

ANALIZA BOČNO OJAČANIH RAZPOKANIH ELASTIČNIH NOSILCEV

ANALYSIS OF CRACKED ELASTIC BEAMS STRENGTHENED WITH SIDE-PLATES

Jerneja Kolšek, univ. dipl. inž. grad.

Kraški zidar d.d., Kolodvorska 1, Sežana
jerneja.kolsek@kraskizidar.si

dr. Tomaž Hozjan, univ. dipl. inž. grad.

prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. inž. grad.

izr. prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.

Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana
ime.priimek@fgg.uni-lj.si

Znanstveni članek

UDK: 624.07

Povzetek | V članku predstavimo analitični model za določitev napetostnega in deformacijskega stanja bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev s konstantnimi prečnimi prerezi in z ravnimi referenčnimi osmi. Pomembna novost modela je v tem, da je z njim mogoče analizirati tudi vpliv vzdolžnih in prečnih zamikov na stiku med bočno ojačitvijo in razpokanim nosilcem na obnašanje ojačanega nosilca. Model je zasnovan na linearizirani Reissnerjevi teoriji ravninskih nosilcev, medtem ko je oslabitev nosilca zaradi razpoke modelirana s torzijsko vzmetjo. Učinkovitost predstavljenega modela ter vpliv vzdolžnih in prečnih zamikov med bočno ojačitvijo in razpokanim nosilcem je prikazana s parametrično analizo značilnih bočno ojačanih razpokanih nosilcev.

Summary | In the paper, an analytical model for the stress-strain analysis of cracked elastic beams strengthened with plates bolting or adhesive bonding to their sides is presented. The developed model is meant for the beams with standard cross sections and straight reference axes. The model enables the consideration of not only the longitudinal but also the transverse partial interaction at the side plate/cracked beam interface, what is an important novelty of the model. The presented solution is based on the Reissner's linearized planar beam theory. The weakening of the beam induced by a flexural crack is conventionally modelled as a rotational spring with infinitesimal thickness at the crack location. Further, the efficiency of the presented model and the impact of longitudinal and transverse slips at the side plate/cracked beam interface is examined with a parametric analysis of some examples of simple elastic cracked side-plated beams.

1 • UVOD

V gradbeništvu pogosto gradimo konstrukcije, ki so sestavljene iz dveh ali več različnih materialov, ki so med seboj povezani z adhezijsko plastjo ali z veznimi sredstvi. Imenujemo jih kompozitne konstrukcije. Najpogostejše med njimi so armiranobetonske konstrukcije in sovprežni nosilci iz betona in jekla. Kompozitne konstrukcije najpogosteje uporabljamo

pri novogradnjah. Poleg tega jih uporabljamo tudi pri sanacijah oziroma rekonstrukcijah poškodovanih ali funkcionalno zastarelih konstrukcij (Leung, 2002), kjer je treba najpogosteje ojačati upogibne nosilce. Praviloma se ojačitve armiranobetonskih upogibnih nosilcev izvedejo na natezni strani nosilca, saj tako najbolj povečamo nosilnost le-teh (Wang, 2006).

Bočne ojačitve armiranobetonskih nosilcev in tudi jeklenih in lesenih v splošnem uporabljamo manj, saj velja prepričanje, da so takšne ojačitve bistveno manj učinkovite. Zato jih uporabljamo tam, kjer ojačitev v natezni coni nosilca zaradi konstrukcijskih in estetskih razlogov ni mogoča. Novejše raziskave to splošno prepričanje o manjši učinkovitosti bočnih ojačitev pri sanacijah gradbenih konstrukcij spreminjajo, saj dokazujejo, da lahko bočne ojačitve v nekaterih primerih bistveno povečajo duktilnost osnovnih nosilcev ((Nguyen, 2001), (Liu, 2006)).

V članku predstavljamo nov analitični model za določitev napetostnega in deformacijskega stanja bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev s konstantnimi prečnimi prerezi z upoštevanjem vzdolžnih in prečnih zamikov na stiku med osnovnim nosilcem in ojačitvijo. Poleg znanih predpostavk linearizirane Reissnerjeve teorije elastičnih ravninskih nosilcev, kjer vpliv strižnih deformacij zanemarimo (Reissner, 1972), bomo v predstavljenem analitičnem modelu dodatno upoštevali: (i) osnovni nosilec in ojačitev sta v splošnem homogena in iz različnih materialov, (ii) na stiku med osnovnim nosilcem in ojačitvijo so mogoči vzdolžni in prečni zamiki, (iii) razslojevanje oziroma vtiskanje med osnovnim nosilcem in ojačitvijo zaradi, na primer, lokalnega uklona ojačitve ni mogoče in (iv) adhezijske plasti oziroma vezna sredstva na stiku med

osnovnim nosilcem in ojačitvijo se obnašajo linearno.

Razpoke so značilen pojav pri porušitvi vseh vrst gradbenih konstrukcij. V splošnem opazimo dva načina porušitve mehanizmov. Pri prvem, kjer je konstrukcija izpostavljena hipnim udarnim obtežbam, opazimo drobljenje materiala. Pri drugem mehanizmu porušitve pa opazimo združevanje mikrorazpok v dominantno razpoko, ki povzroči globalno porušitev konstrukcije ali njenega dela. Zaradi kompleksnosti pojava porušitve konstrukcij so v splošnem matematični modeli izredno zahtevni in za zdaj še neekonomični. Zato v literaturi zasledimo veliko poenostavljenih matematičnih modelov, s katerimi bolj ali manj natančno ocenimo vpliv razpoke na globalno obnašanje konstrukcij (Bažant, 1997). Med preprostejšimi modeli je prav gotovo model, s katerim razpoko oziroma

oslabitev upogibnega nosilca zaradi razpoke modeliramo s torzijsko oziroma rotacijsko vzmetjo (Wang, 2006), katere lastnosti določimo na osnovi mehanike loma (Paipetis, 1986). Tak preprost model smo za analizo bočno ojačanih razpokanih nosilcev izbrali v tem članku.

Članek ima poleg uvoda še štiri poglavja. V drugem poglavju predstavimo matematični model. Detajlno predstavimo osnovne enačbe modela na stiku med bočno ojačitvijo in razpokanim nosilcem. V tretjem poglavju prikazujemo osnovno idejo reševanja osnovnih enačb predstavljenega matematičnega modela bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev. V četrtem poglavju analiziramo vpliv značilnih materialnih in geometrijskih parametrov bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev na velikosti statičnih in kinematičnih količin. Za konec podajamo zaključke.

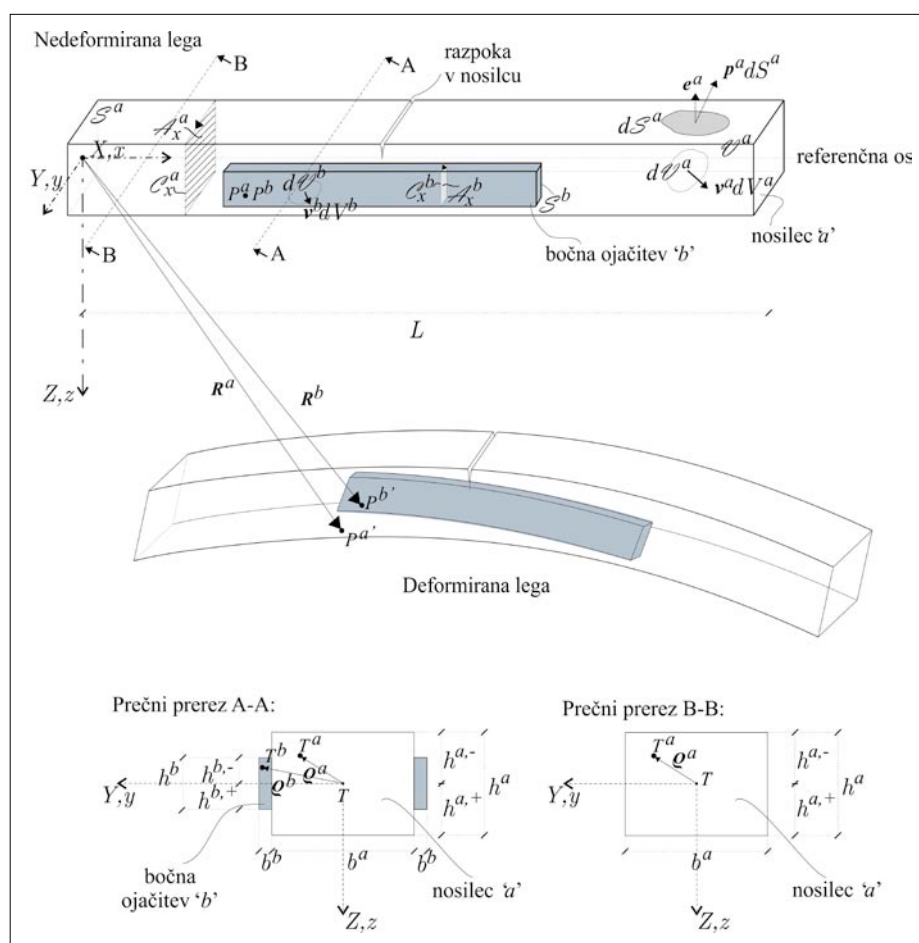
2 • MATEMATIČNI MODEL

Opazujemo razpokan raven elastični nosilec z začetno dolžino L in s konstantnim prečnim presekom A_x^a . Ne izgubimo na splošnosti izpeljave matematičnega modela, če predpostavimo, da ima nosilec le eno razpoko, ki je ojačana z dvema simetričnima bočnima ojačitvama (slika 1).

