

Gravitacijski valovi

dr. Bojan Golli

Oddelek za fiziko in tehniko,
Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani



Povzetek

Z odmevnim odkritjem gravitacijskih valov leta 2015 so hkrati tudi nedvoumno potrdili obstoj črnih lukenj. V članku na elementarnem nivoju predstavimo teoretske osnove splošne teorije relativnosti, ki so pomembne za razumevanje nastanka in detekcije gravitacijskih valov in lastnosti črnih lukenj. Na nekaj zgledih ocenimo značilne velikosti količin, povezanih z izviri valovanja, in poudarimo podobnosti in razlike med elektromagnetnim in gravitacijskim valovanjem. Ob tem pojasnimo, zakaj so ravno črne luknje praktično edini možni izvir valovanja, ki ga je mogoče zaznati.

Ključne besede: gravitacijsko valovanje, splošna teorija relativnosti, črne luknje

Gravitational Waves

Abstract

The resounding discovery of gravitational waves in 2015 has also confirmed beyond doubt the existence of black holes. This article presents on an elementary level the theoretical foundations of general relativity necessary to understand the origin and detection of gravitational waves, as well as some properties of black holes. A few examples are used to assess some typical quantities related to the source of the waves, and the similarities and differences between electromagnetic and gravitational waves are highlighted. This helps us to understand why black holes are essentially the sole candidates for sources of detectable gravitational waves.

Keywords: gravitational waves, general theory of relativity, black holes

1 Uvod

Dne 14. septembra 2015 je kolaboracija LIGO prvič uspela detektirati gravitacijsko valovanje [1], ki ga je Einstein v svoji splošni teoriji relativnosti napovedal že leta 1916. Z analizo signala in primerjavo s teoretično napovedjo so ugotovili, da je gravitacijsko valovanje prišlo iz dveh črnih lukenj, krožečih okoli skupnega težišča, ki sta se na koncu zlili v eno samo črno luknjo. Tako so z meritvijo gravitacijskega valovanja hkrati tudi prvič nedvoumno potrdili obstoj črnih lukenj, saj so pri dotedanjih opazovanjih na obstoj črnih lukenj lahko sklepali le posredno, preko opazovanja elektromagnetnega sevanja zvezd, gibajočih se v bližini črnih lukenj. Dne 15. junija 2016 so zaznali podoben pojav in s tem potrdili uspešnost projekta. Lahko rečemo, da je projekt LIGO odprl novo okno za opazovanje dogajanj v vesolju, ki nam utegne ponuditi priložnost, da zaznamo celo dogajanja ob samem velikem poku.

V članku skušamo predstaviti probleme, povezane z detekcijo gravitacijskih valov, in pojasniti, zakaj je detekcija tega valovanja neprimerno zahtevnejša od detekcije

elektromagnetnega valovanja. Predstavili bomo izvire gravitacijskega valovanja in princip detekcije. Ob tem bomo naredili nekaj preprostih računskih zgledov na srednješolskem nivoju, s katerimi bomo skušali ponazoriti značilne mehanizme in oceniti velikosti količin, povezanih z gravitacijskim valovanjem. Orisali bomo osnovne predpostavke splošne teorije relativnosti in predstavili fizikalno količino, metrični tenzor, s katero opišemo gravitacijsko valovanje. V zadnjem delu bomo obravnavali sistem dveh črnih lukenj, krožečih okoli skupnega težišča, in sistem primerjali z dobro znanim sistemom Zemlje in Sonca. S pomočjo klasične mehanike bomo kvantitativno ilustrirali razliko med izsevanim energijskim tokom in s tem povezano stabilnostjo prvega in drugega sistema teles.

Upamo, da bo članek pripomogel k temu, da učitelji tako v srednjih kot tudi v osnovnih šolah dobijo nekoliko temeljitejši vpogled v fizikalno ozadje dogajanj v povezavi z gravitacijskim valovanjem, ki bodo v naslednjih letih in desetletjih verjetno v središču zanimanja strokovne in laične javnosti.

2 Klasična gravitacija in EM-polje

Gravitacijsko valovanje se širi skozi prazen prostor s svetlobno hitrostjo, tako kot elektromagnetno (EM) valovanje. Zato je poučno potegniti vzporednice med obema valovanjema. Če primerjamo elektrostatsko in gravitacijsko silo dveh delcev na medsebojni razdalji r , ugotovimo, da imata obe sili enako obliko,

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2} \quad \text{in} \quad F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

le da je pri gravitacijski sili produkt mas teles namesto produkta nabojev in gravitacijska konstanta G namesto induksijske konstante ϵ_0 . A obstaja pomembna razlika: električna (in magnetna) sila deluje le med nabitimi delci, gravitacijska pa med vsemi delci; EM-sila je lahko privlačna ali odbojna, gravitacijska pa le privlačna. Razlika je tudi v velikosti: če primerjamo obe sili med protonoma, je gravitacijska za faktor $4\pi\epsilon_0 G m_p^2 / e_0^2 \approx 10^{-36}$ manjša od elektrostatske. Vpliv gravitacije zato zaznamo le pri makroskopskih telesih, saj v nevtralnem atomu ali molekuli negativni naboj atomskega oblaka izniči pozitiven naboj jedra. Tudi če makroskopsko telo nalektrimo, je presežek pozitivnega ali negativnega naboja v primerjavi s celotnim pozitivnim nabojem jeder (ali negativnim nabojem vseh elektronov) dovolj majhen, da izračunani faktor ne pride do izraza. V vesolju je to edina sila, ki deluje na večjih razdaljah.

