

NEVARNOST KAOSA V DIGITALNEM SITU DRUGEGA REDA

Matej Šalamon, Tomaž Dogša

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko računalništvo in informatiko,
Maribor, Slovenija

Ključne besede: sistemi digitalni, filtri električni, filtri digitalni, kaos, aritmetika komplementa dvojiškega, hiperobčutljivost na pogoje začetne, odpoved sistema, vezja mikroelektronska, filtri reda drugega, modeli linearni, modeli nelinearni, strukture 16-bit

Povzetek: Nekateri digitalni sistemi se lahko v določenih razmerah začnejo obnašati kaotično, kar lahko privede do začasnih odpovedi sistema. V skupino kaotično potencialnih vezij spadajo tudi digitalna sita, ki so sestavni del mnogih mikroelektronskih vezij. V prispevku obravnavamo nevarnost kaotičnega obnašanja digitalnega sita drugega reda. Z računalniško simulacijo (programski paket Matlab) smo analizirali obnašanje linearnega in 16-bitnega nelinearnega modela. Ugotovili smo, da se linearni model nikakor ne more obnašati kaotično. Nujna, vendar ne edina pogoja za kaotičnost sta: 1. struktura sita mora biti vsaj 16-bitna, 2. na vhodu ni prisoten noben signal. Kaotičnost je pogojena tudi z ustreznim izborom začetnih stanj in vrednosti koeficientov, ki zagotavljajo, da sito deluje na robu stabilnega območja. Kaotično digitalno sito je možno tudi koristno uporabiti kot generator psevdokaotičnih sekvenc, ki ga potrebujemo pri razvoju čipov na področju kriptografskih sistemov.

Danger of Chaos in a Second-order Digital Filter

Keywords: digital systems, electrical filters, digital filters, chaos, binary complement arithmetic, sensitive dependence on initial conditions, system failure, microelectronic circuits, second-order filters, linear models, non-linear models, 16-bit structures

Abstract: Under certain circumstances some digital systems can exhibit chaotic behaviour resulting in a temporary system failure. Digital filters are very often building blocks of microelectronic circuits. They belong to the group of potentially chaotic circuits. In this paper we discuss the danger of chaos in a second-order digital filter. With the computer simulation program (Matlab) we analysed the behaviour of linear and non-linear 16-bit model. We found that the chaotic behaviour is impossible in the linear model. In order to exhibit chaotic behaviour, a digital filter has to be at least of 16-bit structure and no signals must be present on input, and filter's coefficients must guarantee that filter operates on the boundary of the stable region. The chaotic digital filter can be used as a generator of chaotic sequences that are needed in the cryptographic systems.

1. Uvod

Kaotične sisteme srečujemo na različnih znanstvenih področjih kot so: matematika, fizika, astronomija, biologija, medicina, meteorologija itd. Ti sistemi imajo več skupnih značilnosti kot so npr. determiniranost, hiperobčutljivost na začetne pogoje, disipativnost, bifurkacije, mehanizem raztezanja in zvijanja ter kaotični atraktorji /1/. Ker je kaotično obnašanje sistema povezano z ozkim in težko napovedljivim območjem raznih sistemskih parametrov, lahko kaos postane v določenih primerih nepredvidljiv. Za vezje, ki je implementirano v integrirani izvedbi, lahko pomeni naknadno ugotovljena kaotičnost, dodatne stroške.

V zadnjih dvajsetih letih je bilo odkritih nekaj kaotičnih elektronskih vezij. Večinoma gre za preprosta nelinearna vezja, kot je npr. kaotični oscilator (avtonomni zvezni sistem tretjega reda), ki ga je leta 1983 odkril Leon O. Chua /2,3/. Kaos se lahko pojavlja tudi v digitalnih elektronskih sistemih kot je npr. digitalno sito drugega reda /4/. Digitalna sita se zelo pogosto pojavljajo kot sestavni del mikroelektronskih vezij za obdelavo podatkov v realnem času. Obnašanje digitalnega sita lahko postane ob določenih pogojih nepredvidljivo, kar lahko vodi do odpovedi celotnega sistema. Takšno nezaželjeno kaotičnost uvrščamo v kategorijo logičnih (načrtovalskih) napak, ki naj bi jih odpravili še pred implementacijo mikroelektronskega vezja. Možnost morebitnega kaotičnega obnašanja lahko ugotovimo s podrobno analizo digitalnega sita. Ker je tovrstna analiza zelo zahtevna, je simulator edino orodje, ki ga ima načrtovalec na razpolago.

