Trikotnika v trikotniku

↓↓↓
Jurij Kovič in Aleksander Simonič

→ Matematiko se v šolah učimo, kot da gre za vedo z ostrimi ločnicami med posameznimi področji. Na tak način spoznavamo njene pojme, metode in izreke. Toda dejanski matematični problemi, ki jih matematiki srečujemo pri svojem raziskovalnem delu, niso vselej strogo omejeni na posamezna področja matematike.

Velikokrat je za rešitev problema z enega področja potrebno poznavanje pojmov, pristopov in tehnik z drugih, navidezno ločenih področij. Do rešitve lahko vodi tudi več različnih poti. Včasih nas zanima le dokaz, da rešitev obstaja, včasih pa želimo rešitev tudi konkretno poiskati, čeprav je slednja pot velikokrat daljša.

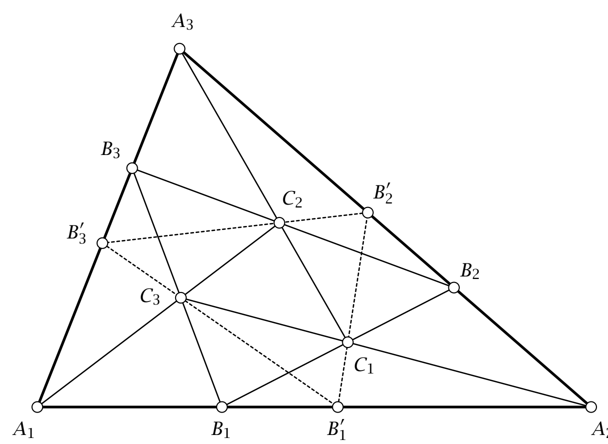
Tako se je ob reševanju nekega problema s področja konfiguracij naravno pojavil naslednji elementaren geometrijski problem.

Problem 1. Imejmo trikotnik $\triangle A_1A_2A_3$ in take točke $B_1 \in A_1A_2$, $B_2 \in A_2A_3$ in $B_3 \in A_3A_1$ na njegovih stranicah, da je

$$\lambda = \frac{|A_1B_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|A_3B_3|}{|A_3A_1|} \tag{1}$$

za neko število $\lambda \in (0,1)$, glej sliko 1. Kako dobiti točke C_1, C_2 in C_3 na stranicah trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$, da bo veljalo $C_1 \in A_2C_3$, $C_2 \in A_3C_1$ in $C_3 \in A_1C_2$?

Na prvi pogled ni jasno niti to, ali take točke vedno obstajajo. Izkaže se, da je odgovor pritrdilen. Do tega spoznanja lahko pridemo tudi preko *linearnih transformacij*, kjer naravno nastopajo vektorji.



SLIKA 1.
Naloga je poiskati take točke C_1, C_2 in C_3, da bodo izpolnjeni pogoji problema 1.

Ideja je, da obstaja bijektivna preslikava med enakostraničnim in raznostraničnim trikotnikom, pri tem pa se ohranjajo presečišča in razmerja. Bralcu, ki bi ga utegnil tak pristop zanimati, ponujamo v branje članka [3, 4]. S tem res dobimo dokaz obstoja takih točk, ne pa tudi načina, kako bi jih poiskali »z golimi rokami«, recimo ravnilom in šestilom. V nadaljevanju bomo določili tako število μ, ki je rešitev kvadratne enačbe s koeficienti, odvisnimi le od razmerja λ, in za katerega velja

$$\mu = \frac{|B_1C_1|}{|B_1B_2|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_2B_3|} = \frac{|B_3C_3|}{|B_3B_1|}. \tag{2}$$

To pomeni, da točke C_1, C_2 in C_3 delijo stranice trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$ v razmerju μ. Pokazali bomo, da ga je moč konstruirati le s šestilom in neoznačenim ravnilom. Take konstrukcije spadajo med najbolj zaželene v geometriji, glej npr. knjigo [2].

Slika 1 pa razkriva še eno zanimivo lastnost. Vzemimo take točke $B_1' \in A_1A_2$, $B_2' \in A_2A_3$ in $B_3' \in A_3A_1$, da je

$$\mu = \frac{|A_1B_1'|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_2B_2'|}{|A_2A_3|} = \frac{|A_3B_3'|}{|A_3A_1|},$$

kjer je število μ definirano z izrazom (2). Potem točke C_1, C_2 in C_3 ležijo tudi na stranicah trikotnika $\triangle B_1'B_2'B_3'$, glej črtkan trikotnik na sliki 1. Da je stvar še bolj zanimiva, velja tudi

$$\lambda = \frac{|B_1'C_1|}{|B_1'B_2'|} = \frac{|B_2'C_2|}{|B_2'B_3'|} = \frac{|B_3'C_3|}{|B_3'B_1'|}. \qquad (3)$$

Vidimo, da sta vlogi razmerij λ in μ zamenjani. Zato lahko upravičeno rečemo, da je trikotnik $\triangle B_1'B_2'B_3'$ *dualen* trikotniku $\triangle B_1B_2B_3$.