Kaj niha pri gravitacijskem valovanju? Najenostavnejši odgovor je gravitacijsko polje – a kako pojasnemo, da valovanje vzdržuje konstanten energijski tok pri širjenju skozi prostor? Pri EM-valovanju niha elektromagnetno polje; pri tem nihanje električnega polja inducira nihanje magnetnega polja, to pa ponovno nihanje električnega polja ... – tako kot to izhaja iz Maxwellovih enačb. Električno in magnetno polje sta torej drugo drugemu izvir in vzdržujeta druga drugo pri potovanju skozi prostor. Izvir gravitacijskega polja je v klasični fiziki masa, zato pri gravitacijskem polju ne vidimo mehanizma, ki bi vzdrževal gravitacijsko valovanje. Gravitacijsko polje mora biti veliko bolj kompleksno, kot ga poznamo iz klasične fizike. Popoln opis gravitacijskega polja je podal Einstein leta 1916 v okviru splošne teorije relativnosti.

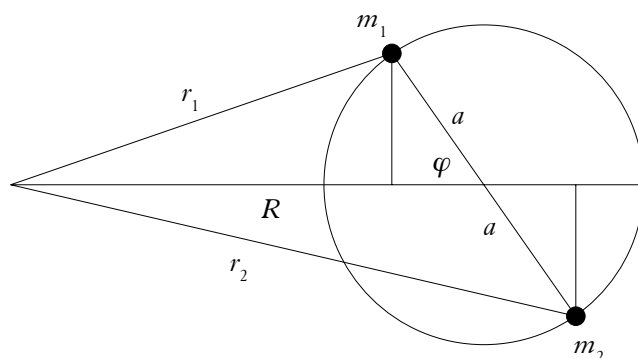
Izviri in detekcija valovanj

Najpogostejši in najpreprostejši izvir EM-valovanja v makroskopskem svetu je dipolna antena, v kateri niha električni naboj. V ravnini, pravokotni na anteno, niha električno polje vzporedno z anteno, magnetno polje pa pravokotno na električno polje in hkrati pravokotno na smer širjenja valovanja. Valovanje detektiramo z drugo dipolno anteno, v kateri električno polje požene tok. Ker pri gravitaciji ni različno predznačenih nabojev, ne moremo najti ekvivalenta dipolni anteni. Časovno spre-

menljivo gravitacijsko polje je lahko posledica krožečih masivnih teles ali eksplozije velikih razsežnosti, na primer eksplozije supernove.

Zemlja, ki kroži okoli Sonca, ustvarja v prostoru gravitacijsko polje, ki periodično niha. Pa lahko takšno časovno spremenljivo polje proglasimo za gravitacijsko valovanje? Kot bomo spoznali v nadaljevanju, količina, ki opisuje gravitacijsko valovanje, ustreza gravitacijskemu potencialu.¹ Zapišimo, kako se gravitacijski potencial dveh teles z enakima masama $m_1 = m_2 = m$, ki krožita na razdalji $r = 2a$ okoli skupnega težišča, spreminja na večji oddaljenosti $R \gg r$ v ravnini kroženja (glej sliko 1):

$$V(R, t) = \frac{Gm}{r_1} + \frac{Gm}{r_2}.$$



Slika 1: Izpeljava časovno odvisnega gravitacijskega potenciala dveh enakih krožečih teles.

S časom se spreminjata razdalji r_1 in r_2 . Odvisnost je vsebovana v kotu $\varphi = \omega t$, če je ω kotna hitrost teles pri kroženju. Iz slike razberemo

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \sqrt{(R \pm a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{(R^2 + a^2) \pm 2Rac \cos \varphi} \approx \sqrt{R^2 \pm Rrc \cos \varphi}, \end{aligned}$$

pri čemer velja predznak $-$ za r_1 in $+$ za r_2 . Za potencial potem sledi:

$$V(R, t) = Gm \left(\frac{1}{R \sqrt{1 - \frac{r}{R} \cos \varphi}} + \frac{1}{R \sqrt{1 + \frac{r}{R} \cos \varphi}} \right).$$

Za $R \gg r$ lahko oba izraza razvijemo v Taylorjevo vrsto do tretjega člena² in upoštevamo $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$. Dobimo

$$V(R, t) = \frac{2Gm}{R} + \frac{3Gmr^2}{8R^3} + \frac{3Gmr^2}{8R^3} \cos 2\omega t. \quad (2)$$

Tretji člen v (2) je edini časovno odvisni člen in je torej iskani časovno odvisni potencial. Harmonično niha z dvojno frekvenco kroženja in pojema s tretjo potenco

¹ Gravitacijski potencial, ki ga čuti telo z maso m_2 v polju druge mase m_1 , je $V(r) = \frac{W_{pot}}{m_2} = \frac{Gm_1}{r}$, če je r razdalja med (središčema) teles.

² $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$ $x = \frac{r}{R} \cos \varphi \ll 1$.

razdalje. Ker pričakujemo, da je gostota izsevanega energijskega toka odvisna od kvadrata amplitude, bi to pomenilo, da gostota pojema s šesto potenco razdalje. Dobljeni rezultat torej ne ustreza valovanju, ki ga iščemo, saj pričakujemo, da bo gostota obratno sorazmerna s kvadratom razdalje, tako kot pri EM-valovanju, pri katerem se energijski tok ohranja pri širjenju skozi prostor.³ Gravitacijsko valovanje mora imeti bogatejšo strukturo, kot je skalarna količina V , ki določa klasični gravitacijski potencial. Povejmo, da bi dobili podoben rezultat, če bi računali samo spreminjajoče se električno polje dipola. Šele ko v igro vključimo magnetno polje, dobimo valovanje, pri katerem se ohranja energijski tok.

Detekcija

Kako detektiramo prisotnost gravitacijskega polja? Opazovalec na Zemlji ima na razpolago kar nekaj metod: stopi na tehtnico in izmeri svojo težo, meri nihajni čas matematičnega nihala ali čas padanja telesa z določene višine. Kaj pa astronaut, ki se, denimo, približuje neznanemu planetu v vesoljski ladji z ugasnjenim motorjem? V bližini planeta pod vplivom privlačne sile prične njegova ladja pospeševati; ker pa sila deluje enako na vsa telesa v ladji, se vsa telesa gibljejo enako kot prej in prisotnosti sile ne more opaziti. Na prvi pogled se zdi to nenavadno: a spomnimo se, da so astronauti, ki krožijo v vesoljski postaji nizko nad Zemljo, v breztežnem stanju, čeprav se gravitacijska sila na višini 300 km nad površjem le malo zmanjša glede na vrednost pri tleh. V okviru klasične mehanike opišemo odsotnost gravitacijske sile v pospešenem sistemu z vpeljavo sistemske sile, ki ima smer negativnega pospeška, s katerim se sistem giblje, po velikosti pa je enaka pospešku, pomnoženemu z maso telesa.

