{7}$ premera. Številu $\frac{22}{7}$ pravijo Arhimedov približek za število π. Arhimed je ta približek ugotovil z dolgotrajnim geometrijskim sklepanjem (glej njegova zbrana dela). Arhimed ni bil samo teoretik, znani so njegovi tehnični izumi in odkritje zakona o vzgonu. Zato je čisto mogoče, da je vendarle obseg kroga najprej dobil eksperimentalno, z verižnim merjenjem, in nato dobljeni rezultat utemeljil z geometrijskim sklepanjem.

5. primer

Izračunaj še nekaj nadaljnjih števil v verižnem ulomku, ki predstavlja število π. Upoštevaj, da je

$$\pi=3,1415926\ldots\approx 3\frac{1415926}{10000000},$$

in računaj tako, kot smo računali v drugem primeru.

Jože Malešič