Razpoka v nosilcu predstavlja lokalno oslabitev in jo v tem članku modeliramo s torzijsko oziroma rotacijsko vzmetjo ((Wang, 2006), (Rabinovitch, 2001)). Za razpokane betonske nosilce lahko torzijsko togost vzmeti k_φ določimo z enačbo (Paipetis, 1986)

$$k_\varphi = c(a, h^a) E^a I^a, \quad (1)$$

kjer predstavlja h^a višino obravnavanega nosilca, a pa globino oziroma velikost razpoke. Paipetis in Dimarogonas sta na osnovi mehanike loma določila, da lahko za razpoke, za katere velja $a/h^a < 0,6$, koeficient $c(a, h^a)$ izračunamo z enačbo:



Slika 1 • Nedeformirana in deformirana lega bočno ojačanega razpokanega nosilca ter oznake značilnih geometrijskih količin

$$c(a, h^a) = \frac{1}{5,346 h^a} \left(1,8624 \left(\frac{a}{h^a} \right)^2 - 3,95 \left(\frac{a}{h^a} \right)^3 + 16,375 \left(\frac{a}{h^a} \right)^4 - \right. \\
 \left. 37,226 \left(\frac{a}{h^a} \right)^5 + 76,81 \left(\frac{a}{h^a} \right)^6 - 126,9 \left(\frac{a}{h^a} \right)^7 + \right. \\
 \left. + 172 \left(\frac{a}{h^a} \right)^8 - 143,97 \left(\frac{a}{h^a} \right)^9 + 66,56 \left(\frac{a}{h^a} \right)^{10} \right)^{-1}. \quad (2)$$

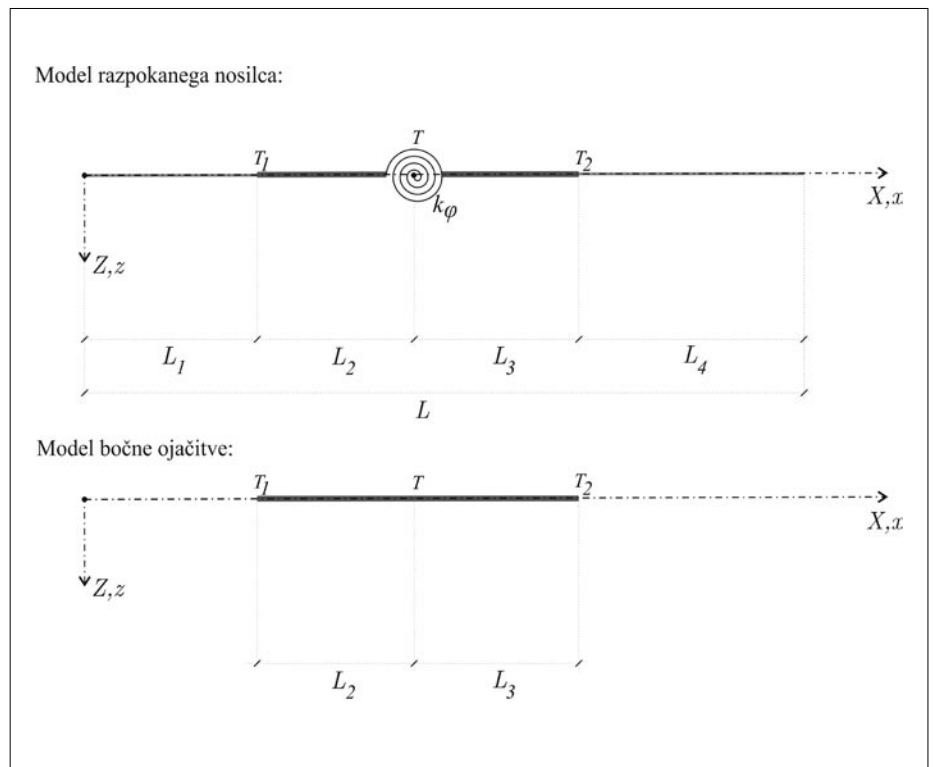
a (cm)	$c(a, h^a)$ (cm ⁻¹)	$k_\varphi = c(a, h^a) E^a I^a$ (kNcm)
1,0	3,211	$6,719 \cdot 10^8$
2,0	0,844	$1,766 \cdot 10^8$
5,0	0,146	$3,064 \cdot 10^7$
10,0	0,035	$7,372 \cdot 10^6$
20,0	0,004	$9,147 \cdot 10^5$
24,0	0,002	$3,361 \cdot 10^5$

Preglednica 1 • Vrednosti koeficienta togosti torzijske vzmeti k_φ za različno velike razpoke betonskega nosilca ($h^a = 30$ cm, $E^a = 3100$ kN/cm², $I^a = 67500$ cm⁴)

Zaradi večje nazornosti vpliva velikosti razpoke na lastnosti torzijske vzmeti prikazujemo v preglednici 1 vrednosti koeficienta togosti torzijske vzmeti k_φ za razpokan betonski nosilec z dimenzijami 30/30 (cm) in elastičnim modulom $E^a = 3100$ kN/cm² v odvisnosti od velikosti razpoke.

Deformiranje bočno ojačanega razpokanega elastičnega nosilca opišemo v ravnini (X, Z) prostorskega kartezijskega desnosučnega koordinatnega sistema (X, Y, Z) z baznimi vektorji \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_z in $\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_z \times \mathbf{E}_x$. Nedeformirano in deformirano lego, značilna prečna prereza ter obtežbo obravnavanega nosilca prikazujemo na sliki 1.

Bočno ojačani razpokani nosilec matematično opišemo z dvema linearnima Reissnerjevima modeloma ravninskih nosilcev. S prvim opišemo razpokani nosilec, z drugim pa bočno ojačitev. Nosilec in bočna ojačitev sta med seboj povezana z adhezivsko plastjo, katere debelino zanemarimo, ali pa z veznimi sredstvi. V večini primerov ta povezava ni popolna, zato se lahko nosilec in bočna ojačitev na stiku zamakneta v vzdolžni in prečni smeri. Pri izpeljavi osnovnih enačb matematičnega modela bočno ojačanega razpokanega elastičnega nosilca predpostavimo, da sta materialna koordinatna sistema osnovnega nosilca in bočne ojačitve identična in da v nedeformirani legi sovpadata s prostorskim koordinatnim sistemom. Materialna koordinatna sistema označimo z $x^a \equiv x^b \equiv x$, $y^a \equiv y^b \equiv y$ in $z^a \equiv z^b \equiv z$ kjer smo z zgornjim indeksom $(\bullet)^a$ označili materialne koordinate razpokanega nosilca in z $(\bullet)^b$ koordinate ojačitve. Podobnega dogovora se držimo tudi v nadaljevanju, saj vse količine, ki pripadajo razpokanemu osnovnemu nosilcu, označimo z zgornjim indeksom $(\bullet)^a$, z $(\bullet)^b$ pa količine, ki pripadajo bočni ojačitvi. Matematična modela razpokanega nosilca in bočne ojačitve (referenčni osi) predstavljamo na sliki 2, kjer smo odebelili del na stiku.