Po drugi strani astronaut, zaprt v vesoljski ladji, z nobeno od omenjenih metod ne more ugotoviti, ali miruje na planetu s težnim pospeškom g ali pa se je začela ladja pospeševati s pospeškom $a = -g$. Takšen razmislek je Einsteina vodil pri formulaciji splošne teorije relativnosti, ki jo bomo orisali v naslednjem poglavju.

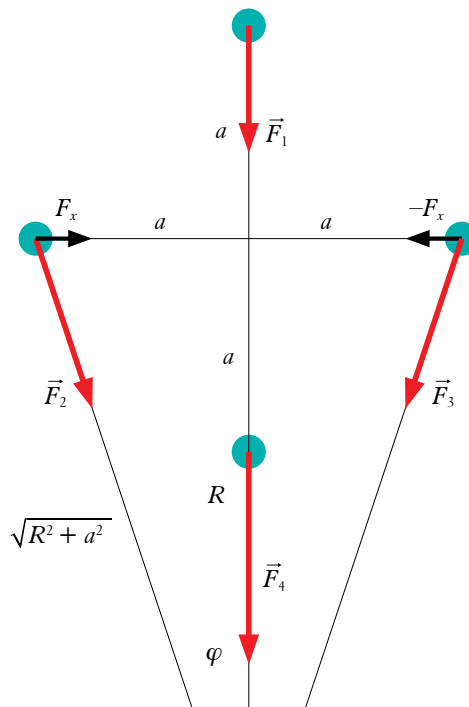
Prosto padajoči opazovalec torej ne more izmeriti teže, ki deluje na njegovo telo oziroma na telesa v okolici. To pa ne pomeni, da ne more zaznati prisotnosti gravitacijskega polja. Opazovalec izkoristi dejstvo, da se silnice gravitacijskega polja gostijo, ko se približuje izviru. Če meri silo, ki deluje na razsežno telo, ugotovi, da sila ni enaka v vsaki točki razsežnega telesa: na točke, ki so bližje središču izvira, deluje večja sila kot na točke, ki so od središča bolj oddaljene; na dve, med seboj oddaljeni točki na enaki oddaljenosti od središča, pa sili nista vzporedni. Razlika sil zato skuša telo raztegniti v smeri, vzporedni s smerjo gravitacijske sile, v prečni smeri pa skrčiti.

Učinek ocenimo za sistem štirih teles z enakimi masami m , povezanih s togimi prečkami z dolžino $l = 2a$, kot kaže slika 2, v gravitacijskem polju telesa z maso M , ki je za R oddaljen od težišča sistema.

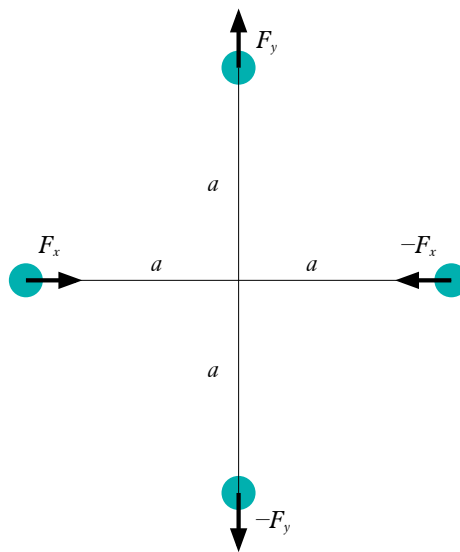
Velikosti sil na sliki 2a) ocenimo v aproksimaciji $a \ll R$:

$$F_1 = \frac{GmM}{(R+a)^2} = \frac{GmM}{R^2 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^2} \approx \frac{GmM}{R^2} - \frac{GmM}{R^2} \frac{2a}{R} \equiv F_0 - F_y.$$

a)



b)



Slika 2: Sile na štiri telesa v nehomogenem gravitacijskem polju. Na sliki a) sistem miruje glede na vir polja, na sliki b) sistem prosto pada pod vplivom privlačne gravitacijske sile.

³ Površina ploskve, S , skozi katero se širi valovanje, narašča s kvadratom razdalje od izvira, zato je energijski tok skozi njo, $P = jS$, konstanten, če gostota toka j pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje. Če se valovanje širi enakomerno v vse smeri, je ploskev kar površje krogle s polmerom R in je S površina krogle, $S = 4\pi R^2$.

Upoštevali smo $(1 \pm x)^{-2} \approx 1 \mp 2x$ za $x \ll 1$. Podobno izpeljemo $F_4 = F_0 + F_y$. V vodoravni smeri velja

$$F_{2x} = \frac{GmM}{R^2 + a^2} \sin\varphi \approx \frac{GmM a}{R^2} \equiv F_x, \quad F_{3x} = -F_x,$$

v navpični pa $F_{2y} = F_{3y} \approx F_0$. Če sistem prosto pada s pospeškom $a_s = \sum F_i / 4m = 4F_0 / 4m = F_0 / m$, deluje na vsako telo še sistemska sila $F_s = -ma_s = F_0$. Rezultante sil so prikazane na sliki 2b). V smeri gravitacijske sile skuša rezultanta sil sistem raztegniti, v prečni pa skrčiti. Opisane sile so razlog za plimo in oseko na Zemlji; govorimo o *plimskih* silah.