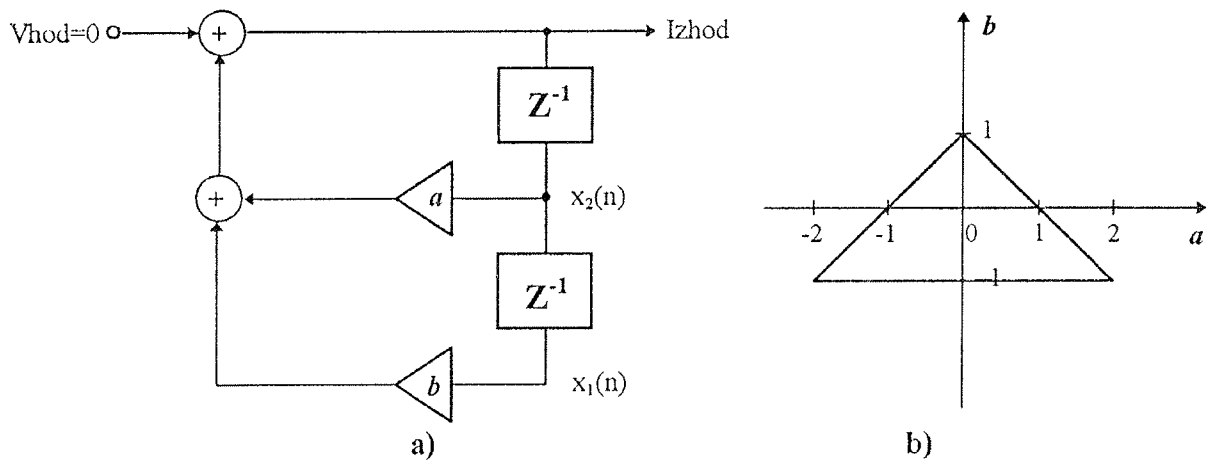
Namen tega prispevka je v osvetlitvi problema kaotičnosti, ki lahko nastopa pri digitalnih sitih. Prvo poglavje opisuje analizo linearnega modela digitalnega sita, katere rezultati potrjujejo znano dejstvo /2/, da kaos v popolnoma linearnih sistemih ni mogoč. Ker so konkretna digitalna sita samo v določenem območju linearna, je potrebno ugotoviti, ali se lahko obnašajo kaotično. Ta problem je prikazan v naslednjem poglavju, ki obravnava analizo 16-bitnega nelinearnega modela digitalnega sita, ki se ob ustreznem izboru koeficientov ter začetnih pogojev, obnaša kaotično. V zadnjem poglavju govorimo o vplivu oziroma posledicah omejenosti dolžine besed na obnašanje realnega digitalnega sita. Ugotovili smo, da o kaotičnosti digitalnega sita lahko govorimo le, če je struktura vsaj 16-bitna.

2. Analiza linearnega modela digitalnega sita drugega reda

Digitalni sistem drugega reda lahko obravnavamo kot osnovni blok kaskadne ali paralelne strukture poljubnih digitalnih sit /5/. Obravnavali bomo digitalno sito drugega reda v t.i. direktni obliki (slika 1a). Na vhodu naj ne bo prisotnega vhodnega signala.

Sistem je linearen, zato ga lahko v prostoru stanj opišemo s pomočjo naslednje matrične enačbe:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & x_2(n) \\ b \cdot x_1(n) + a \cdot x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (1)$$



Slika 1: a) linearni model digitalnega sita drugega reda; b) območje stabilnosti digitalnega sita

Dokazano je /4/, da je ravnotežno stanje $x = [x_1, x_2]$ diskretnega sistema, opisanega z enačbo 1 asimptotično stabilno, če se vrednosti koeficientov a in b nahajajo znotraj trikotnega območja v ravnini a - b , prikazani na sliki 1b. Zelo zanimivo pa je obnašanje sistema na meji, tj. na spodnjem robu trikotnega območja, kjer je $b = -1$ in $|a| < 2$. Na robu stabilnega območja sistem opišemo z enačbo:

$$\dot{x}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = A \cdot \dot{x}(n) \quad (2)$$

S pomočjo matematične analize, opisane v /4/, pridemo do zaključka, da je obnašanje obravnavanega sistema okarakterizirano z družino koncentričnih elips s 45° naklonom. Vsaka trajektorija poteka po elipsi $\Omega(\rho)$ (slika 2) s premeroma:

$$\rho_1 = \rho \cdot \sqrt{1 + \cos \theta} \quad (3)$$

in

$$\rho_2 = \rho \cdot \sqrt{1 - \cos \theta} \quad (4)$$

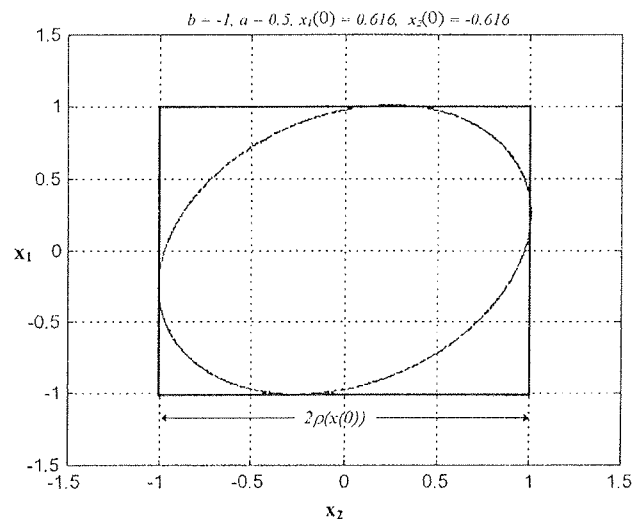
pri čemer je ρ vrednost, odvisna od začetnega stanja $\dot{x}(0)$ in jo izračunamo po enačbi 5, $\theta = 2\pi r$ pa kot, ki je odvisen od števila r .

$$\rho = \rho(\dot{x}(0)) = \left[\frac{[x_1(0) + x_2(0)]^2}{2 + a} + \frac{[x_1(0) - x_2(0)]^2}{2 - a} \right]^{1/2} \quad (5)$$

Trajektorija bo sestavljena iz končnega števila točk, če bo r racionalno število, v kolikor pa bo r iracionalno število, bo trajektorija predstavljena z neskončno mnogo točkami, razvrščenimi po elipsi $\Omega(\rho)$. Iz slike 2 je razvidno, da se trajektorija vedno nahaja znotraj kvadrata s stranicami, katerih dolžina znaša $2\rho(\dot{x}(0))$. Če torej trajektorija starta iz začetnega stanja $\dot{x}(0)$ in izpolnjuje neenačbo

$$\rho(\dot{x}(0)) < 1 \quad (6)$$

velja, da je:



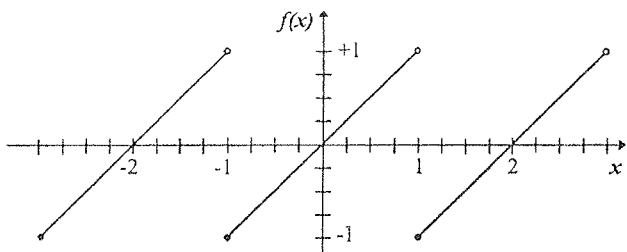
Slika 2: Trajektorija linearnega diskretnega sistema drugega reda

$$|x_1(n)| \leq \rho < 1, \quad |x_2(n)| \leq \rho < 1 \quad \text{za vsak } n \quad (7)$$

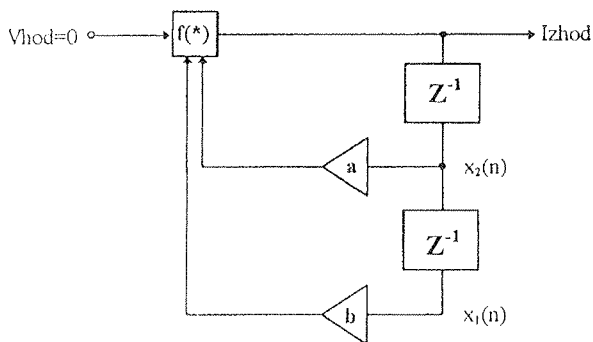
Povzemimo ugotovitve pravkar obravnavane analize: obnašanje linearnega modela digitalnega sistema drugega reda opisuje trajektorija, ki lahko poteka le po elipsi.

3. Analiza nelinearnega modela digitalnega sita drugega reda

Kakor hitro digitalno sito praktično realiziramo, vnesemo vanj nelinearnost, ki se ji ne moremo izogniti. Oglejmo si primer realizacije digitalnega sita v aritmetiki dvojiškega komplementa. Za tovrstno aritmetiko je značilna modularna nelinearnost, ki jo prikazuje slika 3. Ta karakteristika kaže, da je izbrana vrednost x v seštevalniku zmeraj predstavljena s številom $f(x)$, ki leži le na intervalu $[-1, 1)$.



Slika 3: Za dvojiški komplement značilna nelinearna karakteristika



f(*) - seštevanje v aritmetiki dvojiškega komplementa

Slika 4: Nelinearni model digitalnega sita drugega reda

Na sliki 1a oba seštevalnika združimo in upoštevamo nelinearnost aritmetike dvojiškega komplementa, dobimo nelinearni model digitalnega sita, ki ga prikazuje slika 4.

