

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 14 (1986/1987)

Številka 2

Strani 110-111

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Šemrl:

## DIRICHLETOV PRINCIP

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/14/826-Milosevic-Semrl-Dirichlet.pdf>

© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

# DIRICHLETOV PRINCIP

Pri reševanju raznih problemskih nalog, še posebej pri tistih, ki zahtevajo dokaz obstoja objektov z neko določeno lastnostjo, nam pogosto pomaga Dirichletov princip, imenovan po nemškem matematiku P.G.L. Dirichletu (1805 – 1859). Ta preprosti princip ima več popularnih imen, na primer: "problem zajčkov in kletk", "problem škatel in kroglic" in podobno. Lahko ga formuliramo tako:

Če je v  $n$  škatlah spravljeno več kot  $n$  kroglic, potem mora vsaj ena škatla vsebovati več kot eno kroglico.

Z nekaj primeri bomo sedaj ilustrirali uporabo tega principa.

**ZGLED 1.** Dokažimo, da sta med desetimi slučajno izbranimi naravnimi števili vsaj dve taki števili, da je njuna razlika deljiva z 9.

**REŠITEV.** Pri deljenju naravnega števila z 9 je lahko ostanek eno izmed števil: 0, 1, 2, ..., 7, 8. Ker imamo 10 števil in s tem tudi 10 ostankov, ki pa lahko zavzamejo največ 9 različnih vrednosti, nam Dirichletov princip pove, da imata vsaj dve med desetimi izbranimi števili isti ostanek pri deljenju z 9. Označimo ti dve števili z  $n_1$  in  $n_2$  in s črko  $r$  njun skupni ostanek pri deljenju z 9. Tedaj imamo

$$n_1 = 9k + r \quad \text{in} \quad n_2 = 9m + r$$

kjer sta  $m$  in  $k$  naravni števili. Zato je njuna razlika  $n_1 - n_2 = 9(k - m)$  deljiva z 9. Dokaz je s tem končan.

**ZGLED 2.** V razredu je 20 učencev. Pri šolski nalogi iz matematike nihče od učencev ni napravil več kot 5 napak. Dokažimo, da so vsaj štirje učenci napravili isto število napak.

**REŠITEV.** Razvrstimo učence v "škatle", tako da v isto "škatlo" spravimo učence, ki so napravili enako število napak. Ker so učenci napravili 0, 1, 2, 3, 4 ali 5 napak, je takih "škatel" šest. V za nas najbolj neugodnem primeru bi bili v vsaki "škatli" po trije učenci, torej dva ostaneta ( $20 = 6 \cdot 3 + 2$ ). Na osnovi Dirichletovega principa obstaja "škatla", v kateri so vsaj štirje učenci, kar je bilo potrebno dokazati.

**ZGLED 3.** V pravilnem dvanajstkotniku pobarvamo nekatere izmed diagonal. Dokažimo, da obstajata vsaj dve oglišči, v katerih se končuje enako število pobarvanih diagonal.

**REŠITEV.** V vsakem oglišču se končuje 9 diagonal. Zato imamo v vsakem oglišču 10 možnosti za število obarvanih diagonal. Oglišč ("kroglic") pa je 12. Po Dirichletovem principu obstajata vsaj dve oglišči z istim številom obarvanih diagonal.

**ZGLED 4.** V kvadratu s stranico 1 je poljubno razvrščenih 51 točk. Ali je možno med njimi poiskati tri točke, ki jih pokriva krog s polmerom  $1/7$ ?

**REŠITEV.** Dani kvadrat v obliki šahovnice razdelimo na 25 kvadratov s stranico  $1/5$ . Dirichletov princip nam pove, da obstaja kvadrat, ki skupaj s svojimi stranicami vsebuje vsaj 3 točke. Ker je  $2/7$  večje od  $\sqrt{2}/5$ , lahko ta kvadrat pokrijemo s krogom polmera  $1/7$ .

Če vam je Dirichletov princip s svojo preprostostjo in učinkovitostjo všeč, se lahko samostojno lotite reševanja naslednjih problemov.

1. Jugoslavija ima manj kot 23 milijonov prebivalcev in več kot 7000 naselij. Dokažite, da imata vsaj dve naselji enako število prebivalcev.
2. Koliko najmanj naravnih števil je potrebno vzeti, da bi med njimi gotovo obstajali dve števili, katerih razlika je deljiva s 5?
3. V kvadratu s stranico 1 je izbranih 101 točk, tako da nobena trojica izmed teh točk ne leži na isti premici. Dokažite obstoj trikotnika z oglišči v treh izmed teh točk in s površino, manjšo od 0,01.
4. V omari imamo 4 pare rjavih in 4 pare črnih čevljev. Koliko najmanj čevljev je potrebno na slepo vzeti iz omare, da bi imeli vsaj en par čevljev iste barve?

*Dragoljub M. Milošević*  
Prevedel *Peter Šemrl*