Detektor gravitacijskega polja torej meri spremembo gravitacijskega polja preko deformacije telesa v dveh prečnih smereh. Če ne vemo, v kateri smeri je izvir polja, jo lahko določimo tako, da poiščemo smer, v kateri je razteg telesa največji. V primerjavi z dipolno anteno, pri kateri je velikost sile na enega od nabojev kar eE ,⁴ je občutljivost gravitacijskega detektorja veliko manjša; v električnem primeru je sorazmerna z R^{-2} , v gravitacijskem pa z R^{-3} , če je R razdalja med telesom in izvirom polja. Vidimo, da poleg šibkosti gravitacijske sile v primerjavi z elektromagnetno dodatno težavo pri detekciji gravitacijskega valovanja predstavlja relativno slabša občutljivost detektorja.

3 Oris splošne teorije relativnosti

3.1 Metrični tenzor

Štirirazsežni prostor

Einstein je pri formulaciji relativnostne teorije izhajal iz predpostavke, da se pri prehodu v opazovalni sistem drugega opazovalca transformira tudi čas. Posledično čas ni absolutna količina, ki bi bila neodvisna od opazovalca in bi za vse opazovalce tekla enako. Zato je smiselno vpeljati čas kot četrto koordinato in trirazsežni prostor posplošiti v štirirazsežnega. Posplošeni vektorji so določeni s četverico koordinat. Časovno koordinato običajno pomnožimo s svetlobno hitrostjo, tako da ima enako enoto kot krajevne koordinate. *Vektor četverec* zapišemo kot $\underline{x} = (ct, x, y, z)$; točki v štirirazsežnem prostoru pravimo *dogodek* [2]. Pri prehodu v sistem drugega opazovalca transformacijo opišemo z matriko 4×4 , ki je upodobitev *Lorentzove* transformacije. Ko imata opazovalna sistema S in S' vzporedni osi x in se drugi sistem S' giblje s hitrostjo v v smeri osi x , se čas in koordinata x transformirata z znanimi zvezami:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - vt), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Invarianta

V splošnem je *invarianta* vsaka količina, ki se pri prehodu iz enega v drug opazovalni sistem ohranja. V tri-

razsežnem prostoru je invarianta velikost vektorja. Za vektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, ki ga določata točki $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, invarianto zapišemo kot

$$\Delta r^2 \equiv (\Delta \vec{r})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (4)$$

Na prvi pogled bi sklepali, da dobimo invarianto v štirirazsežnem prostoru tako, da izrazu (4) prištejemo kvadrat časovne koordinate, a se hitro pokaže, da tak izraz ni invarianten na Lorentzove transformacije. Invarianten izraz dobimo, če spremenimo predznak časovnemu členu:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \text{invarianta}. \quad (5)$$

Fizikalni pomen invariante (5) pojasnimo na naslednjem zgledu. Različni opazovalci, ki se gibljejo v različnih smereh, opazujejo isto letalo pri letu med dvema značilnima legama. Izmerijo različne hitrosti letala ($v_x = \Delta x / \Delta t, \dots$) in različen čas potovanja Δt . Vendar je za vse opazovalce izraz

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2} \right) = -c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) \quad (6)$$

enak. V sistemu opazovalca na opazovanem letalu se letalo ne giblje, zato je $v_x = v_y = v_z = 0$ in velja

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 \equiv -c^2 \Delta \tau^2. \quad (7)$$

Invariantna količina torej predstavlja kvadrat časa, pomnoženega z $-c^2$, ki ga meri opazovalec v sistemu, ki se giblje skupaj z opazovanim telesom. Ta čas imenujemo *lastni* čas in invarianto lahko zapišemo v obliki

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (8)$$

V zvezi razpoznamo znano enačbo za podaljšanje časa. Če na uri, ki se giblje skupaj z opazovanim telesom, preteče sekunda, preteče za opazovalca, za katerega se telo giblje s hitrostjo $v = 0,6c$, čas $\Delta t = \gamma \Delta \tau = 1 / 0,80 = 1,25$ sekunde.

Metrični tenzor

Izraz za invarianto (5) zapišimo z vektorji četverci v obliki stolpcev:

$$\Delta s^2 = \underline{\Delta r} \cdot \underline{\Delta r} = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$= -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 x_{\mu} \eta_{\mu\nu} x_{\nu}. \quad (9)$$

Vpeljali smo *metrični tenzor* z elementi:

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad \eta_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu \quad (10)$$

in kompaktni zapis koordinat $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Na prvi pogled se zdi vse skupaj precej odvečna komplicacija zaradi enega samega predznaka, a zavedati se

4 Tudi nehomogeno električno polje lahko povzroči kvadrupolno deformacijo, ki pa ne igra tako pomembne vloge pri detekciji valovanja kot dipolna.

moramo, da postane v *splošni teoriji relativnosti* metrični tenzor ključna količina, ki določa lastnosti prostora. Ob prisotnosti mase (energije) v prostoru se metrični tenzor spremeni in matrični elementi postanejo odvisni od porazdelitve mase v prostoru.

Metrični tenzor (10) pravzaprav redefinira običajni skalarni produkt dveh vektorjev. Prostor vektorjev ni običajen vektorski prostor, pač pa govorimo o prostoru *Minkowskega*. Metrični tenzor (10) definira *ravni* prostor Minkowskega, torej prostor brez prisotnosti masnih teles. Ob prisotnosti masnih teles se tenzor spremeni:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{r}, t); \quad (11)$$

elementi $h_{\mu\nu}$ merijo odklik od tenzorja ravnega prostora. Govorimo o *ukrivljenem* prostoru. Ukrivljenosti prostora v treh in štirih dimenzijah si ne moremo predstavljati; lahko pa si predstavljamo ukrivljenost ploskve, na primer Zemljinega površja. Premike po površju, ki so veliko manjši od Zemljinega polmera, lahko obravnavamo kot gibanje v ravnini; pri premikih, ki merijo več deset kilometrov, pa približek ni več dober: velika ladja, ki pluje proti obzorju, se na večji oddaljenosti kar »potopi« v morju.