Če na vhodu sita signal ni prisoten, lahko nelinearni model opišemo z naslednjo nelinearno diferenčno enačbo

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(n) \\ f(b \cdot x_1(n) + a \cdot x_2(n)) \end{bmatrix} \quad (8)$$

kjer je f(*) funkcijska odvisnost, prikazana na sliki 3. Za začetna pogoja $x_1(0) = x_2(0)$ naj velja, da sta iz množice:

$$I^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : -1 \leq x_1 < 1, -1 \leq x_2 < 1 \right\} \quad (9)$$

Ker se bomo v nadaljevanju, podobno kot pri linearnem modelu, osredotočili na obnašanje nelinearnega modela na meji stabilnosti, tj. pri $b = -1$ in $|a| < 2$, zapišimo ustrezno diferenčno enačbo:

$$\dot{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(n) \\ f(-1 \cdot x_1(n) + a \cdot x_2(n)) \end{bmatrix} = F[\dot{x}(n)] \quad (10)$$

Na osnovi analiziranega linearnega modela sklepamo, da se bosta linearni sistem opisan z enačbo 2 in nelinearni digitalni sistem, opisan z enačbo 10 obnašala identično, če bo začetni pogoj izbran tako, da bo:

$$\bar{x}(0) \in \Pi_0 = \{x: \rho(x) < 1\} \quad (11)$$

V tem primeru namreč v nelinearnem modelu ne bo prihajalo do prekoračitev pri seštevanju, kar pomeni, da se bo nelinearni model obnašal popolnoma enako kot linearni. Trajektorija bo torej potekala po elipsi, prikazani na sliki 2. In kaj se zgodi, če začetni pogoj $\bar{x}(0)$ leži izven območja Π_0 ? Izkaže se, da trajektorija nelinearnega sistema ne poteka več po elipsi, pač pa njeno gibanje postane zelo kompleksno. Ker je analiza takšnega obnašanja matematično izredno zahtevna, smo model analizirali s pomočjo simulatorja. S programskim paketom Matlab smo razvili orodje, ki omogoča simulacijo 16-bitne strukture digitalnega sita drugega reda.

3.1 Trajektorije nelinearnega modela

Ker smo pričakovali, da se bo nelinearni model obnašal kaotično za $\rho(x) > 1$, smo določili interval, znotraj katerega se v tem primeru smeta spreminjati začetni stanji $x_1(0)$ in $x_2(0)$. Ob upoštevanju enačbe 5, vrednosti koeficienta $a = 0.5$ in enakosti $x_1(0) = -x_2(0) = x_0$, smo prišli do zaključka, da mora biti

$$x_0 > 1/2 \cdot (2-a)^{1/2} = 0.612372435695... \quad (12)$$

Kakor hitro bo torej $x_0 > 0.612372435695$, bosta začetna pogoja ležala izven območja Π_0 , kar pomeni, da bo pri operaciji seštevanja prihajalo do prekoračitev.

Oglejmo si podrobneje analizo 16-bitne strukture digitalnega sita (slika 5), ki smo jo izvedli s programom Simulink. Koeficienta a in b smo izbrali tako, da je sistem deloval na robu stabilnosti, kar pomeni, da smo izbrali že omenjeni vrednosti: $a = 0.5$, $b = -1$.

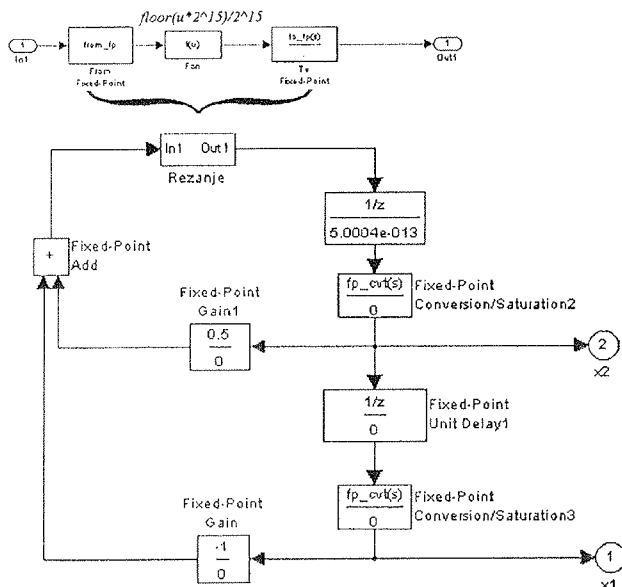
Z namenom, da bi opazovali gibanje trajektorije pri različnih začetnih pogojih $x_0 = x_2(0) = -x_1(0)$, smo x_0 spreminjali na intervalu med 0 in 1. Dobili smo rezultate, na osnovi katerih smo trajektorije razvrstili v tri različne skupine, in sicer:

- **Tip I:** trajektorija poteka po elipsi.
- **Tip II:** trajektorija potuje periodično po končnem številu elips.
- **Tip III:** trajektorija poteka po neskončno mnogo elipsah in pri tem izkazuje kaotično obnašanje ter fraktalno geometrijo.

