

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 22 (1994/1995)

Številka 2

Strani 80-83

Franc Savnik:

MNOŽICE IZ RAČUNALNIKA

Ključne besede: matematika, kombinatorika, računalništvo, naravna števila, podmnožice.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/22/1216-Savnik.pdf>

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

RAČUNALNIŠTVO

MNOŽICE IZ RAČUNALNIKA

Na stikih med raznorodnimi vedami se že od nekdaj dogajajo posebno zanimive stvari. To velja tudi za znanosti, ki mejijo na matematiko; mednje tradicionalno uvrščajo astronomijo, fiziko in tehniko. V zadnjih nekaj desetletjih pa so začeli matematične metode uporabljati tudi v kemiji, biologiji, jezikoslovju, sociologiji in v številnih drugih znanostih, za katere je pred tem veljalo mnenje, da z matematiko nimajo nobene zveze. Precej zaslug za vstop matematike kot pomožne vede v te znanstvene panoge ima *kombinatorika*, o kateri zgodovina matematike poroča, da ima svoje korenine med ugankami in razvedrilno matematiko, v raznih igrah (tudi tistih za denar), v začetkih verjetnostnega računa in da je nasploh dolgo životarila na meji med znanostjo in razvedrilom.

Dandanes pravimo, da se *kombinatorika ukvarja z vprašanji, ki so povezana z razmeščanjem elementov končnih množic*. Njene rezultate izdatno uporabljajo tudi v računalništvu, saj so kombinatorični algoritmi podlaga številnim računalniškim programom. V sestavku se bomo dotaknili predstavitve dane končne množice v računalniku in si ogledali dva postopka za oblikovanje podmnožic množice prvih n naravnih števil.

V računalniku

Imejmo naravno število n in označimo z $\mathbb{I}N_n$ množico vseh naravnih števil od 1 do n . Vprašamo se: Kako predstaviti v računalniku poljubno podmnožico množice $\mathbb{I}N_n$?

Ena izmed možnosti je, da za vsako naravno število od 1 do n preverimo, ali pripada množici S . Odgovor *Da* označimo z 1, odgovor *Ne* pa z 0. Odgovore zapišemo po vrsti z desne proti levi; tako dobimo za vsako podmnožico S množice $\mathbb{I}N_n$ natanko določeno zaporedje enic in ničel.

Zgled: $n = 8$,

$\mathbb{I}N_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$S = \{1, 2, 3, 6\}$.

8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	1	0	0	1	1	1

Množici S ustreza zaporedje odgovorov 00100111.

Mimogrede omenimo, da *turbo pascal* namenja takšni predstavitvi množice največ 32 krat 8 bitov in s tem omogoča uporabo osnovne množice, ki ima največ 256 elementov.

Nabor ničel in enic, ki smo jih priredili množici S , lahko razumemo kot dvojiški zapis števila; imenujmo ga *število množice* S in ga označimo s $\sigma(S)$. S tem je vsaki podmnožici množice $\mathbb{I}N_n$ prirejeno natanko določeno število in vsaki n -mestni dvojiški številki ustreza natanko določena podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$. Množica $\mathbb{I}N_n$ ima torej toliko podmnožic, kot je števil $0, 1, \dots, 2^n - 1$, ki se jih da zapisati z n -mestnimi dvojiškimi številkami. Ker je takih števil 2^n , lahko rečemo: *Množica z n elementi ima natanko 2^n podmnožic.*

Zgled: Podmnožice množice $\mathbb{I}N_3$ in njihova dvojiško zapisana števila:

S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1, 2\}$	$\{3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\sigma(S)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Iz računalnika

Pri oblikovanju podmnožic množice $\mathbb{I}N_n$ si najprej izberemo *prvo* podmnožico — običajno je to *prazna* množica — in pravilo, ki vsaki pravi podmnožici $S \subset \mathbb{I}N_n$ priredi njeno *neposredno naslednico* S' . Za začetek oblikujmo postopek, ki izpiše vse podmnožice množice $\mathbb{I}N_n$ po njihovih naraščajočih številih.