Slika 2 • Matematična modela razpokanega nosilca in bočne ojačitve

V nadaljevanju detajlneje predstavimo osnovne enačbe matematičnega modela za ojačani del obravnavanega razpokanega nosilca. Kot smo že povedali, enačbe bočno ojačanega nosilca na stiku predstavljajo ločeno enačbe razpokanega nosilca in enačbe bočne ojačitve. Te enačbe povzamemo po literaturi (Srprčić, 2003). Sestavljajo jih kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe ($i = a, b$):

$$\begin{aligned}
 u^i - e^i &= 0, \\
 w^i + \varphi^i &= 0, \\
 \varphi^i - \kappa^i &= 0,
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 N^i + P_x^i &= 0 \\
 Q^i + P_z^i &= 0, \\
 M^i - Q^i + M_y^i &= 0, \\
 N^i &= C_{11}^i \varepsilon^i + C_{12}^i \kappa^i, \\
 M^i &= C_{21}^i \varepsilon^i + C_{22}^i \kappa^i.
 \end{aligned} \quad (4) \quad (5)$$

Oznaka $(\bullet)^i$ v enačbah od (3) do (5) pomeni odvod količine po materialni koordinati x . Z u^i smo označili vzdolžni pomik referenčne osi razpokanega nosilca in bočne ojačitve, z w^i

prečne pomike ter s φ^i zasuke. Osne deformacije referenčne osi smo označili z ε^i , upogibne deformacije pa s κ^i . Osní sili v razpokanem nosilcu in bočni ojačitvi smo v enačbah od (3) do (5) označili z N^i , prečni sili s Q^i ter upogibna momenta z M^i . S C_{11}^i , $C_{12}^i = C_{21}^i$ smo označili komponente konstitucijskih matrik prečnega prereza. V ravnotežnih enačbah (4) pomenijo oznake P_x^i , P_z^i , M_y^i in komponente linijske obtežbe in linijske momentne obtežbe v referenčni osi razpokanega nosilca in bočne ojačitve. Sestavljajo jih zunanja površinska in prostorninska obtežba ter kontaktna obtežba na stiku med nosilcem in bočno ojačitvijo. Izračunamo jih s pomočjo enačb (Srpčič, 2003):

$$P^i = \int_{C_1^i} p^i dx + \int_{A_1^i} v^i dA_x, \quad (6)$$

$$M^i = \int_{C_1^i} p^i \times p^i dx + \int_{A_1^i} p^i \times v^i dA_x,$$

s katerimi statično enakovredno površinsko in prostorninsko obtežbo prenesemo v referenčno os nosilcev. Pomen količin v enačbi (6) predstavlja slika 1.

V nadaljevanju natančneje predstavimo tisti del obtežbe, ki je posledica sovprežnega delovanja obravnavanega nosilca. Ker smo predpostavili, da se nosilec deformira le v ravnini (X, Z) , je komponenta kontaktne površinske obtežbe v smeri E_y enaka nič. Kontaktna površinska obtežba med slojema bočno ojačanega nosilca se torej pojavi le v smereh E_x in E_z . Velikosti teh obtežb so odvisne od velikosti zamikov na stiku oziroma kvalitete povezave med slojema. Zamike na stiku med nosilcem in bočno ojačitvijo predstavljajo različne deformirani leg. Če označimo s P^a in P^b istoležni točki na stiku ojačanega nosilca v nedeformirani legi, se legi teh točk v deformirani legi zaradi zunanjih vplivov spremenita. Deformirani legi istoležnih točk v nedeformirani legi določata krajevna vektorja:

$$R^a = X^a E_x + Y^a E_y + Z^a E_z, \quad (7)$$

$$R^b = X^b E_x + Y^b E_y + Z^b E_z,$$

kjer so prostorske koordinate določene z enačbami:

$$X^a = x + u^a + z\varphi^a \quad \text{in} \quad X^b = x + u^b + z\varphi^b,$$

$$Y^a = \pm b^a/2 \quad \text{in} \quad Y^b = \pm b^b/2, \quad (8)$$

$$Z^a = z + w^a \quad \text{in} \quad Z^b = z + w^b.$$

Vektor zamika med osnovnim nosilcem in bočno ojačitvijo označimo z $[[R]] = \Delta U E_x + \Delta W E_z$ in ga izračunamo z vektorsko enačbo:

$$[[R]] = R^b - R^a, \quad (9)$$

kjer sta komponenti določeni z izrazoma:

$$\Delta U = u^b - u^a + z(\varphi^b - \varphi^a) = \Delta u - z\Delta\varphi, \quad (10)$$

$$\Delta W = w^b - w^a = \Delta w.$$

Velikost kontaktne površinske obtežbe je odvisna od zamikov na stiku med razpokanim nosilcem in bočno ojačitvijo. To sovisnost, ki je odvisna od kakovosti izvedbe stika, določimo z eksperimenti. V tem članku bomo predpostavili, da je zveza med zamiki in površinsko obtežbo linearna ter da ni interakcije med smerema E_x in E_z . Skladno s to predpostavko lahko konstitucijski zakon stika zapišemo v naslednji obliki:

$$\{p_s\} = [K][[R]] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta W \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Ko enačbo (11) upoštevamo v enačbi (6), dobijo komponente linijske obtežbe in linijske momentne obtežbe obliko:

$$P_x^a = p_x^a + 2k_x(\Delta u A_x + \Delta\varphi S_x),$$

$$P_z^a = p_z^a + 2k_z \Delta w A_x,$$

$$M_y^a = m_y^a + 2k_x(\Delta u S_x + \Delta\varphi J_x),$$

$$P_x^b = p_x^b - 2k_x(\Delta u A_x + \Delta\varphi S_x),$$

$$P_z^b = p_z^b - 2k_z \Delta w A_x,$$

$$M_y^b = m_y^b - 2k_x(\Delta u S_x + \Delta\varphi J_x). \quad (12)$$

V enačbah (12) smo s p_x^a , p_x^b , p_z^a , p_z^b , m_y^a in m_y^b označili tisti del linijske obtežbe in linijske momentne obtežbe, ki pripada zunanji obtežbi, z

$$A_x = \int_{-h^{b-}}^{h^{b+}} dz, \quad S_x = \int_{-h^{b-}}^{h^{b+}} z dz, \quad J_x = \int_{-h^{b-}}^{h^{b+}} z^2 dz \quad (13)$$

pa geometrijske karakteristike stika, ki so posledica sovprežnega delovanja bočno ojačanega nosilca.

Osnovne enačbe bočno ojačanega nosilca na mestu ojačitve (3)-(5) sestavlja 16 povezanih algebrajskih in navadnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. V splošnem sestavljajo osnovne enačbe bočno ojačanega nosilca poleg enačb (3)-(5), ki jih je pri nosilcu z več bočno ojačanimi razpokami ustrezno več, tudi enačbe za tiste dele razpokanega nosilca, ki niso bočno ojačani. Te enačbe so dobro znane in jih v tem članku ne predstavljamo (Srpčič, 2003). S sestavljanjem oziroma kombiniranjem vseh teh enačb lahko poleg bočno ojačanih nosilcev z več razpokami matematično opišemo tudi bočno ojačane razpokane okvirne konstrukcije. Osnovne enačbe bočno ojačanega razpokanega nosilca ali pa okvira rešimo z upoštevanjem ustreznih statičnih in kinematičnih robnih pogojev. V naslednjem poglavju prikažemo osnovno idejo reševanja osnovnih enačb na primeru značilnega razpokanega previsnega nosilca.

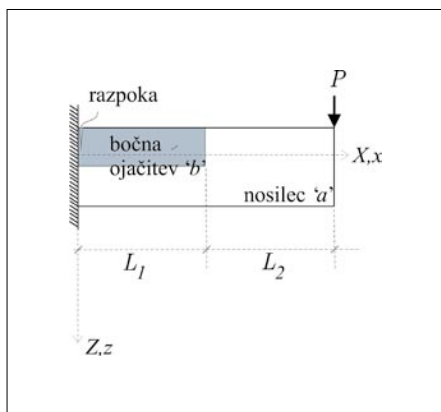
nosilca na stiku (3)-(5) v splošnem sistem 16 algebrajskih in nehomogenih linearnih navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti za prav toliko neznanih funkcij. Ko konstitucijske enačbe (5) vstavimo v kinematične in ravnotežne enačbe (3) in (4), dobimo sistem dvanajstih navadnih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti za določitev prav toliko neznanih funkcij: u^i , w^i , φ^i , N^i , Q^i , M^i . V zgoščeni obliki zapišemo ta sistem diferencialnih enačb v obliki:

3 • REŠEVANJE OSNOVNIH ENAČB

Osnovno idejo reševanja osnovnih enačb bočno ojačanih razpokanih nosilcev bomo prikazali na ojačanem razpokanem previsnem nosilcu (slika 3). Tu bomo detajlneje prikazali le reševanje enačb matematičnega modela na stiku bočno ojačanega razpokanega previsnega nosilca, povezovanje rešitev v os-

novne enačbe razpokanega previsnega nosilca ter upoštevanje statičnih in kinematičnih robnih pogojev, saj je reševanje osnovnih enačb homogenih elastičnih nosilcev dobro znano.