Pri izboru začetnih pogojev na intervalu $0 < x_0 \leq 0.61232$ smo dobili pričakovano trajektorijo tipa I (slika 6a), saj velja, da je $x_0 \in \Pi_0$. Razlog za nekoliko nižjo zgornjo mejo intervala, ki bi morala biti po analitičnem izračunu 0.612372435695, je 16-bitna omejenost binarnega zapisa števil. S prekoračitvijo vrednosti začetnega pogoja $x_0 > 0.61232$ postane obnašanje sistema zelo nenavadno. Pri začetnem pogoju $x_0 = 0.615$ se pojavi kaotična trajektorija - trajektorija tipa III, ki jo prikazuje slika 6b. Ta trajektorija poteka po

mnogih elipsah, ki tvorijo fraktalne vzorce. Med njimi obstaja samopodobnost preko vseh meril, kar je značilnost fraktalnih podob.

Če vrednost začetnega pogoja še povečamo, lahko pri $x_0 = 0.6634$ opazimo, da se gibanje trajektorije nekako umiri oziroma omeji na gibanje po 10 različnih elipsah (slika 6c). Ker je takšno gibanje trajektorije periodično, mu pravimo perioda 10, sicer pa velja, da številka periode označuje število elips, po katerih se trajektorija giblje.

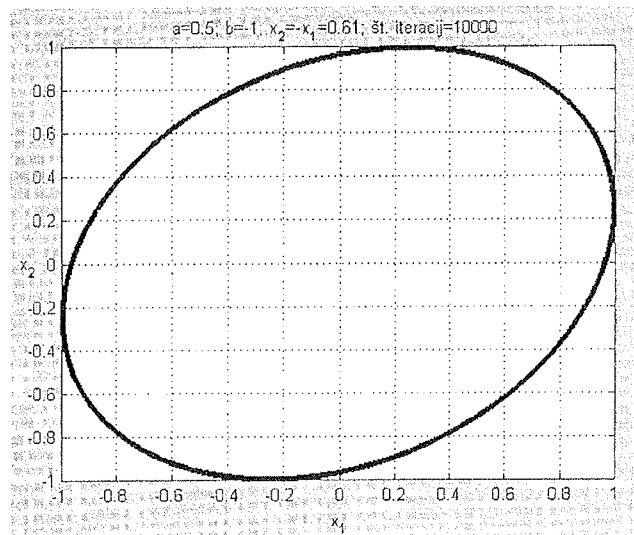


Slika 5: 16-bitna struktura digitalnega sita, uporabljena pri računalniški simulaciji s programom Simulink

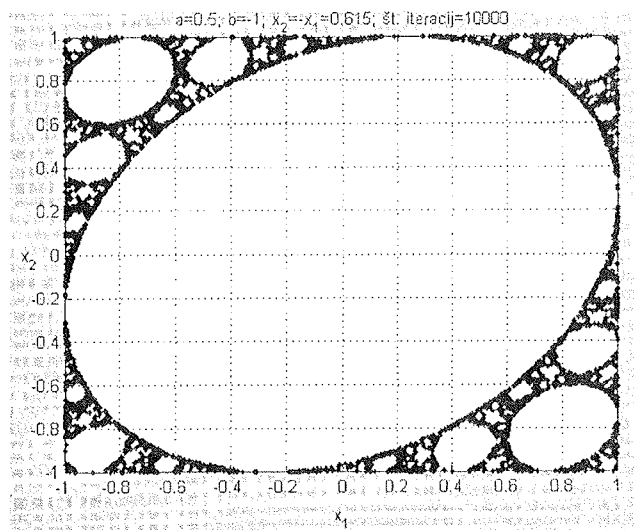
Spreminjanje začetnih pogojev in posledične spremembe trajektorij lahko strnemo v tabeli 1. Označba "spremenljiv" pomeni, da gre za trajektorijo tipa II ali trajektorijo tipa III. Vsak interval z omenjeno oznako bi lahko razdelili še naprej v manjše intervale, znotraj katerih bi se pojavljale trajektorije tipa II, in intervale z oznako "spremenljiv".

Tabela 1: Tip trajektorije glede na izbran začetni pogoj $x_0 = x_2(0) = -x_1(0)$