Gravitacijsko polje torej opišemo s tenzorjem, zato je tudi izvir polja *tenzor*. Poleg komponente, ki predstavlja maso oziroma polno energijo, je izvir polja tudi krajevni del četverca gibalne količine in (trirazsežni) napetostni tenzor. Glavni prispevek pride od prve komponente – polne energije. Polje (tenzor h) in izvire povezujejo Einsteinove enačbe, ki pa jih tu zaradi zahtevnega matematičnega formalizma, v katerem so zapisane, ne bomo navajali [3].

3.2 Šibko gravitacijsko polje

Gravitacijsko polje planeta ali zvezde je na vseh oddaljenostih šibko, če ga primerjamo z gravitacijskim poljem blizu površja nevtronske zvezde ali črne luknje. Na dogajanja najbolj vpliva ukrivljenost v časovni koordinati, saj enoti časa, sekundi, ustreza razdalja $3 \cdot 10^8$ m, (trirazsežni) enoti razdalje pa le 1 m. V tem približku lahko pri zapisu invariante upoštevamo popravek le v prvem členu:

$$\Delta s^2 = -(1 - h_{00}(r))c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (12)$$

Tu je r razdalja do središča nebesnega telesa; premiki $\Delta x \dots$ morajo biti majhni v primerjavi z r in $c\Delta t$. Za matrični element h_{00} sledi iz Einsteinovih enačb

$$h_{00}(r) = \frac{2GM}{c^2 r}.$$

Spomnimo se, da je izraz $-GM/r$ kar klasični gravitacijski potencial. (Klasični gravitacijski potencial ima enoto m^2/s^2 tako kot c^2 , zato je h_{00} res brezdimenzijska količina.) Matričnim elementom $h_{\mu\nu}$ v enačbi (10) pravimo zato kar gravitacijski potenciali, saj se od klasičnih količin razlikujejo le za konstanto $c^2/2$.

Ocenimo vrednost h_{00} na površju Zemlje in Sonca; Zemlja ima maso $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg in polmer $r = 6,4 \cdot 10^6$ m, Sonce pa $2 \cdot 10^{30}$ kg in $7,5 \cdot 10^8$ m:

$$h_{00}^{\text{Zemlja}} = 1,4 \cdot 10^{-9}, \quad h_{00}^{\text{Sonce}} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Tako kot smo v prejšnjem razdelku izpeljali podaljšanje časa iz izraza za invarianto, lahko na enak način izpeljemo podaljšanje časa v gravitacijskem polju. Prvi opazovalec naj bo na površju Zemlje, drugi daleč proč od Zemlje v ravnem prostoru. Oba naj mirujeta, torej $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Iz (5) in (7) sledi

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - h_{00}} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_z}} \Delta t \approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_z}\right) \Delta t. \quad (13)$$

Če je τ čas, ki ga izmeri ura na površju Zemlje, izmeri oddaljeni opazovalec daljši čas. Mislimo si, da opazovalec na Zemlji vsako sekundo, merjeno po svoji uri, pošlje signal oddaljenemu opazovalcu. Oddaljeni opazovalec prejema signale v intervalih Δt , ki so večji od ene sekunde. Sklepa, da teče ura na Zemlji počasneje kot njegova. Razlika je v primeru Zemlje zelo majhna – relativna razlika meri ravno polovico h_{00} –, a merljiva.

Ekstremno močno gravitacijsko polje je v bližini črne luknje. Polmer črne luknje r_s je določen ravno s pogojem $h_{00} = 1$, od koder sledi $r_s = 2 GM/c^2$. Ura v ladji, ki se približuje površju črne luknje, $r \rightarrow r_s$, teče za opazovalca v ravnem prostoru vedno počasneje in se na površju povsem ustavi.

4 Gravitacijsko valovanje

4.1 Opis ravnega gravitacijskega valovanja

Količina, ki opisuje gravitacijsko polje, je metrični tenzor, pravzaprav odklik od metričnega tenzorja ravnega prostora, $h_{\mu\nu}$. Ravni val EM-polja opišemo z nihanjem vektorjev \vec{E} in \vec{B} v med seboj pravokotnih smereh v ravnini, pravokotni na smer širjenja valovanja. Pri detekciji statičnega gravitacijskega polja smo v prvem poglavju omenili, da je deformacija, ki jo povzroči nehomogeno gravitacijsko polje, kvadrupolnega značaja. Takšno deformacijo opišemo s tenzorjem v ravnini, pravokotni na smer širjenja valovanja. Če usmerimo os z v smer širjenja valovanja, ima metrični tenzor v (sicer) ravnem prostoru obliko [4]

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

pri čemer $h_+ = A_+ \cos(kz - \omega t)$, $h_\times = A_\times \cos(kz - \omega t)$.

Velja $\omega = ck$ in $k = 2\pi/\lambda$. Če sta izvir valovanja dve telesi, krožeči okoli skupnega težišča, je frekvenca valovanja enaka dvojni frekvenci kroženja, tako kot smo v prvem poglavju izpeljali iz klasičnih enačb.

Izraz za gostoto energijskega toka izpeljemo v okviru splošne teorije relativnosti. Tega se seveda ne bomo lotili, lahko pa s pomočjo analogije z EM-valovanjem in

preprostim razmislekom pridemo do kvalitativne oblike enačbe. Gastoto energijskega toka v EM-valovanju v vakuumu zapišemo kot

$$j_{EM} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \frac{B_0^2}{\mu_0},$$

če sta E_0 in B_0 amplitudi nihanja električnega in magnetnega polja. Po analogiji sklepamo, da je gostota energijskega toka tudi pri gravitaciji odvisna od kvadrata amplitude, ne vemo pa, ali je odvisna od valovne dolžine oziroma frekvence. Konstantni faktor se izraža z osnovnimi fizikalnimi konstantami in brezdimenzijskim geometrijskim faktorjem. Naravnih konstant, povezanih z gravitacijo, imamo le malo na izbiro; poleg svetlobne hitrosti c le še gravitacijsko konstanto $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Odvisnost od konstant in frekvence lahko ugotovimo z *dimenzijsko analizo*. Geometrijski faktor v izrazu pa nam lahko da le korektna izpeljava iz Einsteinovih enačb za gravitacijsko polje. Iskani izraz iščemo z nastavkom

$$j_{GV} = \mathcal{K} c^\alpha G^\beta v^\gamma [A_+^2 + A_-^2]. \quad (15)$$

Vemo še, da sta amplitudi brezdimenzijski količini. Enota za j , W/m^2 , izražena z osnovnimi enotami, je kg s^{-3} . Izenačimo enote na levi in desni

$$\text{kg s}^{-3} = \text{m}^\alpha \text{s}^{-\alpha} \text{kg}^{-\beta} \text{m}^{3\beta} \text{s}^{-2\beta} \text{s}^{-\gamma}.$$