Kot smo že povedali, predstavlja sistem osnovnih enačb bočno ojačanega razpokanega



Slika 3 • Osnovni podatki značilnega bočno ojačanega razpokanega previsnega nosilca

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad (14)$$

kjer \mathbf{x} predstavlja vektor neznanih funkcij in \mathbf{f} vektor zunanje obtežbe. Rešitev sistema nehomogenih linearnih navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti je sestavljena iz homogenega in partikularnega dela (Križanič, 1957):

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}_0 + \int_{x_0}^x e^{-\mathbf{A}\xi} \mathbf{f} d\xi \right). \quad (15)$$

Vektor robnih vrednosti \mathbf{x}_0 v enačbi (15) določimo s pomočjo robnih pogojev obravnavanega nosilca. Ko je nosilec obtežen le s točkovnimi silami, kot je to v našem primeru, predstavlja rešitev osnovnih enačb (14) le homogeni del, saj je $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. V tem primeru lahko rešitev zapišemo v obliki (Križanič, 1957):

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}\mathbf{x}} \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{k=1}^N x^k \mathbf{A}^k \right) \mathbf{x}_0, \quad (16)$$

Rešitve osnovnih enačb bočno ojačanega razpokanega nosilca na stiku, enačbe (15) ali (16) zapišemo v obliki vrste. Z numeričnim eksperimentiranjem v računalniškem okolju Mathematica (Mathematica, 2007) smo ugotovili, da v večini primerov dobimo zelo natančne rezultate, če med reševanjem upoštevamo 100 členov vrste. Kot smo že povedali, določimo vektor \mathbf{x}_0 s pomočjo robnih pogojev. To in povezovanje rešitev delnih enačb matematičnega modela v osnovne enačbe obravnavanega previsnega nosilca prikažemo v nadaljevanju. Kot vidimo, je bočno ojačani razpokani previsni nosilec sestavljen iz dveh delov oziroma elementov. Prvi del je bočno ojačani razpokani

nosilec, drugi del pa neojačani nosilec. Robne pogoje ob vpetišču predstavljajo kinematični pogoji. Posebnost je le razpoka ob vpetišču nosilca, katere vpliv modeliramo s torzijsko vzmetjo. V tem primeru je vpetostni moment odvisen od zasuka. Robne pogoje na prostem robu sestavljajo statični robni pogoji. Vse statične količine so enake nič, le prečna sila osnovnega nosilca je enaka zunanji točkovni sili. Na stiku neojačanega in ojačanega nosilca veljajo kinematični in statični pogoji. Ti zahtevajo, da so pomiki in zasuki na stiku enaki ter da je na stiku zadoščeno ravnotežnim enačbam. Vse te pogoje sestavljajo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} u^{1a}(0) &= 0, & u^{1b}(0) &= 0, \\ w^{1a}(0) &= 0, & w^{1b}(0) &= 0, \\ M^{1a}(0) &= k_\varphi \varphi^{1a}(0), & \varphi^{1b}(0) &= 0, \\ u^{1a}(L_1) &= u^{2a}(0), & N^{1a}(L_1) &= N^{2a}(0), \\ w^{1a}(L_1) &= w^{2a}(0), & Q^{1a}(L_1) &= Q^{2a}(0), \\ \varphi^{1a}(L_1) &= \varphi^{2a}(0), & M^{1a}(L_1) &= M^{2a}(0), \\ N^{1b}(L_1) &= 0, & N^{2a}(L_2) &= 0, \\ Q^{1b}(L_1) &= 0, & Q^{2a}(L_2) &= P, \\ M^{1b}(L_1) &= 0, & M^{2a}(L_2) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

kjer smo rešitve na delu bočno ojačanega razpokanega nosilca na stiku označili z zgor-

njima indeksoma $(\bullet)^{1a}$ in $(\bullet)^{1b}$ ter na neojačanem delu obravnavanega nosilca z indeksom $(\bullet)^{2a}$.

4 • PARAMETRIČNE ŠTUDIJE

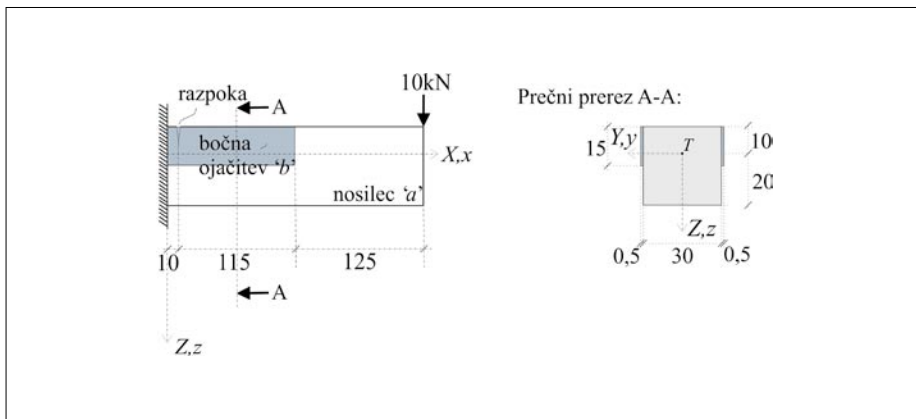
V tem poglavju analiziramo vpliv značilnih materialnih in geometrijskih parametrov bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev na velikosti statičnih in kinematičnih količin. Ta vpliv ocenimo s parametričnimi študijami obnašanja značilnih bočno ojačanih razpokanih nosilcev. Detajlno analiziramo previsni nosilec, prostoležeči nosilec in kontinuirni nosilec.

4.1 Bočno ojačani razpokani previsni nosilec

V prvem računskem primeru analiziramo bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Razpoka je pri nosilcu na razdalji 10 cm od vpetja. Nosilec je na mestu razpoke ojačan z bočnimi ojačitvama in na prostem robu obtežen s točkovno prečno silo $P = 10$ kN (slika 4). Lastno težo nosilca v analizi zanemarimo. Za elastični

modul osnovnega nosilca privzamemo vrednost $E^a = 3,1 \cdot 10^3$ kN/cm², za elastični modul bočne ojačitve pa $E^b = 2,1 \cdot 10^4$ kN/cm². Geometrijske podatke ojačanega previsnega nosilca prikazujemo na sliki 4.

S tem računskim primerom bomo prikazali vpliv robnih pogojev bočne ojačitve, vpliv togosti stika med razpokanim nosilcem in bočno ojačitvijo, vpliv velikosti razpoke ter vpliv lege bočne ojačitve po višini nosilca na velikosti statičnih in kinematičnih količin bočno ojačanega previsnega nosilca.