Rešitev problema

Definirajmo linearno neodvisna vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{A_3A_1}$. Po predpostavki problema imamo $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = -\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$ in $\overrightarrow{A_3B_3} = \lambda\vec{b}$. Vzemimo točke $C_1 \in B_1B_2$, $C_2 \in B_2B_3$, $C_3 \in B_3B_1$ na stranicah trikotnika $\triangle B_1B_2B_3$ in definirajmo števila $\mu_1 = |B_1C_1|\,/\,|B_1B_2|$, $\mu_2 = |B_2C_2|\,/\,|B_2B_3|$, $\mu_3 = |B_3C_3|\,/\,|B_3B_1|$. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_1C_1} &= \mu_1\overrightarrow{B_1B_2} = \mu_1(1-2\lambda)\,\vec{a} - \mu_1\lambda\vec{b},\\
\overrightarrow{B_2C_2} &= \mu_2\overrightarrow{B_2B_3} = -\mu_2(1-\lambda)\,\vec{a} - \mu_2(1-2\lambda)\,\vec{b},\\
\overrightarrow{B_3C_3} &= \mu_3\overrightarrow{B_3B_1} = \mu_3\lambda\vec{a} + \mu_3(1-\lambda)\vec{b}.
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1C_2} &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2}\\
&= (1-\lambda)(1-\mu_2)\,\vec{a} - (\lambda(1-\mu_2)\\
&\qquad + \mu_2(1-\lambda))\vec{b},\\
\overrightarrow{A_2C_3} &= \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_3C_3}\\
&= -(1-\lambda\mu_3)\,\vec{a} - (1-\lambda)(1-\mu_3)\,\vec{b},\\
\overrightarrow{A_3C_1} &= \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\\
&= (\lambda(1-\mu_1) + \mu_1(1-\lambda))\,\vec{a} + (1-\lambda\mu_1)\,\vec{b}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1C_3} &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2C_3} = \lambda\mu_3\vec{a} - (1-\lambda)(1-\mu_3)\,\vec{b},\\
\overrightarrow{A_2C_1} &= \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3C_1}\\
&= -((1-\lambda)(1-\mu_1) + \lambda\mu_1)\,\vec{a} - \lambda\mu_1\vec{b},\\
\overrightarrow{A_3C_2} &= \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1C_2}\\
&= (1-\lambda)(1-\mu_2)\,\vec{a} + ((1-\lambda)(1-\mu_2)\\
&\qquad + \lambda\mu_2)\vec{b}.
\end{aligned}$$

Točke A_1, C_3 in C_2 so kolinearne natanko tedaj, ko obstaja tako število $k \neq 0$, da je $\overrightarrow{A_1C_3} = k\overrightarrow{A_1C_2}$. Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja, koeficienti pred vektorjema pa so vedno neničelni, je ta pogoj ekvivalenten enačbi

$$\frac{(1-\lambda)(1-\mu_2)}{\lambda\mu_3} = \frac{\lambda(1-\mu_2) + \mu_2(1-\lambda)}{(1-\lambda)(1-\mu_3)}.$$

Podobno izpeljemo še preostali enačbi. Če vsako enačbo pomnožimo z ustreznimi veččleniki in potem izpostavimo člene z μ_1, μ_2, μ_3, opazimo, da lahko vse enačbe zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}
&\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\mu_i\mu_{i+1} - (1-\lambda)^2\mu_i\\
&\qquad - \left(2\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)\mu_{i+1} + (1-\lambda)^2 = 0, \qquad (4)
\end{aligned}$$

kjer indekse $i \in \{1,2,3\}$ obravnavamo ciklično, torej $\mu_4 = \mu_1$, $\mu_5 = \mu_2$ itd. Enačba (4) je ekvivalentna pogoju kolinearnosti. Pomnožimo (4) z $(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\,\mu_{i+2}$. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)^2 \mu_i\mu_{i+1}\mu_{i+2}\\
&- \left(2\lambda^4 - 6\lambda^3 + 7\lambda^2 - 4\lambda + 1\right)(\mu_i + \mu_{i+1})\\
&- \left(2\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\mu_{i+2}\\
&+ (1-\lambda)^2\left(3\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = 0. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Če v (5) zamenjamo i z $i+1$ in potem odštejemo dobljeno od (5), dobimo

$$\lambda(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mu_i = \lambda(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mu_{i+2}.$$