Hitro se prepričamo $\beta = -1$, $\gamma = 2$ in $\alpha = 3$. Torej

$$j_{GV} = \mathcal{K} \frac{c^3}{G} v^2 [A_+^2 + A_-^2].$$

Izpeljava iz Einsteinovih enačb da $\mathcal{K} = \pi/8$. Prvo, kar opazimo, je kvadratna odvisnost od frekvence, kar je drugače kot pri EM-valovanju, a enako kot pri zvoku. Ocenimo velikost gostote, tako da proste parametre postavimo na enotne vrednosti, $v = 1 \text{ Hz}$, $A_+^2 + A_-^2 = 1$. Dobimo

$$j_{GV}^0 = \frac{c^3}{G} 1 \text{ s}^{-2} = 4 \cdot 10^{35} \text{ W/m}^2.$$

Vrednost je ogromna, a očitno smo privzeli nerealno velikost za amplitudo, saj je že statična vrednost h_{00} v bližini Zemlje velikostnega reda 10^{-10} . Poleg tega je frekvenca 1 Hz za značilne časovne spremembe v vesolju znatno prevelika.

V EM-valovanju se prepletata električno in magnetno polje in drugo drugega vzdržujeta, tako da se energijski tok pri širjenju skozi prazen prostor ohranja. Kaj pa ohranja energijski tok pri gravitacijskem valovanju? Gravitacijsko valovanje nosi energijo, gibalno količino in tlak; torej količine, ki nastopajo v Einsteinovih enačbah v splošni teoriji relativnosti in predstavljajo izvir gravitacijskega polja. Tako kot EM-valovanje je zato tudi gravitacijsko valovanje lahko samemu sebi izvir.

4.2 Gravitacijsko valovanje iz sistema dveh krožečih teles

Za celotni energijski tok, ki ga izseva sistem teles z masama m_1 in m_2 , ki krožita okoli skupnega težišča na medsebojni razdalji r , je mogoče izpeljati izraz v kompaktni obliki [5]:

$$P = \frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 r^5} = \frac{32 G^3 m_1^2 m_2^2}{5 c^5 r^2} \omega^2, \quad (16)$$

pri čemer je ω kotna hitrost kroženja (krožna frekvenca).

Sistem Zemlja-Sonca.

Zanimivo je iz vrednotiti izraz (16) za sistem Zemlje in Sonca.⁵ Dobimo presenetljivo majhno vrednost $P = 200 \text{ W}$. Vsekakor pa na račun te moči Zemlja izgublja energijo in razdalja do Sonca se zmanjšuje. Ocenimo energijo Zemlje pri kroženju okoli Sonca.⁶ Sestavljena je iz kinetične in gravitacijske:

$$W = \frac{m_Z v^2}{2} - \frac{G m_Z M_S}{r}.$$

Iz Newtonovega zakona za kroženje sledi

$$m_Z \frac{v_Z^2}{r} = \frac{G m_Z M_S}{r^2} \quad \text{in} \quad \frac{m_Z v^2}{2} = \frac{G m_Z M_S}{2r},$$

in končno

$$W = \frac{G m_Z M_S}{2r} - \frac{G m_Z M_S}{r} = -\frac{G m_Z M_S}{2r} \approx -2,7 \cdot 10^{33} \text{ J}.$$

(Mehanska) energija je *negativna*, ker je sistem vezan – tako kot je negativna energija vezanega elektrona v vodikovem atomu. Iz rezultata lahko ocenimo, za koliko se vsako leto zaradi izsevane energije zmanjša radij kroženja. Velja

$$P = -\frac{dW}{dt} = -\frac{dW}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{G m_Z M_S}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{|W|}{r} \frac{dr}{dt}.$$

Če je (relativna) sprememba polmera dovolj majhna, lahko diferencialne nadomestimo s spremembami polmera in časa. Ocenimo relativno zmanjšanje polmera v enem letu ($\Delta t = 1 \text{ leto}$):

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{P \Delta t}{|W|} \approx 2 \cdot 10^{-22},$$

kar je popolnoma zanemarljivo tudi v milijardi let. Kot zanimivost izračunajmo še valovno dolžino valovanja: $\lambda = c/v = ct_0/2$, torej ravno pol svetlobnega leta.

Sistem dveh črnih lukenj.

Iz enačbe (16) sledi, da moč narašča s peto potenco mas in je obratno sorazmerna z razdaljo na enako potenco. Če bi torej hoteli iz sistema dveh krožečih teles dobiti dovolj močan signal, primeren za opazovanje na velikih

⁵ Nalogo so reševali srednješolci na izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo v letu 2016.

⁶ Pravzaprav bi morali upoštevati tudi kinetično energijo Sonca, a se lahko hitro prepičamo, da je zanemarljiva.

razdaljah, bi morali biti masi zelo veliki, razdalja med njima pa zelo majhna. Zanimivi so torej objekti, ki so zelo masivni in imajo majhno velikost. Zvezde in planeti ne pridejo v poštev, edini objekti, ki imajo pri masi, večji ali primerljivi z maso Sonca, dovolj majhno velikost, so nevtronske zvezde in črne luknje. Nevtronska zveza ima gostoto primerljivo z gostoto jedrske snovi – kavna žlička takšne snovi tehta 5 milijard ton – in premer velikostnega reda 10 km pri masi dveh Sonc. Črne luknje nastanejo iz nestabilnih masivnih nevtronskih zvezd. Polmer je določen z zvezo $r_S = 2 Gm/c^2$, ki smo jo omenili že na koncu drugega poglavja. Mejna masa, pri kateri se nevtronska zvezda že sesede v črno luknjo, je okoli tri Sončeve mase.