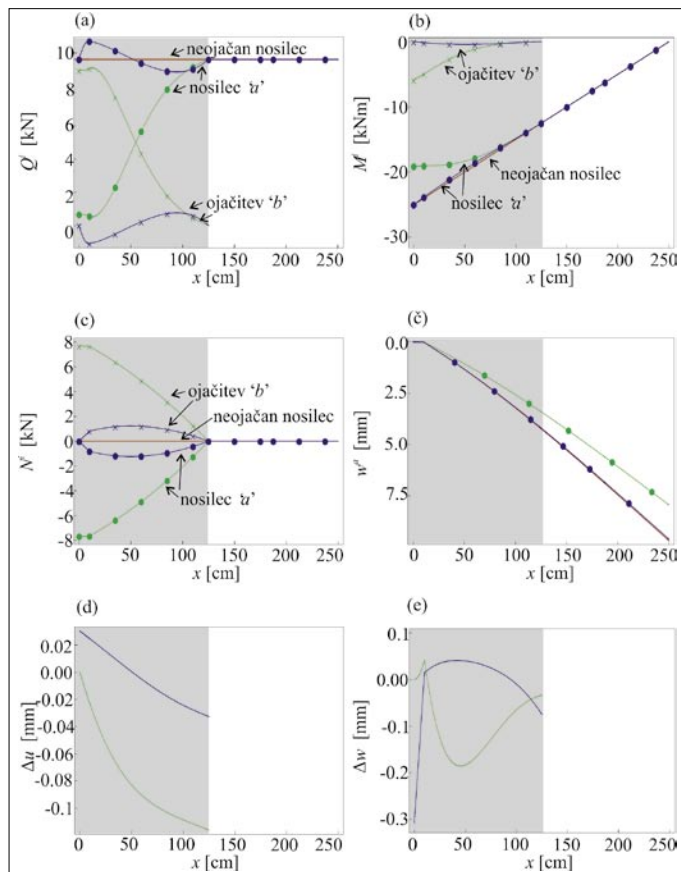


Slika 4 • Geometrijski podatki in podatki o obtežbi bočno ojačanega razpokanega previsnega nosilca (dimenzije nosilca v cm)

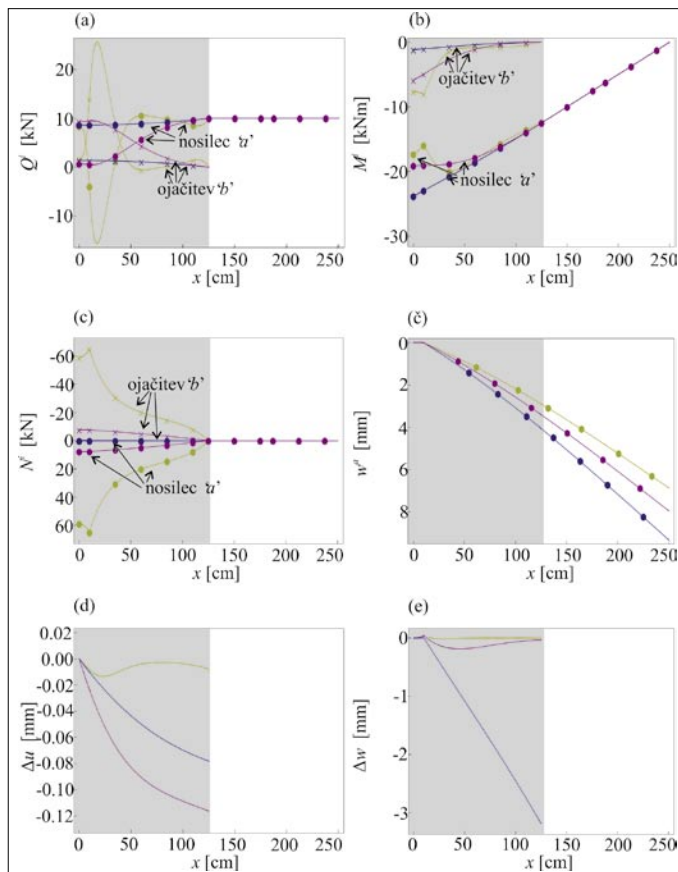
Najprej prikazujemo vpliv robnih pogojev bočne ojačitve. Ta vpliv prikažemo s primerjavo velikosti statičnih in kinematičnih količin analiziranih nosilcev. Na sliki 5 prikazujemo primerjavo

med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami neojačanega razpokanega nosilca (rdeče krivulje), ojačanega razpokanega nosilca z vpeto ojačitvijo (zeleno krivulje) in

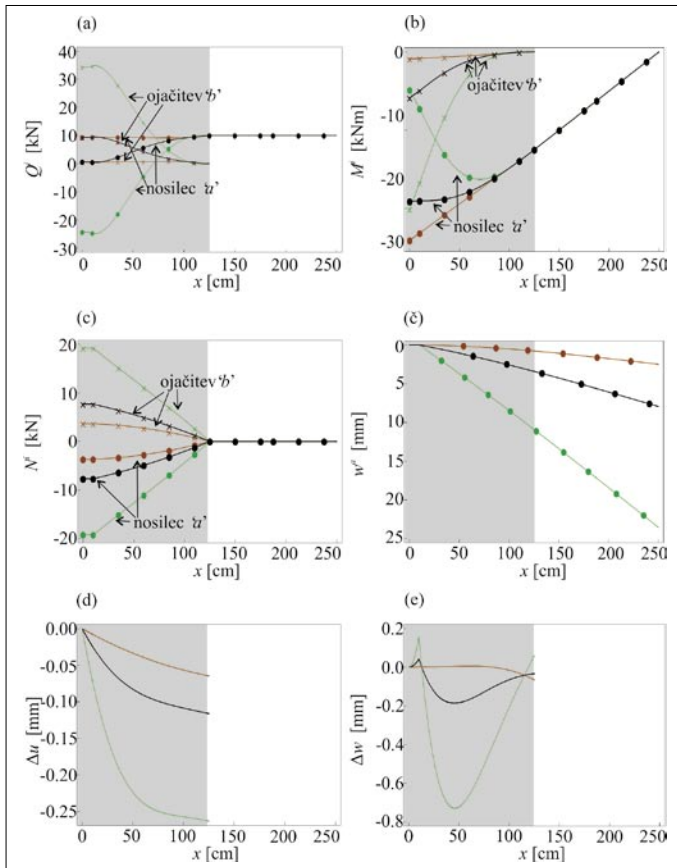
ojačanega razpokanega nosilca z nevpeto (prosto) ojačitvijo (modre krivulje). Prikazane rezultate smo izračunali za nosilce s podajnostjo stikov $k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$ in razpoko z lastnostjo $k_\phi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$. Skladno s pričakovanji je vpliv vpete bočne ojačitve na kinematične in statične količine bistveno izrazitejši, kot je vpliv nevpete (proste) bočne ojačitve. Kot vidimo na sliki 5a, prevzame prečne sile ob podpori v veliki meri kar vpeto bočno ojačitev. Zanimiva pa je prerazporeditev prečne sile pri bočno ojačanem nosilcu z nevpeto ojačitvijo. V tem primeru se velikosti prečne sile osnovnega nosilca ob podpori celo povečajo. Velikost tega povečanja prečne sile je odvisna od razmerja togosti osnovnega nosilca ter bočne ojačitve in togosti stika. Vpliv nevpete bočne ojačitve je na velikosti upogibnih momentov osnovnega nosilca praktično zanemarljiv. Pričakovano pa bočno ojačitev zmanjšuje velikosti upo-



Slika 5 • Bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami neojačanega nosilca (rdeče krivulje), ojačanega nosilca z vpeto ojačitvijo (zeleno krivulje) in ojačanega nosilca z nevpeto (prosto) ojačitvijo (modre krivulje): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki v referenčni osi in (e) prečni zamiki ($k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$, $k_\phi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$)



Slika 6 • Bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami ojačanega nosilca z materialnimi parametri stika $k_x = k_z = 0,0025 \text{ kN/cm}^3$ (modre krivulje - zelo podajen stik), $k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$ (vijolične krivulje - podajen stik) ter $k_x = k_z = 25 \text{ kN/cm}^3$ (rumene krivulje - tog stik): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki v referenčni osi in (e) prečni zamiki (bočno ojačitev je vpeto v podporo, $k_\phi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$)