Ker pa za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $3x^2 - 3x + 1 > 0$, sledi $\mu_i = \mu_{i+2}$ in s tem $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Sedaj vemo, da lahko te neznanke pospravimo pod eno samo, recimo ji μ. Enačba (4) se zato poenostavi v kvadratno enačbo

$$\left(3\lambda^2-3\lambda+1\right)\mu^2-\left(3\lambda^2-4\lambda+2\right)\mu+(1-\lambda)^2=0 \tag{6}$$

z rešitvama

$$\mu_\pm(\lambda)=\frac{3\lambda^2-4\lambda+2\pm\sqrt{\lambda\left(4-3\lambda(2-\lambda)^2\right)}}{2\left(3\lambda^2-3\lambda+1\right)}.$$

Naj bo D diskriminanta te kvadratne enačbe. Bralec lahko brez težav izračuna

$$D-\lambda^2(3\lambda-2)^2=4(1-\lambda)\left(3\lambda^2-3\lambda+1\right), \tag{7}$$

$$\left(3\lambda^2-4\lambda+2\right)^2-D=4(1-\lambda)^2\left(3\lambda^2-3\lambda+1\right). \tag{8}$$

Po (7) dobimo $D>\lambda^2(3\lambda-2)^2$ in s tem $D\geq 0$, $\sqrt{D}>\lambda(3\lambda-2)$ in $-\sqrt{D}<\lambda(3\lambda-2)$. Rešitvi $\mu_\pm(\lambda)$ sta zato realni in velja $\mu_+(\lambda)>1$ in $\mu_-(\lambda)<1$. Po (8) pa imamo še $\mu_-(\lambda)>0$. Torej je $\mu_-(\lambda)$ edina ustrezna rešitev enačbe (6). S tem $\mu=\mu_-(\lambda)$ ustreza enačbi (2) in predstavlja rešitev problema 1.

Konstrukcija

Kako bi konstruirali točke C_1, C_2 in C_3 samo s šestilom in neoznačenim ravnilom, če imamo podana trikotnika $\triangle A_1A_2A_3$ in $\triangle B_1B_2B_3$, tako da velja (1)? Seveda je to dovolj narediti za eno točko, recimo C_1. Enostavno lahko preverimo, da velja

$$\mu_-(\lambda)=\frac{p-2r-|A_1B_1|/2-\sqrt{(p-3r-3q/4)\,|A_1A_2|}}{p-3r},$$

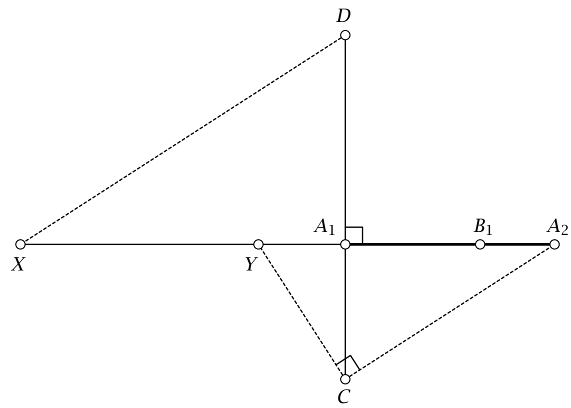
kjer smo definirali

$$p=\frac{|A_1A_2|^2}{|A_1B_1|},\ q=\frac{|A_1B_1|^2}{|A_1A_2|},\ r=|A_1A_2|-|A_1B_1|.$$

Sedaj znamo točko C_1 precej enostavno konstruirati, če le imamo daljici dolžin p in q.

Ena izmed možnih konstrukcij daljic dolžin p in q je prikazana na sliki 2. Zahtevamo, da velja $|A_1C|=|A_1B_1|$ in $|A_1D|=|A_1A_2|$, pri čemer so točke C, A_1, D kolinearne in $CD\perp A_1A_2$. Točki X in Y na premici A_1A_2 določimo tako, da bo veljalo $CA_2\parallel XD$ in $CA_2\perp YC$. Potem je $|XA_1|=p$ in $|YA_1|=q$.

Bralca vabimo, da si v prostodostopnem orodju za dinamično geometrijo *GeoGebri* ustvari novo orodje, ki bo sprejelo točke A_1, A_2, A_3 in B_1, B_2, B_3, vrnilo pa točke C_1, C_2, C_3 preko te konstrukcije.



SLIKA 2.
Konstrukcija daljic XA_1 in YA_1 z dolžinama p in q.