Naj bo S prava podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$ in $\sigma(S)$ njeno število. Kako poiskati množico S' , ki ima število $\sigma(S) + 1$? Pomislimo na dvojiško zapisano število $\sigma(S)$ in na to, kako mu prištejemo 1:

- Med ničlami številke $\sigma(S)$ poiščemo tisto, ki leži skrajno desno; takšna ničla zagotovo obstaja, ker je S prava podmnožica množice $\mathbb{I}N_n$.
- Najdeno ničlo zamenjamo z enico, vse enice, ki ležijo desno od nje, pa zamenjamo z ničlami.

Enici, s katero smo zamenjali skrajno desno ničlo številke $\sigma(S)$, ustreza najmanjši element množice $\mathbb{I}N_n \setminus S$. Označimo ga s k ; enicam, ki smo jih zamenjali z ničlami, ustreza tedaj množica $\{1, 2, \dots, k - 1\}$.

Zgled: $n = 8$, $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$; množica S ima številko $\sigma(S) = 00110111$. Nadalje je $k = \min(\mathbb{I}N_8 \setminus S) = \min\{4, 7, 8\} = 4$ in je $S' = S \cup \{4\} \setminus \{1, 2, 3\}$, torej $S' = \{4, 5, 6\}$. Potem je $\sigma(S') = 00111000 = \sigma(S) + 1$.

Imamo

postopek Naredi_podmnožice_1(\mathbb{N}_n ; množica);
 k : naravno število;
 S : množica;
od tod
 $S \leftarrow \emptyset$;
 izpiši_množico(S);
ponavljaj
 $k \leftarrow \min(\mathbb{N}_n \setminus S)$;
 $S \leftarrow S \cup \{k\} \setminus \{1, 2, \dots, k-1\}$;
 izpiši_množico(S);
do izpolnitve pogoja $S = \mathbb{N}_n$;
do tod.

Oglejmo si še postopek, ki izpiše podmnožice množice \mathbb{N}_n v *leksikografskem* vrstnem redu. Ime izvira iz grških besed *lexis* (beseda) in *graphein* (pisati) in označuje vrstni red, ki ga uporabljamo pri razvrščanju besed v slovarjih. Naj bosta $S_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ in $S_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ različni podmnožici dane množice \mathbb{N}_n , ki smo jima elemente zapisali *po velikosti* od najmanjšega do največjega. Za množico S_1 rečemo, da je *leksikografsko pred* množico S_2 , če je prazna ali če obstaja takšno naravno število k , da se množici S_1 in S_2 ujemata v prvih $k-1$ elementih in je $i_k < j_k$.

Zgled: Podmnožice množice \mathbb{N}_3 leksikografsko uredimo v zaporedje $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{3\}$.

Naj bo S kaka prava podmnožica množice \mathbb{N}_n in m njen največji element; če je množica S prazna, vzemimo $m = 0$. Podmnožice množice \mathbb{N}_n , ki leksikografsko sledijo množici S , naredimo tako, da

za vsak naravni k od $m+1$ do n priključimo množici S število k in naredimo vse podmnožice množice \mathbb{N}_n , ki imajo množico $S \cup \{k\}$ za svoj začetni del.

Glede na to, da je prazna množica podmnožica vsake množice, je delo smiselno začeti z $S = \emptyset$; uporabimo

postopek Naredi_podmnožice_2(m, n ; celi števili; S : množica);
 k : naravno število;
od tod
 izpiši_množico(S);
za vsak k od $m+1$ do n ponovi
 Naredi_podmnožice_2($k, n, S \cup \{k\}$);
do tod.

Postopek sprožimo s klicem `NarediPodmnozice(0, n, \emptyset)`.

Vabim vas, da poskusite napisati postopke, ki izpišejo podmnožice množice \mathbb{N}_n še v kakem drugem vrstnem redu, na primer

- po naraščajočem številu elementov, pri čemer so množice z enakim številom elementov razvrščene po svojih številkah ali pa leksikografsko,
- tako, da se vsaki dve sosednji množici razlikujeta natanko v enem elementu.

Franc Savič