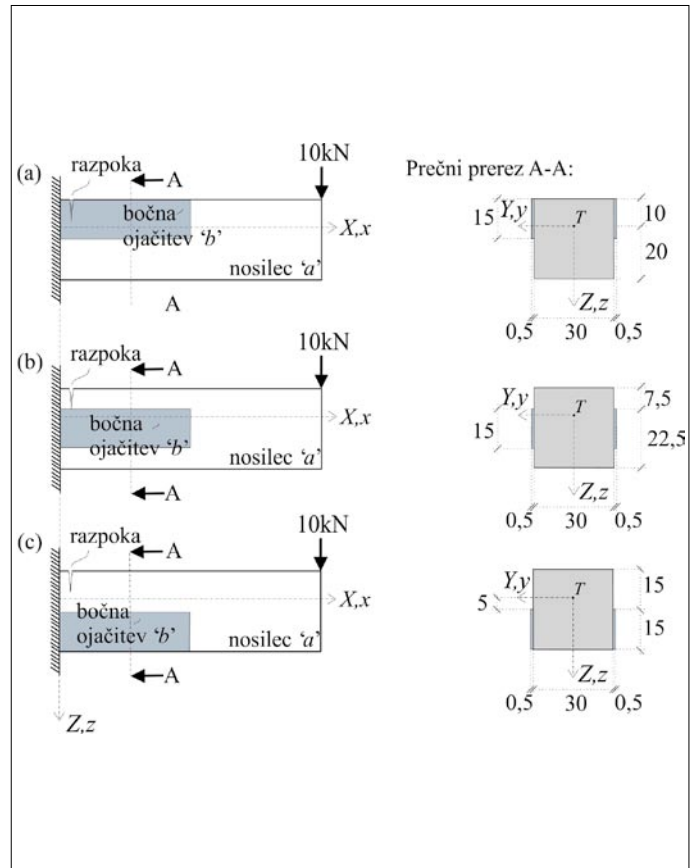


Slika 7 • Bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami ojačanih nosilcev s torzijskimi vzmetmi $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^4$ kNcm (zelene krivulje – zelo razpokan nosilec), $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^5$ kNcm (črne krivulje – razpokan nosilec) $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^7$ kNcm in (oranžne krivulje – zmerno razpokan nosilec): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki v referenčni osi in (e) prečni zamiki (bočna ojačitev je vpeta v podporo, $k_x = k_z = 0,25$ kN/cm³)

gibnih momentov osnovnega nosilca (slika 5b). Zaradi sovprežnega delovanja osnovnega nosilca in bočne ojačitve opazimo povečanje osne sile. Ta je v osnovnem nosilcu tlačna in je večja pri bočno ojačanem nosilcu z vpeto bočno ojačitvijo (slika 5c). Na sliki 5č prikazujemo vpliv bočne ojačitve na velikosti prečnih pomikov osnovnega razpokanega nosilca. Na sliki vidimo, da je vpliv nevpete bočne ojačitve zanemarljiv, medtem ko je vpliv nosilca z vpeto bočno ojačitvijo opazen. Tako je pomik razpokanega nosilca brez ojačitve na prostem robu enak $w^a(x=L) = 0,97$ cm, kar je za okoli 22 % več od pomika razpokanega nosilca z vpeto bočno ojačitvijo. Razporeditev zamikov v referenčni osi obravnavanega nosilca prikazujemo na slikah 5d in 5e. Vzdolžni zamiki so relativno majhni in so pri bočno ojačanem nosilcu z vpeto ojačitvijo bistveno večji (slika 5d). Zanimiva je razporeditev prečnih zamikov.

Ti so pri nosilcu z nevpeto bočno ojačitvijo na delu nosilca od vpetišča do razpoke negativni (prečni pomik bočne ojačitve je manjši kot osnovnega nosilca), v nadaljevanju pa postanejo celo pozitivni. Popolnoma obratna pa je razporeditev prečnih zamikov pri ojačanem nosilcu z vpeto bočno ojačitvijo (slika 5e).

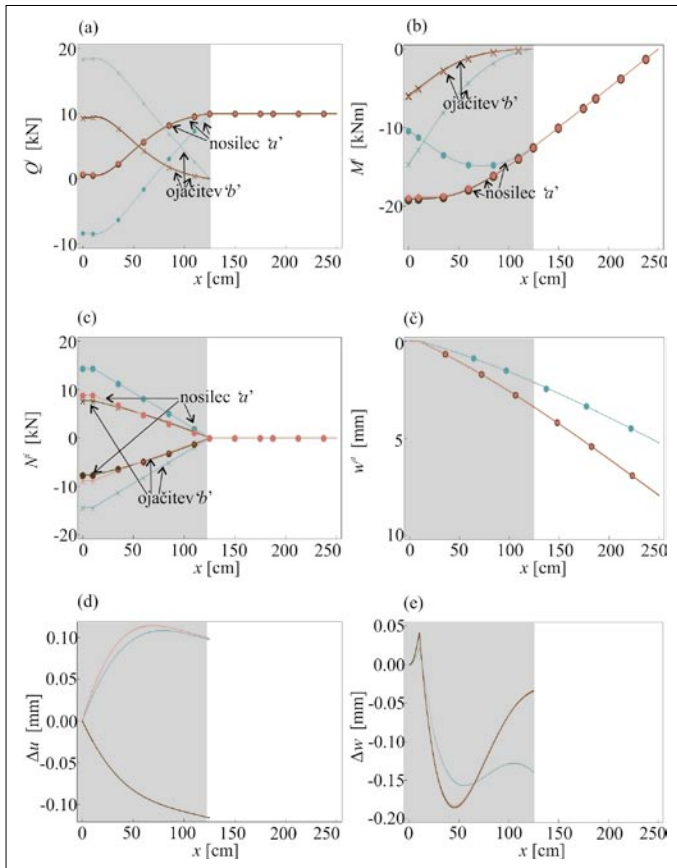
Na sliki 6 prikazujemo vpliv podajnosti stika med bočno ojačitvijo in osnovnim nosilcem na velikosti značilnih statičnih in kinematičnih količin. Primerjavo prikazemo za bočno ojačane nosilce z vpeto bočno ojačitvijo in razpoko z lastnostjo $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^5$ kNcm. Za podajnosti stikov obravnavanih nosilcev pa izberemo $k_x = k_z = 0,0025$ kN/cm³ (modre krivulje – zelo podajen stik), $k_x = k_z = 0,25$ kN/cm³ (vijolične krivulje – podajen stik) in $k_x = k_z = 25$ kN/cm³ (rumene krivulje – praktično togi stik). Razmerja med značilnimi kinematičnimi in statičnimi količinami so



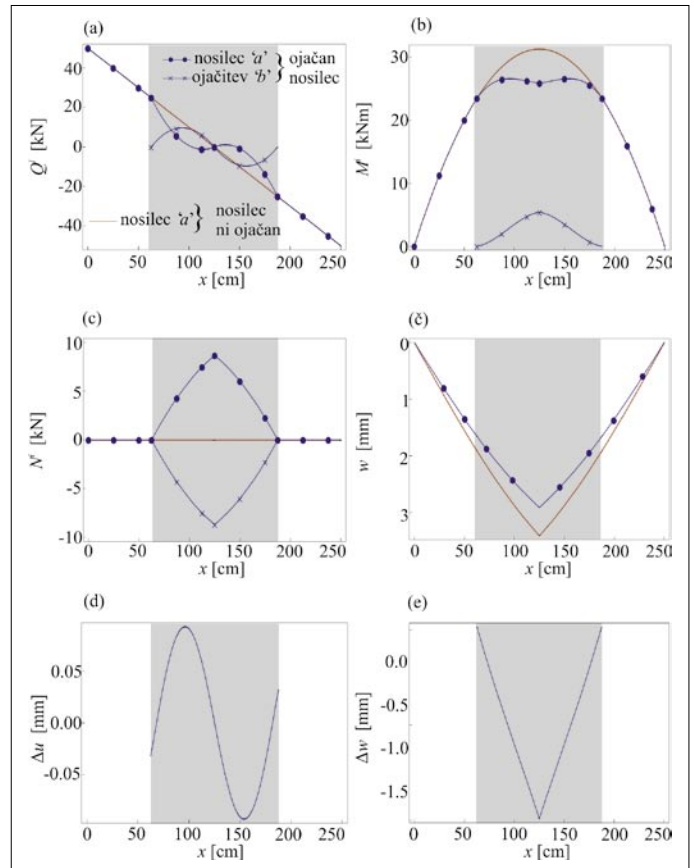
Slika 8 • Bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Različne lege bočne ojačitve obravnavanega nosilca: (a) ojačitev zgoraj, (b) ojačitev v sredini in (c) ojačitev spodaj (dimenzije nosilca v cm)

pričakovana. Tako je vpliv ojačitve na velikosti statičnih in kinematičnih količin osnovnega nosilca največji pri togem stiku. Da predstavljajo parametri stika $k_x = k_z = 25$ kN/cm³ zelo tog stik, dokazujeta sliki 6d in 6e, kjer vidimo, da so zamiki v vzdolžni smeri referenčne osi in prečni zamiki praktično enaki nič.