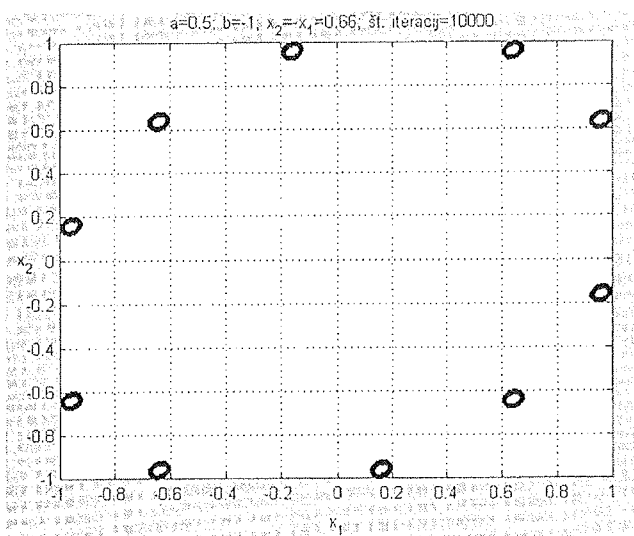
Začetni pogoj	Tip trajektorije
$0 < x_0 \leq 0.61232$	I
$0.61232 < x_0 \leq 0.61550$	spremenljiv
$0.61550 < x_0 \leq 0.66448$	II; perioda = 10
$0.66448 < x_0 \leq 0.67757$	spremenljiv
$0.67757 < x_0 \leq 0.92237$	II; perioda = 2
$0.92237 < x_0 \leq 0.94932$	spremenljiv
$0.94932 < x_0 \leq 0.98780$	II; perioda = 18
$0.98780 < x_0 \leq 1.0$	spremenljiv



a)

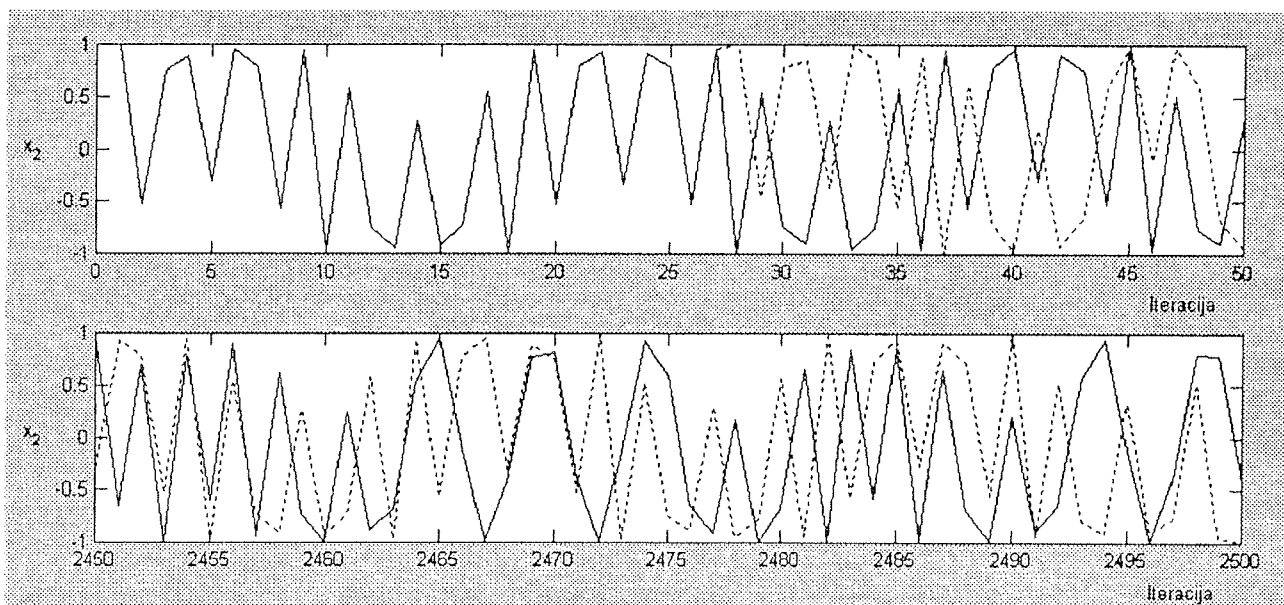


b)



c)

Slika 6: Trajektorija: a) tipa I; b) tipa III; c) tipa II - perioda 10



Slika 7: Razlika med dvema kaotičnima sekvencama izraža hiperobčutljivost kaotičnega digitalnega sita

3.2 Hiperobčutljivost na začetne pogoje

Kaotičnost sistema je povezana s hiperobčutljivostjo na začetne pogoje, lahko pa tudi na določene t.i. bifurkacijske parametre. Glede na to smo pričakovali, da bo digitalno sito, ki je lahko kaotično, hiperobčutljivo. S simulacijo smo ugotovili, da je obravnavano sito hiperobčutljivo na začetni stanji $x_1(0)$ in $x_2(0)$, medtem ko hiperobčutljivosti na katerega izmed drugih parametrov nismo odkrili.

Z namenom, da bi prikazali hiperobčutljivost kaotičnega digitalnega sita, smo v skladu s tabelo 1 izbrali dva začetna pogoja, pri katerih se sito obnaša kaotično. Poiskali smo pripadajoča poteka trajektorij A in B, ki sta startali iz izbranih začetnih stanj:

- Trajektorija A:
 $x_{2a}(0) = 0.987884521484$; $x_{1a}(0) = -0.987884521484$
- Trajektorija B:
 $x_{2b}(0) = 0.987915039062$; $x_{1b}(0) = -0.987884521484$

Kljub minimalni razliki med začetnima pogojev¹ sta se trajektoriji A in B zelo hitro oddaljili ena od druge. Različnost njunega gibanja oziroma različnost sekvenc spremenljivke x_{2a} in x_{2b} prikazuje slika 7.