Oba opazovana sistema, pri katerih so zaznali gravitacijsko sevanje, sta sestavljali dve zelo masivni črni luknji. Ocenimo razmere pri dveh enakih črnih luknjah z masama po 30 Sončevih mas, kar približno ustreza situaciji pri prvem opazovanem pojavu. Polmer takšne črne luknje je 80 km. S klasično mehaniko ocenimo velikost sistema pri značilni frekvenci valovanja $\nu_v = 40$ Hz, ki jo je oddajal sistem pri prvem pojavu.

Najprej izračunajmo razdaljo med telesoma, r , če krožita okoli skupnega težišča s frekvenco $\nu = \nu_v/2$. Zapišimo Newtonov zakon za gibanje telesa po krožnici s polmerom $r/2$:

$$m\omega^2 \frac{r}{2} = \frac{Gm^2}{r^2}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{2Gm}{4\pi^2\nu^2}} = \sqrt[3]{\frac{2Gm}{\pi^2\nu_v^2}} = 800 \text{ km.} \quad (17)$$

Razdalja je smiselna, saj je večja od polmera teles.

Za izsevano moč dobimo

$$P = \frac{64G^4m^5}{5c^5r^5} = 2,5 \cdot 10^{47} \text{ W.}$$

Podobno kot pri kroženju Zemlje okoli Sonca ocenimo energijo sistema; tokrat upoštevamo kinetični energiji obeh teles in potencialno energijo para. Radialni pospešek v enačbi (17) izrazimo s hitrostjo in od tod takoj dobimo kinetično energijo enega telesa:

$$m \frac{2v^2}{r} = \frac{Gm^2}{r^2}, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{Gm^2}{4r}.$$

Skupno energijo dobimo tako, da kinetični energiji obeh teles prištejemo medsebojno potencialno energijo:

$$W = 2 \frac{mv^2}{2} - \frac{Gm^2}{r} = \frac{Gm^2}{2r} - \frac{Gm^2}{r} = -\frac{Gm^2}{2r}.$$

Podobno kot v prejšnjem primeru izračunajmo spremembo polmera pri enem obratu, $\Delta t = t_0 = 1/\nu$:

$$\Delta r = -\frac{P\Delta t}{|W|} r = -60 \text{ km.}$$

Zmanjšanje polmera je znatno, kar pomeni, da se sistem tudi vedno hitreje vrti. Pri tem se moč hitro povečuje, kar še dodatno pospeši dogajanje. Na koncu se črni luknji sprimeta in spojita v eno samo črno luknjo. Gravitacijsko sevanje se praktično ustavi.

Na račun energije, ki jo sistem seva, se zmanjšuje polna energija sistema in s tem njegova masa. Da dobimo občutek, za kolikšne energije gre, izračunajmo, koliko mase izgubi sistem pri enem obratu pri frekvenci 40 Hz:

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{Pt_0}{c^2} = 1,4 \cdot 10^{29} \text{ kg,}$$

kar ustreza 20.000 zemeljskim masam, in to v času 0,025 s! V celoti je pri prvem opazovanem pojavu sistem izseval maso, enako trem Sončevim masam.

4.3 Detekcija gravitacijskih valov

Kot smo omenili na začetku poglavja, valovanje spremeni lastnosti prostora v ravnini, pravokotni na smer širjenja valovanja. Prostor se v tej ravnini krči in razteza s frekvenco valovanja. Gravitacijski potencial h je sorazmeren z relativno spremembo razdalje med izbranimi točkama. Če bi se gravitacijski val širil skozi ravnino štirih teles na sliki 2 b), bi telesa (brez prečk) nihala tako, kot nakazujejo smeri sil: v navpični smeri bi se izmenično oddaljevala in približevala, v vodoravni pa z enako frekvenco približevala in oddaljevala.

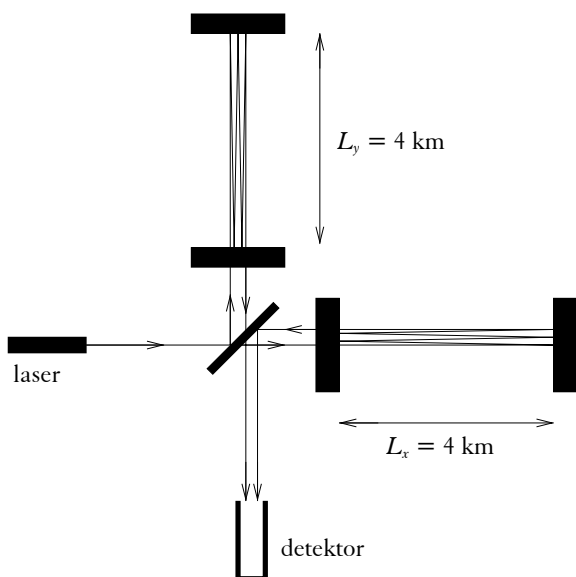
Amplitudo relativnega raztezka A lahko povežemo z gostoto energijskega toka (15), gostoto pa z močjo izvira in razdaljo med detektorjem in izvirom R . Za približno oceno dobimo

$$A \approx \sqrt{\frac{G}{c^3\nu^2}} \sqrt{\frac{P}{4\pi R^2}}.$$

Pri točnem računu upoštevamo, da izvir ne seva izotropno, temveč kot (gravitacijski) kvadrupol. Gostota j je odvisna od kota (ϑ), merjenega od pravokotnice na ravnino kroženja. Za $\vartheta = 90^\circ$ je od nič različna le amplituda A_+ [5]:

$$A_+ = \frac{1}{R} \frac{G^2 4m_1 m_2}{c^4 r}.$$

Naprava [1, 6], s katero je kolaboracija LIGO zaznala gravitacijsko valovanje, je nekoliko modificiran Michelsonov interferometer, shematsko prikazan na sliki 3. V dveh, med seboj pravokotno postavljenih krakih sta po dve zrcala v razmiku $L = 4$ km. Vsa zrcala so v vakuumu in obešena, kar bistveno zmanjša vpliv tresljajev iz okolice. Svetlobni izvir je laser z valovno dolžino $\lambda = 1064$ nm. Svetloba iz laserja se na polprepustnem zrcalu, postavljenim pod kotom 45° , razdeli v dva delna žarka. V vsakem kraku gre žarek skozi polprepustno prvo zrcalo in se odbije od drugega. Delna žarka se na zrcalu, postavljenim pod kotom 45° , združita in interferirata. Zrcala v krakih so naravnana tako, da je svetloba iz enega kraka v protifazi s svetlobo iz drugega kraka, ko ni prisotno gravitacijsko valovanje. Zaradi destruktivne interference detektor ne zazna signala. Ob prisotnosti gravitacijskega valovanja se razmik med zrcalom v enem kraku poveča, ko se v drugem zmanjša. Če h meri odklik od metričnega tenzorja ravnega prostora,

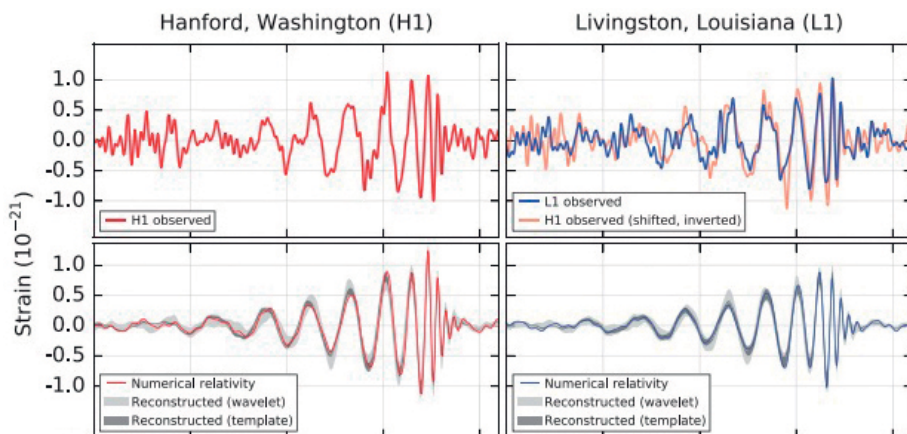


Slika 3: Shematični prikaz delovanja detektorja LIGO.

projiciranega na koordinatno os detektorja, se pot žarka v vsakem od krakov poveča oziroma zmanjša za hL .⁷

Razlika poti med krakoma je $2hL$, kar ustreza spremembi faznega premika med žarkoma $\Delta\phi = 4\pi hL/\lambda$. Žarka nista več v protifazi in detektor zazna signal. Zrcali v posameznem kraku tvorita Fabry-Pérotov interferometer, s čimer se bistveno poveča občutljivost detektorja. Razmik med zrcaloma je naravnano tako, da se vsa svetloba odbije od notranjega zrcala, ko ni prisotno gravitacijsko valovanje. Ko se spremeni razdalja med zrcaloma, notranje zrcalo prepusti del svetlobe, ki pride do detektorja, večji del pa se vrne v prostor med zrcali. Po približno 300 odbojih se tako prepuščena svetloba močno ojača in hkrati se bistveno zmanjša termični šum.

Kolaboracija LIGO je z opisanim detektorjem uspela meriti h z natančnostjo, večjo od $5 \cdot 10^{-22}$. Dva podobna detektorja sta bila postavljena na dveh mestih, oddaljenih 3002 km, tako da je bilo mogoče na podlagi zakasnitve med prejetima signaloma sklepati na smer, iz katere je prihajalo gravitacijsko valovanje (slika 4). Pri prvi detekciji je bila največja moč izvira $3,6 \cdot 10^{49}$ W na razdalji $R = 1,3$ milijarde svetlobnih let, kar ustreza gostoti energijskega toka na Zemlji $0,2$ W/m².



Slika 4: Izmerjeno nihanje, kot sta ga zaznala detektorja v obeh krajih. Na spodnjih grafih je prikazana teoretična odvisnost na podlagi modela, v katerem se dve črni luknji približujeta, pri tem se vedno hitreje vrtita in se na koncu zlijeta v eno črno luknjo [1].

Literatura

- [1] Abbot, B. P. idr. (2016). Phys. Rev. Lett. 116, 061102.
- [2] Strnad, J. (1981). *Fizika, 3. del*. Ljubljana: DZS.
- [3] Čadež, A. (2011). *Teorija gravitacije*. Matematika – fizika, 49, Ljubljana: DMFA–založništvo.
- [4] Mohorič, A. in Čadež, A. (2016). *Obzornik za matematiko in fiziko* 63, str. 53–63.
- [5] Gravitational wave https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave (3. 1. 2017).
- [6] LIGO, <https://en.wikipedia.org/wiki/LIGO> (2. 3. 2017).
- [7] Saulson, Peter R. (1997). American Journal of Physics 65, 501.

⁷ Izračunajmo čas, t , ki ga svetloba potrebuje za razdaljo $\Delta x = L$ v smeri osi x ($\Delta y = \Delta z = 0$) [7]. Iz enačbe (14) sledi $\Delta s^2 = -c^2 t^2 + (1+h)L^2$. V našem primeru je $\Delta s^2 \equiv -c^2 \tau^2 = 0$, saj je lastni čas v opazovalnem sistemu, ki se giblje s svetlobno hitrostjo, enak 0 (limita $\gamma \rightarrow \infty$ v enačbi (8)). Za čas potovanja med zrcaloma sledi $t = \frac{1}{c} \sqrt{1+h} L \approx \frac{1}{c} (1 + \frac{1}{2}h)L$, saj je $h \ll 1$. V prisotnosti gravitacijskega valovanja se torej čas spremeni za $\frac{1}{2}hL/c$, kar ustreza razmiku $\frac{1}{2}hL$.