V nadaljevanju prikazujemo na sliki 7 vpliv velikosti razpoke na velikosti značilnih kinematičnih in statičnih količin. Primerjavo prikazujemo pri bočno ojačanih nosilcih z vpeto ojačitvijo in podajnim stikom med bočno ojačitvijo in osnovnim nosilcem ($k_x = k_z = 0,25$ kN/cm³). Za koeficiente togosti vzmeti modelov razpok obravnavanih nosilcev pa izberemo $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^7$ kNcm (oranžne krivulje – zmerno razpokan nosilec), $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^5$ kNcm (črne krivulje – razpokan nosilec) in $k_{\varphi} = 8,0 \cdot 10^4$ kNcm (zelene krivulje – zelo razpokan nosilec). Primerjave rezultatov



Slika 9 • Bočno ojačani razpokani previsni nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami ojačanega nosilca z ojačitvijo zgoraj (modrozelenke krivulje), z ojačitvijo v sredini nosilca (rožnate krivulje) in z ojačitvijo spodaj (rjave krivulje): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki v referenčni osi in (e) prečni zamiki ($k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$, $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$, bočne ojačitve so vpete v podporo)

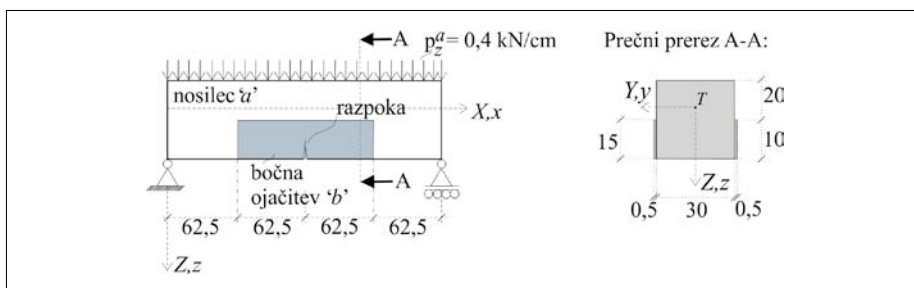


Slika 11 • Bočno ojačani razpokani prostoležeči nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami ojačanega nosilca (modre krivulje) in neojačanega nosilca (rdeče krivulje): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki v referenčni osi in (e) prečni zamiki ($k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$, $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$)

značilnih količin na sliki 7 dokazujejo, da bolj ko je nosilec razpokan (poškodovan), večja je prerazporeditev notranjih statičnih količin. Tako upogibne momente ob vpetišču praktično prevzame kar v celoti bočna ojačitev. Tudi v teh primerih je vpliv bočne ojačitve na velikosti prečnih pomikov osnovnega nosilca minimalen. Zanimivo pa je, da so prečni zamiki pri

zmerno razpokanem nosilcu zanemarljivi, pri zelo razpokanem pa zelo izraziti. Na koncu tega računskega primera analiziramo vpliv lege bočne ojačitve v prečni smeri nosilca na vrednosti značilnih kinematičnih in statičnih količin. Rezultate primerjamo pri ojačanih nosilcih z razpoko $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$, podajnostjo stika med bočno ojačitvijo in nosil-

cem $k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$ in vpeto bočno ojačitvijo. Spreminjanje lege bočne ojačitve pri razpokanem nosilcu prikazujemo na sliki 8. Optimalna ojačitev je seveda pri razpoki (ojačitev zgoraj), analiziramo pa še vpliv lege bočne ojačitve ob težiščni osi (ojačitev v sredini) in najmanj ustrezno lego bočne ojačitve, ki je v tlačnem delu nosilca (ojačitev spodaj). Rezultate parametrične študije prikazujemo na sliki 9, kjer smo z modrozelenimi krivuljami označili značilne kinematične in statične količine razpokanega nosilca z bočno ojačitvijo v zgornjem (nateznem) delu nosilca, z rožnatimi krivuljami rezultate analize pri nosilcu z bočno ojačitvijo v sredini in z rjavimi krivuljami rezultate analize pri nosilcu z ojačitvijo v spodnjem (tlačnem) delu nosilca. Rezultati na sliki 9 dokazujejo, da sta bočni ojačitvi razpokanega nosilca v spodnjem tlačnem delu nosilca in ob težiščni osi nosilca enakovredni, medtem ko je bočna



Slika 10 • Geometrijski podatki in podatki o obtežbi bočno ojačanega razpokanega prostoležečega nosilca (dimenzije nosilca v cm)

ojačitev razpokanega nosilca v nateznem delu nosilca oziroma ob razpoki najboljša, saj največ prispeva k prerazporeditvi notranjih sil in zmanjšanju prečnih pomikov osnovnega nosilca.

4.2 Bočno ojačani razpokani prostoležeči nosilec

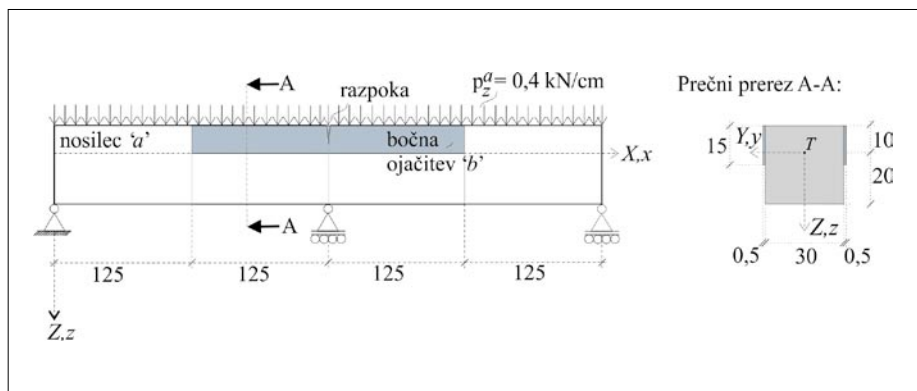
V drugem računskem primeru analiziramo bočno ojačani prostoležeči razpokani nosilec. Razpoka pri nosilcu je v sredini razpona. Nosilec je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo $p_z^a = 0,4 \text{ kN/cm}$. Elastični modul osnovnega nosilca je $E^a = 3,1 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$, ojačitve pa $E^b = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Druge geometrijske podatke o obravnavanem nosilcu prikazujemo na sliki 10.

Tudi v tem računskem primeru analiziramo vpliv podajnosti stika, velikosti razpoke in lege ojačitve na značilne kinematične in statične količine obravnavanega nosilca. Detajlna parametrična analiza je pokazala, da je razmerje značilnih kinematičnih in statičnih količin bočno ojačanega razpokanega prostoležečega nosilca enako kot pri previsnem nosilcu, zato teh rezultatov tu detajlno ne prikazujemo. Kot ilustracijo pa prikazujemo na sliki 11 primerjavo med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami bočno ojačanega prostoležečega razpokanega nosilca (modre krivulje) in neojačanega razpokanega nosilca (rdeče krivulje). Rezultate prikazujemo za bočno ojačani nosilec s podajnostjo stika $k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$ in razpoko $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$.

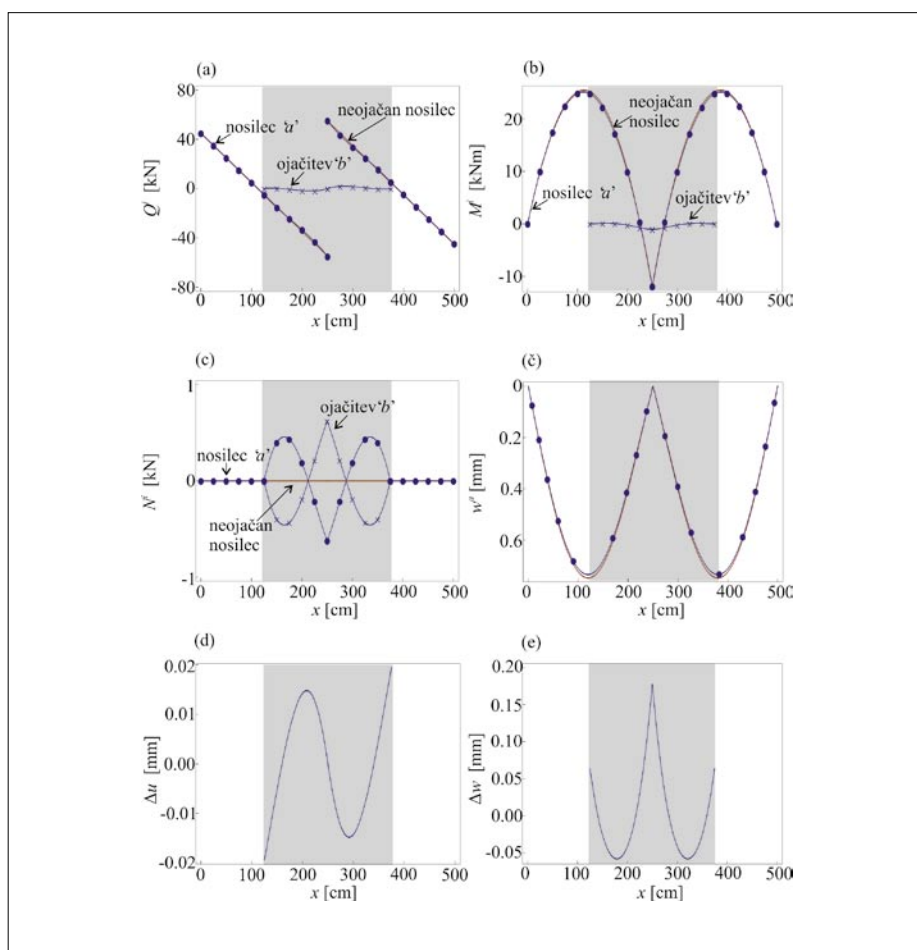
4.3 Bočno ojačani razpokani kontinuirni nosilec