Sekvenca spremenljivke x_{2a} je predstavljena s polno črto, sekvenca spremenljivke x_{2b} pa s prekinjeno črto. Do približno 27. iteracije se sekvenci zelo dobro ujemata, takoj za tem pa se pričneta druga od druge vse bolj oddaljevati in se nikoli več ne ujmeta. To kaže, da je kaotično digitalno sito zares hiperobčutljiv sistem.

¹ Začetna pogoja smo izbrali tako, da sta se razlikovala v enem samem bitu.

4. Vpliv dolžine binarne besede na kaotičnost digitalnega sita

Čeprav se digitalna sita uporabljajo že več kot dve desetletji, je bil kaos v njih odkrit razmeroma pozno. Razlog za to je prav gotovo uporaba prekratkih binarnih besed pri praktičnih implementacijah. Znano je namreč, da imajo kaotični sistemi teoretično neskončno mnogo stanj, kar pa za realizirana digitalna sita, omejena s končno dolžino binarne besede, ne drži. Zaradi tega so se vedno znova pojavljali dvomi o kaotičnosti realnih digitalnih sit.

Pri analitičnih obravnavah digitalnega sita drugega reda smo privzeli, da se digitalno sito obnaša kaotično, če so stanja v situ predstavljena s števili, ki imajo lahko neomejeno število decimalnih mest /4/. V praksi vemo, da to ni mogoče, saj so v digitalnih strukturah števila vedno omejena z določenim končnim številom bitov. Pojavi se vprašanje, ali je takšna "omejena" struktura digitalnega sita torej sploh lahko kaotična.

Ker vemo, da so pravi kaotični sistemi zvezni sistemi, lahko v primeru digitalnega sita drugega reda govorimo le o psevdokaotičnem obnašanju /6/. Za praktično realizirano sito velja, da je psevdokaotično le, če je kvantizacija dovolj natančna, kar pomeni, da morajo biti števila predstavljena z dovolj dolgo binarno besedo. Če je le-ta prekratka, se zgodi, da je kaotičnost sita prikrita.

Glede na to, da sta v obravnavanem sistemu prisotni le dve različni spremenljivki stanj x_1 in x_2 , lahko na osnovi vseh možnih kombinacij in dolžine binarne besede L izračunamo število vseh možnih stanj N po enačbi:

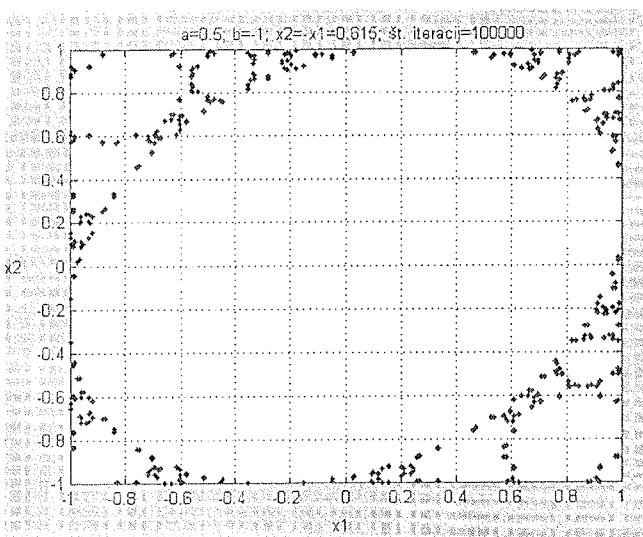
$$N = 2^L \cdot 2^L = 2^{2L} \quad (13)$$

V kolikor uporabimo 16 in več bitov, se kaotično obnašanje sita na videz ne razlikuje več od obnašanja sita s teoretično neomejeno dolžino binarne besede. O tem