Dualen trikotnik

Dokazali bomo še trditev o dualnem trikotniku $\triangle B_1'B_2'B_3'$. Zaradi enostavnosti pišimo $\mu=\mu_-(\lambda)$. Po definiciji točk B_1', B_2' in B_3' imamo $\overrightarrow{A_1B_1'}=\mu\vec{a}$, $\overrightarrow{A_2B_2'}=-\mu\vec{a}-\mu\vec{b}$ in $\overrightarrow{A_3B_3'}=\mu\vec{b}$. Izkoristimo ciklični zapis indeksa $i\in\{1,2,3\}$. Ker je $\overrightarrow{A_iB_i'}=(\mu/\lambda)\overrightarrow{A_iB_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=(1/\lambda)\overrightarrow{A_iB_i}$ in $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}=(1/\lambda-1)\overrightarrow{A_iB_i}+\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$, imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_i'B_{i+1}'}&=\overrightarrow{A_iA_{i+1}}+\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}'}-\overrightarrow{A_iB_i'}\\&=\frac{1}{\lambda}\left((1-\mu)\overrightarrow{A_iB_i}+\mu\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}\right),\\ \overrightarrow{B_i'C_i}&=\overrightarrow{B_iC_i}+\overrightarrow{B_i'B_i}\\&=\mu\overrightarrow{B_iB_{i+1}}+\overrightarrow{A_iB_i}-\overrightarrow{A_iB_i'}=\mu\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}\\&\quad+(1-\mu)\overrightarrow{A_iB_i}.\end{aligned}$$

Od tod sledi $\lambda\overrightarrow{B_i'B_{i+1}'}=\overrightarrow{B_i'C_i}$. S tem je enakost (3) dokazana.

Naloge

1. Dokaži, da velja $\mu_-(1/2)=2-\varphi$, kjer je $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ zlato število. V tem primeru podaj enostavnejšo konstrukcijo točke C_1, ki bo temeljila na zlatem rezu. Več o tem zanimivem številu lahko bralec poišče v [1].

2. Ali lahko samo s šestilom in neoznačenim ravnilom podamo konstrukcijo trikotnikov s slike 1, da bo $B_i = B_i'$ za $i \in \{1, 2, 3\}$? To pomeni, da iščemo rešitve enačbe $\mu_-(\lambda) = \lambda$. Dokaži, da ima ta enačba natanko eno smiselno rešitev $\lambda = \left(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)/3$.

Literatura

[1] R. A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

[2] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* 2×2 *matrike*, Presek **32** (2004/2005), št. 4, 9–12.

[4] P. Šemrl, *Linearne preslikave ravnine in* 2×2 *matrike (drugi del)*, Presek **32** (2004/2005), št. 5, 5–8.

× × ×

Igra s čokoladkami – Chocolate Fix

Nada Razpet

→ V bonbonierah so navadno dražji bonboni, največkrat polnjeni in obliti s čokolado. Letos sem prejela posebno bonboniero, igro, sestavljeno iz devetih plastičnih bonbonov, rekli jim bomo čokoladke. Plastičnih čokoladk seveda ne moremo pojesti, se pa z njimi lahko igramo.

Najprej nekaj osnovnih podatkov o igri. V izvirniku se igra imenuje *Chocolate Fix* s podnaslovom *Sweet Logic Game* ([1], [2]). Njen ustvarjalec (skupaj z ekipo podjetja ThinkFun, ki se ukvarja z igrami) je Mark Engelberg. Mark je obiskoval srednjo šolo za nadarjene dijake in kasneje nadaljeval študij na univerzi. Ima dve diplomi, iz računalništva in kognitivnih znanosti. Nekaj časa je bil zaposlen pri NASI, kasneje pa se je posvetil računalniškim igricam, sodeluje pa tudi pri pripravah učnih načrtov, predvsem iz logike. Želel je ustvariti igro s čim manj pravil, ki bi bila primerna tako za igranje na računalniku kot brez njega, hkrati pa bi omogočala igranje na več nivojih. Igra je prejela več prestižnih nagrad, med njimi v ZDA zelo cenjene nagrade staršev *Parents Gold Award leta 2008, 2009 in 2010*. Obstaja več verzij te igre, mi bomo pogledali verzijo iz leta 2010.

SLIKA 1.
Deli igre Chocolate Fix. Levo zgoraj je podstavek, poleg so čokoladke. Svetlo rumene čokoladke so na sliki videti bele. Spodaj so kartonski žetoni treh barv oziroma žetoni s trikotniki, kvadrati in krogi ter knjižica z navodili, nalogami in rešitvami.

Deli igre

Igra ima črn podstavek z devetimi vdolbinami in devet čokoladk: tri roza, tri svetlo rumene (na fotografijah so videti bele, na skicah jih bomo obarvali živo rumeno) in tri rjave (glej sliko 1). Čokoladke iste barve se med seboj razlikujejo po obliki zgornje ploskve, ki je lahko kvadrat, trikotnik ali krog. V kompletu dobimo še po tri žetone roza, rumene in rjave barve ter devet sivih žetonov. Na treh sivih žetonih so narisani trikotniki, na treh kvadrati in na treh krožnice. Z žetoni si pomagamo pri reše- →