V zadnjem računskem primeru analiziramo vpliv bočne ojačitve na značilne statične in kinematične količine statično nedoločenega kontinuirnega razpokanega nosilca. Razpoka pri obravnavanem kontinuirnem nosilcu je nad vmesno podporo, torej v nateznem delu nosilca. Tudi v tem primeru analiziramo razpokani betonski nosilec z elastičnim modulom $E^a = 3,1 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$ in razpoko $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$, ki je bočno ojačan z jeklenimi ploščami z elastičnim modulom $E^b = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Nosilec je obtežen z enakomerno zvezno linijsko obtežbo $p_z^a = 0,4 \text{ kN/cm}$. Druge geometrijske podatke o obravnavanem nosilcu prikazujemo na sliki 12.

Na sliki 13 prikazujemo primerjavo med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami bočno ojačanega razpokanega nosilca (modre krivulje) in neojačanega razpokanega nosilca (rdeče krivulje).



Slika 12 • Geometrijski podatki in podatki o obtežbi bočno ojačanega razpokanega kontinuirnega nosilca (dimenzije nosilca so v cm)



Slika 13 • Bočno ojačani razpokani kontinuirni nosilec. Primerjava med značilnimi statičnimi in kinematičnimi količinami ojačanega nosilca (modre krivulje) in neojačanega nosilca (rdeče krivulje): (a) prečne sile, (b) upogibni momenti, (c) osne sile, (č) navpični pomiki, (d) vzdolžni zamiki, (e) prečni zamiki ($k_x = k_z = 0,25 \text{ kN/cm}^3$, $k_\varphi = 8,0 \cdot 10^5 \text{ kNcm}$)

Kot lahko vidimo na sliki 13, je vpliv bočne ojačitve na značilne statične in kinematične količine zanemarljiv. Ker podobne rezultate izračunamo tudi v primerih, ko pri nosilcu spreminjamo lastnosti stika in velikost razpoke,

lahko sklepamo, da bočna ojačitev praktično nima vpliva na obnašanje razpokanih statično nedoločenih nosilcev, če je razmerje togosti bočne ojačitve in osnovnega nosilca v okvirih analiziranega nosilca.

5 • SKLEP

V članku smo predstavili analitični model za določitev napetostnega in deformacijskega stanja bočno ojačanih razpokanih elastičnih nosilcev s konstantnimi prečnimi prerezi in z ravnimi referenčnimi osmi. Pomembna novost modela je v tem, da lahko z njim analiziramo tudi vpliv vzdolžnih in prečnih zamikov med bočno ojačitvijo in nosilcem na obnašanje bočno ojačanih razpokanih nosilcev. Matematični model smo izpeljali s pomočjo linearizirane Reissnerjeve teorije ravninskih nosilcev, kjer smo zane-marili vpliv strižnih deformacij. Razpoko oziroma oslabitev v nosilcu smo modelirali s torzijsko oziroma rotacijsko vzmetjo. Na osnovi parametričnih analiz značilnih

bočno ojačanih razpokanih nosilcev smo ugotovili:

- pri previsnem razpokanem elastičnem nosilcu je vpliv vpete bočne ojačitve na kinematične in statične količine bistveno izrazitejši, kot je vpliv nevpete (proste) bočne ojačitve;
- pri bočno ojačanih nosilcih z nevpeto (prosto) ojačitvijo se lahko prečne sile osnovnega nosilca po ojačanju celo povečajo; velikost tega povečanja prečne sile je odvisna od razmerja togosti osnovnega nosilca ter bočne ojačitve in togosti stika;
- zaradi sovprežnega delovanja osnovnega nosilca in bočne ojačitve se v osnovnem nosilcu pojavijo tlačne osne sile;

- pomiki razpokanih nosilcev brez ojačitve so pričakovano večji od pomikov razpokanih bočno ojačanih nosilcev (pri previsnem nosilcu z vpeto ojačitvijo je ta razlika okoli 22 %);
- vzdolžni zamiki med osnovnim nosilcem in bočno ojačitvijo so relativno majhni;
- vpliv ojačitve na velikosti statičnih in kinematičnih količin osnovnega razpokanega nosilca je največji pri togi povezavi med nosilcem in ojačitvijo;
- bolj ko je nosilec razpokan (poškodovan), večja je prerazporeditev notranjih statičnih količin;
- za značilna razmerja togosti med bočno ojačitvijo in razpokanim nosilcem je vpliv bočne ojačitve na statične in kinematične količine statično nedoločenih konstrukcij zanemarljiv. Vpliv je opazen samo pri statično določenih konstrukcijah.

6 • ZAHVALA

Delo J. Kolšek delno finančno podpira Evropska unija, Evropski socialni sklad. Zahvaljujemo se za podporo.

7 • LITERATURA

- Bažant, Z. P., Planas, J., *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*, Boca Raton, CRC Press, 1997.
- Križanič, F., *Izbrana sredstva linearne analize za tehnike in fizike*, 1. del, Ljubljana, Inštitut Jožef Stefan, 1957.
- Leung, H. Y., *Strengthening of RC beams: some experimental findings*, Structural Survey, London, Henry Stewart Publications, 20, 5, 173–181, 2002.
- Liu, I.S.T., Oehlers, D.J., Seracino, R., *Tests on the ductility of reinforced concrete beams retrofitted with FRP and steel near surface mounted plates*, Journal of Composites for Construction, New York, American Society of Civil Engineers, Structural Division, 10, 2, 106–114, 2006.
- Nguyen, N. T., Oehlers, D. J., Bradford, M. A., *An analytical model for reinforced concrete beams with bolted side plates accounting for longitudinal and transverse partial interaction*, International Journal of Solids and Structures, New York, Pergamon Press, 38, 38–39, 6985–6996, 2001.
- Paipetis, S. A., Dimarogonas, A. D., *Analytical Methods in Rotor Dynamics*, London, Elsevier Applied Science, 1986.
- Rabinovitch, O., Frostig, Y., *Delamination Failure of RC Beams Strengthened with FRP Strips – A Closed-Form High-Order and Fracture Mechanics Approach*, Journal of Engineering Mechanics, New York, American Society of Civil Engineers, 127, 8, 852–861, 2001.
- Reissner, E., *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Basel, Birkhäuser, 23, 5, 795–804, 1972.
- Srpčič, S., *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2003.
- Wang, J., *Debonding of FRP-plated reinforced concrete beam, a bond-slip analysis. I. Theoretical formulation*, International Journal of Solids and Structures, New York, Pergamon Press, 43, 21, 6649–6664. Wolfram Research, Inc., Mathematica, 2007.

vabi na

**REDNO IN JUBILEJNO SKUPŠČINO OB 60-LETNICI DELOVANJA ZDGITS
IN IZHAJANJA REVIJE GRADBENI VESTNIK,**

ki bo v četrtek, 2. junija 2011, s pričetkom ob 13. uri,
v prostorih Gostilne Pečarič, Pod jezom 47, Ljubljana.

Skupščina bo obravnavala in sprejemala:

1. Poročilo o delu ZDGITS v letu 2010
2. Poslovno poročilo ZDGITS za leto 2010 z bilanco stanja in izkazom poslovnega izida
3. Letni program in
4. Finančni načrt ZDGITS za leto 2011
5. razrešila organe ZDGITS in izvolila nove ter
6. podelila priznanja zaslužnim in častnim članom ZDGITS.

Predsednik ZDGITS
Miro Vrbek, univ. dipl. inž. grad.