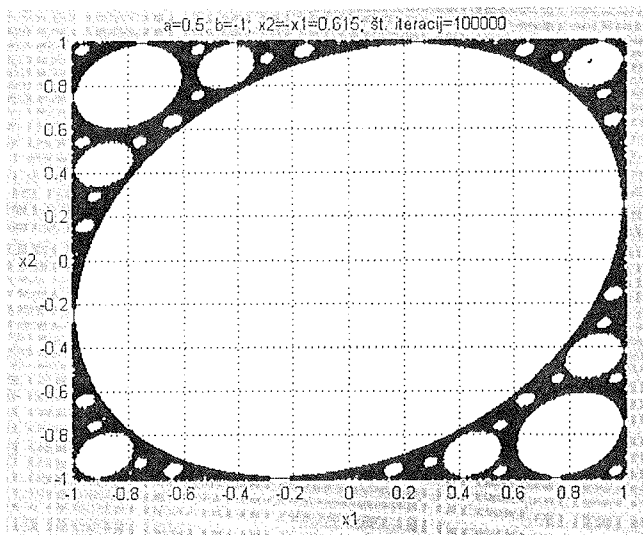
smo se prepričali z računalniško simulacijo 16-bitne strukture in strukture, kjer so bile obravnavane vrednosti s plavajočo vejico. Ugotovili smo tudi, da 8-bitna struktura ne more biti kaotična, saj je število različnih stanj premajhno. To je razvidno tudi s slike 8, ki kaže, da trajektorija 8-bitne strukture, za razliko od trajektorije 16-bitne strukture, ne izriše za kaos značilne fraktalne podobe. T. Lin in L. Chua pravita, da kaos v manj kot 16-bitni strukturi ni mogoč /6/.

5. Zaključek

Eden od razlogov za odpoved mikroelektronskih vezij je lahko kaotična narava, skrita v njegovih osnovnih gradnikih. Kljub temu, da je odkrivanje območja kaotičnosti sistemov v splošnem zelo zahtevno, je kaotičnost kompleksnega sistema smiselno preveriti s simulatorjem že na konceptualnem nivoju in se na ta način izogniti nezaželenim in nepredvidljivim težavam pri delovanju.



a)



b)

Slika 8: Trajektorija a) 8-bitne strukture; b) 16-bitne strukture

Ker je osnovni gradnik mnogih mikroelektronskih vezij lahko tudi digitalno sito drugega reda, smo se odločili za njegovo podrobnejšo analizo. S pomočjo programskega paketa Matlab smo ugotovili, da v nelinearnem sistemu drugega reda obstaja nevarnost kaosa, če je vhodni signal ničeln in, če sistem ob primerno izbranih začetnih pogojih, deluje na robu stabilnega območja. Trajektorije, ki smo jih dobili pri analizi nelinearnega modela smo razvrstili v tri skupine: nekaotične trajektorije tipa I in II ter kaotične trajektorije tipa III, ki izražajo zanimivo fraktalno podobo, sestavljeno iz različno velikih elips.

Opazovali smo tudi kaotične sekvence spremenljivke stanja in ugotovili, da lahko minimalna sprememba v začetnih stanjih povzroči povsem različni kaotični sekvenci, kar kaže na hiperobčutljivost obravnavanega sistema oziroma na znan metuljev efekt.

Vsak kaotični sistem ima teoretično neskončno mnogo različnih stanj, kar pri praktični realizaciji kaotičnega digitalnega sita ne moremo doseči, saj je digitalna struktura zmeraj omejena s končno dolžino binarne besede. Rezultati simulacij so pokazali, da je kaotičnost pogojena tudi z zadostnim številom bitov oziroma dovolj dolgim binarnim zapisom števil. Digitalno sito drugega reda bo lahko kaotično le, če bo njegova struktura vsaj 16-bitna /6/.

Analiza digitalnega sita drugega reda nas je privedla do ideje, da bi lahko tovrstno hiperobčutljivo strukturo koristno uporabili kot generator tokovnega ključa, pri razvoju čipov na področju kriptografskih sistemov /7/.

6. Literatura

- /1/ J. Poljak: Uvod u analizu vremenskih nizova proizašlih iz kaotičnih sustava. Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave, Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb: http://largo.zemris.fer.hr/~pol/chaos/svojs_tva.html, september 1999.
- /2/ M. P. Kennedy: Tree Steps to Chaos - Part II: A Chua's Circuit Primer, IEEE Transactions on Circuits and systems-I: Fundamental theory and applications, vol. 40, št. 10, oktober 1993, str. 657-674.
- /3/ Matej Šalamon, Tomaž Dogša: Analiza kaosa v Chujevem oscilatorju, Elektrotehniški vestnik, vol. 62, št. 1, leto 1995, str. 50-58.
- /4/ Leon O. Chua, Tao Lin: Chaos in Digital Filters, IEEE Transactions on Circuits and systems, vol. 35, št. 6, junij 1988, str. 648-658.
- /5/ Leland B. Jackson: Digital Filters and Signal Processing, University of Rhode Island, 1989.
- /6/ T. Lin, L. O. Chua: On Chaos of Digital Filters in the Real World, IEEE Transactions on Circuits and systems, vol. 38, št. 5, maj 1991.
- /7/ Matej Šalamon: Uporabnost kaotičnega digitalnega sita v kriptografskih sistemih, Magistrsko delo, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, nov. 1999.

mag. Matej Šalamon, doc. dr. Tomaž Dogša
 oba Univerza v Mariboru
 Fakulteta za elektrotehniko,
 računalništvo in informatiko
 Smetanova 17, 2000 Maribor
 Slovenija